Aufgaben Vorbereitung Klausur

Matrizen und Gleichungssystem

1. Für welche x ist die Matrix regulär?

1.1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & x & 2 \\ x & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

L=R \ {0,5 ; 3}

1.2.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ x & 2 & 1 \\ -1 & 6 & x \end{vmatrix}$$

L=R \ {1,5 ; 3}

2. Gegeben seien folgende Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie, falls möglich, die Produkte AB, AB^T, B^TB, BB^T, BA.

Ja: $A*B^T$, B^T*B, $B*B^T$, $B*A$

	$A*B^T$		1
			-2
			3
3	0	-2	-3
4	1	-3	-7
4	0	0	4

			1
	$B*B^T$		-2
			3
1	-2	3	14

			3	0	-2
	B*A		4	1	-3
			4	0	0
1	-2	3	7	-2	4

B^T*B	1	-2	3
1	1	-2	3
-2	-2	4	-6
3	3	-6	9

Nein: A*B

3. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{adj} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = E$$

Berechnen Sie A_{adj}, A^{-1}, AA^{-1} und $A^{-1}A$

4. Berechnen Sie die folgenden Determinanten

4.1. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$

4.2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & -2 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 47$

5. Berechnen Sie die folgenden Gleichungssysteme unter Zuhilfenahme des Gausschen Algorithmus, der Cramerschen Regel sowie der inversen Matrix.

5.1.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 12 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 &= 28 \end{aligned}$$

1 2,5 3,5

5.2.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

1 2 4

5.3.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 9 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -6 \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

2 -2 3

5.4.
$$\begin{aligned} 6x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 1x_3 &= 14 \end{aligned}$$

2,75 -9 -12,25

5.5.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 4 \\ -x_2 - x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

4 0 1

Finanzmathematik

Alle Berechnungen gehen von nachschüssigen Verhältnissen aus!

6. Ein Käufer hätte 10000 GE zu zahlen. Da er nicht sofort zahlen kann, bietet er an, stattdessen in 3 gleichhohen Raten (1 Rate pro Jahr) zu zahlen. Es wird stetige Verzinsung (Zinseszins) mit einem Zinssatz von 10 % p.a. vereinbart.

6.1. Wie hoch müssen die einzelnen Raten sein? Wieviel zahlt der Ratenzahler insgesamt? Annulität gesucht

n	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
1	6978,85	1000,00	3021,15	4021,15
2	3655,59	697,89	3323,26	4021,15
3	0,00	365,56	3655,59	4021,15
		2063,44	10000,00	12063,44

6.2. Wieviel würde er zahlen, wenn er erst nach 3 Jahren alles in einem Betrag zahlen würde?

13310,00 Ko * q^n gesucht

7. Welcher Zinssatz wäre erforderlich, um ein Grundkapital von 10000 GE bei stetiger Verzinsung innerhalb von 8 Jahren zu verdoppeln? 9,05 %

Wie verändert sich der Zinssatz, wenn man die Zeit um 2 Jahre verlängert?

7,18 %

8. Wie viele Jahre müssen Sie ein Grundkapital bei stetiger Verzinsung anlegen, um dies bei einem Zinssatz von 8% p.a. zu verdreifachen? 14,27 Jahre

9. Eine Schuld von 25000 GE soll in 5 jährlichen Zahlungen vollständig getilgt werden. Der Zinssatz beträgt 5% p.a.

Stellen Sie den Tilgungsplan auf, der die jährlichen Werte für Restschuld, Zinsen, Tilgung und Annuität enthält.

Was muss die Summe aller geleisteten Tilgungen ergeben?

Wie hoch ist der Betrag der insgesamt gezahlten Zinsen?

9.1. Man zahlt mit konstanter Tilgung.

n	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
1	20000	1250	5000	6250
2	15000	1000	5000	6000
3	10000	750	5000	5750
4	5000	500	5000	5500
5	0	250	5000	5250
		3750	25000	28750

9.2. Man zahlt mit konstanter Annuität.

n	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
1	20475,63	1250,00	4524,37	5774,37
2	15725,04	1023,78	4750,59	5774,37
3	10736,92	786,25	4988,12	5774,37
4	5499,40	536,85	5237,52	5774,37
5	0,00	274,97	5499,40	5774,37
		3871,85	25000,00	28871,85

10. Eine Schuld von 60000 GE soll in 6 jährlichen Zahlungen vollständig getilgt werden. Der Zinssatz beträgt 4% p.a.

Stellen Sie den Tilgungsplan auf, der die jährlichen Werte für Restschuld, Zinsen, Tilgung und Annuität enthält.

Was muss die Summe aller geleisteten Tilgungen ergeben?

Wie hoch ist der Betrag der insgesamt gezahlten Zinsen?

10.1. Man zahlt mit konstanter Tilgung.

n	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
1	50000,00	2400,00	10000,00	12400,00
2	40000,00	2000,00	10000,00	12000,00
3	30000,00	1600,00	10000,00	11600,00
4	20000,00	1200,00	10000,00	11200,00
5	10000,00	800,00	10000,00	10800,00
6	0,00	400,00	10000,00	10400,00
		8400,00	60000,00	68400,00

10.2. Man zahlt mit konstanter Annuität.

n	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
1	50954,29	2400,00	9045,71	11445,71
2	41546,74	2038,17	9407,54	11445,71
3	31762,90	1661,87	9783,84	11445,71
4	21587,70	1270,52	10175,20	11445,71
5	11005,49	863,51	10582,21	11445,71
6	0,00	440,22	11005,49	11445,71
		8674,28	60000,00	68674,28

11. Wie entwickelt sich ihr Kapital, wenn Sie über einen Zeitraum von 10 Jahren jährlich 6000 GE zu einem Zinssatz von 4% p.a. ansparen.

11.1. Über welches Kapital verfügen Sie dann? Welchen Zinsbetrag haben Sie erhalten?

K_{10}=72036,64 GE Z=12036,64 GE

11.2. Über welches Kapital würden Sie insgesamt nach weiteren 5 Jahren verfügen, wenn Sie das erwirtschaftete Kapital aus 11.1. ohne weitere Rentenzahlungen zu einem Zinssatz von 5,5% p.a. anlegen würden.

K_5=94149,01 GE

12. Sie verfügen über ein Grundkapital von 20000 GE. Welche Rentenzahlungen wären erforderlich, um nach 5 Jahren bei einem Zinssatz von 4% p.a. über einen Betrag von 40000 GE verfügen zu können.

R=2892,54 GE

13. Eine Schuld von 100.000 GE soll mit einer jährlichen Annuität von 10.000 GE zu einem Zinssatz von 2,5 % p.a. vollständig getilgt werden. Nach 4 Jahren werden die Konditionen neu verhandelt und ein Zinssatz von 1,5 % p.a. bei gleicher Annuität vereinbart. Bestimmen Sie die Gesamtlaufzeit des Darlehens unter Berücksichtigung des veränderten Zinssatzes sowie die Restschuld nach 4 Jahren und die Summe aller geleisteten Zinszahlungen.

Nebenrechnung: $n_{D1} = 11{,}65\ Jahre$

$n_{D2} = 7{,}32\ Jahre$

$n = 11{,}32\ Jahre$

$R_4 = 68.856{,}13$

$Z_{11,32} = 13.200\ GE$

14. Sie sparen jeweils 750 € pro Jahr zu einem Zinssatz von 2,2 %. Welcher Endbetrag steht Ihnen nach 25 Jahren zur Verfügung. Welchen Zinsbetrag haben Sie insgesamt erhalten?

$$K_{25} = 24645{,}98\ €$$
$$Z_{ges} = 5895{,}98\ €$$

15. Wie viel müssen Sie 42 Jahre lang bei einem Zinssatz von 1,5 % jährlich sparen, um anschließend für 14 Jahre eine jährliche Rente von 24.000 € zu erhalten? Die Zinsen sind konstant über den gesamten Zeitraum!

Welchen Betrag haben Sie hierfür insgesamt aufgewendet?

$R_1 = 5197{,}25$

$eingesetztes\ Kapital\ K = 218284{,}50\ €$

16. Bis zu ihrem 67. Geburtstag haben Sie insgesamt 200.000 € gespart. Wieviel Rente erhalten Sie jährlich für 12 Jahre, wenn der Kalkulationszins 2,4% beträgt? (Das Kapital soll vollständig aufgebraucht werden!)

$R = 19379{,}56$

17. Sie nehmen einen Kredit über 200.000 € zu einem Zinssatz von 5% auf, der mit konstanten jährlich nachschüssigen Annuitäten in 30 Jahren zu tilgen ist. Berechnen Sie die Restschuld nach 15 Jahren, die Zinsen nach 12 Jahren und die Annuität.

Wieviel Zinsen wurden insgesamt gezahlt?

$R_{15} = 135.042{,}33$ €

$A = 13.010{,}29$ €

$Z_{12} = 7.861{,}67$ €

$Z_{ges} = 190.308{,}61$ €

18. Sie nehmen einen Kredit über 200.000 € zu einem Zinssatz von 4% auf, der mit konstanten jährlich nachschüssigen Annuitäten in 30 Jahren zu tilgen ist. Nach 15 Jahren sinkt der Zinssatz auf 3%.

$A = 11.566{,}02$ €

$R_{15} = 128.595{,}49$ €

18.1. Welche neue konstante Annuität würde sich ergeben, wenn die Gesamtlaufzeit beibehalten wird?

$A_{neu} = 10772{,}00$ €

oder

18.2. Wie würde sich die Gesamtlaufzeit verändern, wenn die jährliche Annuität über die neue Gesamtlaufzeit beibehalten wird?

$n_2 = 13{,}73\ Jahre$

Die Gesamtlaufzeit würde sich um 1,27 Jahre verkürzen.

Differentialrechnung

19. Bestimmen Sie die erste, zweite und dritte Ableitung der Funktion

$f(x) = 12 - 4x^2 + 3x^4 - \sin(2x) + e^{-2x}$

$f'^{(x)} = -8x + 12x^3 - 2\cos(2x) - 2e^{-2x}$

$f''^{(x)} = -8 + 36x^2 + 4\sin(2x) + 4e^{-2x}$

$f'''^{(x)} = 72x + 8\cos(2x) - 8e^{-2x}$

20. Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktionen

$f(x) = xe^x \quad f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x) \quad f''(x) = 2e^x + xe^x = (2+x)e^x$

$f(x) = \cos(2x) \quad f'(x) = -2\sin(2x) \quad f''(x) = -4\cos(2x)$

$f(x) = 2\,sinx\,cosx \quad f'(x) = 2cosx * cosx - 2sinxsinx = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$f''(x) = 2(-2cosx * sinx - 2sinxcosx) = -8cosxsinx$

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad f'(x) = -x^{-2} \quad f''(x) = 2x^{-3}$

$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \quad f'(x) = -3x^{-4} \quad f''(x) = 12x^{-5}$

$f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{11}{3}} \quad f'(x) = \frac{11}{3}x^{\frac{8}{3}} \quad f''(x) = \frac{88}{9}x^{\frac{5}{3}}$

$f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x-3)2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2(x-1)^3 - 2(x^2-2x-3)(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2(x-1)^2 - 2(x^2-2x-3)}{(x-1)^3} = \frac{2((x^2-2x+1) - (x^2-2x-3))}{(x-1)^3} = \frac{8}{(x-1)^3}$$

$$f(x) = \frac{2-3x^2}{x^2+2}$$

$$f'(x) = \frac{-6x(x^2+2) - (2-3x^2)2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-16x}{(x^2+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-16(x^2+2)^2 - (-16x)4x(x^2+2)}{(x^2+2)^4} = \frac{48x^2 - 32}{(x^2+2)^3}$$

$$f(x) = \frac{3-x}{(x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(-1)(x+4)^2 - (3-x)2(x+4)}{(x+4)^4} = \frac{(-1)(x+4)^1 - (3-x)2}{(x+4)^3} = \frac{x-10}{(x+4)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(x+4)^3 - (x-10)3(x+4)^2}{(x+4)^6} = \frac{(x+4) - 3(x-10)}{(x+4)^4} = \frac{-2x+34}{(x+4)^4}$$

21. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf relative und absolute Extrema

21.1. $f(x) = 2x^3 - 6x$
a) $D_f = [-2, 5]$
b) $D_f = [0, 8]$

$f'(x) = 6x^2 - 6$
$f''(x) = 12x$
$f'(x) = 0 = 6x^2 - 6$
$x_1 = -1 \quad f''(-1) = -12 \quad < 0 \quad rel.Maximum$
$x_2 = +1 \quad f''(+1) = +12 \quad > 0 \quad rel.Minimum$

a) $D_f = [-2, 5]$
$f(-2) = -4$
$f(-1) = +4$ rel. Max

$f(+1) = -4$ rel. Min
$f(+5) = 220$ abs. Max

b) $D_f = [0, 8]$
$x_1 = -1 \quad n. \in D_f$
$f(0) = 0$
$f(+1) = -4$ abs. Min
$f(+8) = 976$ abs. Max

21.2. $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2-4}{x+3}}$ $\quad \boldsymbol{D_f = [-2, 3]}$

$$f'(x) = \frac{2x * (x+3) - (x^2-4)}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+4}{(x+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x+6) * (x+3)^2 - (x^2+6x+4) * 2 * (x+3)}{(x+3)^4} = \frac{2 * (x+3)^2 - (x^2+6x+4) * 2}{(x+3)^3}$$
$$= \frac{10}{(x+3)^3}$$

$$f'(x) = 0 = \frac{x^2+6x+4}{(x+3)^2}$$

$0 = x^2 + 6x + 4$

$x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{5}$

$x_1 = -0{,}764 \quad f''(-0{,}764) = 0{,}894 \quad > 0 \quad rel. Minimum$
$x_2 = -5{,}236 \quad n. \in D_f$

$f(-2) = 0$
$f(-0{,}764) = -1{,}528$ abs. Min
$f(+3) = 0{,}833$ abs. Max

21.3. $\boldsymbol{f(x) = \frac{2-x^2}{(x+4)^2}}$ $\quad \boldsymbol{D_f = [-3, 4]}$

$$f'(x) = \frac{(-2x)(x+4)^2 - (2-x^2)2(x+4)}{(x+4)^4} = \frac{(-2x)(x+4) - (4-2x^2)}{(x+4)^3} = \frac{-8x - 4}{(x+4)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(-8) * (x+4)^3 - (-8x-4) * 3 * (x+4)^2}{(x+4)^6} = \frac{(-8) * (x+4) - (-8x-4) * 3}{(x+4)^4}$$
$$= \frac{16x - 20}{(x+4)^4}$$

$$f'(x) = 0 = \frac{-8x - 4}{(x+4)^3}$$

$0 = -8x - 4$

$x = -0{,}5 \quad f''(-0{,}5) = -0{,}187 \quad < 0 \quad rel. Maximum$

$f(-3) = -7$ abs. Min
$f(-0{,}5) = 0{,}143$ abs. Max
$f(+4) = -0{,}219$

Funktionen mit mehreren Variablen

22. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der folgenden Funktionen

Berechnen Sie außerdem die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktionen im Punkt (1,0).

22.1. $f(x,y) = 4x^2 + 16y^2 - 4$

$f_x(x,y) = 8x$
$f_y(x,y) = 32y$
$f_{xx}(x,y) = 8$
$f_{yy}(x,y) = 32$
$f_{yx}(x,y) = 0 = f_{xy}(x,y)$

$f_x(1{,}0) = 8$
$f_y(1{,}0) = 0$

$\nabla f(1{,}0) = \binom{8}{0}$

22.2. $f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 + 8y + 27$

$f_x(x,y) = 2x - 4$
$f_y(x,y) = 2y + 8$
$f_{xx}(x,y) = 2$
$f_{yy}(x,y) = 2$
$f_{yx}(x,y) = 0 = f_{xy}(x,y)$
$f_x(1{,}0) = -2$
$f_y(1{,}0) = 8$
$\nabla f(1{,}0) = \binom{-2}{8}$

23 (1-3), 24 (1-2)

23. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Extrema

23.1. $\boldsymbol{f(x,y) = 2x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x + 5y + 3}$

$f_x(x,y) = 4x + 4y - 2$
$f_y(x,y) = 4x + 8y + 5$

$0 = 4x + 4y - 2$
$0 = 4x + 8y + 5$
$0 = 4y + 7$

$x_0 = \frac{9}{4} = 2{,}25$

$y_0 = -\frac{7}{4} = -1{,}75$

$f_{xx}(x,y) = 4$
$f_{yy}(x,y) = 8$
$f_{yx}(x,y) = 4 = f_{xy}(x,y)$

$D = 4 \cdot 8 - 4 \cdot 4 = 16 \quad > 0 \quad \forall\, x,y \in D_f$

$f_{xx}(x_0,y_0) = 4 \quad > 0 \quad rel. Minimum$
$f_{xx}(x,y) = 4 \quad > 0 \quad \forall\, x,y \in D_f \quad absolutes\ Minimum$

$\boldsymbol{f(2,25,-1,75) = -3,625}$ ***ist das absolute Minimum***

23.2. $\boldsymbol{f(x,y) = 4 - 4x^2 + 2xy - y^2 + 4y + 1}$

$f_x = -8x + 2y$

$f_y = \quad 2x - 2y + 4$

$0 = -8x + 2y$

$0 = \quad 2x - 2y + 4$

$0 = -6x + 4$

$x_0 = \frac{2}{3}$=0,667

$y_0 = \frac{8}{3}$=2,667

$f_{xx} = -8$

$f_{yy} = -2$

$f_{xy} = \quad 2$

$f_{yx} = \quad 2$

$D = (-8) \cdot (-2) - 2 \cdot 2 = 12 \quad > 0 \quad \forall\, x,y \in D_f$

$f_{xx}(x_0,y_0) = -8 \quad < 0 \quad rel. Maximum$
$f_{xx}(x,y) = -8 \quad < 0 \quad \forall\, x,y \in D_f \quad absolutes\ Maximum$

$\boldsymbol{f(0,667,2,667) = 10,333}$ ***ist das absolute Maximum***

23.3. $\boldsymbol{f(x,y) = 4xy}$

$f_x = 4y$

$f_y = 4x$

$0 = 4x$

$0 = 4y$

$x_0 = 0$

$y_0 = 0$

$f_{xx} = 0$

$f_{yy} = 0$

$f_{xy} = 4$

$f_{yx} = 4$

$D = 0 \cdot 0 - 4 \cdot 4 = -16 \quad < 0$

Es existiert kein Extremum!

24. Das Volumen sowie die Oberfläche einer Kiste mit quadratischer Grundfläche ist abhängig von der Kantenlänge der Grundfläche x sowie der Höhe y.

$V = f(x,y) = x^2 \cdot y$

$A_O = f(x,y) = 2x^2 + 4xy$

Die Größen x und y seien gemessen zu x=50 cm mit einem relativen Fehler von 0,1% und y=40 cm mit einem relativen Fehler von 0,2%.

$$\Delta f = |f_x(x,y)|\Delta x + |f_y(x,y)|\Delta y$$

$$\Delta x = 0{,}1\% * 50\ cm = 0{,}05\ cm$$
$$\Delta y = 0{,}2\% * 40\ cm = 0{,}08 cm$$

Berechnen Sie den relativen und absoluten Fehler

24.1. des Volumens

$$V = f(x,y) = x^2 \cdot y$$
$$f_x = 2xy$$
$$f_y = x^2$$
$$\Delta f = |2xy|\Delta x + |x^2|\Delta y$$
$$\Delta f = |2 * 50cm * 40cm| * 0{,}05cm + |(50cm)^2| * 0{,}08cm$$
$$\Delta f = 400cm^3 \qquad \textit{absoluter Fehler}$$
$$V = f(50{,}40) = (50cm)^2 \cdot 40cm = 100000\ cm^3$$
$$\frac{\Delta f}{f(50{,}40)} = \frac{400cm^3}{100000cm^3} = 0{,}4\ \% \qquad \textit{relativer Fehler}$$

24.2. der Oberfläche

$$A_O = f(x,y) = 2x^2 + 4xy$$
$$f_x = 4x + 4y$$
$$f_y = 4x$$
$$\Delta f = |4x + 4y|\Delta x + |4x|\Delta y$$
$$\Delta f = |4 * 50cm + 4 * 40cm| * 0{,}05cm + |4 * 50cm| * 0{,}08cm$$
$$\Delta f = 34cm^2 \qquad \textit{absoluter Fehler}$$

$$A_O = f(50{,}40) = 2 * (50cm)^2 + 4 * 50cm * 40cm = 13000\ cm^2$$

$$\frac{\Delta f}{f(50{,}40)} = \frac{34\ cm^2}{13000 cm^2} = 0{,}26\ \% \qquad relativer\ Fehler$$

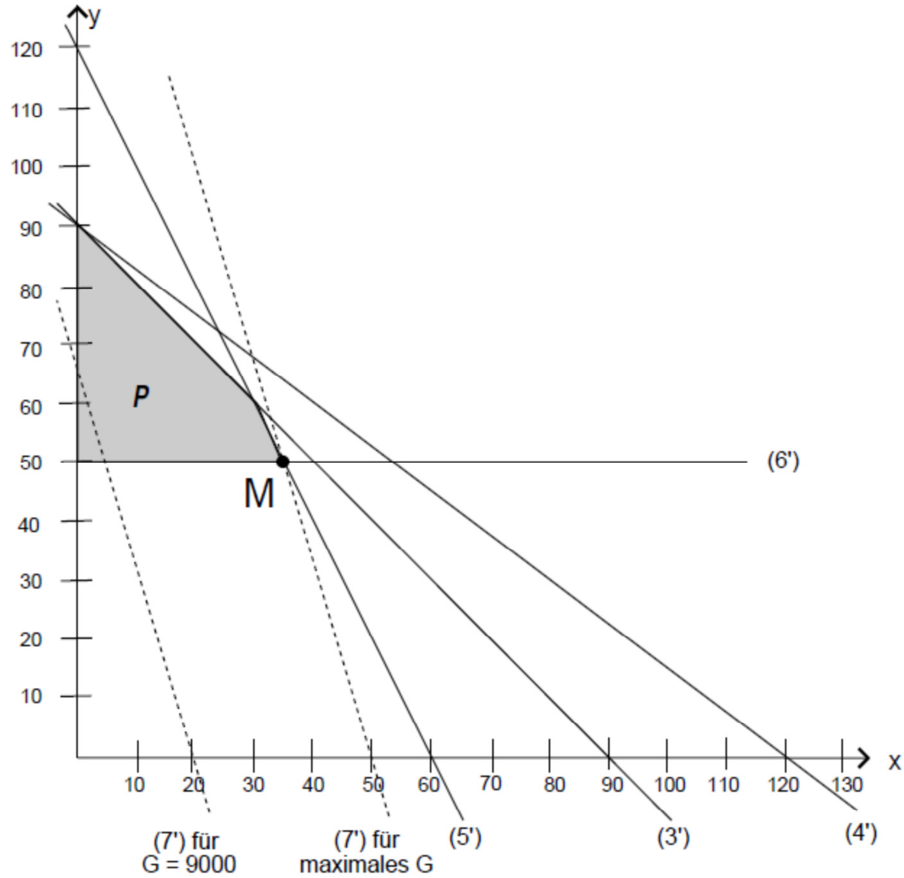
Lineare Optimierung

25. Ein Landwirt möchte 90 ha Land mit Kartoffeln und Zuckerrüben bebauen. Kartoffeln erfordern einen Arbeitsaufwand von 3 Tagen je ha und einen Kapitalaufwand von 400 EUR je ha, Zuckerrüben erfordern 4 Tage je ha und 200 EUR je ha. Wegen der Bodenqualität müssen mindestens 50 ha Zuckerrüben angebaut werden. Für die Bewirtschaftung der 90 ha stehen maximal 360 Arbeitstage und maximal 24.000 EUR zur Verfügung.
    Welche Aufteilung des Landes muss gewählt werden, wenn 1 ha Kartoffeln einen Gewinn von 450 EUR und 1 ha Zuckerrüben einen Gewinn von 150 EUR bringen und der Gewinn maximal werden soll?

x: Anzahl der Hektar Kartoffeln
y: Anzahl der Hektar Zuckerrüben
Mathematisches Modell:

Nichtnegativitätsbedingung:	$x \geq 0$
	$y \geq 0$
Weitere einschränkende Bedingungen:	
Land:	$x+y \leq 90$
Arbeit:	$3x+4y \leq 360$
Kapital:	$400x+200y \leq 24000$
Bodenqualität:	$y \geq 50$
Gewinnfunktion:	$G(x, y) = 450x+150y$

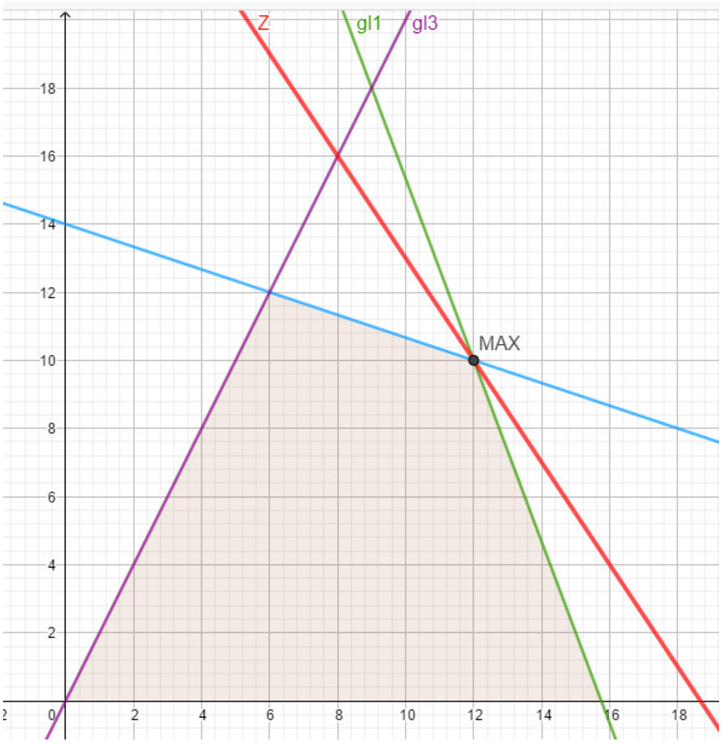
$$G_{max} = G(35, 50) = (450 \cdot 35 + 150 \cdot 50)\text{EUR} = 23250\,\text{EUR}.$$



26. In einer Fabrik werden zwei verschiedene Sorten von Kabeln hergestellt und für 150 € (Typ A) bzw. 100 € (Typ B) pro 100 Meter verkauft. Für Kabel des Typ A benötigt man 16 kg Plastik und 4 kg Kupfer. Für Kabel des Typ B benötigt man 6 kg Plastik und 12 kg Kupfer. Die produzierte Menge von B darf nicht größer sein als die doppelte Menge von A. Außerdem beträgt der Materialvorrat derzeit nur 252 kg Plastik und 168 kg Kupfer.

Welche Mengen der beiden Kabelsorten maximieren unter Einhaltung der Nebenbedingungen den Umsatz der Firma?

Zielfunktion	$z(x,y) = 150x + 100y \quad \rightarrow \quad \text{Max!}$
Nebenbedingungen	$16x + 6y \leq 252$ $4x + 12y \leq 168$
...und wegen $y \leq 2x$ gilt:	$2x - y \geq 0$
Nichtnegativitätsbedingung	$x \geq 0$ $y \geq 0$

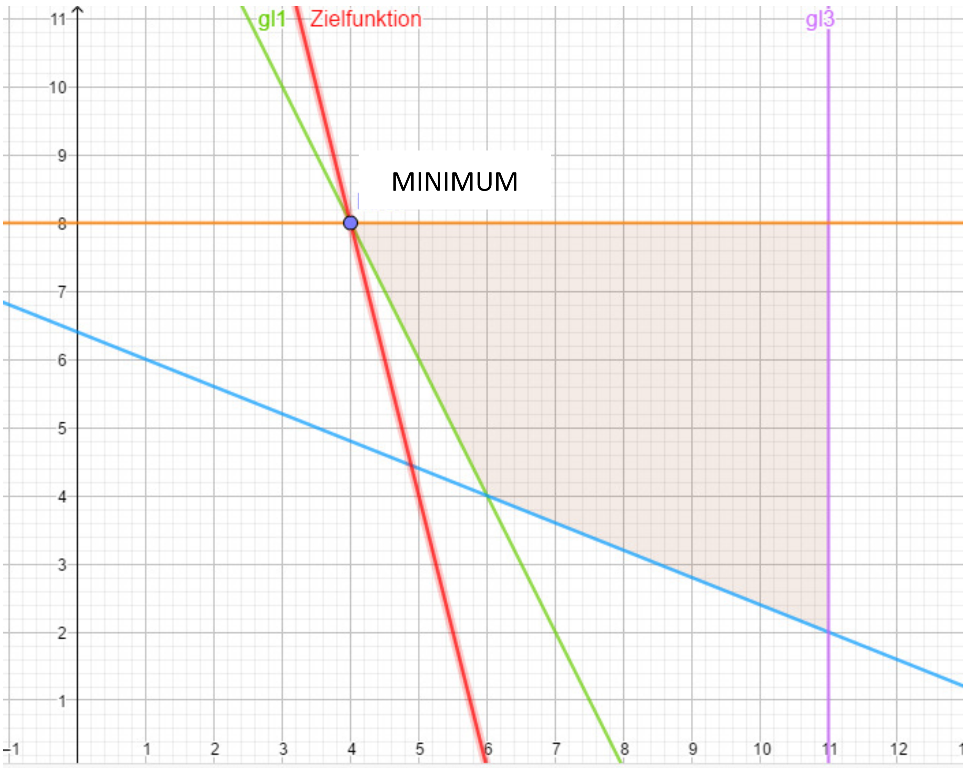


$z(12,10) = 150 \cdot 12 + 100 \cdot 10 = 2.800€ \quad \rightarrow \quad \textbf{Maximum!}$

27. Eine Fluggesellschaft möchte eine Flugverbindung zwischen zwei Städten einrichten. Ziel ist es in einem bestimmten Zeitraum, 1600 Personen und 96 Tonnen Ladung zu transportieren. Derzeit sind zwei Flugzeugetypen verfügbar: 11 Flugzeuge des Typs A und 8 Flugzeuge des Typs B. Typ A kostet pro Flug 4.000 € und kann 200 Personen sowie 6 Tonnen Ladung transportieren. Typ B kostet pro Flug 1.000 € und kann 100 Personen und 15 Tonnen Ladung transportieren.

Wie viele Flugzeuge von jedem Typen wird die Fluggesellschaft unter Einhaltung der Nebenbedingungen einsetzen, um ihre Kosten zu minimieren?

Zielfunktion	$z(x,y) = 4000x + 1000y \quad \rightarrow \quad \text{Min!}$
Nebenbedingungen	$200x + 100y \geq 1600$ $6x + 15y \geq 96$
...außerdem gilt:	$x \leq 11$ $y \leq 8$
Nichtnegativitätsbedingung	$x \geq 0$ $y \geq 0$



$z(4,8) = 4.000 \cdot 4 + 1.000 \cdot 8 = 24.000€ \rightarrow$ Minimum!