Probabilidad y Estadística Fundamental

Introducción a la probabilidad

elaciones de eventos y reglas de probabilidad

Profesor: Nicolás López

Universidad Nacional de Colombia

Contenido

Medida de probabilidad II

En el ejemplo del dado **corriente**, no es necesario repetir una gran cantidad de veces el experimento aleatorio para obtener la medida de probabilidad de un evento dado.

1. Si $A = \{2, 4, 6\}$.
   $P(A) =$???
2. Si $B = \{1, 2, 3\}$.
   $P(B) =$???
3. Si $C = A \cup B$.
   $P(C) =$???
4. Si $D = A \cap B$.
   $P(D) =$???
5. Si $E = A^c$.
   $P(E) =$???

Medida de probabilidad II

En el ejemplo del dado **corriente**, no es necesario repetir una gran cantidad de veces el experimento aleatorio para obtener la medida de probabilidad de un evento dado.

1. Si $A = \{2, 4, 6\}$.
   $P(A) = \frac{3}{6}$
2. Si $B = \{1, 2, 3\}$.
   $P(B) = \frac{3}{6}$
3. Si $C = A \cup B$.
   $P(C) = \frac{5}{6}$
4. Si $D = A \cap B$.
   $P(D) = \frac{1}{6}$
5. Si $E = A^c$.
   $P(E) = \frac{3}{6}$

Medida de probabilidad II

Intuitivamente encontramos las probabilidades de los eventos de interés como

$$\frac{\textit{Número de casos favorables}}{\textit{Número de casos posibles}}$$

Ahora ¿que sucede si se conoce que el dado está **cargado**? ¿a qué son iguales las anteriores probabilidades? ¿basta con saber que el dado está cargado? ¿qué conocía antes (dado corriente) que desconoce ahora (dado cargado)?

Medida de probabilidad II

Suponga un dado con el siguiente **vector de probabilidades**

Evento simple	Probabilidad
$P(E_1)$	$\frac{1}{21}$
$P(E_2)$	$\frac{2}{21}$
$P(E_3)$	$\frac{3}{21}$
$P(E_4)$	$\frac{4}{21}$
$P(E_5)$	$\frac{5}{21}$
$P(E_6)$	$\frac{6}{21}$

Para verificar el vector de probabilidades deberíamos repetir el experimento aleatorio (lanzar el dado cargado) un número grande de veces. Asumiendo verdadero el vector, ¿cómo cambiarían las anteriores probabilidades?

Medida de probabilidad II

1. Si $A = \{2, 4, 6\}$.
   $P(A) =$???
2. Si $B = \{1, 2, 3\}$.
   $P(B) =$???
3. Si $C = A \cup B$.
   $P(C) =$???
4. Si $D = A \cap B$.
   $P(D) =$???
5. Si $E = A^c$.
   $P(E) =$???

Medida de probabilidad II

Por la propiedad 3 de la medida de probabilidad

1. Si $A = \{2, 4, 6\}$.
   $P(A) = \frac{12}{21}$
2. Si $B = \{1, 2, 3\}$.
   $P(B) = \frac{6}{21}$
3. Si $C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
   $P(C) = \frac{16}{21}$
4. Si $D = A \cap B = \{2\}$.
   $P(D) = \frac{2}{21}$
5. Si $E = A^c = \{1, 3, 5\}$.
   $P(E) = \frac{9}{21}$

Medida de probabilidad II

En general, para ambos ejemplos se tienen los siguientes pasos para calcular la probabilidad de un evento:

1. Haga una lista de todos los eventos simples del espacio muestral.
2. Asigne el vector de probabilidades correspondiente.
3. Determine cuáles eventos simples resultan en el evento de interés.
4. Sume las probabilidades de los eventos simples que resulten en el evento de interés.

Por lo cual, basta conocer el vector de probabilidades para caracterizar la medida de probabilidad [1].

[1] Es decir, para poder calcular la probabilidad de cualquier evento A

Medida de probabilidad II

Sin embargo, hay una diferencia importante al momento de calcular las probabilidades de los eventos para los dos tipos de dados.

1. Para el dado corriente **basta con saber el número de elementos en el conjunto** para determinar la probabilidad de ocurrencia de los eventos ya que su vector de probabilidades es $P(E_i) = \frac{1}{6}$ para $i = 1, ..., 6$.
2. Para el dado cargado es necesario sumar las probabilidades de los eventos simples que conforman un evento para determinar su probabilidad de ocurrencia. Contar el número de elementos en conjunto **no permite** saber la probabilidad de ocurrencia de un evento.

Medida de probabilidad II

Experimento Laplaciano

En un experimento aleatorio para el cual todos los eventos simples tienen la misma probabilidad de ocurrencia, para calcular $P(A)$ basta con contar el número de elementos en A y el número de casos posibles y así

$$P(A) = \frac{\textit{Número de casos favorables a } A}{\textit{Número de casos posibles}}$$

Relaciones entre eventos

Al ser conjuntos, los eventos pueden transformarse a través operaciones para dar lugar a nuevos eventos, a los cuales podemos calcular sus probabilidades correspondientes. ¿Qué significa que sucedan los eventos?

- $A \cup B$.
- $A \cap B$.
- A^c.

Para dos eventos A y B. ¿Cómo mido la probabilidad de ocurrencia de estos nuevos eventos?

Relaciones entre eventos

Regla de la adición

Basta con conocer la **regla de la adición** para determinar la probabilidad de los eventos

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}) - \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

Despejando de la regla de la adición

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)}$$

Si $B = A^c$ se tiene

$$\begin{aligned} P(A \cap A^c) &= P(A) + P(A^c) - P(A \cup A^c) \\ P(\emptyset) &= P(A) + P(A^c) - P(\Omega) \\ 0 &= P(A) + P(A^c) - 1 \end{aligned}$$

De donde

$$\mathbf{P(A) = 1 - P(A^c)}$$

Conclusiones II

- Los datos obtenidos de un estudio son observados como el resultado de un experimento aleatorio que se modela matemáticamente para inferir acerca del experimento.
- La probabilidad es utilizada como herramienta en la construcción de estos modelos y para evaluar la confiabilidad de las conclusiones obtenidas a partir de una muestra.
- La probabilidad se mide sobre eventos, que son conjuntos, no números. Por lo cual es importante entender las características y operaciones de los conjuntos.