Übungsserie 9

Abgabe: gemäss Angabe Dozent

Scannen Sie ihre manuelle Lösungen für die Aufgabe 1 in die Datei *Name_Vorname_Gruppe_S9_Aufg1.pdf* und fassen Sie diese mit Ihrer MATLAB-Funktion *Name_Vorname_Gruppe_S9_Aufg2.m* und dem Skript *Name_Vorname_ Gruppe_S9_Aufg3*.m in einer ZIP-Datei *Name_Vorname_Gruppe_S9.zip* zusammen. Laden Sie dieses File vor der Übungsstunde nächste Woche auf OLAT hoch.

Aufgabe 1 (ca. 60 Minuten):

Betrachten Sie nochmals die Aufgabenstellung aus Serie 8, Aufgabe 1, und beantworten Sie anhand einer manuellen Rechnung die folgenden Fragen:

a) Bei der Neuschätzung unter 1c) der Serie 8 beträgt der absolute Fehler für jede Bevölkerungsgruppe maximal 0.1 Mio. Was ist also der maximale absolute und relative Fehler der Lösung von 1c) der Serie 8? Was schliessen Sie daraus bzgl. der Konditionierung des Problems? Bemerkung: die benötigte Inverse A^{-1} können Sie (ausnahmsweise) mit MATLAB berechnen.

b) Bei einer Qualitätskontrolle der gelieferten Produktionseinheiten realisiert man, dass auch die Angaben der Hersteller bzgl. der Anzahl der Impfdosen pro Altersgruppe um maximal 100 Stück abweichen kann (also kann eine Produktionseinheit vom Hersteller A z.B. die folgende Anzahl Impfdosen enthalten: 20'100 E, 10'010 T, 1916 K). Berechnen Sie damit den relativen Fehler der Lösung 1c) der Serie 8 erneut.

c) Nehmen wir den Fall an, dass alles schief läuft, d.h. die tatsächlichen Bevölkerungszahlen sind für jede Altersgruppe tatsächlich 0.1 Mio grösser, als in 1c) von Serie 8 ursprünglich angenommen, und die Hersteller liefern konsequent 100 Impfdosen pro Altersgruppe weniger, als ursprünglich angegeben. Stellen Sie dieses neue, 'gestörte' Gleichungsystem auf und lösen Sie es mit MATLAB. Vergleichen Sie anschliessend die Lösung des gestörten Gleichungssystems mit der exakten Lösung des Gleichungssystems von 1c) der Serie 8 und berechnen Sie den tatsächlichen relativen Fehler. Was stellen Sie im Vergleich zu Ihrer Abschätzung aus der obigen Aufgabe b) fest?

Aufgabe 2 (ca. 45 Min.):

Schreiben Sie ein Funktion $[x,\widetilde{x},dx_{max},dx_{obs}] =$ `Name_Vorname_S9_Aufg2`$[A,\widetilde{A},b,\widetilde{b}]$:

- Input: Matrix A und Vektor b des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, sowie die gestörte Matrix $\widetilde{A}$ und Vektor $\widetilde{b}$ des gestörten Gleichungssystems $\tilde{A}\widetilde{x} = \widetilde{b}$.
- Output: Lösung x des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ und Lösung $\widetilde{x}$ des gestörten Gleichungssystems $\tilde{A}\widetilde{x} = \widetilde{b}$. Ausserdem die obere Schranke des relativen Fehlers dx_{max} von x gemäss Skript, also $dx_{max} = \frac{\mathrm{cond}(A)}{1-\mathrm{cond}(A)\cdot\frac{\|A-\widetilde{A}\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|A-\widetilde{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|b-\widetilde{b}\|}{\|b\|}\right)$ in der Unendlich-Norm, und der tatsächliche relative Fehler $dx_{obs} = \frac{\|x-\widetilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$. Falls die Bedingung $\mathrm{cond}(A)\cdot\frac{\|A-\widetilde{A}\|}{\|A\|} < 1$ für die Berechnung von dx_{max} nicht erfüllt ist, soll für dx_{max} der Wert 'NaN' (Not a Number) ausgegeben werden.
- Überprüfen Sie mit Ihrer Funktion für sich die Resultate von Aufgabe 1.

Tipp: Sie dürfen MATLAB-Funktionen und Operatoren verwenden, z.B. \ oder `linsolve()` für die Lösung der linearen Gleichungssysteme oder die Funktionen `cond(A,inf)` resp. `norm(b,inf)` für die Berechnung der Kondition resp. der Norm (für Details siehe die Beschreibung dieser Funktionen unter help).

Aufgabe 3 (ca. 30 Minuten):

Testen Sie, inwiefern dx_{max} aus Aufgabe 2 eine realistische obere Schranke für dx_{obs} ist. Schreiben Sie dazu ein Skript `Name_Vorname_Gruppe_S9_Aufg3.m` und gehen Sie folgendermassen vor:

- Defnieren Sie eine for-Schleife mit 1000 Iterationen. Erzeugen Sie für jede Iteration mittels der MATLAB-Funktion `rand()` eine zufällige 100x100 Matrix A und einen zufälligen 100x1 Vektor b (lesen Sie die Eigenschaften von `rand()` nach). Erzeugen Sie zusätzlich für jede Iteration eine gestörte Matrix $\widetilde{A} = A + \mathrm{rand}(100, 100)/10^5$ und einen gestörten Vektor $\widetilde{b} = b + \mathrm{rand}(100, 1)/10^5$
- Berechnen Sie für jede Iteration mit Ihrer Funktion aus Aufgabe 2 dx_{max}und dx_{obs}. Schreiben Sie dx_{max}, dx_{obs} sowie das Verhältnis dx_{max}/dx_{obs}in Vektoren und stellen Sie diese mit `semilogy` grafisch dar.
- Schreiben Sie Ihren Kommentar, ob dx_{max} in dieser Versuchsanordnung eine realistische obere Schranke für dx_{obs} ist, in Ihr Skript.