PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA FUNDAMENTAL - TALLER 2

Profesor: Andrés Nicolás López. Departamento de Estadística. Primer semestre 2023

Preguntas 1

1.1 En `http://www.math.csi.cuny.edu/abhijit/113/rlabs/lab2.pdf` encuentra un laboratorio en R para simular experimentos aleatorios. Siguiendo el laboratorio, complete los espacios a continuación:

Experimento: Lanzamiento de una moneda justa.

Eventos simples:

(a) E_1 : ______________________.

(b) E_2 : ______________________.

Regularidad estadística:

n	E_1	E_2
100	____	____
500	____	____

Table 1: Lanzamiento de una moneda justa. Frecuencias relativas.

Experimento: ______________________.

Eventos simples:

(a) E_1 : ______________________.

(b) E_2 : ______________________.

(c) E_3 : ______________________.

(d) E_4 : ______________________.

(e) E_5 : ______________________.

(f) E_6 : ______________________.

Regularidad estadística:

n	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
200	____	____	____	____	____	____
1000	____	____	____	____	____	____
2000	____	____	____	____	____	____

Table 2: Lanzamiento de una dado justo. Frecuencias relativas.

1.2 Considere las siguientes cinco secuencias de 10 lanzamientos de una moneda:

1. (C,C,C,C,C,C,C,C,C,S).
2. (C,S,S,S,S,S,S,C,S,S).
3. (C,S,S,C,C,S,S,C,C,C).
4. (C,S,C,C,C,C,S,C,C,C).
5. (S,S,S,S,S,C,S,S,S,S).

Siendo C, cara, y S, sello.

a. Si usted supiera que la moneda es justa y que sólo **una** de las cinco secuencias es correcta, explique cuál seleccionaría y por qué.

b. Si usted supiera que la moneda es justa y que **las cinco** secuencias son correctas, ¿cuál secuencia sería la más probable de ser observada?.

c. Si usted supiera que cada una de las secuencias corresponde al lanzamiento de diferentes monedas cargadas, ¿cuál supone que sería la probabilidad de obtener cara para cada una de las 5 monedas?.

1.3 Sean $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $F = \{2,3,4,5,6,7,8\}$, $A = \{2,4,6,8\}$ y $B = \{3,6\}$. Relacione cada ítem de la columna izquierda con su correspondiente en la columna derecha:

(A) $A \cup B$	( ) $\{3,5,7\}$.
(B) $(A \cap B^c_\Omega) \cup (A^c_\Omega \cap B)$	( ) $\{2,3,4,6,8\}$.
(C) $A \cap B \cap F$	( ) $\{6\}$.
(D) $A \cup B \cup F$	( ) $\emptyset$.
(E) Ω^c	( ) $\{2,3,4,8\}$.
(F) $\Omega \cap F^c_\Omega$	( ) F.
(G) A^c_F	( ) $\{1\}$.
(H) $(A \cap B)^c_{A\cup B} \cup \{7\}$	( ) $\{2,3,4,7,8\}$.

1.4 Para un estudiante de la estadística hay un 20% de probabilidad de participar en el equipo de baloncesto de su facultad, una vez ahí, la probabilidad de jugar en el primer partido de la temporada es del 30%. Si la probabilidad de encestar un triple cuándo el estudiante de estadística es seleccionado en el equipo y además juega en el primer partido es del 5%. ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante de estadística logre hacer parte del equipo de baloncesto de su facultad y que en el primer partido de la temporada logre encestar un triple?

1.5 Suponga que cierta enfermedad está presente en 10% de la población, y que hay un examen de diseñado para detectar si la enfermedad está presente. A veces el examen, es negativo cuando la enfermedad está presente y otras es positivo en ausencia de ella. La siguiente tabla muestra la proporción de tiempos en que el examen produce los diferentes resultados.

	Examen positivo B	Examen negativo B^c
Enfermedad Presente (A)	0.08	k_1
Enfermedad Ausente (A^c)	k_2	0.85

Table 3: Proporción de tiempos en que el examen produce diferentes resultados.

a. Encuentre el valor de las constantes k_1 y k_2.

b. Encuentre la probabilidad de un falso positivo, que el examen sea positivo, dado que la persona no tiene enfermedad.

c. Encuentre la probabilidad de un falso negativo, que el examen sea negativo, dado que la persona tiene la enfermedad.

d. Las probabilidades a priori y a posteriori están dadas por $(P(A), P(A^c))$ y $(P(A|B), P(A^c|B))$ respectivamente. Encuentre e interprete cada una de estas parejas de probabilidades.

1.6 En la asignatura *Estadística Fundamental* asisten a clase 100 de los 150 alumnos matriculados. Se sabe que aprueban el 90% de los alumnos que asisten a clase y el 30% de los que no asisten.

a. Si se selecciona un alumno al azar ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado?

b. Si se selecciona un alumno al azar y se sabe que ha perdido la materia, ¿cuál es la probabilidad de que haya asistido a clase?.

Preguntas 2

2.1 Responda Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda **y explique**:

a. Un experimento no es aleatorio si se conoce su resultado de antemano.
b. Dos eventos simples diferentes son siempre mutuamente excluyentes.
c. Un evento compuesto se conforma mediante la unión de eventos simples.
d. El evento $(A \cap B)^c$ sucede cuándo pasa A^c, B^c ó ambos.
e. La estabilización de la regularidad estadística es igual a la frecuencia relativa.
f. La probabilidad siempre es estrictamente mayor o igual que cero para cualquier evento.

2.2 Se lanza un dado corriente 3 veces. Describa el experimento aleatorio, el espacio muestral y la medida de probabilidad correspondiente.

2.3 Sean A, B, C eventos arbitrarios. Describir en términos de A, B y C el evento "Por lo menos uno de los eventos A, B, C ocurre".

2.4 Se lanzan tres monedas justas al aire. Halle la probabilidad de obtener dos o más caras.

2.5 Se lanzan dos dados de 6 caras numeradas del 1 al 6. Determine el experimento asociado, el espacio muestral correspondiente y calcule la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea 9.

2.6 Se lanzan al aire dos dados de 4 caras numeradas del 1 al 4. Calcular la probabilidad de que la diferencia de los números obtenidos sea 3 ó -3.

2.7 En la carta de un restaurante se puede elegir un menú compuesto de un primer plato, un segundo plato y un postre. Hay para elegir 8 primeros platos, 5 segundos y 6 postres. ¿Cuántos menús diferentes se pueden elegir?

2.8 Suponga que un examen tiene 15 preguntas de selección múltiple con 5 opciones de respuesta cada una, de las cuales solamente una es la correcta. Si un estudiante decide contestar al azar el examen:

a. ¿Cuál es el modelo probabilístico apropiado para la variable que representa el número de respuestas correctas al resolver la totalidad del examen en mención?
b. Escriba la función de probabilidad y la función de distribución de la variable descrita en el numeral anterior.
c. ¿Cuántas preguntas espera responder el estudiante correctamente?.
d. Si el examen se aprueba al responder por lo menos 9 preguntas correctamente, ¿Cuál es la probabilidad de que esto ocurra?.

2.9 El valor esperado del número de clientes que llega a determinado banco en un minuto es igual a 3.

a. ¿Cuál es el modelo probabilístico apropiado para la variable que representa el número de clientes que llega en un minuto al banco en consideración?
b. Escriba la función de probabilidad puntual y la función de distribución de la variable descrita en el numeral anterior.
c. ¿Cuál es la probabilidad de que en un minuto particular lleguen entre 3 y 5 clientes al banco en mención?

2.10 Una población normalmente distribuida de peso de roedores tiene media de 63.5 gramos y desviación estándar de 12.2 gramos:

a. ¿Qué proporción de la población tiene un peso de 78 gramos?
b. ¿Qué proporción de la población tiene un peso mayor a 78 gramos?
c. ¿Qué proporción de la población tiene un peso menor o igual a 78 gramos?
d. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar de manera aleatoria de esta población un roedor con peso menor a 41 gramos?
e. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar de manera aleatoria de esta población un roedor con peso menor a 50 gramos ó mayor a 80 gramos?
f. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar de manera aleatoria de esta población un roedor con peso entre 60 y 70 gramos?

Preguntas 3

3.1 Responda Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda **y explique**:

a. El lanzamiento de una moneda cargada con probabilidad 1 de obtener cara es un experimento determinístico.

b. La probabilidad de la intersección de eventos mutuamente excluyentes es siempre igual a cero.

c. Conocer las probabilidades de cada evento simple determina la probabilidad de cualquier evento compuesto si Ω es finito.

d. El evento $A \cap B^c$ sucede cuándo pasa A pero no B.

e. Un espacio de probabilidad es laplaciano si todos los eventos simples tienen probabilidad mayor a cero de ser seleccionados.

f. La probabilidad de Ω siempre es igual a uno.

3.2 Se lanza una moneda corriente 3 veces. Describa el experimento aleatorio, el espacio muestral y la medida de probabilidad correspondiente.

3.3 Sean A, B, C eventos arbitrarios. Describir en términos de A, B y C el evento "Exactamente dos de los eventos A, B, C ocurren".

3.4 Se lanzan tres monedas justas al aire. Halle la probabilidad de no obtener tres caras ni tampoco tres sellos (recuerde las relaciones entre conjuntos y sus probabilidades).

3.5 Calcula la probabilidad de que al lanzar dos dados justos de 4 caras numeradas del 1 al 4 la suma de números obtenidos sea 6.

3.6 Se lanzan al aire dos dados de 4 caras numeradas del 1 al 4. Calcular la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea mayor que 5.

3.7 Se extrae una bola de una urna que contiene 6 bolas rojas y 4 verdes, se observa si ha sido roja y se vuelve a introducir; luego se extrae otra bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean rojas?

3.8 Un club de lectura comienza una campaña telefónica para aumentar su número de miembros. Con base en experiencia previa, una de cada 10 personas que recibe la llamada se une al club. Si en un día 20 personas reciben una llamada telefónica ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos dos de ellas se una al club? ¿cuál es el número esperado?. Interprete este último resultado.

3.9 Un total de 250 estudiantes hacen parte del curso *Matemáticas Básicas*. Si la probabilidad de que uno de los estudiantes esté de cumpleaños el día del examen es de 1/365, ¿cuál es la probabilidad de encontrar al menos un estudiante de cumpleaños el día del examen?. Calcule la probabilidad exacta y la aproximada.

3.10 Los puntajes de un examen están distribuidos normalmente con valor esperado 500 y desviación estándar 100. Si el profesor decide aprobar únicamente al 25% de los estudiantes con la calificación más alta

a. ¿cuál es la mínima calificación que debe tener un estudiante para aprobar?.

b. ¿cuál es la probabilidad de reprobar la materia?.

Preguntas 4

4.1 Responda Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda **y explique**:

a. Si dos experimentos aleatorios tienen el mismo conjunto de posibles resultados, los experimentos son iguales.
b. Cualquier evento es mutuamente excluyente con el evento $\emptyset$.
c. La suma de las probabilidades de los eventos simples es igual a 1.
d. El evento A^c sucede cuándo no pasa A ni tampoco otro evento B arbitrario.
e. Al jugar una lotería que toma aleatoriamente 6 números de un total de 46, la probabilidad de las balotas (1,2,3,4,5,6) es la misma que la de tu combinación favorita de balotas.
f. La probabilidad de la unión de eventos mutuamente excluyentes es igual al producto de sus probabilidades correspondientes.

4.2 Se toma una carta de una baraja inglesa al azar. Describa el experimento aleatorio, el espacio muestral y la medida de probabilidad correspondiente.

4.3 Sean A, B, C eventos arbitrarios. Describir en términos de A, B y C el evento "Por lo menos dos de los eventos A, B, C ocurren".

4.4 Se lanzan tres monedas justas al aire. Halle la probabilidad de obtener una o más caras ó uno o mas sellos (recuerde las relaciones entre conjuntos y sus probabilidades).

4.5 Se lanzan al aire dos dados de 4 caras numeradas del 1 al 4. Calcular la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea mayor que 5.

4.6 Se lanza un dado con forma de dodecaedro y las caras numeradas del 1 al 12. Halla la probabilidad de que el número obtenido sea múltiplo de 3.

4.7 Se ha observado que realmente 1 de cada 10 gatos prefiere Whiskas. Si se seleccionan aleatoriamente 3 de estos gatos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos prefiera Whiskas?. Suponga que la preferencia de los gatos es independiente.

4.8 Grafique y comente las funciones másicas de probabilidad de las siguientes distribuciones:

a. $Bin(n = 10, p = 0.2)$, $Bin(n = 10, p = 0.5)$, $Bin(n = 10, p = 0.8)$.
b. $Bin(n = 10, p = 0.5)$, $Bin(n = 20, p = 0.5)$, $Bin(n = 50, p = 0.8)$.
c. $Poisson(\lambda = 1)$, $Poisson(\lambda = 5)$, $Poisson(\lambda = 10)$.
d. $Hg(n = 4, R = 5, N = 10)$, $Hg(n = 4, R = 5, N = 20)$, $Hg(n = 4, R = 5, N = 50)$.
e. $Hg(n = 4, R = 5, N = 10)$, $Hg(n = 4, R = 7, N = 10)$, $Hg(n = 4, R = 9, N = 10)$.

4.9 Si el número promedio de mensajes de texto enviados por un operador es de 100 por minuto ¿cuál es la probabilidad de que el operador envíe un mensaje en un segundo?

4.10 Se muestra a continuación la diferencia en peso (en libras) de 15 individuos después de una dieta particular. Diferencias positivas implican aumento de peso, por otra parte, diferencias negativas indican una disminución de peso

```
-1.51  1.73 -2.34  7.38  2.32 -2.28  2.95  3.95  3.30 -0.22  7.05  2.56 -1.48 -7.86  5.50
```

Asuma que las diferencias provienen de una distribución normal con media 0 libras y varianza a) 16 libras, b) 9 libras y c) 4 libras. Grafique los tres escenarios, ubique la media observada y para cada uno responda ¿cuál es la probabilidad de encontrar un promedio mayor o igual al encontrado en la muestra?

Preguntas 5

5.1 Sean A, B, C eventos arbitrarios. Describir en términos de A, B y C el evento "A lo más uno de los eventos A, B, C ocurre".

5.2 Se busca la primera persona con gripa de una población determinada de manera independiente, una vez encontrada, se detiene la búsqueda. ¿cuál es el espacio muestral asociado a este experimento aleatorio?. Si la probabilidad de tener gripa es p, ¿a qué es igual la probabilidad de un evento simple arbitrario E_i?

5.3 De los 100 estudiantes que ingresaron al programa de pregrado en estadística, 48 inscribieron la electiva *internet palazzo* y 36 la electiva *soldadura*. Doce de estos estudiantes inscribieron ambas electivas. Si se selecciona de manera aleatoria uno de los estudiantes de primer semestre de estadística, ¿cuál es la probabilidad de que haya inscrito al menos una de las asignaturas?

5.4 Calcule la media y la varianza de una variable aleatoria X con distribución de Poisson con $P(X = 0) = 0.02$.

5.5 El número promedio de accidentes de tránsito en cierta carretera es dos por semana. Suponga que el número de accidentes sigue una distribución de Poisson con promedio igual a dos accidentes a la semana. Encuentre la probabilidad de que no haya accidentes en esta carretera durante los siguientes periodos: 1 semana, 2 semanas, 3 semanas y 4 semanas.

5.6 Una ciudad tiene 21 sectores comerciales, de los cuales 10 no tienen almacén de autos. Se extrae al azar una muestra de 5 sectores, para en aquellos que no tienen almacén de autos establecer uno.

   a. ¿Cuál es el modelo probabilístico apropiado para la variable que representa el número de sectores comerciales que no tienen almacén de autos en los 5 seleccionados?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de tener que establecer como máximo 3 almacenes de autos?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de tener que establecer exactamente 4 almacenes de autos?

5.7 (Blanco) Un escolar llega al paradero de su bus a las 6:00 am en punto, sabiendo que el bus llega en algún momento, distribuido uniformemente entre las 6:00 am y las 6.20 am

   a. ¿cuál es la probabilidad de que el escolar tenga que esperar más de cinco minutos?
   b. Si a las 6:10 am no ha pasado el bus todavía ¿cuál es la probabilidad de que el escolar tenga que esperar por lo menos 5 minutos más?

5.8 (Ross) El número de resfriados contraídos al año por una persona es una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro 5. Un nuevo medicamento reduce el parámetro de Poisson, en el 90% de la población, a 1 evento de resfriado al año, y en el 10% restante no tiene efectos apreciables sobre resfriados. Si un individuo utiliza este medicamento durante un año y no contrae nunca un resfriado, ¿qué tan posible es que el medicamento haya surtido efecto en esta persona?