Probabilidad y Estadística I
Semana 2

Modelos de probabilidad, axiomas y probabilidad condicional

Profesor: Nicolás López MSc

Universidad del Rosario

Contenido

Universidad del Rosario

Conceptos iniciales

Experimento aleatorio, evento simple y compuesto

Experimento aleatorio

Un experimento es aleatorio si su resultado no puede determinarse de antemano.

Evento simple

Evento observado en **una** realización del experimento aleatorio.

Evento compuesto

Evento conformado por la **unión** de eventos simples.

Ejemplo. Lanzamiento de un dado corriente de 6 caras

Experimento aleatorio Lanzamiento de un dado corriente de 6 caras.

Evento simple Los eventos simples para este experimento son:

1. E_1={Observar el número 1}={1}.
2. E_2={Observar el número 2}={2}.
3. E_3={Observar el número 3}={3}.
4. E_4={Observar el número 4}={4}.
5. E_5={Observar el número 5}={5}.
6. E_6={Observar el número 6}={6}.

Evento compuesto El evento A, observar un número par, está dado por

$$A = E_2 \cup E_4 \cup E_6 = \{2, 4, 6\}$$

Nótese que

- Tanto los eventos simples como los compuestos **son conjuntos**, por lo cual, podemos hablar de unión, intersección y complemento de eventos.
- Decir que un evento compuesto A ocurre significa que el resultado obtenido, al realizar el experimento aleatorio, es un elemento de A (si se observa el número 4, ocurre el evento A, pues $4 \in A$).
- Para la conformación de eventos compuestos se usa la operación de unión entre eventos simples.

Conceptos iniciales

Espacio muestral y eventos mutuamente excluyentes

El espacio muestral es el espacio de un experimento aleatorio y dos eventos son mutuamente excluyentes si son disyuntos, es decir:

Espacio muestral

Conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Eventos mutuamente excluyentes

Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si cuando ocurre A, no ocurre B y viceversa.

Ejemplo (cont.). Lanzamiento de un dado corriente de 6 caras

Espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Eventos mutuamente excluyentes Recordando que $A = \{2, 4, 6\}$:

1. Los eventos E_1 y A son mutuamente excluyentes, ya que $E_1 \cap A = \emptyset$.
2. Los eventos E_2 y A no son mutuamente excluyentes, ya que $E_2 \cap A = \{2\} \neq \emptyset$.
3. Los eventos simples son mutuamente excluyentes entre si.
4. Nótese que $A^c = \{1, 3, 5\}$ (respecto a Ω) y que A y A^c son mutuamente excluyentes.

Contenido

Universidad del Rosario

Medida de Probabilidad I

El objetivo es asignar a cualquier evento un número que indique el *chance* que tiene de ocurrir, es decir, se busca **medir la probabilidad de ocurrencia** del evento.

Medida de Probabilidad I

Ejemplo (cont.). Lanzamiento de un dado corriente de 6 caras

Suponga que se repite el experimento aleatorio N veces, de las cuales n_A veces ocurre el evento A. Sea $f_A = n_A/N$ la frecuencia relativa del evento A para las N repeticiones. Note que:

1. $f_A = 0$ si **nunca** ocurre A en las N repeticiones. En general $f_A \geq 0$
2. $f_A = 1$ si **siempre** ocurre A en las N repeticiones. En general $f_A \leq 1$.
3. Como $A = E_2 \cup E_4 \cup E_6$ con E_2, E_4 y E_6 disyuntos entre si, se tiene

$$n_A = n_{E_2} + n_{E_4} + n_{E_6}$$

Y así

$$f_A = \frac{n_A}{N} = \frac{n_{E_2} + n_{E_4} + n_{E_6}}{N} = \frac{n_{E_2}}{N} + \frac{n_{E_4}}{N} + \frac{n_{E_6}}{N} = f_{E_2} + f_{E_4} + f_{E_6}$$

Medida de Probabilidad I

Si repite el experimento aleatorio un número suficientemente grande de veces, f_A se estabiliza en un número particular entre 0 y 1, esto se llama **regularidad estadística**. El valor al cual se aproxima f_A nos da una medición del *chance* de ocurrencia del evento A, así

$$f_A = \frac{n_A}{N} \xrightarrow[N \to \infty]{} P(A)$$

Aunque el resultado del experimento aleatorio es impredecible, $P(A)$ mide el *chance* de ocurrencia de un número par al lanzar un dado corriente de 6 caras.

Medida de Probabilidad I

Esta noción de probabilidad hereda las características de la frecuencia relativa anteriormente observadas, es decir:

1. $P(A) \geq 0$ para cualquier evento A.
2. $P(A) \leq 1$ para cualquier evento A.
3. Si $A = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_m$ con E_1, E_2,..., E_m disyuntos entre si, entonces

$$P(A) = P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_m)$$

Universidad del Rosario

Medida de Probabilidad I

Note que $f_A = 1$ si siempre ocurre A en las N repeticiones. El único evento que siempre ocurre para cualquier experimento aleatorio es Ω, así

4. $P(\Omega) = 1$.

Y que $f_A = 0$ si nunca ocurre A en las N repeticiones. El único evento que nunca ocurre para cualquier experimento aleatorio es $\emptyset$, así

5. $P(\emptyset) = 0$.

Universidad del Rosario

Medida de Probabilidad I

Axiomas de probabilidad

Con lo anterior se establecen los axiomas que rigen a una medida de probabilidad

1. (No negatividad) $P(A) \geq 0$ para cualquier evento A.
2. (Aditividad) Si $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m$ con A_1, A_2,..., A_m disyuntos entre si, entonces

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_m)$$

3. (Normalización) $P(\Omega) = 1$.

Medida de Probabilidad I

Tenga en cuenta que

- Si f_A es cercano a 1, A sucedió bastantes veces en los N ensayos. Por el contrario, si f_A es cercano a 0, A ocurrió pocas veces. Así, entre más cerca de 1 esté $P(A)$, más probable que A ocurra.
- La probabilidad de un evento A es igual a la suma de las probabilidades de los eventos simples que lo conforman por la propiedad 2.
- La probabilidad se mide sobre eventos, que son conjuntos, **no números**.

Ejemplo (cont.). Lanzamiento de un dado corriente de 6 caras

Se lanza el dado 10000 veces y se observa la siguiente tabla de frecuencias

Evento simple	n_i	f_i
E_1	1692	0.1692
E_2	1631	0.1631
E_3	1724	0.1724
E_4	1586	0.1586
E_5	1633	0.1633
E_6	1734	0.1734

La probabilidad de A se puede aproximar como

$$P(A) \approx f_A = f_{E_2} + f_{E_4} + f_{E_6} = 0{,}1631 + 0{,}1586 + 0{,}1734 = 0{,}4957$$

Que es bastante cercano a 0.5.

Medida de Probabilidad I

Ley discreta de la probabilidad

Cuando Ω consiste en un conjunto finito de posibles resultados, la probabilidad de cualquier evento compuesto $A = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_m$ puede verse como la suma de probabilidades de eventos simples

$$P(A) = P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_m)$$

El experimento subyacente sigue la **ley discreta de la probabilidad**. En el caso especial que $P(E_i) = 1/n$ con n igual al cardinal de Ω, el experimento sigue la **ley discreta uniforme de la probabilidad**, y se llama **experimento laplaciano**.

Contenido

Universidad del Rosario

Medida de Probabilidad II

En el ejemplo del dado **corriente**, no es necesario repetir una gran cantidad de veces el experimento aleatorio para obtener la medida de probabilidad de un evento dado.

1. Si $A = \{2, 4, 6\}$.
   $P(A) =$???
2. Si $B = \{1, 2, 3\}$.
   $P(B) =$???
3. Si $C = A \cup B$.
   $P(C) =$???
4. Si $D = A \cap B$.
   $P(D) =$???
5. Si $E = A^c$.
   $P(E) =$???

Universidad del Rosario

Medida de probabilidad II

En el ejemplo del dado **corriente**, no es necesario repetir una gran cantidad de veces el experimento aleatorio para obtener la medida de probabilidad de un evento dado.

1. Si $A = \{2, 4, 6\}$.
   $P(A) = \frac{3}{6}$
2. Si $B = \{1, 2, 3\}$.
   $P(B) = \frac{3}{6}$
3. Si $C = A \cup B$.
   $P(C) = \frac{5}{6}$
4. Si $D = A \cap B$.
   $P(D) = \frac{1}{6}$
5. Si $E = A^c$.
   $P(E) = \frac{3}{6}$

Universidad del Rosario

Medida de Probabilidad II

Intuitivamente encontramos las probabilidades de los eventos de interés como

$$\frac{\textit{Número de casos favorables}}{\textit{Número de casos posibles}}$$

Ahora ¿que sucede si se conoce que el dado está **cargado**? ¿a qué son iguales las anteriores probabilidades? ¿basta con saber que el dado está cargado? ¿qué conocía antes (dado corriente) que desconoce ahora (dado cargado)?

Medida de Probabilidad II

Suponga un dado con el siguiente **vector de probabilidades**

Evento simple	Probabilidad
$P(E_1)$	$\frac{1}{21}$
$P(E_2)$	$\frac{2}{21}$
$P(E_3)$	$\frac{3}{21}$
$P(E_4)$	$\frac{4}{21}$
$P(E_5)$	$\frac{5}{21}$
$P(E_6)$	$\frac{6}{21}$

Para verificar el vector de probabilidades deberíamos repetir el experimento aleatorio (lanzar el dado cargado) un número grande de veces. Asumiendo verdadero el vector, ¿cómo cambiarían las anteriores probabilidades?

Medida de Probabilidad II

1. Si $A = \{2, 4, 6\}$.
   $P(A) =$???
2. Si $B = \{1, 2, 3\}$.
   $P(B) =$???
3. Si $C = A \cup B$.
   $P(C) =$???
4. Si $D = A \cap B$.
   $P(D) =$???
5. Si $E = A^c$.
   $P(E) =$???

Universidad del Rosario

Medida de Probabilidad II

Por la propiedad 2 de la medida de probabilidad

1. Si $A = \{2, 4, 6\}$.
   $P(A) = \frac{12}{21}$
2. Si $B = \{1, 2, 3\}$.
   $P(B) = \frac{6}{21}$
3. Si $C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
   $P(C) = \frac{16}{21}$
4. Si $D = A \cap B = \{2\}$.
   $P(D) = \frac{2}{21}$
5. Si $E = A^c = \{1, 3, 5\}$.
   $P(E) = \frac{9}{21}$

Universidad del Rosario

Medida de Probabilidad II

En general, para ambos ejemplos se tienen los siguientes pasos para calcular la probabilidad de un evento:

1. Haga una lista de todos los eventos simples del espacio muestral.
2. Asigne el vector de probabilidades correspondiente.
3. Determine cuáles eventos simples resultan en el evento de interés.
4. Sume las probabilidades de los eventos simples que resulten en el evento de interés.

Por lo cual, basta conocer el vector de probabilidades para caracterizar la medida de probabilidad [1].

[1]Es decir, para poder calcular la probabilidad de cualquier evento A

Medida de Probabilidad II

Sin embargo, hay una diferencia importante al momento de calcular las probabilidades de los eventos para los dos tipos de dados.

1. Para el dado corriente **basta con saber el número de elementos en el conjunto** para determinar la probabilidad de ocurrencia de los eventos ya que su vector de probabilidades es $P(E_i) = \frac{1}{6}$ para $i = 1, ..., 6$.
2. Para el dado cargado es necesario sumar las probabilidades de los eventos simples que conforman un evento para determinar su probabilidad de ocurrencia. Contar el número de elementos en conjunto **no permite** saber la probabilidad de ocurrencia de un evento.

Medida de probabilidad II

Experimento Laplaciano

En un experimento aleatorio para el cual todos los eventos simples tienen la misma probabilidad de ocurrencia, para calcular $P(A)$ basta con contar el número de elementos en A y el número de casos posibles y así

$$P(A) = \frac{\text{\textit{Número de casos favorables a A}}}{\text{\textit{Número de casos posibles}}}$$

Universidad del Rosario

Relaciones entre eventos

Al ser conjuntos, los eventos pueden transformarse a través operaciones para dar lugar a nuevos eventos, a los cuales podemos calcular sus probabilidades correspondientes. ¿Qué significa que sucedan los eventos?

- $A \cup B$.
- $A \cap B$.
- A^c.

Para dos eventos A y B. ¿Cómo mido la probabilidad de ocurrencia de estos nuevos eventos?

Universidad del Rosario

Basta con conocer la **regla de la adición** para determinar la probabilidad de los eventos

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}) - \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

Despejando de la regla de la adición

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)}$$

Si $B = A^c$ se tiene

$$\begin{aligned} P(A \cap A^c) &= P(A) + P(A^c) - P(A \cup A^c) \\ P(\emptyset) &= P(A) + P(A^c) - P(\Omega) \\ 0 &= P(A) + P(A^c) - 1 \end{aligned}$$

De donde

$$\mathbf{P(A) = 1 - P(A^c)}$$

Contenido

Universidad del Rosario

Relaciones de eventos y reglas de probabilidad

En `http://www.math.csi.cuny.edu/abhijit/113/rlabs/lab2.pdf` encuentra un laboratorio en R para simular experimentos aleatorios. Siguiendo el laboratorio, complete los espacios a continuación:

Experimento: Lanzamiento de una moneda justa.

Eventos simples:

1. E_1 : ______________________________.
2. E_2 : ______________________________.

Regularidad estadística:

n	E_1	E_2
100	____	____
500	____	____

Cuadro 1: Lanzamiento de una moneda justa. Frecuencias relativas.

Relaciones de eventos y reglas de probabilidad

Experimento: ______________________________.

Eventos simples:

1. E_1 : ______________________________.
2. E_2 : ______________________________.
3. E_3 : ______________________________.
4. E_4 : ______________________________.
5. E_5 : ______________________________.
6. E_6 : ______________________________.

Regularidad estadística:

n	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
200	____	____	____	____	____	____
1000	____	____	____	____	____	____
2000	____	____	____	____	____	____

Cuadro 2: Lanzamiento de una dado justo. Frecuencias relativas.

Relaciones de eventos y reglas de probabilidad

Considere los siguiente resultados al lanzar 10 veces una moneda:

1. 9 caras.
2. 2 caras.
3. 4 caras.
4. 6 caras.
5. 1 cara.
6. 5 caras.

a. Si usted supiera que la moneda es justa y que sólo **uno** de los 6 resultados es correcto, explique cuál seleccionaría y por qué.

b. Si usted supiera que la moneda es justa y que **los 6 resultados** son correctos, ¿cuál sería la más probable de ser observada?. Calcule las probabilidades.

c. Suponga que cada una de los resultados corresponde al lanzamiento de diferentes monedas cargadas, ¿cuál supone que sería la probabilidad de obtener cara para cada una de las 6 monedas?.

Definiciones iniciales en probabilidad

Responda Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda:

- ( ) Dos eventos simples cualesquiera para un experimento dado son siempre mutuamente excluyentes.
- ( ) El conjunto vacío es el complemento del espacio muestral.
- ( ) Cualquier evento es mutuamente excluyente con el espacio muestral.
- ( ) Cualquier evento es mutuamente excluyente con su complemento.
- ( ) Un evento compuesto es la intersección de eventos simples.

Universidad del Rosario

Definiciones iniciales en probabilidad

Responda Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda:

- (F) Dos eventos simples cualesquiera para un experimento dado son siempre mutuamente excluyentes. **Pueden ser el mismo evento simple**.
- (V) El conjunto vacío es el complemento del espacio muestral.
- (F) Cualquier evento es mutuamente excluyente con el espacio muestral.
- (V) Cualquier evento es mutuamente excluyente con su complemento.
- (F) Un evento compuesto es la intersección de eventos simples.

Relaciones de eventos y reglas de probabilidad

Suponga un dado con el siguiente **vector de probabilidades**

Evento simple	Probabilidad
$P(E_1)$	$\frac{1}{21}$
$P(E_2)$	$\frac{2}{21}$
$P(E_3)$	$\frac{3}{21}$
$P(E_4)$	$\frac{4}{21}$
$P(E_5)$	$\frac{5}{21}$
$P(E_6)$	$\frac{6}{21}$

Al lanzar este dado ¿Es este un experimento aleatorio laplaciano o no laplaciano? ¿por qué?

Relaciones de eventos y reglas de probabilidad

Suponga un dado con el siguiente **vector de probabilidades**

Evento simple	Probabilidad
$P(E_1)$	$\frac{1}{21}$
$P(E_2)$	$\frac{2}{21}$
$P(E_3)$	$\frac{3}{21}$
$P(E_4)$	$\frac{4}{21}$
$P(E_5)$	$\frac{5}{21}$
$P(E_6)$	$\frac{6}{21}$

Al lanzar este dado, se tiene un experimento aleatorio **no laplaciano**.

Universidad del Rosario

Relaciones de eventos y reglas de probabilidad

Suponga tres eventos arbitrarios A, B, C. ¿Cómo definiría los siguientes eventos?

- Evento 1: A y no B pero sí C.
- Evento 2: Al menos uno de los tres.
- Evento 3: A lo más uno de los tres.

Relaciones de eventos y reglas de probabilidad

Suponga tres eventos arbitrarios A, B, C. ¿Cómo definiría los siguientes eventos?

- Evento 1: $A \cap B^c \cap C$
- Evento 2: $A \cup B \cup C$
- Evento 3: $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$

Universidad del Rosario

Relaciones de eventos y reglas de probabilidad

Hay 3 operadores telefónicos en la ciudad: claro (C), tigo (T) y movistar (M). Las probabilidades de tener cobertura en un lugar arbitrario de la ciudad son las siguientes: $P(C) = 0{,}52$, $P(T) = 0{,}51$, $P(M) = 0{,}36$. Sabemos además que $P(C \cup T) = 0{,}84$ y $P(T \cup M) = 0{,}76$. Si usted tiene en su celular dos sims: una de claro y otra de tigo ¿cuál es la probabilidad de que quede sin cobertura?

Relaciones de eventos y reglas de probabilidad

Hay 3 operadores telefónicos en la ciudad: claro (C), tigo (T) y movistar (M). Las probabilidades de tener cobertura en un lugar arbitrario de la ciudad son las siguientes: $P(C) = 0{,}52$, $P(T) = 0{,}51$, $P(M) = 0{,}36$. Sabemos además que $P(C \cup T) = 0{,}84$ y $P(T \cup M) = 0{,}76$. Si usted tiene en su celular dos sims: una de claro y otra de tigo ¿cuál es la probabilidad de que quede sin cobertura?

En este caso, el evento de interés es $C^c \cap T^c$ y se pregunta por su probabilidad:

$$P(C^c \cap T^c) = P((C \cup T)^c) = 1 - P(C \cup T) = 0{,}16$$

Universidad del Rosario

Relaciones de eventos y reglas de probabilidad

Hay 3 operadores telefónicos en la ciudad: claro (C), tigo (T) y movistar (M). Las probabilidades de tener cobertura en un lugar arbitrario de la ciudad son las siguientes: $P(C) = 0{,}52$, $P(T) = 0{,}51$, $P(M) = 0{,}36$. Sabemos además que $P(C \cup T) = 0{,}84$ y $P(T \cup M) = 0{,}76$. Si usted tiene en su celular dos sims: una de claro y otra de tigo ¿cuál es la probabilidad de que quede sin cobertura?

En este caso, el evento de interés es $C^c \cap T^c$ y se pregunta por su probabilidad:

$$P(C^c \cap T^c) = P((C \cup T)^c) = 1 - P(C \cup T) = 0{,}16$$

Universidad del Rosario

Relaciones de eventos y reglas de probabilidad

Sean $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $F = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{3, 6\}$. Relacione cada ítem de la columna izquierda con su correspondiente en la columna derecha:

(A) $A \cup B$	( ) $\{3, 5, 7\}$.
(B) $(A \cap B^c_\Omega) \cup (A^c_\Omega \cap B)$	( ) $\{2, 3, 4, 6, 8\}$.
(C) $A \cap B \cap F$	( ) $\{6\}$.
(D) $A \cup B \cup F$	( ) $\emptyset$.
(E) Ω^c	( ) $\{2, 3, 4, 8\}$.
(F) $\Omega \cap F^c_\Omega$	( ) F.
(G) A^c_F	( ) $\{1\}$.
(H) $(A \cap B)^c_{A \cup B} \cup \{7\}$	( ) $\{2, 3, 4, 7, 8\}$.

Universidad del Rosario

Contenido

Universidad del Rosario

Introducción

Si desea calcular la probabilidad de ocurrencia de:

1. Daltonismo condicionando por el sexo del paciente.
2. Muerte por cáncer pulmonar para un fumador.
3. Preferencia de un juguete dependiendo de su color.
4. ...

De cualquier forma, esta información parcial conocida acerca del experimento aleatorio antes de conocer su resultado final *podría* cambiar la estructura probabilística de los posibles resultados.

Probabilidad condicional

Apuesta al lanzar dos dados

- Suponga que al lanzar dos dados corrientes (uno rojo, otro verde) de 6 caras le proponen apostar que al menos uno de los resultados sea 6.
- Como decide declinar la propuesta por la baja probabilidad de ocurrencia del evento, al arrojar los dados, le dicen que los resultados obtenidos fueron diferentes. ¿Decidiría volver a la apuesta?.
- Tenga en cuenta. El conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio puede verse restringido a un subconjunto B por el conocimiento de información previa respecto al mismo.

Universidad del Rosario

Probabilidad condicional

Apuesta al lanzar dos dados

Ejemplo. Lanzamiento de dos dados corrientes (uno rojo, otro verde) de 6 caras

Experimento aleatorio Lanzamiento de dos dados corrientes (uno rojo, otro verde) de 6 caras.

Espacio muestral El espacio muestral Ω está conformado por las duplas:

$$
\begin{array}{cccccc}
(1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\
(2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\
(3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\
(4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\
(5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\
(6,1), & (5,6), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6)
\end{array}
$$

¿A qué es igual la probabilidad que al menos uno de los resultados sea 6?

Ejemplo. Lanzamiento de dos dados **corrientes** (uno rojo, otro verde) de 6 caras

Experimento aleatorio Lanzamiento de dos dados corrientes (uno rojo, otro verde) de 6 caras.

Espacio muestral El espacio muestral Ω está conformado por las duplas:

$$
\begin{array}{cccccc}
(1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\
(2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\
(3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\
(4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\
(5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\
(6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6)
\end{array}
$$

El exp. es laplaciano, entonces, si A es el evento de interés, $P(A) = 11/36$.

Suponga ahora que conoce que los resultados fueron diferentes, es decir, los resultados $(1, 1)$, ..., $(6, 6)$ no fueron observados, ¿Cambia la estructura probabilística del experimento? ¿la probabilidad que A (obtener al menos un numero seis) sigue siendo igual con esta información adicional?

Ejemplo. Lanzamiento de dos dados **corrientes** (uno rojo, otro verde) de 6 caras

El "nuevo" espacio muestral (llamémoslo B) está conformado por las duplas:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & (1{,}2), & (1{,}3), & (1{,}4), & (1{,}5), & (1{,}6), \\
(2{,}1), & & (2{,}3), & (2{,}4), & (2{,}5), & (2{,}6), \\
(3{,}1), & (3{,}2), & & (3{,}4), & (3{,}5), & (3{,}6), \\
(4{,}1), & (4{,}2), & (4{,}3), & & (4{,}5), & (4{,}6), \\
(5{,}1), & (5{,}2), & (5{,}3), & (5{,}4), & & (5{,}6), \\
(6{,}1), & (5{,}6), & (6{,}3), & (6{,}4), & (6{,}5), &
\end{array}
$$

Ahora, ¿a qué es igual la probabilidad que al menos uno de los resultados sea 6?

Ejemplo. Lanzamiento de dos dados **corrientes** (uno rojo, otro verde) de 6 caras

El "nuevo" espacio muestral B está conformado por las duplas:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\
(2,1), & & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\
(3,1), & (3,2), & & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\
(4,1), & (4,2), & (4,3), & & (4,5), & (4,6), \\
(5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & & (5,6), \\
(6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), &
\end{array}
$$

El exp. es laplaciano, entonces, si A es el evento de interés, ¿$P(A) = 10/30 = 0{,}333$? ó ¿$P(A) = 11/36 = 0,305$?.

Probabilidad condicional

Apuesta al lanzar dos dados

Note que $11/36$ no utiliza el conocimiento previo acerca del evento *Observar resultados diferentes*, mientras que $10/30$ si. Sea B este evento, entonces $10/30$ es la probabilidad de A **suponiendo que el evento B sucedió** (e.d. el "nuevo" espacio es B), así:

$$P(A) = 11/36$$

Es diferente a

$$\mathbf{P(A|B) = 10/30}$$

Universidad del Rosario

Probabilidad condicional

Definición

La frecuencia relativa condicional está dada por

$$f_{A|B} = \frac{n_{A\cap B}}{n_B}$$

Al repetir el experimento aleatorio N veces, $f_{A|B}$ corresponde a la proporción del total de eventos en B que además resultaron en A. Para el ejemplo anterior:

1. $A =$ Obtener al menos un numero seis al lanzar los dos dados.
2. $B =$ Obtener resultados diferentes al lanzar los dos dados.
3. $A|B =$ Obtener al menos un numero seis **dado que** los resultados son diferentes al lanzar los dos dados.

Probabilidad condicional

Definición

Si lanzamos el par de dados $N = 36$ veces se tiene que:

- Como $P(B) = 30/36$, aproximadamente en $n_B = 30$ de estas repeticiones se obtendrán resultados diferentes para cada dado.
- Como $P(A \cap B) = 10/36$, aproximadamente $n_{A\cap B} = 10$ de estas repeticiones tendrán al menos un seis y los resultados serán diferentes entre si.

Se obtiene entonces la frecuencia relativa condicional como

$$f_{A|B} = \frac{n_{A\cap B}}{n_B} \approx \frac{10}{30} = P(A|B)$$

Universidad del Rosario

Probabilidad condicional

Definición

Desde la noción de regularidad estadística, obsérvese que

$$f_{A|B} = \frac{n_{A\cap B}}{n_B} = \frac{\frac{n_{A\cap B}}{N}}{\frac{n_B}{N}} = \frac{f_{A\cap B}}{f_B}$$

Dónde A y B son eventos, por lo cual:

$$f_A = \frac{n_A}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} P(A)$$

Y además

$$f_{A\cap B} = \frac{n_{A\cap B}}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} P(A\cap B)$$

Lo cual motiva la siguiente definición.

Universidad del Rosario

Probabilidad condicional

Definición

Probabilidad condicional

Sean A y B dos eventos. Se define la probabilidad del evento A bajo la condición B como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Esta última igualdad al multiplicar por $P(B)$ en ambos lados puede verse como

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Universidad del Rosario

Probabilidad condicional

Definición

Como comentarios

- Note que $P(B)$ debe ser mayor de 0 para la división numérica en la definición (y si fuera 0, desde el punto de vista de la frecuencia relativa, sería un evento que nunca sucedería).
- La probabilidad condicional cumple
  1. $P(A|B) \geq 0$ para cualquier evento A.
  2. Si $A = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_m$ con E_1, E_2,..., E_m disyuntos entre si, entonces

$$P(A|B) = P(E_1|B) + P(E_2|B) + ... + P(E_m|B)$$

  3. Condicionado a B, la probabilidad de B es 1, es decir, $P(B|B) = 1$.

Así, $P(A|B)$ **es una medida de probabilidad**.

Universidad del Rosario

Ejercicio. Probabilidad condicional como medida

Demuestre que las 3 propiedades de una medida de probabilidad se cumplen para la probabilidad condicional para un evento dado B. Es decir:

1. (No negatividad) $P(A|B) \geq 0$ para cualquier evento A.
2. (Aditividad) Si $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m$ con A_1, A_2,..., A_m disyuntos entre si, entonces

$$P(A|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) + ... + P(A_m|B)$$

3. (Normalización) $P(\Omega|B) = 1$.

Y muestre además que $P(B|B) = 1$. ¿Qué implica este resultado?

Ejemplo. Grupo sanguíneo

Se tienen 1000 personas en una población. 600 hombres (de los cuales 200 tienen el tipo de sangre A) y 400 mujeres (de las cuales 180 tienen el tipo de sangre A)

- Defina los eventos mencionados en el enunciado.
- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar tenga el tipo de sangre A?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre elegida al azar tenga el tipo de sangre A?
- ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer elegida al azar tenga el tipo de sangre A?

Ejemplo. Grupo sanguíneo

- Defina los eventos mencionados en el enunciado. $A =$ Persona seleccionada de tipo de sangre A. $H =$ Persona seleccionada es hombre. $M =$ Persona seleccionada es mujer.
- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar tenga el tipo de sangre A?: $P(A) = (200 + 180)/1000$
- ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre elegido al azar tenga el tipo de sangre A?: $P(A|H) = 200/600$, igual a:

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} = \frac{200/1000}{600/1000} = \frac{200}{600}$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer elegida al azar tenga el tipo de sangre A? $P(A|M) = 180/400$

$$P(A|M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{180/1000}{400/1000} = \frac{180}{400}$$

Ejemplo. Lanzamiento de un dado de 4 caras

Se arroja un dado justo de 4 caras dos veces y se definen los eventos

$$A_m = \text{El resultado máximo obtenido es } m$$

y

$$B = \text{El resultado mínimo obtenido es } 2$$

¿A qué es igual $P(A_m|B)$?

Ejemplo. Lanzamiento de un dado de 4 caras

Se arroja un dado justo de 4 caras dos veces y se definen los eventos

$$A_m = \{\text{El resultado máximo obtenido es } m\}$$

y

$$B = \{\text{El resultado mínimo obtenido es } 2\}$$

¿A qué es igual $P(A_m|B)$?

$$P(A_1|B) = 0$$

$$P(A_2|B) = 1/5$$

$$P(A_3|B) = P(A_4|B) = 2/5$$

Probabilidad condicional

Modelamiento

Al escribir la probabilidad conjunta como el producto de una probabilidad marginal y otra condicional:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Podemos modelar eventos conjuntos de interés a través del conocimiento de dichas probabilidades.

Ejemplo. Detección de radar

Un radar alerta un 99 % de los aviones cuando están presentes. Si un avión no está presente, el radar alerta erróneamente con probabilidad de 0.10. Se espera que 5 de cada 100 veces se encuentre un avión presente, ¿cuál es la probabilidad de alerta del radar sin avión presente? ¿cuál la de no alerta con avión presente? Considere

$$A = \{\text{Avión presente}\}$$

y

$$B = \{\text{Alerta de radar}\}$$

Recuerde que

$$A = \{\text{Avión presente}\}$$

y

$$B = \{\text{Alerta de radar}\}$$

Se tiene $P(A) = 0{,}05$, $P(B|A') = 0{,}10$, $P(B|A) = 0{,}99$. Y las probabilidades preguntadas son iguales a

$$P(A' \cap B) = P(A')P(B|A') = 0{,}095$$

$$P(A \cap B') = P(A)P(B'|A) = 0{,}0005$$

Estas probabilidades pueden diagramarse en un árbol, inciando con los eventos A y A', y dependiendo de la rama, la probabilidad condicional del evento B, como $P(B|.)$, $P(B'|.)$.

Probabilidad condicional

Modelamiento

Al escribir la probabilidad conjunta de más de dos eventos siguiendo la misma **regla de producto** se obtiene lo siguiente. Para $n = 3$ eventos (A_1, A_2, A_3) se tiene:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

En general se tiene:

$$P(\cap_n A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)...P(A_n| \cap_{n-1} A_n)$$

Se nota que esta fórmula es una generalización de la probabilidad condicional cuando $n = 2$.

Ejercicio. Baloncesto

Para un estudiante de estadística hay un 20 % de probabilidad de participar en el equipo de baloncesto de su facultad, una vez ahí, la probabilidad de jugar en el primer partido de la temporada es del 30 %. Si la probabilidad de encestar un triple cuándo el estudiante de estadística es seleccionado en el equipo y además juega en el primer partido es del 5 %. ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante de estadística logre hacer parte del equipo de baloncesto de su facultad y que en el primer partido de la temporada logre encestar un triple?

Conclusiones I

- Las definiciones iniciales en probabilidad son: experimento aleatorio, evento simple y compuesto, espacio muestral y eventos mutuamente excluyentes.
- Una gran cantidad de fenómenos en diferentes áreas (investigación médica, economía, agronomía,...) tienen las características de un experimento que es aleatorio.
- Ejemplos como el del lanzamiento de un dado corriente son muy útiles para entender las definiciones iniciales en probabilidad.

Universidad del Rosario

Conclusiones II

- Los datos obtenidos de un estudio son observados como el resultado de un experimento aleatorio que se modela matemáticamente para inferir acerca del experimento.
- La probabilidad es utilizada como herramienta en la construcción de estos modelos y para evaluar la confiabilidad de las conclusiones obtenidas a partir de una muestra.
- La probabilidad se mide sobre eventos, que son conjuntos, no números. Por lo cual es importante entender las características y operaciones de los conjuntos.

Conclusiones III

- La probabilidad de un evento puede cambiar al ser condicionada, múltiples ejemplos son observados en la vida diaria: chance diferencial de ocurrencia de un evento determinado entre razas, nivel educativo, hábitos (fumador, deportista, sedentario), entre otros.

Universidad del Rosario