3. Finanzmathematik

Inhalte: - Folgen und Reihen

- Finanzmathematik

Folgen und Reihen

Definition: Endliche und unendliche Folge von Zahlen

$$a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n \mid \ldots\ldots\ldots \mid \qquad a_i \in \Re, \quad i \in N$$

1. Arithmetische Folge:

Folge von Zahlen, bei der die **Differenz** zweier aufeinanderfolgender Zahlen konstant ist: z.B.: 2er Reihe

$a_i - a_{i-1} = d \quad \forall \quad i$

<u>Bsp:</u> 5, 10, 15, 20, ...

Startelement $a_1 = 5$, Differenz $d = 5$, Endelement ∞, Anzahl Elemente ∞

Allgemeine Darstellung der Folge mit **n** Elementen:

$$a_1, \quad a_1 + d, \quad a_1 + 2d, \ldots, \quad a_1 + (n-1)d \qquad\qquad a_i = \frac{a_i + a_{i-1} + a_{i+1}}{3}$$

Ein Element einer arithmetischen Folge ist das **arithmetische Mittel** das aus ihm und seinen Nachbarelementen gebildet wird. ($a_{i-1} = a_i - d$, $a_{i+1} = a_i + d$)

Arithmetische Reihe: Summe der Folgeelemente

Ziel → Ermitteln eines geschlossenen Ausdrucks für die Summe der Elemente

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a + (n-1)d) = f(a,d,n) = ?$$

Folgen und Reihen

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a+(n-1)d)$$

$$+ \quad S = \sum_{i=1}^{n} a_i = (a+(n-1)d) + (a+(n-2)d) + \ldots + a$$

$$\Rightarrow \quad 2S = a+(a+(n-1)d) + a+(a+(n-1)d) + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad 2S = n(a+a+(n-1)d)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S = \frac{n(2a+(n-1)d)}{2}}$$

Für das **letzte Element** der arithmetischen Folge gilt:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = a_1 + nd - d$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1}$$

Bsp: 1, 3, 5, ... , 99 $\Rightarrow$ n = (99 -1) / 2 +1 = 50

Spezielle Reihe:

$$\sum_{i=1}^{n} i \quad \Rightarrow \quad a=1, \quad d=1$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{n(2+(n-1))}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$Bsp: n = 100$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{100} i = \frac{100\cdot 101}{2} = 5050$$

Folgen und Reihen

2. Geometrische Folge: Basis der Zinsrechnung

Folge von Zahlen, bei der der **Quotient** zweier aufeinanderfolgender Zahlen konstant ist: mit mal gerechnet

$$a_i / a_{i-1} = q \qquad \forall_i$$

Bsp: 2, 6, 18, ...

Startelement $a_1 = 2$, Quotient q = 3, Endelement ∞, Anzahl Elemente ∞

Allgemeine Darstellung der Folge mit **n** Elementen:

$$a, \quad a\cdot q, \quad a\cdot q^2, \quad a\cdot q^3, \ldots, \quad a\cdot q^{n-1}$$

Geometrische Reihe:
Summe der Folgeelemente

Ziel → Ermitteln eines geschlossenen Ausdrucks für die Summe der Elemente

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i = a + a\cdot q + a\cdot q^2 + \ldots + a\cdot q^{n-1}$$

$$\Rightarrow S\cdot q = a\cdot q + a\cdot q^2 + a\cdot q^3 + \ldots + a\cdot q^{n-1} + a\cdot q^n$$

$$\Rightarrow S\cdot q - S = -a + a\cdot q^n$$

$$\Rightarrow S(q-1) = a(q^n - 1)$$

$$\boxed{\Rightarrow S = a\cdot\frac{q^n-1}{q-1} = a\cdot\frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{für } q \neq 1!}$$

Folgen und Reihen

Bsp:

1, 1/3, 1/9, 1/27, 1/81 $\Rightarrow$ **q** = 1/3, **a** = 1, **n** = 5 $\Rightarrow$ $\mathbf{S_5}$ = 1·(1-(1/3)^5) / (1-1/3) = 121/81

Bestimmung von n für die geometrische Folge:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n}{a_1} = q^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \log\left(\frac{a_n}{a_1}\right) = (n-1)\log(q)$$

$$\Rightarrow \quad (n-1) = \frac{\log\left(\frac{a_n}{a_1}\right)}{\log(q)} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\log\left(\frac{a_n}{a_1}\right)}{\log(q)} + 1$$

Anzahl der Elemente

Bsp: 1/16, 1/64, ..., 1/4096 $\Rightarrow$ $\mathbf{a_1}$ = 1/16, $\mathbf{a_n}$ = 1/4096, **q** = 1/4 $\Rightarrow$ **n** = 4 + 1 = 5

Finanzmathematik: a) Einfache(lineare) Verzinsung

Zinsen = Nutzungsentgelt für überlassenes Kapital

Zinszuschlagstermin = Zeitpunkt der Zinsfälligkeit

Zinsperiode = Zeitraum zwischen zwei Zinszuschlagsterminen (1Jahr, halbj., viertelj., monatl.)

$\downarrow$

Zeitpunkt der Zinsauszahlung:

a) am **Ende** der Zinsperiode = **nachschüssige** Verzinsung z.B.: bei Einzahlung auf Girokonto und am ende des Jahres zinsen

b) zu **Beginn** der Zinsperiode = **vorschüssige** Verzinsung *(hier nicht behandelt)*

Zwei Grundformen der Verzinsung = **Verzinsungsmodelle**:

Lineare (einfache) Verzinsung:

Zinsen werden zeitanteilig berechnet und erst am Ende der Laufzeit dem Kapital zugeschlagen ("nicht stehengelassen")

auf Grundwert

Exponentielle Verzinsung (Zinseszins):

Zinsen werden nach jeder Zinsperiode dem Kapital hinzugefügt und tragen von da an selbst wieder zu den Zinsen bei: Mehrere Zinszuschlagstermine innerhalb der Laufzeit

neuer Grundwert

Zinsen $\mathbf{Z_n}$ sind proportional zur Höhe des Ausgangskapitals $\mathbf{K_0}$ und zur Laufzeit **n** = Anzahl der Zinsperioden: $\mathbf{Z_n \propto n \cdot K_0}$ $\rightarrow$ Der **Proportionalitätsfaktor** ist der **Zinssatz i** ("interest").

Finanzmathematik: a) Einfache(lineare) Verzinsung

Lineare nachschüssige Verzinsung:

$$Z_n = K_0 \cdot i \cdot n$$

Zinsen= Kapital * Zinsen * Jahre (Grundwert bleibt immer gleicht)
Zinsen nach einem Jahr nicht enthalten --> immer nur Grundkapital verzinst

n = Laufzeit in Zeiteinheiten oder Zinsperioden

Zinssatz **i** und Laufzeit **n** müssen sich auf **dieselbe** Zeiteinheit beziehen!

Umrechnung auf **Jahresbruchteile**: 1 Monat = 30 Zinstage 1 Jahr = 360 Zinstage

⇒ Zinsformel für die Laufzeit **t** in Tagen:

$$Z_n = K_0 \cdot i \cdot \frac{t}{360} \qquad i = Zins\ p.a.!$$

Endkapital nach Ende der Überlassungsfrist:

Ergibt einen rein linearen Verlauf
mit der Anzahl der Zinsperioden **n**

$$K_n = K_0 + Z_n = K_0 + K_0 \cdot i \cdot n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$$

(**i** und **n** müssen sich auf die gleiche Zeiteinheit beziehen!)

Formel enthält **4 Größen**, nach denen umgeformt werden kann:

das wichtigste

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n) \quad \textit{Aufzinsen} \qquad K_0 = \frac{K_n}{(1 + i \cdot n)} \quad \textit{Abzinsen von } K_n$$

Anfangskapital wird berechnet
(soll nach X Jahren Amount Y erreichen
--> Welches Grundkapital braucht man

$$i = \left(\frac{K_n}{K_0} - 1\right) \cdot \frac{1}{n} \quad \textit{Effektivzinssatz} \qquad n = \left(\frac{K_n}{K_0} - 1\right) \cdot \frac{1}{i} \quad \textit{Laufzeit}$$

"Zinsenprozent"

man braucht immer drei der größen --> Formelumstellung (nach gesuchter Größe)
erhaltene Zinsen: Endkapital - Ausgangskapital
Zn = Kn - Ko

Finanzmathematik: Exponentielle Verzinsung (Zinseszins)

Werden Zinserträge nicht abgezogen sondern kapitalisiert, so fallen **Zinseszinsen** an.

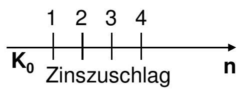
neuer Grundwert --> Zinsen werden zu Ko addiert und dann darauf Zinsen berechnet

Berechnung des Kapitals K_n nach **n** Zinsperioden inklusive Zinseszins:

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0 \cdot (1 + i) = K_0 \cdot q \qquad q = i + 1: \quad \textit{Aufzinsfaktor}$$

$$K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = K_1 \cdot (1 + i) = K_1 \cdot q$$

$$= K_0 \cdot q + K_0 \cdot q \cdot i = K_0 \cdot q \cdot (1 + i) = K_0 \cdot q^2$$



$$= K_0 \cdot (i + 1)^2 = K_0 \cdot (1 + 2i + i^2)$$

$$= K_0 + 2K_0 i + K_0 i^2 = \textit{Kapital} + \textit{Zins} + \textit{Zinseszins} \quad \textit{für} \quad 2\textit{Perioden}$$

Allgemein: **Aufzinsformel** (Kann rekursiv definiert werden! Ist geometrische Folge!!)

stetige Verzinsung

wie in der Schule
Exponentialaufgaben

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n \quad \Leftrightarrow \quad K_n = K_{n-1} \cdot q \quad \Rightarrow \frac{K_n}{K_{n-1}} = q}$$

q = Zinssatz + 1
n = Laufzeit

bestimmter Zinssatz nach n Jahren

<u>Bsp:</u> K_0 = 1000,- **i** = 0.1 **q** = 1.1

⇒ K_1 = 1100,- K_2 = 1210,- K_3 = 1331,- K_4 = 1464,-

Finanzmathematik: Stetige Verzinsung

Umformungen:

$$K_n = K_0 \cdot q^n \quad \textit{Aufzinsen}$$

$$K_0 = K_n \cdot q^{-n} = \frac{K_n}{q^n} = K_n \cdot (1+i)^{-n} \quad \textit{Abzinsen}$$

$$K_n = K_0 \cdot (i+i)^n \quad \Rightarrow \quad i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \quad \textit{Zinssatz}$$

$$K_n = K_0 \cdot q^n \quad \Rightarrow \quad \log\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = n \cdot \log(q) \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\log\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\log(q)} \quad \textit{Zinsperioden}$$

Verallgemeinerung → **Stetige Verzinsung**

Bislang: In jedem Jahr nur **ein** Zinstermin mit vollem Zinssatz **i** (ganzjährige Verzinsung)

Allgemeiner: In jedem Jahr **mehrere** Zinstermine **m** mit entsprechend anteiligem Zinssatz **i / m**

Ganzjährige Verzinsung mit vollem Zinssatz **i**: ⟶ $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$

Halbjährige Verzinsung: ⇒ Zinssatz = **1/2 i !!**

Finanzmathematik: Stetige Verzinsung

Ganzjährige Verzinsung mit vollem Zinssatz **i**: $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$

***n** ist immer Anzahl der Jahre*

Halbjährige Verzinsung

⇒ Zinssatz = **i / 2 !!**

Anzahl Perioden

$$K_{1/2} = K_0 \cdot \left(1+\frac{i}{2}\right)^1 \quad \textit{nach } 1/2 \textit{ Jahr}$$

$$K_1 = K_0 \cdot \left(1+\frac{i}{2}\right)^2 \quad \textit{nach } 1 \textit{ Jahr}$$

$\vdots$

$$K_n = K_0 \cdot \left(1+\frac{i}{2}\right)^{2n} \quad \textit{nach n Jahren}$$

nur benutzt, wenn "ungerade" Laufzeit (z.B. 1,5 Jahre)

bei 1,5 Jahren: i/2^3

Vierteljährige Verzinsung

⇒ Zinssatz = **i / 4 !!**

$$K_{1/4} = K_0 \cdot \left(1+\frac{i}{4}\right)^1 \quad \textit{nach } 1/4 \textit{ Jahr}$$

$$K_1 = K_0 \cdot \left(1+\frac{i}{4}\right)^4 \quad \textit{nach } 1 \textit{ Jahr}$$

$\vdots$

$$K_n = K_0 \cdot \left(1+\frac{i}{4}\right)^{4n} \quad \textit{nach n Jahren}$$

Laufzeit (n) : wie oft bekomme ich Zinsen

nach 3/4 Jahr: i/4^3

Monatliche Verzinsung ⇒ Zinssatz = **i / 12**

$$K_{1/12} = K_0 \cdot \left(1+\frac{i}{12}\right)^1 \quad \textit{nach } 1 \textit{ Monat} \qquad K_n = K_0 \cdot \left(1+\frac{i}{12}\right)^{12n} \quad \textit{nach n Jahren}$$

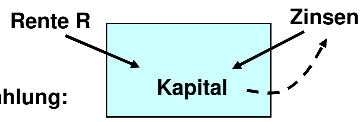
Rentenrechnung

10 Jahre lang 3TEUR auf Konto und wie viel am Ende

Es wird regelmäßig **zusätzliches Kapital** (= "Rente" **R**) dem Kapitalbestand hinzugefügt.

Die **Verzinsung** wird auf das **gesamte Kapital** angewandt

Im Vergleich zur Zinseszinstrechnung fallen nicht nur Zinsen an, sondern auch regelmäßige **Rentenzahlungen** gleicher Höhe



"Dynamisches System"

Vorschüssige Zahlung:

Rente wird **am Anfang** jeder Zinsperiode gezahlt ⇒

Wird sogleich **mitverzinst**

Nachschüssige Zahlung:

Rente wird **am Ende** jeder Zinsperiode gezahlt ⇒

Wird erst am Ende der **nächsten** Zinsperiode mitverzinst

Nachschüssige Zahlung: Entwicklung des Kapitals incl Zinseszins ermitteln

R = Rente **i** = Zinssatz Annahme: $\mathbf{K_0 = 0}$ (noch keine Rente eingegangen, keine Zinsen!)

$$K_1 = R_{neu}$$

$$K_2 = R_{neu} + R \cdot (1+i) = R_{neu} + R \cdot q = R + K_1 \cdot q$$

Verallgemeinerung:

$$K_3 = R_{neu} + K_2 \cdot q = R_{neu} + (R + Rq) \cdot q = R_{neu} + Rq + Rq^2$$

kommt in Klausur dran

Rentenrechnung

nachschüssig: Rente kommt am Anfang keine Zinsen drauf

$$K_n = R_{neu} + Rq + Rq^2 + \ldots + Rq^{n-1}$$ Geometrische Reihe!

$$K_n = R_{neu} + K_{n-1} \cdot q$$ Rekusionsformel

Exponent **n-1** statt **n**, da Rente **nachschüssig** gezahlt wird, dh **keine** Verzinsung im **ersten** Jahr erfolgt. Somit nur Verzinsung für n-1 Jahre!

Entwicklung des Kapitalbestandes folgt dem Bildungsgesetz einer **geometrischen Reihe**:

Startelement = R Faktor = q Anzahl Elemente = n

$$\boxed{K_n = R \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

<u>Bsp:</u> R = 1000 GE q = 1,1 n = 5

⇒ $\mathbf{K_n}$ = 1000 ·(1,1^5 - 1) / (1,1 - 1) = 6105,1 GE

Vorschüssige Zahlung: Schon im **ersten** Jahr fällt Zins an (für die erste eingezahlte Rente!)

$$K_1 = R_{neu} + R_{neu} \cdot i = R \cdot q$$

$$K_2 = R_{neu} \cdot q + K_1 \cdot q = R \cdot q + R \cdot q^2$$

$$K_3 = R_{neu} + K_2 \cdot q = R \cdot q + R \cdot q^2 + R \cdot q^3$$

Rekusionsformel:

Jede neu eingezahlte Rente wird bereits verzinst

↓

$$K_n = R \cdot q + K_{n-1} \cdot q$$

Rentenrechnung

$$K_n = Rq + Rq^2 + \ldots + Rq^n = Rq \cdot \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right)$$

vorschüssig: am Anfang kriegt man einmal Zinsen auf den Grundbetrag
kommt nicht in Klausur dran

Entwicklung des Kapitalbestandes folgt dem Bildungsgesetz einer **geometrischen Reihe**:

Startelement = 1 Faktor = q Anzahl Elemente = n

$$\boxed{K_n = R \cdot q \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = R \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Gegenüber nachschüssiger Rentenzahlung hat man einen **zusätzlichen Faktor q**: Jede Rente wird **ein Jahr länger** verzinst!

Bsp: R = 1000 GE q = 1,1 n = 5 $\Rightarrow$ **K_n** = 6715,6 GE

(Faktor **q mehr** als bei nachschüssiger Rentenzahlung!)

Verallgemeinerung : **Sparkassenformeln**

Kapitalaufbau und Kapitalabbau bei vorhandenem Kapitalstock **K_0** und regelmäßiger Rentenzahlung bzw Rentenentnahme:

- Wie baut sich das Gesamtkapital auf?
- Wie wird das vorhandene Kapital abgebaut, wann ist es verzehrt?
  Wie oft kann die Rente **R** entnommen werden?

Rentenrechnung: Sparkassenformel

(Nachschüssige Verhältnisse)

je nachdem was man braucht nur ersten, zweiten oder beide Teile nehmen

1. Kapitalaufbau: Bereits vorhandenes Kapital **K_0** und regelmäßige Rentenzahlung

stetige Verzinsung + Rentenformel

$$K_n = \underbrace{K_0 \cdot q^n}_{\text{Zinseszins exp.}} + \underbrace{R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}_{\text{Rente}}$$

Kontostand am Tag der n-ten Rentezahlung

Grundkapital und Rentenzuläufe verzinsen gemeinsam additiv (n = 0 $\Rightarrow$ $K_n = K_0$)

habe Grundkapital kriege da Zinsen drauf und packe da jährlich noch einen bestimmten Betrag (am Anfang des Jahres) hinzu

2. Kapitalabbau:

Das aufgezinste Guthaben wird durch die regelmäßigen Abhebungen verbraucht.

(Beginn der Rentenentnahme nach einer Zinsperiode / Jahr)

$$K_n = K_0 \cdot q^n - R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Mit jeder Rentenentnahme R geht nicht nur R verloren, sondern auch die Zinsen, die dafür angefallen wären!

man nimmt jeden Monat bestimmten Betrag (R) aus dem Konto heraus
z.B. man erbt 100TEUR und nimmt 2TEUR pro Jahr hinaus

3. Kapitalverzehrsformel: wie lange reicht das Geld bis es weg ist; Berechnung vom n

Wie lange dauert es, bis das Kapital bei fester Rente R verbraucht ist, bzw wie hoch darf R sein, wenn Kapital n Jahre reichen soll?

$$K_n = 0 = K_0 \cdot q^n - R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \Rightarrow \quad R(n) \quad bzw \quad n(R)$$

nach n umstellen: Formel ist auf Formelsammlung

Rentenrechnung: Sparkassenformel

Kapitalverzehr: Höhe der möglichen Renten **R** bzw Anzahl **n** der möglichen Entnahmen

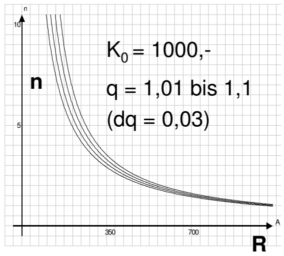
$$K_n = 0 = K_0 \cdot q^n - R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = K_0 \cdot q^n \cdot (q-1) - R \cdot \left(q^n - 1\right) \quad \Rightarrow \quad R = \frac{K_0 \cdot q^n \cdot (q-1)}{\left(q^n - 1\right)} = K_0 \cdot \frac{q-1}{1 - 1/q^n}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = [K_0 \cdot (q-1) - R] \cdot q^n + R$$

$$\Rightarrow \quad R = [R - K_0 \cdot (q-1)] \cdot q^n$$

$$\Rightarrow \quad q^n = \frac{R}{R - K_0 \cdot (q-1)} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln\left(\frac{R}{R - K_0 \cdot (q-1)}\right)}{\ln q}$$



In der Regel ist **n keine ganze Zahl**. Wenn zB n = 11,53 dann kann man **11 volle** Renten entnehmen und eine entsprechend geringere **Schlußrente** (0,53*R), die den Kontostand auf **Null** bringt!

15,73 in Monate tage:
15 Jahre: 0,73*12 : ganze sind Monate
Ergebnis die ganzen Abziehen : Ergebnis * 360 --> auf ganze Runden --> Ergebnis

Tilgungsrechnung

Verzinsung + Tilgung einer Schuld:

Schuld (Kredit, Anleihe, ...) wird nicht auf einmal im Gesamtbetrag, sondern in Raten getilgt.

Für die jeweilige restliche Schuld fallen jedoch jedes Jahr erneut Zinsen an!

Summe aus zu zahlenden Zinsen und gezahlter Tilgung einer Periode heißt Annuität A (auch wenn Zahlungsperiode kein Jahr ist): $A_t = T_t + Z_t$

1. Konstante Tilgung T $\Rightarrow$ Variable Annuität A ! schulden immer um gleichbleibenden Betrag gemindert --> zuerst hohe Annulität (viel Zinsen) und am Ende weniger (weniger Zinsen)

K_0 = Darlehen **i** = Zinssatz **T** = Tilgungsrate **n** = festgelegte Zahl der Tilgungsraten

Das Darlehen muss komplett getilgt werden $\Rightarrow$ **$K_0 = n \cdot T$** $\Rightarrow$ **$T = K_0 / n$**

z = zinsen
t = tilgung (gehört zum Darlehen)

Aber: Die Annuität **A** ist aufgrund der Schuldzinsen **Z** höher als **T** !! $\boxed{A_n = T + Z_n}$ was man jährlich der Bank zahlt

t bleibt immer gleich

Jahr	Restschuld Jahresende	Zinsen laufendes Jahr +	Tilgung laufendes Jahr = A
1	K_0 - T	$K_0 \cdot i$	T = const!
2	K_0 - 2T	(K_0 - T) $\cdot$i	T
3	K_0 - 3T	(K_0 - 2T) $\cdot$i	T
....	....	....	....
n	K_0 - nT = 0	(K_0 - (n-1)T) $\cdot$i = T $\cdot$i	T

Summe der n Tilgungsbeträge = Gesamtschuld K_0
Gezahlter Gesamtbetrag ist durch Zinsleistung höher

Tilgungsrechnung

Konstante Tilgung:

Bei dieser Zahlungsart **nehmen** die **Zinsen** wegen fortschreitender Tilgung und abnehmender Restschuld **ab**. Somit nehmen **auch die Annuitäten A** kontinuierlich an

⇒ Jährliche Gesamtleistung (Kapitaldienst) **A = Z + T** des Schuldners **nimmt ab**.

Durch konstante Tilgung hat man abnehmendes Gesamtbelastung / Jahr

Annuität ist nicht konstant!

2. Konstante Annuität ⇒ Variable jährliche Tilgung ! $\boxed{T_n = A - Z_n}$ man bezahlt immer das selbe

Restschuld nach n-ten Jahr: $K_n = K_{n-1} \cdot (1 + i) - A = K_{n-1} + Z_n - A = K_{n-1} - T_n$

Berechnung der Annuität (bei nachschüssiger Zahlung):

Anwendung des Äquivalenzprinzips, bezogen auf Zeitpunkt der letzten Schulderzahlung:

Bank → Leistung = Verzinstes Darlehn = $K_0 \cdot q^n$ (Aufzinsen!)

Schuldner → Gegenleistung = Ratenzahlung = Annuitätsleistungen

Bank erhält von Schuldner eine regelmäßige **Rate = Rente**, die man ebenfalls äquivalent verzinsen muß! *(A entspricht R)*

Anwendung der Rentenformel auf die akkumulierten Annuitätszahlungen

L = G ⇒ Aufgebautes **Renten(= Annuitäts)kapital** = $K_0 \cdot q^n$

Tilgungsrechnung

Leistung = Gegenleistung:

Berechnung der **fixen Annuität A** - umso höher, je kleiner Laufzeit **n** und je höher **q** = i + 1

(Grenzfall: n=1 ⇒ R = $K_0 \cdot q$ Zurückzahlung in einem Jahr inclusive Zins)

$$K_0 \cdot q^n \equiv K_n = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} = K_0 \cdot \frac{q-1}{1 - 1/q^n}}$$

bezieht sich nur auf annulitätendarlehen, nicht auf konstante tilgung

Berechnung der **Laufzeit n** bei fixer Annuität A:

$$K_0 \cdot q^n \equiv K_n = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \Rightarrow \quad K_0 \cdot q^n \cdot (q-1) = A \cdot q^n - A$$

$$\Rightarrow \quad A \cdot q^n - K_0 \cdot q^n \cdot (q-1) = A \quad \Rightarrow \quad q^n \cdot (A - K_0 \cdot (q-1)) = A$$

$$\Rightarrow \quad q^n = \frac{A}{A - K_0 \cdot (q-1)} \Rightarrow \quad n \cdot \log q = \log\left(\frac{A}{A - K_0 \cdot (q-1)}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{n = \frac{\log\left(\frac{A}{A - K_0 \cdot (q-1)}\right)}{\log q}}$$

Es ist: $A - K_0 \cdot (q-1) = A - K_0 \cdot i = T_1$

(erste Tilgungsrate!)

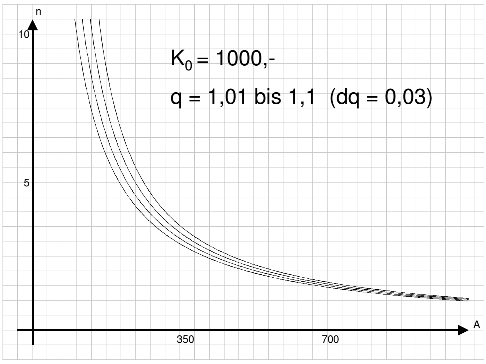
Tilgungsrechnung

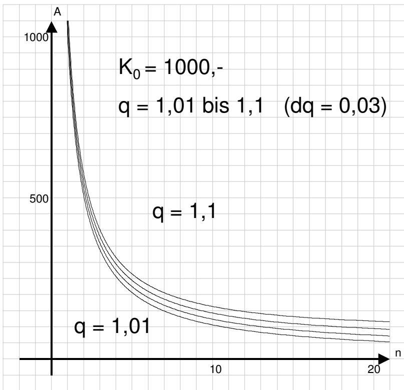
Berechnung der **Laufzeit n** bei fixer Annuität A:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\log\left(\dfrac{A}{A - K_0 \cdot (q-1)}\right)}{\log q} = \frac{\log\left(\dfrac{A}{T_1}\right)}{\log q}$$

Grenzfall: A = T1 $\Rightarrow$ n = 0

In diesem Fall wäre Z = A - T = 0, so daß kein Kapital verliehen wurde, dh Z = K·i = 0 $\Rightarrow$ K = 0





Tilgungsrechnung

Zusammenfassung allgemeiner Beziehungen:

- **Annuität:** $\mathbf{A_n = Z_n + T_n}$ (Entstandene Schuldzinsen + Tilgung)
- **Zinshöhe** am Ende einer Zinsperiode: $\mathbf{Z_n = K_{n-1} \cdot i}$ (gem. Restschuld zu Beginn Zinsperiode)
- **Restschuld** am Ende einer Zinsperiode: $\mathbf{K_n = K_{n-1} \cdot (1+i) - A_n}$

  Neue Restschuld = Alte aufgezinste Restschuld minus geleistete Annuität

$$K_n = K_{n-1} \cdot (1+i) - A_n = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot i - A_n = K_{n-1} - (A_n - Z_n) = K_{n-1} - T_n$$

- **Abtragen der Schuld** durch **Tilgung**. Generell muss gelten:

  a) Summe der reinen Tilgungen **T** (ohne Zinsleistung) ist gleich der ursprünglichen Schuld $\mathbf{K_0}$

  b) Zinseffekte werden durch jährliche Zinsaufwendungen $\mathbf{Z_n}$ abgetragen

  Summe aus beiden Leistungen ist die Annuität

  T + Z = A

  (= Betrag, den der Schuldner tatsächlich pro Jahr aufzuwenden hat ....)

$$T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n = \sum_{i=1}^{n} T_i = K_0$$

Wenn es keine Zinsen gäbe, dann wäre **Z** = 0 und **A = T** und man müßte nur die Schuld $\mathbf{K_0}$ in n Zahlungen zurückzahlen, so daß $\mathbf{K_0 = \sum T_i}$