Probabilidad y Estadística I
Semana 10

Ejercicios pre parcial, parcial y solución + seguimiento dialogo formativo

Profesor: Nicolás López MSc

Universidad del Rosario

Contenido

Ejercicios pre parcial

Ejercicios pre parcial

Los puntajes de un examen están distribuidos normalmente con valor esperado 500 y desviación estándar 100. Si el profesor decide aprobar únicamente al 25 % de los estudiantes con la calificación más alta

a. ¿Cuál es la mínima calificación que debe tener un estudiante para aprobar?.
b. ¿Cuál es la probabilidad de reprobar la materia?.

Ejercicios pre parcial

Sea X igual a los puntajes del examen, distribuidos normalmente con valor esperado 500 y desviación estándar 100. Si el profesor decide aprobar únicamente al 25 % de los estudiantes con la calificación más alta

a. ¿Cuál es la mínima calificación que debe tener un estudiante para aprobar? `qnorm(0.75,mean=500,sd=100) = 567.4`

b. ¿Cuál es la probabilidad de reprobar la materia?. Por el enunciado, 0.75.

Universidad del Rosario

Ejercicios pre parcial

Calcule la media y la varianza de una variable aleatoria X con distribución de Poisson con $P(X = 0) = 0{,}02$.

Universidad del Rosario

Ejercicios pre parcial

Calcule la media y la varianza de una variable aleatoria X con distribución de Poisson con $P(X = 0) = 0{,}02$. Como

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Se tiene

$$P(X = 0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-\lambda} = 0{,}02$$

Con lo cual $E(X) = V(X) = -\log(0, 02)$

Universidad del Rosario

Ejercicios pre parcial

El número promedio de accidentes de tránsito en cierta carretera es dos por semana. Suponga que el número de accidentes sigue una distribución de Poisson con promedio igual a dos accidentes a la semana. Encuentre la probabilidad de que no haya accidentes en esta carretera durante los siguientes periodos: 1 semana, 2 semanas, 3 semanas y 4 semanas.

Ejercicios pre parcial

Sea X_i la v.a. que denota el número de accidentes en i semanas. Se tiene que $X_i \sim Pois(\lambda = 2 \times i)$

$$P(X_1 = 0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!}$$

$$P(X_2 = 0) = \frac{4^0 e^{-4}}{0!}$$

$$P(X_3 = 0) = \frac{6^0 e^{-6}}{0!}$$

$$P(X_4 = 0) = \frac{6^0 e^{-8}}{0!}$$

Universidad del Rosario

Ejercicios pre parcial

Suponga que un examen tiene 15 preguntas de selección múltiple con 5 opciones de respuesta cada una, de las cuales solamente una es la correcta. Si un estudiante decide contestar al azar el examen:

a. ¿Cuál es el modelo probabilístico apropiado para la variable que representa el número de respuestas correctas al resolver la totalidad del examen en mención?

b. ¿Cuántas preguntas espera responder el estudiante correctamente?.

c. Si el examen se aprueba al responder por lo menos 9 preguntas correctamente, ¿Cuál es la probabilidad de que esto ocurra?.

Ejercicios pre parcial

a. En este caso, cada pregunta resulta en un experimento bernoulli de parámetro $1/5$ y la cantidad de respuestas acertadas resulta en un modelo binomial de parámetros 15 y $1/5$

b. Se tiene que si $X \sim Ber(n, p)$, $E(X) = np = 15/5$.

c. Se pregunta $P(X \geq 9) =$ `sum(dbinom(9:15,size = 15, p = 1/5))` $= 0.0007$.

Ejercicios pre parcial

Una población normalmente distribuida de peso de roedores tiene media de 63.5 gramos y desviación estándar de 12.2 gramos:

a. ¿Qué proporción de la población tiene un peso de 78 gramos?
b. ¿Qué proporción de la población tiene un peso mayor a 78 gramos?
c. ¿Qué proporción de la población tiene un peso menor o igual a 78 gramos?
d. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar de manera aleatoria de esta población un roedor con peso menor a 50 gramos ó mayor a 80 gramos?
e. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar de manera aleatoria de esta población un roedor con peso entre 60 y 70 gramos?

Ejercicios pre parcial

Una población normalmente distribuida de peso de roedores tiene media de 63.5 gramos y desviación estándar de 12.2 gramos:

a. ¿Qué proporción de la población tiene un peso de 78 gramos? 0
b. ¿Qué proporción de la población tiene un peso mayor a 78 gramos? `1 - pnorm(78,mean=63.5,sd=12.2) = 0.12`
c. ¿Qué proporción de la población tiene un peso menor o igual a 78 gramos? `pnorm(78,mean=63.5,sd=12.2) = 0.88`
d. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar de manera aleatoria de esta población un roedor con peso menor a 50 gramos ó mayor a 80 gramos? `pnorm(50,mean=63.5,sd=12.2) + (1 - pnorm(80,mean=63.5,sd=12.2)) = 0.22`
e. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar de manera aleatoria de esta población un roedor con peso entre 60 y 70 gramos? `pnorm(70,mean=63.5,sd=12.2) - pnorm(60,mean=63.5,sd=12.2) = 0.31`

Universidad del Rosario

Ejercicios pre parcial

Un total de 250 estudiantes hacen parte del curso *Matemáticas Básicas*. Si la probabilidad de que uno de los estudiantes esté de cumpleaños el día del examen es de $1/365$, ¿cuál es la probabilidad de encontrar al menos un estudiante de cumpleaños el día del examen?. Calcule la probabilidad exacta y la aproximada.

Ejercicios pre parcial

Sea $X \sim Bin(n = 250, p = 1/365)$ la v.a que denota el número de estudiantes que están de cumpleaños el día del examen. Se tiene que la probabilidad exacta del evento de interés está dada por

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

Igual a `1 - dbinom(0,size = 250,prob = 1/365)` $= 0{,}49$. Se tiene que $X \sim_A Pois(\lambda = np = 250/365)$ dado que n es grande y p es pequeño. Con lo cual

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - 1 - \texttt{dpois(0,250/365)}$$

Muy cercano al valor 0.49 presentado anteriormente.

Universidad del Rosario

Ejercicios pre parcial

Sea $X \sim Bin(n = 250, p = 1/365)$ la v.a que denota el número de estudiantes que están de cumpleaños el día del examen. Se tiene que la probabilidad exacta del evento de interés está dada por

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

Igual a `1 - dbinom(0,size = 250,prob = 1/365)` $= 0{,}49$. Se tiene que $X \sim_A Pois(\lambda = np = 250/365)$ dado que n es grande y p es pequeño. Con lo cual

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - 1 - \texttt{dpois(0,250/365)}$$

Muy cercano al valor 0.49 presentado anteriormente.

Ejercicios pre parcial

Muestre que para un estimador $\hat{\theta}$ de θ el $ECM(\hat{\theta})$ está dado por

$$ECM(\hat{\theta}) = E\left((\hat{\theta} - \theta)^2\right) = V(\hat{\theta}) + B^2(\hat{\theta})$$

Universidad del Rosario

Ejercicios pre parcial

Recuerde que $B(\hat{\theta}) = \theta - E(\hat{\theta})$ es una constante y note además que $E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) = E(\hat{\theta}) - E(E(\hat{\theta})) = E(\hat{\theta}) - E(\hat{\theta}) = 0$. Se tiene entonces

$$ECM(\hat{\theta}) = E\left((\hat{\theta} - \theta)^2\right) = E\left((\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) - (\theta - E(\hat{\theta})))^2\right)$$

Así

$$ECM(\hat{\theta}) = E\left(((\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) - B(\hat{\theta}))^2\right)$$

Igual a

$$E((\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2) - 2B(\hat{\theta}) \times E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) + B^2(\hat{\theta})$$

Como $V(\hat{\theta}) = E((\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2)$ se obtiene que

$$ECM(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + B^2(\hat{\theta})$$

Universidad del Rosario