2.2. Matrizen

Definition Matrix:

Ein rechteckiges System von m x n Zahlen, Rechengrößen oder sonstigen mathematischen Objekten heißt **Matrix**.

Die Objekte einer Matrix bezeichnet man als Elemente.

Hat eine Matrix **m** Zeilen und **n** Spalten so hat diese das **Format** (m,n).

- Mögliche Bezeichnungen: (m,n)-Matrix, $A_{(m,n)}$, $[a_{i,k}]_{(m,n)}$ oder Matrix vom Typ (m,n)

Der besseren Übersicht halber verwendet man bei der Bezeichnung der Elemente einer Matrix doppelte Indizes. Dabei gibt der erste Index die Nummer der Zeile (Zeilenindex) und der zweite die Nummer der Spalte (Spaltenindex) an, in der das Element steht.

a_{ik} i=Zeilenindex

k=Spaltenindex

$$A = [a_{i,k}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

muss nicht quadratisch sein

Eine Matrix $A_{(m,n)}$ kann auch aufgefasst werden als aus m **Zeilenvektoren** a(i), i=1,2,…,m bestehend, mit

$$a_{(i)} = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}] \text{ einer Matrix vom Format (1,n)}$$

und

$$A_{(m,n)} = \begin{bmatrix} a_{(1)} \\ a_{(2)} \\ \dots \\ a_{(m)} \end{bmatrix}$$

Diese Betrachtung gilt auch für die Auffassung dieser Matrix als aus n **Spaltenvektoren** $a^{(k)}$, k=1,2,…,n bestehend, mit

$$a^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{nk} \end{bmatrix} \text{ einer Matrix vom Format (m,1)}$$

und

$$A_{(m,n)} = [a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}]$$

Transponierte Matrix:

Werden in einer Matrix $A = [a_{ik}]$ die Zeilen und Spalten miteinander vertauscht, so nennt man diese **transponierte Matrix** $\boldsymbol{A^T} = [\boldsymbol{a_{ki}}]$.

Hieraus ergibt sich wiederum die Beziehung $\boldsymbol{\left(A^T\right)^T = A.}$

Beispiel:

elemente aus zeile in spalte und umgekehrt

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Spezielle Matrizen:

Quadratische Matrix

Ist in einer Matrix **m=n** so nennt man diese quadratische Matrix der **Ordnung n** oder vom **Format (n,n).**

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & \dots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & a_{n2} & \dots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

gleiche anzahl zeilen und spalten
gibt auch diagonalen
von oben links nach unten rechts (Schnapszahlen) ist Hauptdiagonale
andere Richtung = Nebendiagonale (von links unten nach rechts oben)

Die Elemente $\boldsymbol{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}}$ bilden die **Hauptdiagonale**.

Die Elemente $\boldsymbol{a_{1n}, a_{2-1,n}, \dots, a_{n1}}$ bilden die **Nebendiagonale**.

Die **transponierte einer quadratischen Matrix** entsteht durch Spiegelung der Elemente um die Hauptdiagonale. --> Hauptdiagonale bleibt gleich

Haupdiagonalen abschreiben und dann die ecken "umklappen"

Beispiel:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & \boldsymbol{a_{33}} \end{bmatrix}$$

Gilt für eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A^T}$, so nennt man diese **symmetrisch**.

Für die Elemente einer symmetrischen Matrix gilt: $a_{ik} = a_{ki} \;\; \forall \;\; i, k = (1,2, . . , n)$.

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{A} = A^T$$

Spezielle Matrizen:

Diagonalmatrix wenn gilt: $a_{ik} = 0 \quad \forall \quad i \neq k$

Die Elemente a_{ii} können von Null verschieden sein.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

alles außer der Hauptdiagonalen muss null sein; Hauptdiagonale kann auch null sein

Nullmatrix wenn gilt: $a_{ik} = 0 \quad \forall \quad i, k$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

alles muss null sein (auch hauptdiagonale)
ist immer auch Diagonalmatrix

Einheitsmatrix E ist eine Diagonalmatrix, in der alle Elemente der Hauptdiagonalen gleich 1 sind. $a_{ii} = 1 \quad \forall \quad i$

Beispiel:

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alles null außer die hauptdiagonalen
hauptdiagonale ist 1 alle Elemente

Spezielle Matrizen:

Dreiecksmatrix

Untere Dreiecksmatrix

wenn gilt: alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen sind gleich Null.

bisschen wie das Ziel des Gauss Algorithmus

Beispiel:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Obere Dreiecksmatrix

wenn gilt: alle Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen sind gleich Null.

Beispiel:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Gleichheit von Matrizen:

also gleiche "Form"

Zwei Matrizen $A = [a_{ik}]$ und $B = [b_{ik}]$ sind gleich, wenn sie ein gleiches Format besitzen und alle entsprechenden Elemente gleich sind.

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 4 \\ x_3 &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= 0 \\ y_3 &= 3 \end{aligned}$$

Addition bzw. Subtraktion von Matrizen:

Die Addition und auch die Subtraktion von Matrizen ist nur für gleichartige Matrizen (Matrizen, die das gleiche Format) besitzen erklärt.

$A + B = S$ $\qquad\qquad$ $A - B = D$

$a_{ik} + b_{ik} = s_{ik} \quad \forall \quad i, k$ $\qquad\qquad$ $a_{ik} - b_{ik} = d_{ik} \quad \forall \ i, k$

Die Ergebnismatrizen S und D sind vom gleichen Typ wie A und B.

Rechenregeln:

$A + B = B + A$ Kommutativgesetz

$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ egal was man zuerst macht Assoziativgesetz

$A + \Theta = A - \Theta = \Theta + \mathrm{A} = \mathrm{A}$ Rechnen mit Nullmatrix Θ vom Format A

$\Theta - A = -A$

$(A + B)^T = A^T + B^T$

Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar :

skalar beliebiges element
skalar = beliebige reelle Zahl (aka kann alles sein)

Eine Matrix wird mit einem Skalar multipliziert, in dem man jedes Element der Matrix mit dem Skalar multipliziert.

$$\lambda \cdot A = \mathrm{A} \cdot \lambda = [\lambda \cdot a_{ik}] \qquad \lambda \in R$$

Beispiel:

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 21 & 12 & 15 \\ 24 & 27 & 18 \end{bmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen :

Das Produkt C=[$C_{i,j}$]$_{(m,n)}$ der Matrix A=[ai$_{,k}$]$_{(m,p)}$ und der Matrix B =[$b_{k,j}$]$_{(p,n)}$ existiert nur, wenn die Anzahl der Spalten p von A gleich der Anzahl der Reihen p von B ist. vertikal von einem und horizontal von dem anderen

Die Ergebnismatrix C ist dann vom Format (m_A, n_B).

Die Elemente $c_{i,j}$ sind das Skalarprodukt der i-ten Zeile von A und der j-ten Spalte von B.

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n_A} a_{ik} \cdot b_{kj}, i = 1, \dots, m_A, j = 1, \dots, n_B$$

ha falk

Zur Berechnung des Produktes zweier Matrizen kann man das **Falksche Schema** nutzen.

Multiplikation von Matrizen mit dem Falkschen Schema:

Beispiel:

$A_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad n_A = 3$ $\quad B_{(3,2)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad m_B = 3\ n_A = m_B$ Produkt existiert!

$$\begin{array}{cccc|cc} & & & & b_{11} & b_{12} \\ A & \cdot & B & & b_{21} & b_{22} \\ & & & & b_{31} & b_{32} \\ - & - & - & + & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & & c_{11} & c_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & c_{21} & c_{22} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|cc} & & & & 3 & 2 \\ A & \cdot & B & & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 5 \\ - & - & - & + & - & - \\ 1 & 2 & 3 & & 14 & 19 \\ 0 & 2 & 1 & & 9 & 7 \end{array}$$

= 2+2+15

Die Elemente von C werden durch Skalarmultiplikation der Zeilenvektoren von A mit den Spaltenvektoren von B gebildet.

$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} = 1 * 3 + 2 * 4 + 3 * 1 = 14$
$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = 1 * 2 + 2 * 1 + 3 * 5 = 19$
$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} = 0 * 3 + 2 * 4 + 1 * 1 = 9$
$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} = 0 * 2 + 2 * 1 + 1 * 5 = 7$

$C_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 14 & 19 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$

Matrizen - Rechenregeln:

$A + B = B + A$ Kommutativgesetz

$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ Assoziativgesetz

$A + \Theta = A - \Theta = \Theta + \mathrm{A} = \mathrm{A}$ Rechnen mit Nullmatrix Θ vom Format A

$\Theta - A = -A$

$A \cdot B \neq B \cdot A$ gilt im allgemeinen

$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ Distributivgesetz

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ Assoziativgesetz

$A \cdot E = E \cdot A = A$ (A quadratisch und E Einheitsmatrix vom gleichen Format)

$(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ mehrere Sachen multipliziert
beim ausklammern muss man es immer mit allen elementen machen

$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$

$(A + B)^T = A^T + B^T$

$(A \cdot B)^T = B^T A^T$

$(A^T)^T = A$

Determinante:

Eine **Determinante** D ist ein quadratisches Schema von n x n Elementen, denen ein Wert zugeordnet ist.

$$D = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

Für n=2 gilt (Determinante 2. Ordnung): heißt 2 x 2 größe

$$D = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} = d_{11} \cdot d_{22} - d_{21} d_{12}$$

Produkt Hauptdiagonale - Produkt Nebendiagonale

Beispiel:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 * 4 - 1 * 3 = 5$$

Determinante:

Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn elementeweise zu einer Zeile (bzw. Spalte) ein Vielfaches einer anderen Zeile (bzw. Spalte) addiert wird.

Beispiel:

Addition des doppelten der zweiten Zeile zur ersten Zeile

trotzdem wird hauptdiagonale - nebendiagonalen berechnet

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 * 4 - 1 * 11 = 5$$

Der Wert einer Determinanten multipliziert sich mit der Zahl λ, wenn jedes Element einer Zeile (bzw. Spalte) mit λ multipliziert wird.

Beispiel:

ausklammern immer nur zeilen oder spaltenweise nie über gesamte Determinante

Multiplikation der ersten Spalte mit 4

$$D = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8 * 4 - 4 * 3 = 20 = 4 \cdot 5$$

Determinante:

Eine Determinante hat den Wert 0, wenn:

- Eine Zeile oder Spalte aus Nullen besteht;
- Zwei Zeilen oder Spalten gleich sind; Zeile/Zeile; Spalte/SPalte
- Oder eine Zeile bzw. Spalte ein Vielfaches einer anderen Zeile bzw. Spalte ist.

Beispiel:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 * 0 - 1 * 0 = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 * 1 - 1 * 2 = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 * 6 - 4 * 3 = 0$$

Der Wert der Determinanten bleibt unverändert, wenn Zeilen und Spalten vertauscht werden (Spiegelung an der Hauptdiagonalen).

Beispiel:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 * 4 - 1 * 3 = 5$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 * 4 - 3 * 1 = 5$$

Determinante:

Wenn alle Elemente, die oberhalb (bzw. unterhalb) der Hauptdiagonalen gleich null sind, dann ist der Wert der Determinante gleich dem Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen.

Beispiel:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 * 4 = 8$$

Berechnung von Determinanten 3. Ordnung:

Regel von Sarrus für determinanten 3.ordnung

1. Man schreibt die Werte der ersten und zweiten Spalte der Determinante noch einmal hinter die Determinante.
2. Die Produkte aus den Werten der Hauptdiagonalen werden addiert und die Werte aus den Produkten der Nebendiagonalen werden subtrahiert. 3 Produkte - 3 Produkte der Nebendiagonalen
3. Das Ergebnis liefert den Wert der Determinante.

$$D = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{matrix}$$

+ + +

- - -

$$D = d_{11} \cdot d_{22} \cdot d_{33} + d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{31} + d_{13} \cdot d_{21} \cdot d_{32} - d_{13} \cdot d_{22} \cdot d_{31} - d_{11} \cdot d_{23} \cdot d_{32} - d_{12} \cdot d_{21} \cdot d_{33}$$

Berechnung von Determinanten höherer Ordnung:

Determinanten höherer Ordnung werden berechnet, in dem man diese nach Unterdeterminanten U_{ij} entwickelt. Diese können nach einer Zeile i oder einer Spalte j entwickelt werden.

Entwicklung nach Zeile i:

$$D = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot U_{ij} \qquad i = 1 \; oder \; 2 \; oder \; \dots n$$

für jedes element diese summe bilden

summe einer spalte/zeile mal -1 mal unterdeterminante

Unterdeterminante = Determninante ohne Spalte und Zeile der ausgewählten Zahl

Exponenten wie Schachbrett

Entwicklung nach Spalte j:

$$D = \sum_{i=1}^{n} d_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot U_{ij} \qquad j = 1 \; oder \; 2 \; oder \; \dots n$$

Die vorzeichenbehaftete Unterdeterminante $(-1)^{i+j} \cdot U_{ij}$ wird auch als Adjunkte von d_{ij} bezeichnet.

Berechnung von Determinanten höherer Ordnung:

Beispiel: Determinante 3. Ordnung -Entwicklung nach der ersten Zeile

$$D = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} \qquad U_{11} = \begin{vmatrix} d_{22} & d_{23} \\ d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} \qquad U_{12} = \begin{vmatrix} d_{21} & d_{23} \\ d_{31} & d_{33} \end{vmatrix}$$

$$U_{13} = \begin{vmatrix} d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{vmatrix}$$

$$D = d_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot U_{11} + d_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot U_{12} + d_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot U_{13}$$
$$D = d_{11} \cdot U_{11} - d_{12} \cdot U_{12} + d_{13} \cdot U_{13}$$

Achtung! Vorzeichen der Unterdeterminanten beachten!

Ist die Ordnung der Unterdeterminanten >2 wird entsprechend der Regeln des Entwicklungssatzes weiterentwickelt!

(Unterdeterminanten der 3. Ordnung können auch nach der Regel von Sarrus berechnet werden.)

Inverse Matrix

b mal a = a mal b

Sei A eine (n,n)-Matrix. Eine Matrix B heißt **Inverse** von A, falls gilt

$$A \cdot B = B \cdot A = E$$

Falls B existiert, schreiben wir $B = A^{-1}$ und nennen A **regulär**, sonst **singulär**.

bzw.

Eine quadratische Matrix A ist genau dann **regulär**, wenn gilt

$$|A| \neq 0$$ wenn determinante der matrix a = 0, dann singulär und dann existiert inverse nicht

Rechenregeln:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$ Inverse der Inversen ist wieder A (Ausgangssituation)

$$(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$$ egal ob zuerst inverse oder transponieren

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$ egal ob zuerst inversen und dann produkt oder andersrum

Inverse Matrix

Bestimmung der **Inversen** einer Matrix A:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_{adj}$$

Vorgehensweise:

1. Bestimmung der Determinante von A

   $D = \det(A) = |A|$ (Die Inverse von A existiert nur, wenn $|A| \neq 0$

2. Bestimmung der adjungierten Matrix A_{adj}

   Definition adjungierte Matrix: Sei A eine (n,n)-Matrix. Die n^2-Größen

adjungierte Matrix $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot U_{ij}$, $\quad i, j = 1,2, \ldots n$

   heißen Adjunkten von A.

   Die Matrix $A_{adj} = (A_{ij})^T$ heißt die zu A **adjungierte Matrix**.

2.1. Man nehme jedes Element a_{ij} von A, bilde die zugehörige Unterdeterminante U_{ij} und wechsle deren Vorzeichen, falls i+j ungerade ist.

2.2. Man schreibe diese Adjunkte an den gleichen Platz wie a_{ij} und transponiere die so entstandenen Matrix.

3. Probe: $A \cdot A^{-1} = E$

Inverse Matrix Bedeutung:

Kennt man die Inverse, so lassen sich ein lineares Gleichungssystem direkt lösen.

$$A \cdot x = \mathrm{b} \qquad \Longrightarrow \qquad A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot \mathrm{b} \qquad \Longrightarrow \qquad x = A^{-1} \cdot \mathrm{b}$$

Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots. & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots. & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots. & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

In Matrixschreibweise: $A \cdot x = \mathrm{b}$

Koeffizientenmatrix A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Vektor x der Unbekannten

$$x = [x_1 \quad \dots \quad x_n]^T$$

und der rechten Seite b

$$b = [b_1 \quad \dots \quad b_m]^T$$

Im Falle $b = 0$ heißt das Gleichungssystem homogen, sonst inhomogen.

Cramersche Regel

Anwendbar, wenn m=n.

Das Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar (es existiert eine Lösung), wenn gilt

$$D = |A| \neq 0.$$

Dann berechnet sich die Lösung $x = [x_1 \quad \cdots \quad x_n]^T$ gemäß

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad j = 1, \dots, n,$$

wobei eine Determinante D_j dadurch entsteht, dass in der Determinante D die Spalte j durch den Vektor b ersetzt wird.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 6x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & - & 2x_3 & = & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 6x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & - & 2x_3 & = & 3 \end{array}$$

wenn determinante der koeffizienten ungleich 0

umformen, sodass variablen auf einer seite und richtige zahlen auf anderer seite und sortiert

b = Ergebnisvektor

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{x1} & \text{x2} & \text{x3} \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \end{array} = 6$$

!= gibt eindeutige Lösung

$$b = \begin{array}{c} \text{y} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

koeffizienten durch Ergebnisvektor ersetzen

ausrechnen und durch d teilen

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 12$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{12}{6} = 2$$

wird dann auch für andere variablen gemacht werden

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 6$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{6}{6} = 1$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$