Mathematik
IB 2020

Literaturhinweise:

- Thomas Christiaans, Matthias Ross:
  „Wirtschaftsmathematik für das Bachelorstudium“;
  3., überarbeitete Auflage; SpringerGabler Verlag

Mathematik

IB 2020 Stundenumfang: 30

Dipl.-Ing. (FH) Katrin Schulz
Email: katrin-schulz@ewe.net

1. Grundlagen
2. Lineare Algebra
3. Finanzmathematik
4. Differentialrechnung
5. Funktionen mehrerer Variablen
6. Integralrechnung

Mathematik

2. Lineare Algebra

2.1. Lineare Gleichungssysteme

Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssystem

- Substitutionsverfahren (Ersetzungsverfahren)
- Gleichsetzungsverfahren
- Additionsverfahren
- Gaußverfahren
- Cramersche Regel
- Inverse Matrix

Erlaubte Umformungen eines linearen Gleichungssystems (LGS):

1. Vertauschen zweier Zeilen
2. Multiplikation einer Zeile mit einem reellen Faktor $\lambda \in R\backslash\{0\}$
3. Addition/Subtraktion einer Zeile oder des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

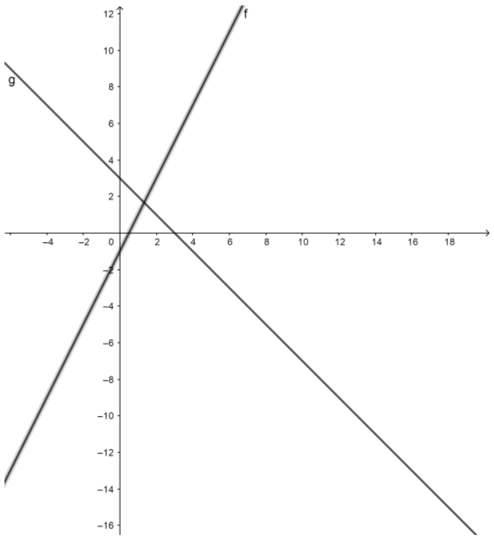
Lösbarkeit von Gleichungssystemen

Lösungsalternativen (am Bsp. Gleichungssystem mit 2 Unbekannten)

1.	eine Lösung	Geraden schneiden sich in einem Punkt
2.	keine Lösung	Geraden verlaufen parallel
3.	unendlich viele Lösungen	Geraden liegen aufeinander

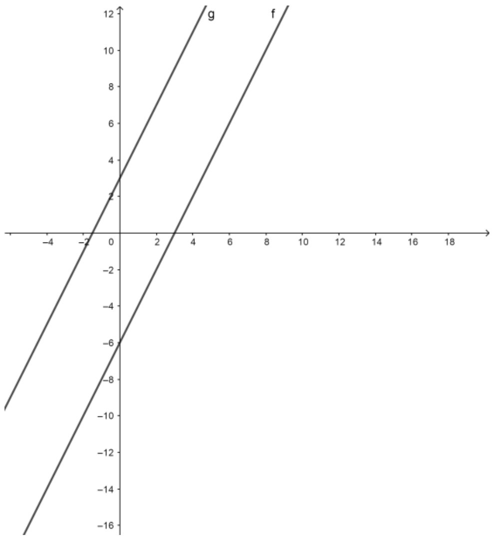
Beispiel:

1. eine Lösung



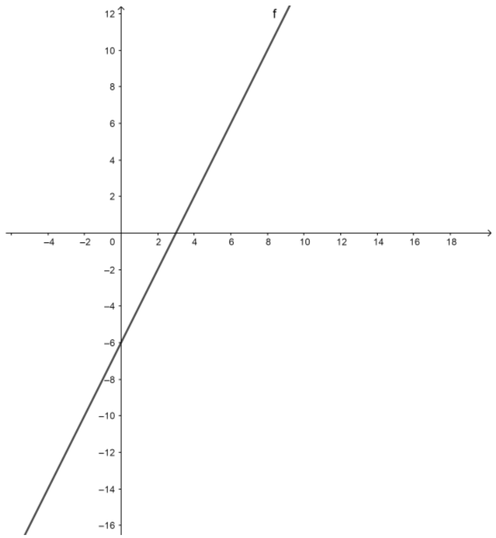
$$f\colon\ y = 2x - 1$$
$$g\colon\ y = -x + 3$$

2. keine Lösung



$$f\colon\ y = 2x - 6$$
$$g\colon\ y = 2x + 3$$

3. unendlich viele Lösungen



$$f\colon\ y = 2x - 6$$
$$g\colon\ y = \quad x - 3$$

Substitutionsverfahren

- Auflösen einer Gleichung nach einer beliebigen Unbekannten
- Einsetzen des Ergebnisses in die übrigen Gleichungen
- Wiederholung des Vorgangs, bis nur noch eine Gleichung bzw. Unbekannte übrig bleibt
- Ergebnis in die vorherigen umgestellten Gleichungen einsetzen, um die übrigen Unbekannten zu berechnen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} -12 &= 3x - 2y \\ 8 &= 2x + 4y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 &= 2x + 4y \\ 2x &= 8 - 4y \\ x &= 4 - 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -12 &= 3x - 2y \\ -12 &= 3(4 - 2y) - 2y \\ -12 &= 12 - 8y \\ 8y &= 24 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 4 - 2y \\ x &= 4 - 2 * 3 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Gleichsetzungsverfahren

- geeignet für 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten
- Auflösen beider Gleichung nach der gleichen Unbekannten
- Gleichsetzen der Gleichungen
- Ergebnis in eine beliebige Ausgangsgleichungen einsetzen, um die übrige Unbekannte zu berechnen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \mathbf{-12} &= \mathbf{3x - 2y} \\ \mathbf{8} &= \mathbf{2x + 4y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{-12} &= \mathbf{3x - 2y} \\ \mathbf{2y} &= \mathbf{3x + 12} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{1,5x + 6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{8} &= \mathbf{2x + 4y} \\ \mathbf{4y} &= \mathbf{8 - 2x} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{2 - 0,5x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{1,5x + 6} &= \mathbf{2 - 0,5x} \\ \mathbf{2x} &= \mathbf{-4} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{2 - 0,5x} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{2 - 0,5 * (-2)} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{3} \end{aligned}$$

Additionsverfahren

- Prinzip beruht auf der Addition bzw. Subtraktion von Gleichungen, um so einen der gesuchten Variablen zu eliminieren
- Um dies zu erreichen: Multiplikation einer oder beider Zeilen mit jeweils einem Faktor $(\neq 0)$
- Ergebnis in eine beliebige Ausgangsgleichungen einsetzen, um die übrige Unbekannte zu berechnen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} -12 &= 3x - 2y \qquad \mid * 2 \\ 8 &= 2x + 4y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -24 &= 6x - 4y \\ 8 &= 2x + 4y \end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} -16 &= 8x \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 &= 2x + 4y \\ 8 &= 2 * (-2) + 4y \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Gaussverfahren

Prinzipiell Erweiterung des Additionsverfahrens

Ziel: Mit Hilfe zeilenweiser Umformungen werden unter der Hauptdiagonalen Nullen erzeugt.

Regeln: siehe erlaubte Umformungen eines LGS

$$\begin{array}{ccccccc} 1x & + & 1y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & + & 4y & + & 6z & = & 7 \\ 2x & + & 2y & + & 5z & = & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} 1x & + & 1y & + & 2z & = & 2 & & \\ 3x & + & 4y & + & 6z & = & 7 & | & -3 * (I) \\ 2x & + & 2y & + & 5z & = & 3 & | & -2 * (I) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1x & + & 1y & + & 2z & = & 2 \\ 0x & + & 1y & + & 0z & = & 1 \\ 0x & + & 0y & + & 1z & = & -1 \end{array}$$

$z = -1$; $y = 1$; $x = 3$

Dies war ein Beispiel für ein Gleichungssystem mit **eindeutiger** Lösung.

Weitere Möglichkeiten sind :

Nullzeilen mit nichtverschwindender rechter Seite

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ \dots + 0 \cdot x_n = b \qquad\qquad b \neq 0$$

Dies ist ein Widerspruch. Das LGS hat keine Lösung!

Nullzeilen mit verschwindender rechter Seite

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ \dots + 0 \cdot x_n = 0$$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen

Cramersche Regel und Inverse Matrix

Diese Lösungsverfahren lernen wir im Kapitel Matrizen kennen.

Weitere Übungsaufgaben:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & -10 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 8x_4 & = & -11 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & -7 \end{array}$$