Probabilidad y Estadística Fundamental

Principios de variables aleatorias. Variables aleatorias discretas y sus distribuciones

Profesor: Nicolás López

Universidad Nacional de Colombia

Contenido

Contenido

Introducción

Algunos fenómenos aleatorios son encontrados de manera recurrente:

1. Número total de éxitos, cada uno con probabilidad p, dado un número determinado de intentos n con una probabilidad.
2. Número total de eventos presentados en un intervalo dado, cuando en promedio se presentan λ eventos por intervalo.
3. Numero total de elementos con una característica dada en una muestra de tamaño n, tomada de una población con N elementos, R de ellos con la característica determinada.
4. Número total de intentos hasta alcanzar un primer éxito, cada intento con probabilidad de éxito p.
5. Número total de intentos hasta alcanzar k éxitos, cada intento con probabilidad de éxito p.

Dichos fenómenos inducen la existencia de variables aleatorias discretas que siguen **modelos de probabilidad** usuales. Estos modelos son **parametrizados** por uno o más números que las caracterizan.

Algunas distribuciones discretas: Uniforme discreta

En el escenario que los posibles valores de la v.a discreta sean equiprobables, se dice que la v.a sigue una distribución uniforme discreta:

Distribución uniforme discreta

Una v.a X tiene distribución discreta uniforme de parámetro N, con N entero positivo, si su fmp está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{si } x = 1, ..., N \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

- Exp: Obtención de un número determinado al lanzar un dado **justo** una vez.
- $X =$"Número obtenido al lanzar un dado justo una vez".
  $X \sim U(N = 6)$.

Algunas distribuciones discretas: Bernoulli

Cuando la v.a discreta toma únicamente dos valores $x = 0$ (llamado *éxito*) y $x = 1$ (llamado *fracaso*), con probabilidad p y $q = 1-p$ respectivamente, se dice que la v.a. sigue una distribución Bernoulli:

Distribución Bernoulli

Una v.a X tiene distribución Bernoulli de parámetro p, con $p \in [0, 1]$, si su fmp está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & \text{si } x = 0, 1 \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

- Exp: Un lanzamiento de tiro libre en baloncesto.
- $X =$"Número de cestas al lanzar un balón de baloncesto una vez con una probabilidad de éxito de 0.9". $X \sim Ber(p = 0{,}9)$.

Algunas distribuciones discretas: Binomial

Si en el caso anterior, en lugar de tener un único evento de éxito o fracaso, se cuenta con n eventos, cada uno con los mismos dos posibles resultados y las mismas probabilidades de antes, se dice que la v.a. sigue una distribución Binomial:

Distribución binomial

Una v.a X tiene distribución Binomial de parámetros n, con n entero positivo, y p, con $p \in [0, 1]$, si su fmp está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{si } x = 0, ..., n \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

- Exp: 10 lanzamientos de tiro libre en baloncesto.
- $X =$"Número de cestas al lanzar un balón de baloncesto 10 veces con una probabilidad de éxito de 0.9". $X \sim Bin(n = 10, p = 0{,}9)$.

Algunas distribuciones discretas: Hipergeométrica

Ahora, si se busca el numero total de elementos con una característica dada en una muestra de tamaño n, tomada de una población con N elementos, R de ellos con la característica determinada, se dice que la v.a. sigue una distribución hipergeométrica:

Distribución hipergeométrica

Una v.a X tiene distribución hipergeométrica de parámetros N, R, n, con n entero positivo, si su fmp está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\binom{R}{x}\binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}} & \text{si } x = 0, ..., n \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

- Exp: Inspección de fallas en línea de producción.
- $X =$"Número de elementos defectuosos encontrados en una muestra de tamaño $n = 5$, obtenida de una población con $N = 1000$ elementos, $R = 50$ de ellos defectuosos".
  $X \sim Hg(N = 1000, R = 50, n = 10)$.

Algunas distribuciones discretas: Gemétrica

De manera opuesta al caso bernoulli, si se busca el número de intentos necesarios para llegar al primer éxito (en lugar de la probabilidad de éxito en el primer intento), se tiene la distribución geométrica. En esta, cada evento tiene de manera semejante una probabilidad de éxito p y de fracaso $n - p$

Distribución geométrica

Una v.a X tiene distribución geométrica de parámetro p con $p \in [0, 1]$, si su fmp está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & \text{si } x = 1, ... \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

- Exp: Lanzamientos de tiro libre en baloncesto hasta alcanzar la primeras cestas.
- $X =$"Número de intentos hasta alcanzar las primeras 10 cestas de tiro libre". $X \sim G(p = 0{,}9)$.

Algunas distribuciones discretas: Binomial negativa

Si en el caso anterior, en lugar de alcanzar el primer éxito, se cuenta la cantidad de intentos para alcanzar k éxitos, cada uno con los mismos dos posibles resultados (éxito y fracaso) y las mismas probabilidades de antes, se dice que la v.a. sigue una distribución Binomial negativa:

Distribución binomial negativa

Una v.a X tiene distribución binomial negativa de parámetro k y p con $p \in [0, 1]$ y k entero positivo, si su fmp está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{k-1}(1-p)^{x-k}p^k & \text{si } x = k, k+1, \dots \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

- Exp: Lanzamientos de tiro libre en baloncesto hasta alcanzar las primeras 10 cestas.
- $X =$"Número de intentos hasta alcanzar las primeras 10 cestas de tiro libre". $X \sim Bn(k = 10, p = 0{,}9)$.

Algunas distribuciones discretas: Poisson

Si se busca modelar el número total de eventos (conteos) presentados en un intervalo dado, cuando en promedio se presentan λ eventos por intervalo, el modelo de Poisson es el indicado:

Distribución Poisson

Una v.a X tiene distribución Poisson de parámetro λ con $\lambda > 0$ si su fmp está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} & \text{si } x = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

- Exp: Ingreso diario de personas a UCI en Teusaquillo.
- $X =$"Número de personas que ingresan diariamente a UCI en Teusaquillo". $X \sim P(\lambda = 10)$.

Conclusiones

1. Estos modelos de probabilidad son adaptables a una gran cantidad de ejemplos prácticos. Sin embargo, cada uno tiene unos **supuestos** sobre los cuales son fundamentadas.
2. Es importante establecer claramente cuál es la v.a de interés, y establecer claramente los parámetros correspondientes, en caso de seguir uno de los modelos anteriormente presentados.
3. Al igual que las distribuciones discretas empíricas (como la obtenida para la v.a número de hijos), podemos calcular con ayuda de la fmp características numéricas de la variable aleatoria, cada una con una interpretación dado el contexto del problema.