Дисперсионный анализ, часть 2

Математические методы в зоологии с использованием R

Марина Варфоломеева

1. **Пример: Возраст и способы запоминания**
2. **Двухфакторный дисперсионный анализ**
3. **Взаимодействие факторов**
4. **Несбалансированные данные**
5. **Многофакторный дисперсионный анализ в R**
6. **Фиксированные и случайные факторы**

Двухфакторный дисперсионный анализ

Вы сможете

- Проводить двухфакторный дисперсионный анализ и интерпретировать его результаты с учетом взаимодействия факторов
- Отличать фиксированные и случайные факторы и выбирать подходящую модель дисперсионного анализа

Пример: Возраст и способы запоминания

Пример: Возраст и способы запоминания

Какие способы запоминания информации лучше работают для молодых и для пожилых? (Eysenck, 1974)

Факторы:

- `Age` - Возраст:
  - `Younger` - 50 молодых
  - `Older` - 50 пожилых (55-65 лет)
- `Process` - тип активности:
  - `Counting` - посчитать число букв
  - `Rhyming` - придумать рифму к слову
  - `Adjective` - придумать прилагательное
  - `Imagery` - представить образ
  - `Intentional` - запомнить слово

Зависимая переменная - `Words` - сколько вспомнили слов

Пример из http://www.statsci.org/data/general/eysenck.html

Открываем данные

```
memory <- read.table(file = "data/eysenck.csv", header = TRUE, sep = "\t")
# Все ли правильно открылось?
str(memory) # Структура данных
```

```
# 'data.frame': 100 obs. of  3 variables:
#  $ Age    : Factor w/ 2 levels "Older","Younger": 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 ...
#  $ Process: Factor w/ 5 levels "Adjective","Counting",..: 2 2 2 2 2 2 2 2 2
#  $ Words  : num  8 6 4 6 7 6 5 7 9 7 ...
```

```
head(memory, 2) # Первые несколько строк файла
```

```
#       Age  Process Words
# 1 Younger Counting     8
# 2 Younger Counting     6
```

Знакомимся с данными

```
# Есть ли пропущенные значения
# (особенно, в переменных, которые нас интересуют)?
colSums(is.na(memory))
```

```
#     Age Process   Words
#       0       0       0
```

```
# Каков объем выборки?
nrow(memory) # всего
```

```
# [1] 100
```

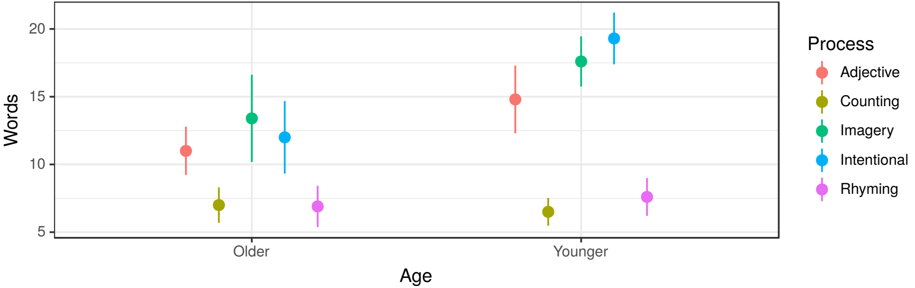
```
table(memory$Age, memory$Process) # в группах
```

```
#
#           Adjective Counting Imagery Intentional Rhyming
#   Older          10       10      10          10      10
#   Younger        10       10      10          10      10
```

Задание 1

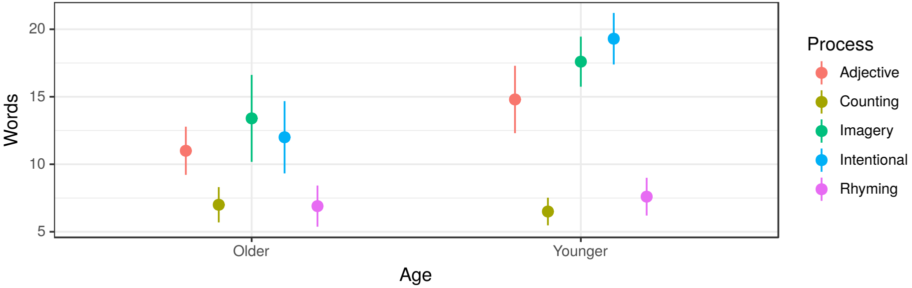
Дополните код, чтобы построить график, на котором приведено среднее число слов (`Words`) для каждого возраста (`Age`) и способа запоминания (`Process`).

```
library()
theme_set()
ggplot(data = , aes()) +
  stat_summary(geom = '', fun.data = ,
               position = position_dodge(width = 0.5))
```



Решение 1

```
library(ggplot2)
theme_set(theme_bw())
ggplot(data = memory, aes(x = Age, y = Words, colour = Process)) +
  stat_summary(geom = 'pointrange', fun.data = mean_cl_normal,
               position = position_dodge(width = 0.5))
```



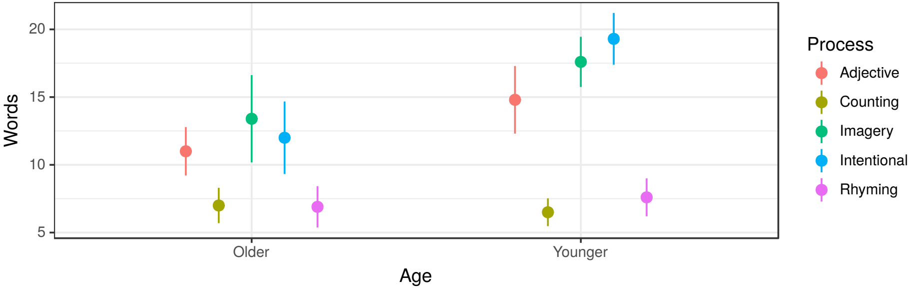
“Некрасивый” порядок уровней на графике

На этом графике некрасивый порядок уровней: средние для разных способов запоминания `memory$Process` расположены, как кажется, хаотично.

Порядок групп на графике определяется порядком уровней фактора

```
# ”старый” порядок уровней
levels(memory$Process)
```

```
# [1] ”Adjective”   ”Counting”    ”Imagery”     ”Intentional”
# [5] ”Rhyming”
```



Изменим порядок уровней

Давайте изменим порядок уровней в факторе memory$Process так, чтобы он соответствовал возрастанию средних значений memory$Words

```
# "старый" порядок уровней
levels(memory$Process)
```

```
# [1] "Adjective"   "Counting"    "Imagery"     "Intentional"
# [5] "Rhyming"
```

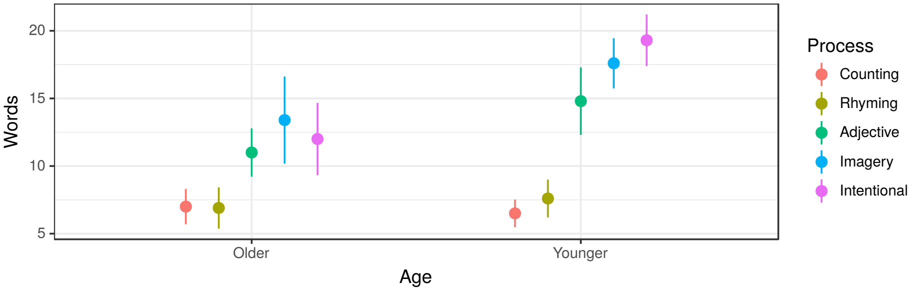
```
# переставляем уровни в порядке следования средних значений memory$Words
memory$Process <- reorder(x = memory$Process, X = memory$Words, FUN = mean)
# "новый" порядок уровней стал таким
levels(memory$Process)
```

```
# [1] "Counting"    "Rhyming"     "Adjective"   "Imagery"
# [5] "Intentional"
```

График с “правильным” порядком уровней

С новым порядком уровней нам легче визуально сравнивать друг с другом число запомненных слов при разных способах запоминания.

```
ggplot(data = memory, aes(x = Age, y = Words, colour = Process)) +
  stat_summary(geom = 'pointrange', fun.data = mean_cl_normal,
               position = position_dodge(width = 0.5))
```



Двухфакторный дисперсионный анализ

Двухфакторный дисперсионный анализ

Значения зависимой переменной складываются из нескольких частей:

- общего среднего μ
- отклонений α_i, связанных с фактором А (в примере две возрастные группы)
- отклонений β_j, связанных с фактором В (в примере это пять способов запоминания)
- отклонений $(\alpha\beta)_{ij}$, связанных с группировкой по обоим факторам (в примере это 10 групп по возрасту и способу запоминания)
- "случайных" отклонений, не связанных с учтенными факторами ϵ_{ijk}.

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk}$$

Общая сумма квадратов SS_t складывается из нескольких составляющих:

- изменчивости связанной со всеми факторами $SS_x = SS_a + SS_b + SS_{ab}$
- случайной изменчивости SS_e

$$SS_t = SS_a + SS_b + SS_{ab} + SS_e$$

Таблица традиционного дисперсионного анализа

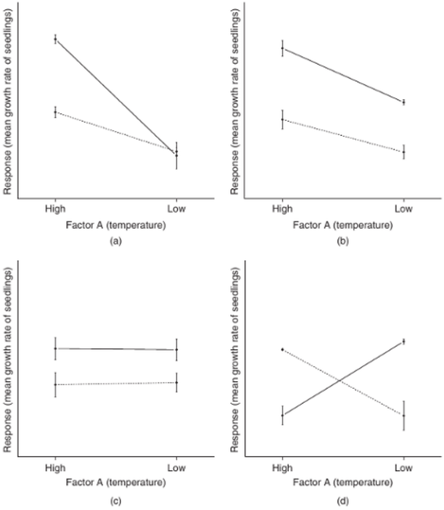
Источник изменчивости	SS	df	MS	F
Название фактора A	$SS_A = an \sum\limits_i (\bar{A}_i - \bar{y})^2$	$df_A = a - 1$	$MS_A = \frac{SS_A}{df_A}$	$F_{df_A df_e} = \frac{MS_A}{MS_e}$
Название фактора B	$SS_B = bn \sum\limits_j (\bar{B}_j - \bar{y})^2$	$df_B = b - 1$	$MS_B = \frac{SS_B}{df_B}$	$F_{df_B df_e} = \frac{MS_B}{MS_e}$
Взаимодействие факторов A и B	$SS_{AB} = SS_t - SS_A - SS_B - SS_{AB}$	$df_{AB} = (a - 1)(b - 1)$	$MS_{AB} = \frac{SS_{AB}}{df_{AB}}$	$F_{df_{AB} df_e} = \frac{MS_{AB}}{MS_e}$
Случайная	$SS_e = \sum\limits_i \sum\limits_j \sum\limits_k (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2$	$df_e = (n - 1)ab$	$MS_e = \frac{SS_e}{df_e}$	
Общая	$SS_t = \sum\limits_i \sum\limits_j \sum\limits_k (y_{ijk} - \bar{y})^2$	$df_t = N - 1$		

- $i, \ldots, a$ — уровни фактора A, $j, \ldots, b$ — уровни фактора B, k, ..., n — индекс наблюдения в группе, N — общее число наблюдений
- $\bar{y}$ — общее среднее значение, $\bar{A}_i$ — средние в группах по фактору A, $\bar{B}_j$ — в группах по фактору B

Взаимодействие факторов

Взаимодействие факторов

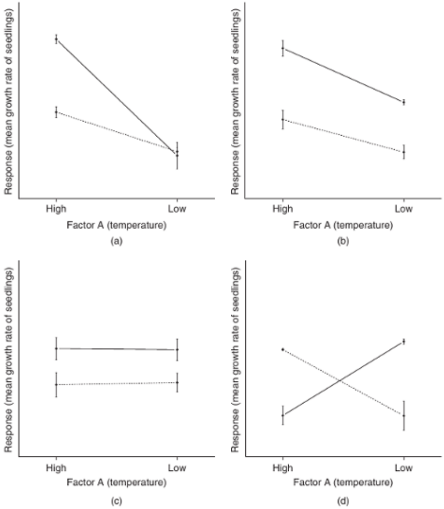
Взаимодействие факторов — когда эффект фактора B разный в зависимости от уровней фактора A и наоборот



На каких рисунках есть взаимодействие факторов?

Взаимодействие факторов

Взаимодействие факторов — когда эффект фактора B разный в зависимости от уровней фактора A и наоборот

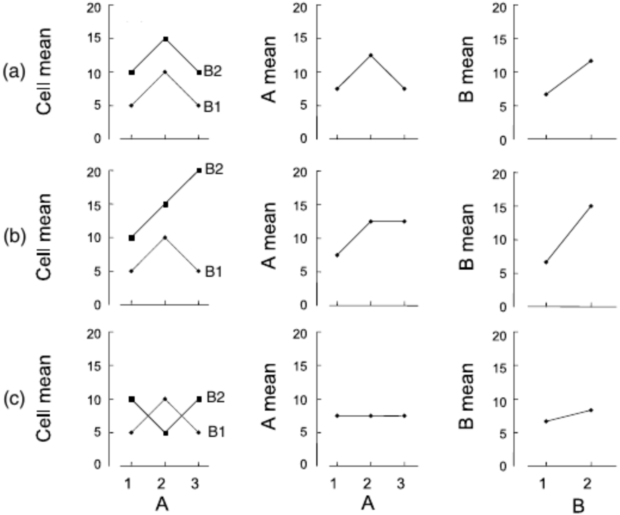


На каких рисунках есть взаимодействие факторов?

- b, c - нет взаимодействия (эффект фактора B одинаковый для групп по фактору A, линии для разных групп по фактору B на графиках расположены параллельно)
- a, d - есть взаимодействие (эффект фактора B разный для групп по фактору A, на графиках линии для разных групп по фактору B расположены под наклоном).

Рисунок из Logan, 2010, fig.12.2

Взаимодействие факторов может маскировать главные эффекты



Если есть значимое взаимодействие

Несбалансированные данные

Сбалансированность данных

A / B	B1	B2	B3
A1	n_{11}	n_{12}	n_{13}
A2	n_{21}	n_{22}	n_{23}

Сбалансированные данные

Одинаковое число наблюдений во всех группах $n_{11} = n_{12} = \cdots = n_{ij}$

Несбалансированные данные

Неодинаковое число наблюдений в группах

Суммы квадратов в многофакторном дисперсионном анализе со взаимодействием

Если данные сбалансированы, то ...

взаимодействие и эффекты факторов независимы, их суммы квадратов и соответствующие тесты можно посчитать в одном анализе и его результат не будет зависеть от того, в каком порядке мы рассматриваем факторы.

Если данные несбалансированы, то ...

взаимодействие и эффекты факторов уже не являются полностью независимыми, суммы квадратов для факторов не равны общей сумме квадратов. Если делать все как обычно, результат анализа будет зависеть от порядка включения факторов в модель. (Для вычислений используется регрессионный подход к дисперсионному анализу)

Суммы квадратов III типа

Если данные не сбалансированы и анализ учитывает взаимодействие факторов, то чтобы найти “правильные” суммы квадратов нужно на самом деле выполнить анализ несколько раз:

- последним учитывается фактор A: Y = B + AB + **A**
- последним учитывается фактор B: Y = A + AB + **B**
- последним учитывается взаимодействие AB: A + B + **AB**

Те суммы квадратов, которые рассчитаны **для последнего фактора в каждой модели** будут использоваться в тестах.

Это называется III тип расчета сумм квадратов (= суммы квадратов III типа). Некоторые авторы рекомендуют использовать именно III тип сумм квадратов для несбалансированных данных (Maxwell & Delaney 1990, Milliken, Johnson 1984, Searle 1993, Yandell 1997, Glantz, Slinker 2000).

Проблемы из-за несбалансированности данных

- Оценки средних в разных группах с разным уровнем точности (Underwood 1997)
- ANOVA менее устойчив к отклонениям от условий применимости (особенно от гомогенности дисперсий) при разных размерах групп (Quinn Keough 2002, section 8.3)
- Проблемы с расчетом мощности. Если $\sigma_\epsilon^2 > 0$ и размеры выборок разные, то $\frac{MS_x}{MS_e}$ не следует F-распределению (Searle et al. 1992).

Проблемы из-за несбалансированности данных

- Оценки средних в разных группах с разным уровнем точности (Underwood 1997)
- ANOVA менее устойчив к отклонениям от условий применимости (особенно от гомогенности дисперсий) при разных размерах групп (Quinn Keough 2002, section 8.3)
- Проблемы с расчетом мощности. Если $\sigma_\epsilon^2 > 0$ и размеры выборок разные, то $\frac{MS_x}{MS_e}$ не следует F-распределению (Searle et al. 1992).

- Старайтесь *планировать* группы равной численности!
- Но если не получилось - не страшно:
    - Для фикс. эффектов неравные размеры - проблема при нарушении условий применимости только, если значения доверительной вероятности p близки к выбранному критическому уровню значимости α

Многофакторный дисперсионный анализ в R

Задаем модель со взаимодействием в R

Взаимодействие обозначается `:` — двоеточием

Если есть факторы A и B, то их взаимодействие A:B

Для такой модели $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk}$

Формула модели со взаимодействием:

Y ~ A + B + A:B

Сокращенная запись такой же модели обозначает, что модель включает все главные эффекты и их взаимодействия:

Y ~ A*B

Внимание: при использовании III типа сумм квадратов, нужно при подборе линейной модели **обязательно указывать тип кодирования для факторов**. В данном случае — `contrasts = list(Age = contr.sum, Process = contr.sum)`

Задание 2

Дополните этот код, чтобы подобрать линейную модель со взаимодействием факторов, в которой используется нужный тип кодирования для факторов: `contrasts = list(Age = contr.sum, Process = contr.sum)`

```
# Линейная модель дисперсионного анализа со взаимодействием факторов
mem_mod <- lm(formula = , data = ,
contrasts = list(Age = contr.sum, Process = contr.sum))
```

Решение

```
# Линейная модель дисперсионного анализа со взаимодействием факторов
mem_mod <- lm(formula = Words ~ Age * Process, data = memory,
contrasts = list(Age = contr.sum, Process = contr.sum))
```

Задание 3

Проверьте условия применимости дисперсионного анализа

- Есть ли гомогенность дисперсий?
- Не видно ли паттернов в остатках?
- Нормальное ли у остатков распределение?

```
# Данные для анализа остатков
mem_diag <- fortify()
# График расстояния Кука
ggplot(data = , aes(x = 1:nrow(    ), y = )) +
  geom_
# График остатков от предсказанных значений
ggplot(data = , aes()) +
  geom_
# Квантильный график остатков
qqPlot
```

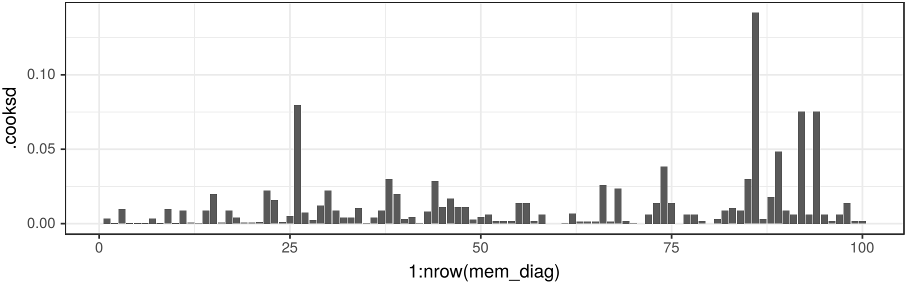
Решение:

```r
# Данные для анализа остатков
mem_diag <- fortify(mem_mod)
head(mem_diag)
```

```
#   Words     Age  Process .hat   .sigma     .cooksd .fitted .resid
# 1     8 Younger Counting  0.1 2.843878 0.003461166     6.5    1.5
# 2     6 Younger Counting  0.1 2.848264 0.000384574     6.5   -0.5
# 3     4 Younger Counting  0.1 2.835084 0.009614349     6.5   -2.5
# 4     6 Younger Counting  0.1 2.848264 0.000384574     6.5   -0.5
# 5     7 Younger Counting  0.1 2.848264 0.000384574     6.5    0.5
# 6     6 Younger Counting  0.1 2.848264 0.000384574     6.5   -0.5
#    .stdresid
# 1  0.5581263
# 2 -0.1860421
# 3 -0.9302104
# 4 -0.1860421
# 5  0.1860421
# 6 -0.1860421
```

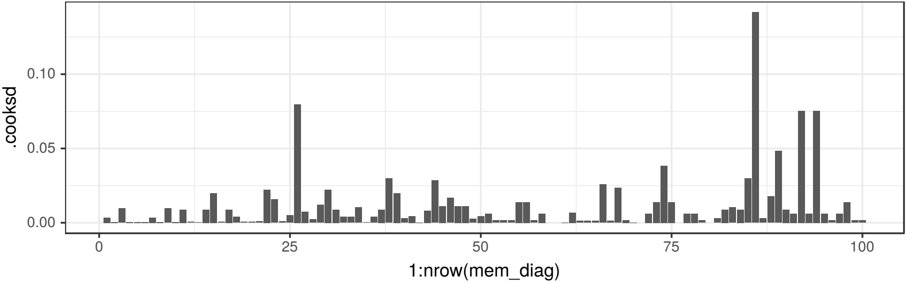
Решение:

```
# График расстояния Кука
ggplot(data = mem_diag, aes(x = 1:nrow(mem_diag), y = .cooksd)) +
  geom_bar(stat = "identity")
```



Решение:

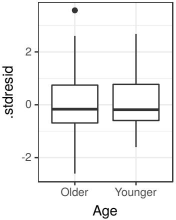
```
# График расстояния Кука
ggplot(data = mem_diag, aes(x = 1:nrow(mem_diag), y = .cooksd)) +
  geom_bar(stat = "identity")
```

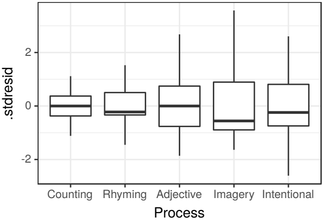


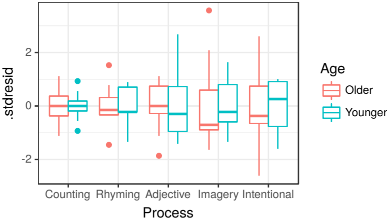
- Влиятельных наблюдений нет

Решение:

```
ggplot(data = mem_diag, aes(x = Age, y = .stdresid)) +
  geom_boxplot()
ggplot(data = mem_diag, aes(x = Process, y = .stdresid)) +
  geom_boxplot()
ggplot(data = mem_diag, aes(x = Process, y = .stdresid, colour = Age)) +
  geom_boxplot()
```



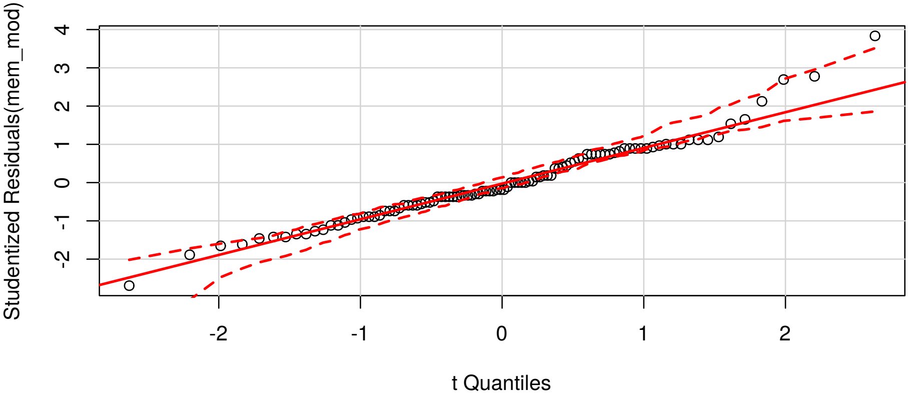




- маленький разброс остатков в группах `Counting` и `Rhyming` у обоих возрастов

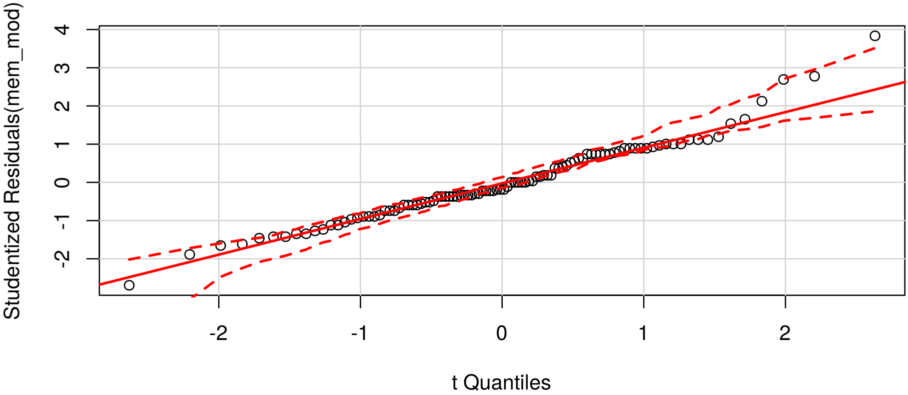
Решение:

```
library(car)
qqPlot(mem_mod)
```



Решение:

```
library(car)
qqPlot(mem_mod)
```



- Нет значительных отклонений от нормального распределения

Результаты дисперсионного анализа

```
# Anova() из пакета car
Anova(mem_mod, type = 3)
```

```
# Anova Table (Type III tests)
#
# Response: Words
#              Sum Sq Df   F value       Pr(>F)
# (Intercept) 13479.2  1 1679.5361    < 2.2e-16 ***
# Age           240.3  1   29.9356 0.0000003981 ***
# Process      1514.9  4   47.1911    < 2.2e-16 ***
# Age:Process   190.3  4    5.9279    0.0002793 ***
# Residuals     722.3 90
# ---
# Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Результаты дисперсионного анализа

```
# Anova() из пакета car
Anova(mem_mod, type = 3)
```

```
# Anova Table (Type III tests)
#
# Response: Words
#              Sum Sq Df   F value       Pr(>F)    
# (Intercept) 13479.2  1 1679.5361    < 2.2e-16 ***
# Age           240.3  1   29.9356 0.0000003981 ***
# Process      1514.9  4   47.1911    < 2.2e-16 ***
# Age:Process   190.3  4    5.9279    0.0002793 ***
# Residuals     722.3 90                         
# ---
# Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

- Взаимодействие достоверно, факторы отдельно можно не тестировать, так как взаимодействие может все равно изменять их эффект до неузнаваемости.
- Нужно делать пост хок тест по взаимодействию факторов.

Вычислительный трюк для пост хок теста по взаимодействию факторов

Пост хок тест для взаимодействия факторов делается легче всего “обходным путем”

1. Создаем переменную-взаимодействие
2. Подбираем линейную модель без свободного члена
3. Делаем пост хок тест для этой модели

Задание 4

Дополните этот код, чтобы посчитать пост хок тест Тьюки по взаимодействию факторов

```
# Создаем переменную-взаимодействие
memory$AgeProc <- interaction(memory$Age, memory$)
# Подбираем линейную модель без свободного члена
cell_means <- (Words ~ AgeProc - 1, data = )
# Делаем пост хок тест для этой модели
library(multcomp)
memory_tukey <- glht(model = ,
                     linfct = mcp())
summary(memory_tukey)
```

Решение

```
# Создаем переменную-взаимодействие
memory$AgeProc <- interaction(memory$Age, memory$Process)
# Подбираем линейную модель без свободного члена
cell_means <- lm(Words ~ AgeProc - 1, data = memory)
# Делаем пост хок тест для этой модели
library(multcomp)
memory_tukey <- glht(model = cell_means,
                     linfct = mcp(AgeProc = "Tukey"))
summary(memory_tukey)
```

Смотрим на результаты пост хок теста

В виде таблицы результаты нечитабельны Лучше построить график.

```
#
#    Simultaneous Tests for General Linear Hypotheses
#
# Multiple Comparisons of Means: Tukey Contrasts
#
#
# Fit: lm(formula = Words ~ AgeProc - 1, data = memory)
#
# Linear Hypotheses:
#                                              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
# Younger.Counting - Older.Counting == 0         -0.500      1.267  -0.395  1.00000
# Older.Rhyming - Older.Counting == 0            -0.100      1.267  -0.079  1.00000
# Younger.Rhyming - Older.Counting == 0           0.600      1.267   0.474  0.99998
# Older.Adjective - Older.Counting == 0           4.000      1.267   3.157  0.06272 .
# Younger.Adjective - Older.Counting == 0         7.800      1.267   6.157  < 0.001 ***
# Older.Imagery - Older.Counting == 0             6.400      1.267   5.052  < 0.001 ***
# Younger.Imagery - Older.Counting == 0          10.600      1.267   8.367  < 0.001 ***
# Older.Intentional - Older.Counting == 0         5.000      1.267   3.947  0.00581 **
# Younger.Intentional - Older.Counting == 0      12.300      1.267   9.709  < 0.001 ***
# Older.Rhyming - Younger.Counting == 0           0.400      1.267   0.316  1.00000
# Younger.Rhyming - Younger.Counting == 0         1.100      1.267   0.868  0.99704
# Older.Adjective - Younger.Counting == 0         4.500      1.267   3.552  0.02032 *
# Younger.Adjective - Younger.Counting == 0       8.300      1.267   6.551  < 0.001 ***
# Older.Imagery - Younger.Counting == 0           6.900      1.267   5.446  < 0.001 ***
# Younger.Imagery - Younger.Counting == 0        11.100      1.267   8.761  < 0.001 ***
# Older.Intentional - Younger.Counting == 0       5.500      1.267   4.341  0.00146 **
# Younger.Intentional - Younger.Counting == 0    12.800      1.267  10.103  < 0.001 ***
# Younger.Rhyming - Older.Rhyming == 0            0.700      1.267   0.553  0.99992
# Older.Adjective - Older.Rhyming == 0            4.100      1.267   3.236  0.05167 .
# Younger.Adjective - Older.Rhyming == 0          7.900      1.267   6.236  < 0.001 ***
# Older.Imagery - Older.Rhyming == 0              6.500      1.267   5.131  < 0.001 ***
# Younger.Imagery - Older.Rhyming == 0           10.700      1.267   8.446  < 0.001 ***
# Older.Intentional - Older.Rhyming == 0          5.100      1.267   4.025  0.00449 **
# Younger.Intentional - Older.Rhyming == 0       12.400      1.267   9.787  < 0.001 ***
# Older.Adjective - Younger.Rhyming == 0          3.400      1.267   2.684  0.19569
# Younger.Adjective - Younger.Rhyming == 0        7.200      1.267   5.683  < 0.001 ***
# Older.Imagery - Younger.Rhyming == 0            5.800      1.267   4.578  < 0.001 ***
# Younger.Imagery - Younger.Rhyming == 0         10.000      1.267   7.893  < 0.001 ***
# Older.Intentional - Younger.Rhyming == 0        4.400      1.267   3.473  0.02615 *
# Younger.Intentional - Younger.Rhyming == 0     11.700      1.267   9.235  < 0.001 ***
```

Данные для графиков

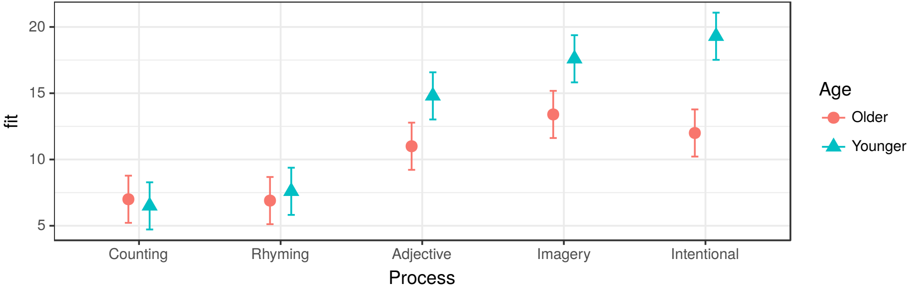
```
process <- levels(memory$Process)
fprocess <- factor(process, levels = process)
MyData <- expand.grid(Age = levels(memory$Age),
                      Process = fprocess)
MyData <- data.frame(MyData,
  predict(mem_mod, newdata = MyData,
          interval = "confidence"))
head(MyData)
```

```
#       Age   Process  fit       lwr       upr
# 1   Older  Counting  7.0  5.220228  8.779772
# 2 Younger  Counting  6.5  4.720228  8.279772
# 3   Older   Rhyming  6.9  5.120228  8.679772
# 4 Younger   Rhyming  7.6  5.820228  9.379772
# 5   Older Adjective 11.0  9.220228 12.779772
# 6 Younger Adjective 14.8 13.020228 16.579772
```

Задание 5

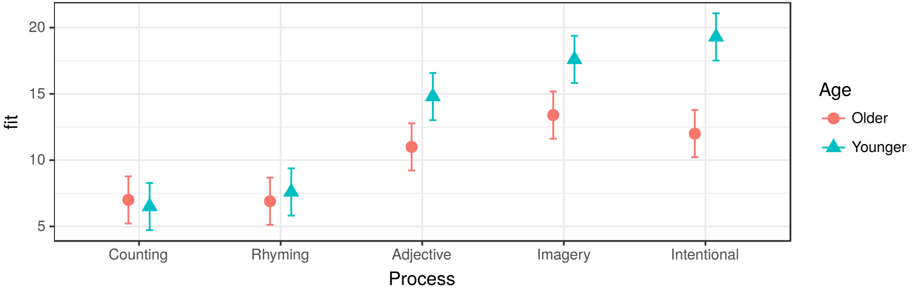
Видоизмените код, чтобы построить такой график результатов

```
pos <- position_dodge(width = 0.3)
gg_pointp <- ggplot() +
  geom_ (aes(), size = 3, position = pos) +
  geom_ (aes(ymin = , ymax = ), width = 0.1, position = pos)
gg_pointp
```



Решение

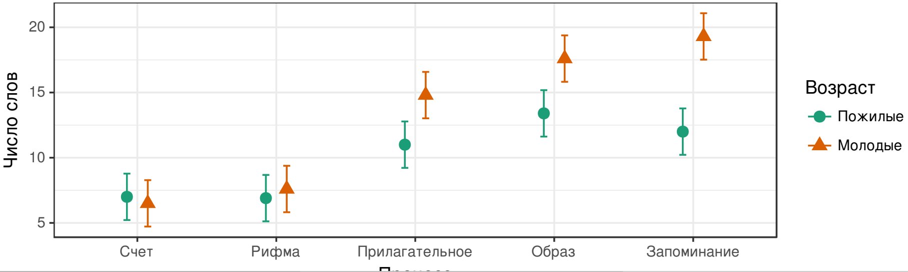
```
pos <- position_dodge(width = 0.3)
gg_pointp <- ggplot(data = MyData, aes(x = Process, y = fit, colour = Age)) +
  geom_point(aes(shape = Age), size = 3, position = pos) +
  geom_errorbar(aes(ymin = lwr, ymax = upr), width = 0.1, position = pos)
gg_pointp
```



Приводим график в приличный вид

```
gg_final <- gg_pointp +
  scale_colour_brewer(name = "Возраст", palette = "Dark2",
                      labels = c("Пожилые", "Молодые")) +
  scale_shape_discrete(name = "Возраст",
                       labels = c("Пожилые", "Молодые")) +
  scale_x_discrete(name = "Процесс",
                   labels = c("Счет", "Рифма", "Прилагательное",
                              "Образ", "Запоминание")) +
  labs(y = "Число слов")

gg_final
```



Фиксированные и случайные факторы

Фиксированные и случайные факторы

Свойства	Фиксированные факторы	Случайные факторы
Уровни фактора	фиксированные, заранее определенные и потенциально воспроизводимые уровни	случайная выборка из всех возможных уровней
Используются для тестирования гипотез	о средних значениях отклика между уровнями фактора $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_i = \mu$	о дисперсии отклика между уровнями фактора $H_0 : \sigma^2_{rand.fact.} = 0$
Выводы можно экстраполировать	только на уровни из анализа	на все возможные уровни
Число уровней фактора	Осторожно! Если уровней фактора слишком много, то нужно подбирать слишком много коэффициентов — должно быть много данных	Важно! Для точной оценки σ нужно нужно много уровней фактора — не менее 5

Задание: Примеры фиксированных и случайных факторов

Опишите ситуации, когда эти факторы будут фиксированными, а когда случайными

- Несколько произвольно выбранных градаций плотности моллюсков в полевом эксперименте, где плотностью манипулировали.
- Фактор размер червяка (маленький, средний, большой) в выборке червей.
- Деление губы Чупа на зоны с разной степенью распреснения.

Задание: Примеры фиксированных и случайных факторов

Опишите ситуации, когда эти факторы будут фиксированными, а когда случайными

- Несколько произвольно выбранных градаций плотности моллюсков в полевом эксперименте, где плотностью манипулировали.
- Фактор размер червяка (маленький, средний, большой) в выборке червей.
- Деление губы Чупа на зоны с разной степенью распреснения.

- Приведите другие примеры того, как тип фактора будет зависеть от проверяемых гипотез

Внимание: сегодня говорили только про фиксированные факторы.

Если есть случайные факторы - смешанные модели. О них в магистратуре.

Пакеты `nlme` и `lme4`
Книги:

- Pinheiro, J., Bates, D., 2000. Mixed-Effects Models in S and S-PLUS. Springer.
- Zuur, A.F., Ieno, E.N., Walker, N., Saveliev, A.A., Smith, G.M., 2009. Mixed Effects Models and Extensions in Ecology With R. Springer.

Take home messages

- Многофакторный дисперсионный анализ позволяет оценить взаимодействие факторов. Если оно значимо, то лучше воздержаться от интерпретации их индивидуальных эффектов
- В случае, если численности групп неравны (несбалансированные данные), лучше использовать III тип сумм квадратов
- В зависимости от типа факторов (фиксированные или случайные) по разному формулируются гипотезы и рассчитывается F-критерий.

Дополнительные ресурсы

- Quinn, Keough, 2002, pp. 221-250
- Logan, 2010, pp. 313-359
- Sokal, Rohlf, 1995, pp. 321-362
- Zar, 2010, pp. 246-266