kommt nicht in Klausur dran

5. Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Funktionen mit mehreren Variablen

Definition n-dimensionaler Raum

Die Menge $R^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,/\, x_i \in R, i = 1,2,\ldots,n\}$ heißt n-dimensionaler Raum.
Ein $x \in R^n$ nennen wir Punkt oder auch Vektor.

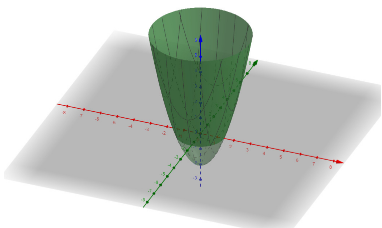
beschreibt Körper oder Fläche
bei variablen (fläche)

Definition n-dimensionaler Raum

Sei $D_f \subseteq R^n$ eine Menge. Ordnet man jedem Punkt $x \in D_f$ eine Zahl $f(x)$ zu, so ist eine Funktion $f: D_f \to R$ von n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit dem Wertebereich W_f definiert.

Im folgenden diskutieren wir den Fall n=2 und nennen die Variablen statt x_1 und x_2 nun x und y.

Beispiel: $\boldsymbol{f(x,y) = x^2 + y^2 - 2}$



Partielle Ableitungen und Gradient

Bei Funktionen einer Variablen spricht man von der ersten Ableitung. Bei Funktionen mit mehreren Variablen, muss gesagt werden, nach welcher abgeleitet wird.

Definition **Partielle Ableitung**

Sei $D_f \subseteq R^2 \to R$ eine Funktion von zwei Variablen x, y. Man erhält die **partielle Ableitung**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$$

wenn man nach der Variablen x differenziert und dabei y (d.h. alle anderen Variablen) als konstant ansieht. Analog erhält man die partielle Ableitung nach y.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

Auch existieren wie bei Funktionen mit einer Variablen auch partielle Ableitungen 2. und höherer Ordnung.

Partielle Ableitungen und Gradient

Partielle Ableitung 2. Ordnung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

Im Allgemeinen gilt:

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

Partielle Ableitungen und Gradient

Gradient so wird partielle ableitung genannt

Sei $f: D_f \subseteq R^2 \rightarrow R$ eine Funktion von zwei Variablen x, y. Dann heißt der Vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = grad\ f(x,y) = \nabla f(x,y)$$

Gradient von f.

Der Gradient $\nabla f(x_0, y_0)$ zeigt im Punkt (x_0, y_0) in die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion.

Hesse-Matrix

Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung kann man zu einer Hesse-Matrix zusammenstellen.

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

Die Hesse-Matrix ist eine symmetrische (n,n)-Matrix (in unserem Fall (2,2)-Matrix) und ihre Elemente sind Funktionen von n Variablen (in unserem Fall 2 Variablen).

Extremwertbetrachtungen von Funktionen mit mehreren Variablen

Relative Extrema

Notwendige Bedingung:

Besitze $f: D_f \subseteq R^2 \rightarrow R$ in einer Umgebung $U(x_0, y_0)$ stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung zwei und sei (x_0, y_0) Stelle eines relativen Extremums von f. Dann gilt

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0$$

Weiterhin gelte:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = f_{xx}(x_0,y_0) \cdot f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}{}^2\,(x_0,y_0) > 0$$

Dann ist (x_0, y_0) Stelle eines relativen Extremums, und zwar eines **relativen Minimums**, falls

$$f_{xx}(x_0,y_0) > 0$$

bzw. Stelle eines **relativen Maximums**, falls

$$f_{xx}(x_0,y_0) < 0$$

Im Fall $\boldsymbol{D < 0}$ ist (x_0, y_0) **nicht** Stelle eines relativen Extremums. Im Falle $\boldsymbol{D = 0}$ ist **keine Entscheidung möglich**.

Extremwertbetrachtungen von Funktionen mit mehreren Variablen

Absolute Extrema

Ob ein relatives Extremum sogar absolutes Extremum ist, lässt sich im allgemeinen nicht feststellen.
Aber es gilt der **Satz über konvexe und konkave Funktionen**:

Sei $f: D_f \subseteq R^2 \to R$ eine Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung und gelte

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - {f_{xy}}^2 (x,y) \geq 0 \quad \forall \ (x,y) \in D_f$$

Im Falle

$$f_{xx}(x,y) \geq 0 \quad \forall \ (x,y) \in D_f$$

Ist f konvex und jeder stationäre Punkt (x_0, y_0) ist Stelle des **absoluten Minimums** von f.

Im Falle

$$f_{xx}(x,y) \leq 0 \quad \forall \ (x,y) \in D_f$$

Ist f konkav und jeder stationäre Punkt (x_0, y_0) ist Stelle des **absoluten Maximums** von f.

Funktionen mit mehreren Variablen

Totales Differential

Sei $f: D_f \subseteq R^2 \to R$ eine Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung. Dann heißt

$$df = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$

totales oder **vollständiges Differential** von f.

z.b. bei berechnung der gesamttoleranz

Die Größe df, genommen an einer Stelle (x_0, y_0), steht für den linearen Anteil der Funktionswertänderung infolge Änderung von x und y um dx bzw. dy.

Daraus folgt eine mögliche Anwendung in der Fehlerrechnung:

Seien x und y fehlerbehaftet mit den absoluten Fehlern Δx bzw. Δy. Gesucht ist die Fortpflanzung dieser Fehler durch die Funktion $f(x,y)$. Als gute Näherung für den absoluten Fehler Δf nimmt man

$$\Delta f = |f_x(x,y)|\Delta x + |f_y(x,y)|\Delta y$$