Probabilidad y Estadística Fundamental

Introducción a la probabilidad

Definiciones iniciales en probabilidad

Profesor: Nicolás López

Universidad Nacional de Colombia

Contenido

Contenido

Introducción

Recordemos algunas definiciones:

- Población y muestra.
- Variable y constante.
- Unidad Experimental.
- Dato.
- Frecuencia absoluta y relativa.

Introducción

En general, al estudiar un fenómeno de interés obtenemos datos:

- De una población de N elementos Np son defectuosos. Examinar los N elementos es muy costoso, por lo cual se cuenta con una muestra de n ítems para obtener información de p.
- Se busca estudiar la distribución del IMC de una gran población. Un censo es difícil de obtener, así que se selecciona una muestra de n sujetos de la población.
- Se compara la eficiencia de dos métodos aplicados a cierta población (ej: efecto de una droga). Se seleccionan $n_1 + n_2$ sujetos de la población. n_1 asignados al método 1 y n_2 al 2.
- ...

Y el análisis de los datos es el objetivo de la investigación.

Introducción

- En estadística, estos datos se toman como el resultado de un experimento que es **aleatorio**.
- Por tanto, son requeridas técnicas para obtener y usar esta información en la presencia de **incertidumbre**.
- Una vez estas técnicas son elaboradas para el experimento aleatorio de interés, se busca inferir (obtener conclusiones) acerca del experimento aleatorio.
- La probabilidad se toma como una **herramienta** que permite construír dichas técnicas y evaluar la confiabilidad de las conclusiones obtenidas a partir de una muestra.

Contenido

Conjunto

Un conjunto es una colección de objetos.

1. Los objetos de un conjunto son llamados **elementos** del conjunto.
2. Si Ω es un conjunto y ω es un elemento de Ω se escribe
$$\omega \in \Omega$$
3. Si ω no es un elemento de Ω se escribe
$$\omega \notin \Omega$$
4. La manera más simple de presentar un conjunto es listando sus elementos entre llaves
$$\Omega = \{a, e, i, o, u\}$$
5. Un conjunto de gran importancia es el conjunto vacío (aquel que no tiene elementos)
$$\emptyset = \{\}$$

Una colección de objetos puede estar contenida en otra. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 3\}$, es claro que todos los elementos de B están en A pero no todos los elementos de A están en B, es decir:

$$B \subseteq A \quad \text{pero} \quad A \not\subseteq B$$

Subconjunto

Sean A y B dos conjuntos arbitrarios. El conjunto A es subconjunto del conjunto B si $x \in A$ implica $x \in B$ y se nota $A \subseteq B$. Nótese que dos conjuntos A y B son iguales si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Así como a partir de números "viejos" (5 y 2) obtenemos números "nuevos" (7 y 10) a través de operaciones entre ellos ($+$, $\times$), podemos operar conjuntos entre si para obtener nuevos conjuntos. Las operaciones básicas entre conjuntos son la unión ($\cup$) y la intersección ($\cap$):

Unión

Sean A y B dos conjuntos arbitrarios. La unión entre A y B se nota como $A \cup B$, y es el conjunto que contiene todo lo que esta en A, B ó ambos.

Intersección

Sean A y B dos conjuntos arbitrarios. La intersección entre A y B se nota como $A \cap B$, y es el conjunto que contiene todo lo que esta tanto en A como en B.

Por ejemplo, sean

$$A = \{p, x, y, z\} \quad \text{y} \quad B = \{x\}$$

Entonces $A \cup B = \{p, x, y, z\}$ y $A \cap B = \{x\}$. Nótese que en este caso, como $B \subseteq A$, se tiene $A \cup B = A$ y $A \cap B = B$.

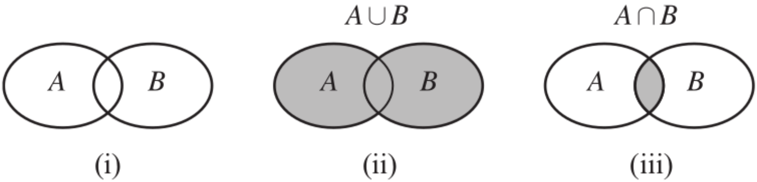
Por otra parte, si

$$A = \{x, y\} \quad \text{y} \quad B = \{p, z\}$$

Se tiene $A \cup B = \{p, x, y, z\}$ pero $A \cap B = \emptyset$. En este caso se dice que A y B son conjuntos disyuntos.

Se pueden visualizar los conjuntos y subconjuntos junto a sus operaciones a partir de diagramas de Venn

Figura 1: Tomado de *Proofs and Fundamentals*



Ejercicio de aplicación

Diagrama de Venn

A partir de diagramas de Venn, observe si las siguientes relaciones se mantienen para tres conjuntos arbitrarios A, B y C.

- $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$.
- $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$.
- $A \cap B = B \cap A$ y $A \cup B = B \cup A$ (conmutatividad).
- $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (asociatividad).
- $A \cup \emptyset = A$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$ (identidad).
- $A \cup A = A$ y $A \cap A = A$ (idempotencia).

Bajo ciertas consideraciones, el conjunto de todos los elementos que pertenecen a la discusión pueden ser listados. Este conjunto se llama **espacio** y generalmente se denota como Ω. Considerando el conjunto de las vocales:

$$\Omega = \{a, e, i, o, u\}$$

Si se tiene un subconjunto A de Ω, por ejemplo $A = \{a, i, u\}$, el complemento de A (respecto a Ω) se nota como A_Ω^c ó A^c y corresponde al conjunto de todos los elementos de Ω que no son elementos de A. Así $A^c = \{e, o\}$.

Cómo representaría Ω y A^c en un diagrama de Venn?

Contenido

Conceptos iniciales

Experimento aleatorio, evento simple y compuesto

Experimento aleatorio

Un experimento es aleatorio si su resultado no puede determinarse de antemano.

Evento simple

Evento observado en **una** realización del experimento aleatorio.

Evento compuesto

Evento conformado por la **unión** de eventos simples.

Conceptos iniciales

Experimento aleatorio, evento simple y compuesto

Ejemplo. Lanzamiento de un dado corriente de 6 caras

Experimento aleatorio Lanzamiento de un dado corriente de 6 caras.

Evento simple Los eventos simples para este experimento son:

1. E_1={Observar el número 1}={1}.
2. E_2={Observar el número 2}={2}.
3. E_3={Observar el número 3}={3}.
4. E_4={Observar el número 4}={4}.
5. E_5={Observar el número 5}={5}.
6. E_6={Observar el número 6}={6}.

Evento compuesto El evento A, observar un número par, está dado por

$$A = E_2 \cup E_4 \cup E_6 = \{2, 4, 6\}$$

Conceptos iniciales

Experimento aleatorio, evento simple y compuesto

Nótese que

- Tanto los eventos simples como los compuestos **son conjuntos**, por lo cual, podemos hablar de unión, intersección y complemento de eventos.
- Decir que un evento compuesto A ocurre significa que el resultado obtenido, al realizar el experimento aleatorio, es un elemento de A (si se observa el número 4, ocurre el evento A, pues $4 \in A$).
- Para la conformación de eventos compuestos se usa la operación de unión entre eventos simples.

Conceptos iniciales

El espacio muestral es el espacio de un experimento aleatorio y dos eventos son mutuamente excluyentes si son disyuntos, es decir:

Espacio muestral

Conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Eventos mutuamente excluyentes

Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si cuando ocurre A, no ocurre B y viceversa.

Ejemplo (cont.). Lanzamiento de un dado corriente de 6 caras

Espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Eventos mutuamente excluyentes Recordando que $A = \{2, 4, 6\}$:

1. Los eventos E_1 y A son mutuamente excluyentes, ya que $E_1 \cap A = \emptyset$.
2. Los eventos E_2 y A no son mutuamente excluyentes, ya que $E_2 \cap A = \{2\} \neq \emptyset$.
3. Los eventos simples son mutuamente excluyentes entre si.
4. Nótese que $A^c = \{1, 3, 5\}$ (respecto a Ω) y que A y A^c son mutuamente excluyentes.

Contenido

Medida de Probabilidad I

El objetivo es asignar a cualquier evento un número que indique el *chance* que tiene de ocurrir, es decir, se busca **medir la probabilidad de ocurrencia** del evento.

Medida de Probabilidad I

Ejemplo (cont.). Lanzamiento de un dado corriente de 6 caras

Suponga que se repite el experimento aleatorio N veces, de las cuales n_A veces ocurre el evento A. Sea $f_A = n_A/N$ la frecuencia relativa del evento A para las N repeticiones. Note que:

1. $f_A = 0$ si **nunca** ocurre A en las N repeticiones. En general $f_A \geq 0$
2. $f_A = 1$ si **siempre** ocurre A en las N repeticiones. En general $f_A \leq 1$.
3. Como $A = E_2 \cup E_4 \cup E_6$ con E_2, E_4 y E_6 disyuntos entre si, se tiene

$$n_A = n_{E_2} + n_{E_4} + n_{E_6}$$

Y así

$$f_A = \frac{n_A}{N} = \frac{n_{E_2} + n_{E_4} + n_{E_6}}{N} = \frac{n_{E_2}}{N} + \frac{n_{E_4}}{N} + \frac{n_{E_6}}{N} = f_{E_2} + f_{E_4} + f_{E_6}$$

Medida de Probabilidad I

Si repite el experimento aleatorio un número suficientemente grande de veces, f_A se estabiliza en un número particular entre 0 y 1, esto se llama **regularidad estadística**. El valor al cual se aproxima f_A nos da una medición del *chance* de ocurrencia del evento A, así

$$f_A = \frac{n_A}{N} \xrightarrow[N \to \infty]{} P(A)$$

Aunque el resultado del experimento aleatorio es impredecible, $P(A)$ mide el *chance* de ocurrencia de un número par al lanzar un dado corriente de 6 caras.

Medida de Probabilidad I

Esta noción de probabilidad hereda las características de la frecuencia relativa anteriormente observadas, es decir:

1. $P(A) \geq 0$ para cualquier evento A.
2. $P(A) \leq 1$ para cualquier evento A.
3. Si $A = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_m$ con E_1, E_2,..., E_m disyuntos entre si, entonces

$$P(A) = P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_m)$$

Medida de Probabilidad I

Note que $f_A = 1$ si siempre ocurre A en las N repeticiones. El único evento que siempre ocurre para cualquier experimento aleatorio es Ω, así

4. $P(\Omega) = 1$.

Y que $f_A = 0$ si nunca ocurre A en las N repeticiones. El único evento que nunca ocurre para cualquier experimento aleatorio es $\emptyset$, así

5. $P(\emptyset) = 0$.

Medida de Probabilidad I

Tenga en cuenta que

- Si f_A es cercano a 1, A sucedió bastantes veces en los N ensayos. Por el contrario, si f_A es cercano a 0, A ocurrió pocas veces. Así, entre más cerca de 1 esté $P(A)$, más probable que A ocurra.
- La probabilidad de un evento A es igual a la suma de las probabilidades de los eventos simples que lo conforman por la propiedad (3).
- La probabilidad se mide sobre eventos, que son conjuntos, **no números**.

Medida de Probabilidad I

Ejemplo (cont.). Lanzamiento de un dado corriente de 6 caras

Se lanza el dado 10000 veces y se observa la siguiente tabla de frecuencias

Evento simple	n_i	f_i
E_1	1692	0.1692
E_2	1631	0.1631
E_3	1724	0.1724
E_4	1586	0.1586
E_5	1633	0.1633
E_6	1734	0.1734

La probabilidad de A se puede aproximar como

$$P(A) \approx f_A = f_{E_2} + f_{E_4} + f_{E_6} = 0{,}1631 + 0{,}1586 + 0{,}1734 = 0{,}4957$$

Que es bastante cercano a 0.5.

Contenido

Conclusiones I

- Las definiciones iniciales en probabilidad son: experimento aleatorio, evento simple y compuesto, espacio muestral y eventos mutuamente excluyentes.
- Una gran cantidad de fenómenos en diferentes áreas (investigación médica, economía, agronomía,...) tienen las características de un experimento que es aleatorio.
- Ejemplos como el del lanzamiento de un dado corriente son muy útiles para entender las definiciones iniciales en probabilidad.