Probabilidad y Estadística I
Semana 4
Ejercicios pre parcial, parcial y solución + diálogo formativo

Profesor: Nicolás López MSc

Universidad del Rosario

Universidad del Rosario

Contenido

Ejercicios pre-parcial

Responda verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

( ) El lanzamiento de una moneda cargada con probabilidad 1 de obtener cara es un experimento deterministico.

( ) La probabilidad de la intersección de eventos mutuamente excluyentes es siempre igual a $\emptyset$.

( ) Conocer las probabilidades de cada evento simple determina la probabilidad de cualquier evento compuesto si Ω es finito.

( ) El evento $A \cap B^c$ sucede cuándo pasa A o cuando no pasa B.

( ) Un espacio de probabilidad es laplaciano si todos los eventos simples tienen probabilidad mayor a cero de ser seleccionados.

Universidad del Rosario

Ejercicios pre-parcial

Se escoge al azar un punto de un círculo de radio R. Calcular la probabilidad de que el punto esté más cerca centro que de la circunferencia del círculo.

Ejercicios pre-parcial

Se escoge al azar un punto de un círculo de radio R. Calcular la probabilidad de que el punto esté más cerca centro que de la circunferencia del círculo.

$$\frac{\pi(r/2)^2}{\pi r^2} = \frac{\pi r^2}{\pi r^2}\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Ejercicios pre-parcial

Una urna tiene N bolas, R son rojas y $N-R$ son negras. Son seleccionadas n bolas de la urna **de manera simultánea**. ¿De cuántas formas puede seleccionar k bolas rojas y $n-k$ negras? Para facilitar el conteo, asuma que las bolas están numeradas de 1 a N con las R primeras rojas.

Ejercicios pre-parcial

Una urna tiene N bolas, R son rojas y $N-R$ son negras. Son seleccionadas n bolas de la urna **de manera simultánea**. ¿De cuántas formas puede seleccionar k bolas rojas y $n-k$ negras? Para facilitar el conteo, asuma que las bolas están numeradas de 1 a N con las R primeras rojas.

$$\binom{R}{k}\binom{N-R}{n-k}$$

Universidad del Rosario

Ejercicios pre-parcial

De un total de 100 bombillas se seleccionan 16 aleatoriamente para identificar si son o no defectosos. Se sabe que 6 de las 100 bombillas son defectuosas, ¿cuál es la probabilidad que la muestra seleccionada tenga las 6 bombillas defectosas?

Ejercicios pre-parcial

De un total de 100 bombillas se seleccionan 16 aleatoriamente para identificar si son o no defectosos. Se sabe que 6 de las 100 bombillas son defectuosas, ¿cuál es la probabilidad que la muestra seleccionada tenga las 6 bombillas defectosas?

$$\frac{\binom{R}{k}\binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{6}{6}\binom{94}{10}}{\binom{100}{16}}$$

Universidad del Rosario

Ejercicios pre-parcial

De un total de 50 bombillas se seleccionan 16 aleatoriamente para identificar si son o no defectosas. Se sabe que 6 de las 50 bombillas son defectuosas, ¿cuál es la probabilidad que la muestra seleccionada tenga 3 bombillas defectosas?

$$\frac{\binom{R}{k}\binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{6}{3}\binom{44}{13}}{\binom{50}{16}}$$

Ejercicios pre-parcial

Se buscan las **primeras dos personas** con gripa de una población determinada de manera independiente, una vez encontradas, se detiene la búsqueda. ¿cuál es el espacio muestral asociado a este experimento aleatorio?. Si la probabilidad de tener gripa es p, ¿a qué es igual la probabilidad de que se deban buscar 5 personas hasta encontrar las primeras tres enfermas?

Ejercicios pre-parcial

Se buscan las **primeras dos personas** con gripa de una población determinada de manera independiente, una vez encontradas, se detiene la búsqueda. ¿cuál es el espacio muestral asociado a este experimento aleatorio?. Si la probabilidad de tener gripa es p, ¿a qué es igual la probabilidad de que se deban buscar 5 personas hasta encontrar las primeras tres enfermas?

$$\binom{4-1}{2-1}(1-p)\times(1-p)\times(1-p)\times p\times p$$

Con $\binom{4-1}{2-1}=1$ se pueden ver claramente las 4 formas en las que se pueden encontrar los dos enfernos en las 5 personas.

Ejercicios pre-parcial

Se buscan las **primeras tres personas** con gripa de una población determinada de manera independiente, una vez encontradas, se detiene la búsqueda. ¿cuál es el espacio muestral asociado a este experimento aleatorio?. Si la probabilidad de tener gripa es p, ¿a qué es igual la probabilidad de que se deban buscar 5 personas hasta encontrar las primeras tres enfermas?

Ejercicios pre-parcial

Se buscan las **primeras tres personas** con gripa de una población determinada de manera independiente, una vez encontradas, se detiene la búsqueda. ¿cuál es el espacio muestral asociado a este experimento aleatorio?. Si la probabilidad de tener gripa es p, ¿a qué es igual la probabilidad de que se deban buscar 5 personas hasta encontrar las primeras tres enfermas?

$$\binom{5-1}{3-1}(1-p) \times (1-p) \times p \times p \times p$$

Ejercicios pre-parcial

Cierta enfermedad está presente en 10 % de la población y hay un examen diseñado para detectarla. A veces el examen es negativo cuando la enfermedad está presente y otras es positivo en ausencia de ella. La siguiente tabla muestra la proporción de ocasiones en que el examen produce los diferentes resultados.

	Examen positivo B	Examen negativo B^c
Enfermedad Presente (A)	0.08	k_1
Enfermedad Ausente (A^c)	k_2	0.85

a. Encuentre el valor de las constantes k_1 y k_2.

b. Encuentre la probabilidad de un **falso positivo** (examen positivo, dado que la persona no tiene enfermedad) y de un **falso negativo** (examen sea negativo, dado que la persona tiene la enfermedad).

c. Encuentre e interprete $(P(A), P(A^c))$ y $(P(A|B), P(A^c|B))$

Ejercicios pre-parcial

Una máquina operada por un trabajador produce un artículo defectuoso con probabilidad de 0,01 si el trabajador sigue exactamente las instrucciones de funcionamiento de la máquina, y con probabilidad de 0,03 si no lo hace. Si el trabajador sigue las instrucciones el 90 % del tiempo:

a. ¿Qué proporción de todos los artículos producidos por la máquina serán defectuosos?

b. Dado que se produce un artículo defectuoso, ¿cuál es el probabilidad que el trabajador siguiera las instrucciones de funcionamiento?

Ejercicios pre-parcial

Sea

$$D = \{\text{la máquina produce un artículo defectuoso}\}$$

$$T = \{\text{el trabajador sigue las instrucciónes}\}$$

Entonces $P(D|T) = 0{,}01$, $P(D|T^c) = 0{,}03$, $P(T) = 0{,}9$ y así

$$P(D) = P(D|T)P(T) + P(D|T^c)P(T^c) = 0{,}01 \times 0{,}9 + 0{,}03 \times 0{,}1 = 0{,}012$$

Y

$$P(T|D) = \frac{P(D|T)P(T)}{P(D)} = \frac{0{,}01 \times 0{,}9}{0{,}012} = 0{,}75$$

Además $P(T^c|D) = 0{,}25$.

Universidad del Rosario

Ejercicios pre-parcial

Un test de drogas tiene una **sensibilidad** del 99 % y una **especificidad** del 98 %, es decir, siendo Sea $A = \{\text{Prueba positiva}\}$ y $B = \{\text{Usuario de drogas}\}$ se tiene

$$P(A|B) = 0{,}99 \quad \text{y} \quad P(A^c|B^c) = 0{,}98$$

Se estima que un 0.4 % de la población es usuario de la droga en cuestión. Si una persona es detectada positiva, ¿cuál es la probabilidad que sea usuario?

Ejercicios pre-parcial

Se tiene

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) = 0{,}99 \times 0{,}004 + (1 - 0{,}98) \times 0{,}996$$

Igual a $P(A) = 0{,}02388$. Ahora $P(B|A)$:

$$P(B|A) = \frac{P(B) \times P(A|B)}{P(A)} \frac{0{,}004 \times 0{,}99}{0{,}02388} = 0{,}1658$$

La probabilidad que sea usuario es cercana a 0.16.

Universidad del Rosario