Mathematik

1. Grundlagen

1.1. Mengen:

Definition Menge:

Eine ***Menge*** ist die Zusammenfassung von bestimmten Objekten zu einem Ganzen. Diese Elemente heißen dann ***Elemente*** der Menge.

Beispiel:

M_1 - Menge der natürlichen Zahlen von 2 bis 7

Schreibweisen

Aufzählend:

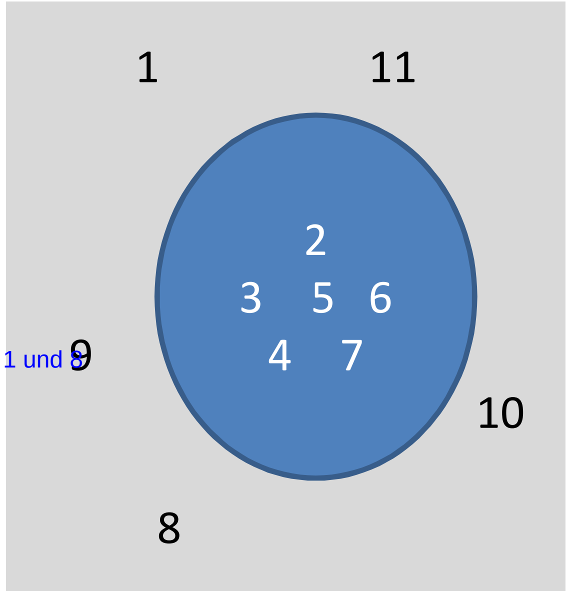
$M_1 = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ oder $M_1 = \{2; 3; \dots; 7\}$

Beschreibend:

$M_1 = \{a \in N | a > 1; a < 8\}$ gehört zu natürlichen Zahlen, zwischen 1 und 8

oder

$M_1 = \{a \in N | 1 < a < 8\}$

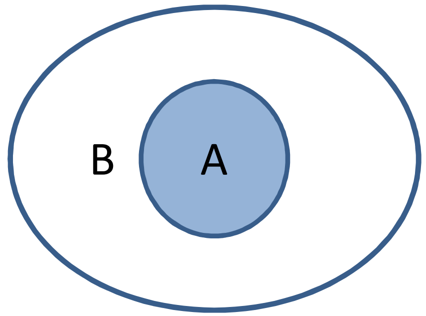


Es gilt: $4 \in M_1$

$10 \notin M_1$

Verhältnisse zweier Menge:

Teilmenge:



Eine Menge A heißt ***Teilmenge*** einer Menge B,

wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

$$\boldsymbol{A \subset B}$$

Gleichheit von Mengen:

Zwei Mengen A und B heißen ***gleich***, wenn gilt

$\boldsymbol{A \subset B}$ und $\boldsymbol{B \subset A}$ wenn alle von A teil von B sind und alle von B auch teil von A sind

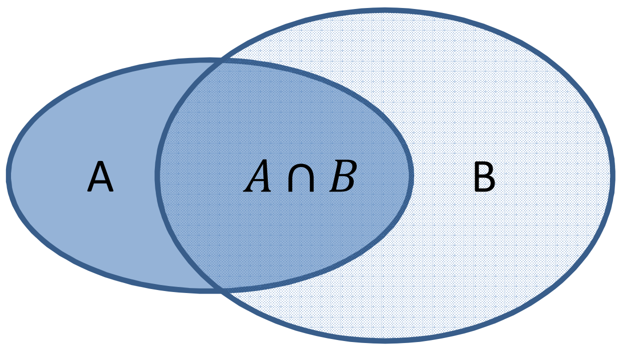
Man spricht von einer ***echten Teilmenge*** A von B,

wenn gilt: $\boldsymbol{A \subset B}$ und $\boldsymbol{A \neq B}$ a ist teil von b aber b nicht von A

Schnittmenge/Durchschnitt:

Die Schnittmenge zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören.

$$\boldsymbol{A \cap B = \{x \mid x \in A \ \land \ x \in B\}}$$



Verhältnisse zweier Menge:

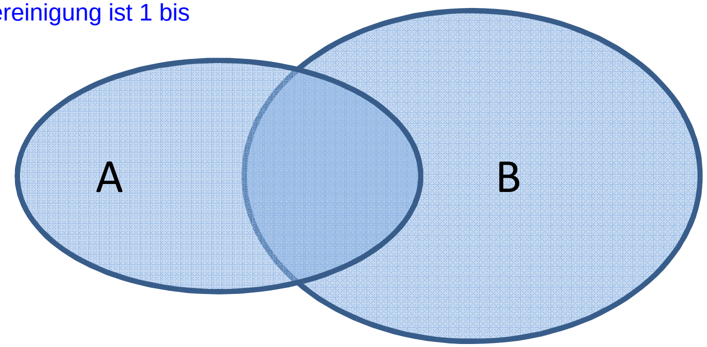
Vereinigung:

Die Vereinigungsmenge zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A oder zu B oder zu beiden Mengen gehören.

-> alle Elemente

z.B.: A=1,2,3 B=4,5,6 --> Vereinigung ist 1 bis

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \quad \vee \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\}$$

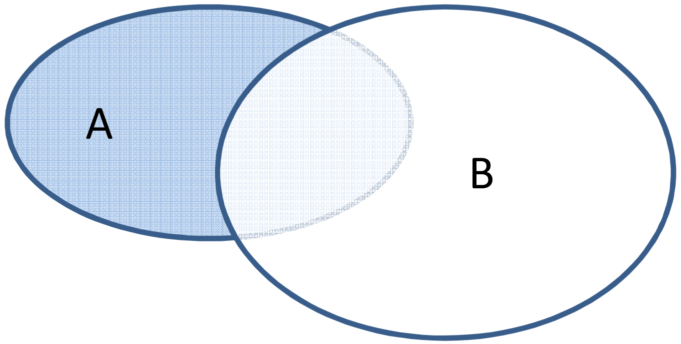


Restmenge / Differenzmenge:

"A ohne B" --> Elemente die zu a aber nicht zu b gehören

Die Differenzmenge zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A, nicht aber zu B gehören.

$$\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{B}\}$$



Verhältnisse zweier Menge:

Leere Menge:

Eine Menge heißt leere Menge $\emptyset$, wenn sie keine Elemente enthält.

Mächtigkeit:

Unter der Mächtigkeit einer Menge versteht man die Anzahl der Elemente dieser Menge.

Beispiel: $A = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ $|A| = 6$

Gleichheit von Mengen:

Zwei Mengen A und B heißen gleich, wenn jedes Element von A auch Element von B ist und umgekehrt.

Beispiel 1:

A={1,2,4,6,8}

B={1,3,6,9}

$A \cap B = \{1,6\}$ sowohl ... als auch ...

$A \cup B = \{1,2,3,4,6,8,9\}$ beide

$A \setminus B = \{2,4,8\}$ ohne B alles in A gelöscht was in B vorkommt

$B \setminus A = \{3,9\}$ ohne A

Beispiel 2: p ist teil von N

$A = \{1,3,5, \dots\} = \{x | x = 2p - 1, p \in N\}$ ungerade

$B = \{2,4,6, \dots\} = \{x | x = 2p, p \in N\}$ gerade Zahlen

$A \cap B = \emptyset$ keine Überschneidung, daher Schnittmenge leere Menge

$A \cup B = N$ natürliche Zahlen --> alle Natürlichen Zahlen

$A \setminus B = A$ es bleibt A

$B \setminus A = B$ es bleibt B

1.2. Intervalle:
geht vor allem um schreibweise

offenes Intervall:

(a, b)

bei - 5 bis 10 --> Intervall geht effektiv von -4,999 bis 9,9999

Intervall zwischen a und b wobei die Zahlen a und b selbst nicht Element des Intervalls sind

$Bsp.\ (-5,10) = \{x \in R| -5 < x < 10\}$

abgeschlossenes Intervall:
grenzen gehören zum Intervall dazu

$[a, b]$

Intervall zwischen a und b einschließlich der Zahlen a und b

$Bsp.\ [-5,10] = \{x \in R| -5 \leq x \leq 10\}$

halboffenes Intervall:
Grenzen sind gemischt --> eine gehört dazu und eine andere Grenze gehört nicht dazu

$(a, b]$

Intervall zwischen a und b – ohne a, aber mit b

$Bsp. (-5,10] = \{x \in R| -5 < x \leq 10\}$ von -4,999 bis 10

$[a, b)$

Intervall zwischen a und b – ohne b, aber mit a

$Bsp.\ [-5,10) = \{x \in R| -5 \leq x < 10\}$ von -5 bis 9,999

1.3. Ungleichungen

Regeln:

	Wenn	Dann	
1.	$a < b$ und $b < c$	$a < c$	
2.	$a < b$	$a + c < b + c$	für beliebiges c
3.	$a < b$ und $c < d$	$a + c < b + d$	
4.	$a < b$ und $c > 0$	$ac < bc$	
5.	$a < b$ und $c < 0$	$ac > bc$	! ! !
	bei Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl kehrt das Ungleichheitszeichen seine Richtung		
6.	$a < b$	$-a > -b$	
7.	$a < b$, $b > 0$ und $0 < c < d$	$ac < bd$	
8.	$0 < a < b$	$a^2 < b^2$	
9.	$0 < a < b$ oder $a < b < 0$	$1/a > 1/b$	
10.	$a<0<b$	$1/a < 1/b$	
11.	$b>a$ und $b<c$	$a < b < c$	mgl. Schreibweise

1.3. Ungleichungen

Bei der Lösung von Ungleichungen ist bei der Multiplikation bzw. Division mit einer unbekannten Variablen eine **Fallunterscheidung** vorzunehmen und zwar an der Stelle, an welcher der Term das Vorzeichen wechselt.

Beispiel:

$$\frac{2-x}{4+x} - 5 < 0 \qquad | + 5$$

$$\frac{2-x}{4+x} < 5$$

Im nächsten Schritt würde man mit *(4+x*) multiplizieren. Es muss nun unterschieden werden, für welche *x* der Term positiv bzw. negativ ist.

Fall 1: $4 + x > 0 \quad | - 4$

$x > -4$

keine Richtungsänderung

Fall 2: $4 + x < 0 \quad | - 4$

$x < -4$

Richtungsänderung des Ungleichheitszeichens

Fall 3: $4 + x = 0 \quad | - 4$

$x = -4$

!!! Division durch Null. In diesem Fall ist die Gleichung **nicht definiert**!

$L_3 = \{x | x \neq -4\}$

Fall 1: $x > -4$

$$\frac{2-x}{4+x} < 5 \qquad | * (4+x)$$

$$2 - x < 5(4+x)$$

$$2 - x < 20 + 5x \qquad | + x \quad | - 20$$

$$-18 < 6x \qquad | : 6$$

$$-3 < x$$

$$x > -3$$

!!! Vergleich der Ausgangsbedingung $x > -4$ und der Lösung $\mathrm{x} > -3$. Für welche x treffen beide Bedingungen zu?

$L_1 = \{x | x > -3\}$ alle X größer als -3

Fall 2: $x < -4$

$$\frac{2-x}{4+x} < 5 \qquad | * (4+x)$$

$$2 - x > 5(4+x) \qquad !!!$$

$$2 - x > 20 + 5x \qquad | + x \quad | - 20$$

$$-18 > 6x \qquad | : 6$$

$$-3 > x$$

$$x < -3$$

!!! Vergleich der Ausgangsbedingung $x < -4$ und der Lösung $\mathrm{x} < -3$. Für welche x treffen beide Bedingungen zu?

$L_2 = \{x | x < -4\}$ weil auch kleiner als -3 aber auch -4 und -4>-3

$L_1 = \{x|x > -3\}$

$L_2 = \{x|x < -4\}$

$L_3 = \{x|x \neq -4\}$ weil man nicht durch 0 teilen darf und in dem falle in der ausgangsgleichung dann durch 0 teilen müsste; hier ist x=0 da in der ausgangsgleichung x unten im Bruch steht

Unter Beachtung der einzelnen Lösungsmengen kann nun die Gesamt-Lösungsmenge erfasst werden.

$L = \{x \in R \mid x < -4 \vee x > -3\}$

Eine Fallunterscheidung ist auch bei dem Vorkommen von Potenzen sowie Beträgen erforderlich!

1.4. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Potenzen und Wurzeln

$\boldsymbol{a^x}$

$a \quad Basis$
$x \quad Exponent$

	Erlaubte Umformungen	Bedingungen
1.	$a^x * a^y = a^{x+y}$	$x, y \in Z$
2.	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\mathrm{a} \neq 0, \quad x, y \in Z$
3.	$a^x * b^x = (a * b)^x$	$x \in N$
4.	$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	$\mathrm{b} \neq 0, \quad x \in N$
5.	$\frac{1}{a^x} = a^{-x}$	$\mathrm{a} \neq 0, \quad x \in N$
6.	$(a^x)^y = a^{x*y}$	$x, y \in Z$
7.	$a^0 = 1$	$\mathrm{a} \neq 0$
8.	$\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}}$ wurzel a^x = a^x/2	$y \in N, x \in Z$

Logarithmen

Gilt $a^x = b, a > 0, a \neq 1$ so heißt x auch Logarithmus von b zur Basis a.

$x = log_a b$ man zieht den exponenten heraus --> das ist ein logarithmus

dekadischer Logarithmus: Logarithmus zur Basis 10: $\log(b) = log_{10} b$

natürlicher Logarithmus: Logarithmus zur Basis e (Eulersche Zahl) $\ln(b) = log_e b$

	Erlaubte Umformungen
1.	$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
2.	$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$
3.	$log(a^n) = n * \log(a)$
4.	$\log(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} * \log(a)$

logarithmus "auseinanderziehen"

Beispiel:

Wie lange braucht ein beliebiger Kapitaleinsatz K_0 um sich bei einem Zinssatz von i zu verdoppeln? $(K_t = 2 * K_0)$ endkapital das doppelte vom anfangskapital

$K_t = K_0 * (1+i)^t$ $Ges: t$

$\frac{K_t}{K_0} = (1+i)^t$ $|\log(\,)$ $es\ müssen\ beide\ Seiten\ logarithmiert\ werden,$

$es\ kann\ auch \ln(\,)\ genutzt\ werden.$

Logarithmen

Beispiel aus der Finanzmathematik:

Wie lange braucht ein beliebiger Kapitaleinsatz K_0 um sich bei einem Zinssatz von i zu verdoppeln?

Anfangsbetrachtung: $K_t = 2 * K_0$

Exponentielle Verzinsung (Zinseszinsrechnung):

$K_t = K_0 * (1+i)^t$ $\quad Ges: t$

$2 * K_0 = K_0 * (1+i)^t \quad |: K_0$

$2 = (1+i)^t \quad |\log(\,)$ Es müssen beide Seiten logarithmiert werden!

Die Verwendung von log oder ln ist gleichgültig.

$\log(2) = log(1+i)^t$ Anwendung der Logarithmengesetze

$\log(2) = t * \log(1+i)$

$$t = \frac{\log(2)}{\log(1+i)}$$

1.5. häufig verwendete Symbole

(x, y)	*offenes Intervall*
$[x, y]$	*geschlossenses Intervall*
$(x, y]$	*halboffenes Intervall*
$[x, y)$	*halboffenes Intervall*
$\{x, y\}$	*Menge*
$\subset$	*Teilmenge*
$\cap$	*Schnittmenge*
$\cup$	*Vereinigungsmenge*
$\setminus$	*Differenz von Mengen*
$\emptyset$	*leere Menge*
$\in$	*Element von*
$\wedge$	*logisches* ⍰nd
$\vee$	*logisches* oder
$\forall$	*für alle*