Probabilidad y Estadística I
Semana 12
Pruebas de hipótesis. Errores tipo I y tipo II

Profesor: Nicolás López MSc

Universidad del Rosario

Universidad del Rosario

Contenido

Universidad del Rosario

Introducción

El objetivo de la estadística es hace inferencias de la población a través de una muestra de la misma. Como las poblaciones están caracterizadas por **parámetros**, el objetivo resulta ser encontrar estimaciones de dichos parámetros.

1. (p) Proporción de cestas logradas por un nuevo jugador.
2. (μ) Tiempo medio de espera en la fila del contact center.
3. (σ) Desviación estándar en el error de medición en la capacidad pulmonar mediante un nuevo instrumento de medida.

Hay diferentes **parámetros objetivo** de interés dependiendo el problema.

Universidad del Rosario

Introducción

Estos parámetros se pueden estimar de manera **puntual** o por **intervalo** (o ambos). Un **estimador** es una fórmula que indica como estimar el parámetro con la información muestral.

1. La estimación puntual requiere una fórmula.
2. La estimación por intervalo requiere dos fórmulas.

En ninguno de los anteriores métodos de estimación se contrasta el valor del parámetro respecto a una hipótesis del parámetro de interés en la investigación.

Introducción

Suponga que se va a procesar a un presunto ladrón mediante los siguientes pasos:

1. Hipótesis nula (H_0). 'Status quo' o valor predeterminado del parámetro de interés. *El ladrón es inocente hasta que se demuestre lo contrario*.
2. Hipótesis alterna (H_1). Complemento de H_0. *El ladrón no es inocente*.
3. Estadístico de prueba & valor p. Información que soporta la decisión adquirida a través de la muestra & probabilidad de haber sido observada bajo H_0. *Evidencia que incrimina al ladrón*. Similar a un estimador (función de la muestra).
4. Región de rechazo. Valores del estadístico de prueba para los cuales rechazo H_0. *Más de 5 evidencias incriminatorias rechazan la inocencia del implicado*.
5. Decisión.

Contenido

Tipos de hipótesis

Prueba a una cola

Se ha observado un alto favoritismo hacia el candidato A en las elecciones, con un 40 % de intención de voto en la primera vuelta. Se espera que en la segunda vuelta esta sea mayor.

$$\begin{cases} H_0 : \quad p = 0{,}4 \\ H_1 : \quad p > 0{,}4 \end{cases}$$

Con p la intención de voto en la segunda vuelta.

Tipos de hipótesis

Prueba a una cola

Con las dos horas de clase es más que suficiente para que el estudiante promedio responda el examen

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 2 \\ H_1: & \mu < 2 \end{cases}$$

Con μ el tiempo promedio de respuesta del examen.

Tipos de hipótesis

Prueba a dos colas

Se desconoce el efecto del medicamento en la diferencia promedio del peso en los animales de granja

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 0 \\ H_1: & \mu \neq 0 \end{cases}$$

Con μ la diferencia promedio del peso en los animales de granja.

Universidad del Rosario

Hipótesis general

Se supone que se cuenta con una muestra aleatoria de observaciones $Y_1, ..., Y_n$ y se busca probar la hipótesis basada en un estimador $\hat{\theta}$ con distribución aproximadamente normal con media θ y error estándar $\sigma_{\hat{\theta}}$. Sea θ_0 un valor específico de θ

$$\begin{cases} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta < \theta_0 \text{ ó} \\ H_1: & \theta > \theta_0 \text{ ó} \\ H_1: & \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

A medida que $\hat{\theta}$ se aleja más de θ_0, esto soporta más a H_1. Llega un punto en el que la diferencia lleva a que el estadístico caiga en la región de rechazo (RR).

Hipótesis general

Se tiene con esto entonces

$$\begin{cases} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta < \theta_0 \longrightarrow RR = \{\hat{\theta} < k\} \text{ ó} \\ H_1: & \theta > \theta_0 \longrightarrow RR = \{\hat{\theta} > k\} \text{ ó} \\ H_1: & \theta \neq \theta_0 \longrightarrow RR = \{\hat{\theta} < k_l\} \cup \{\hat{\theta} > k_u\} \end{cases}$$

A medida que $\hat{\theta}$ se aleja más de θ_0, esto soporta más a H_1. Llega un punto en el que la diferencia lleva a que el estadístico caiga en la región de rechazo (RR).

Toma de decisiones

RR y valor p

Tanto la RR como el valor p permiten decidir si rechazar o no rechazar (diferente a *aceptar*) H_0 dado el estadístico de prueba:

1. La RR determina uno (prueba a una cola) o dos (prueba a dos colas) umbrales que delimitan la RR y dependiendo del valor del estadístico de prueba, se rechaza o no H_0.
2. El valor p, además de permitir rechazar o no H_0, determina la **fuerza** con la cual se rechaza. Es más informativo.

Para 1 o 2 necesito conocer la distribución del estadístico de prueba y fijar la probabilidad de error tipo I, denotada como α.

Universidad del Rosario

Toma de decisiones

Error tipo I (E1) y tipo II (E2)

Volviendo al ejemplo inicial, si el presunto ladrón es inocente, podríamos judicializarlo erróneamente, a esto se le llama E1. Si por el contrario el presunto ladrón es culpable pero no fue judicializado, se comete un E2.

Desicion	H_0 verdadera	H_0 falsa
Rechazar H_0	E1	OK
No rechazar H_0	OK	E2

Cuadro 1: Tabla de decisión

1. El juez A decide aumentar el número de evidencias para reducir $\alpha = P(E1)$.
2. El juez B decide disminuir el número de evidencias para reducir $\beta = P(E2)$.

Un buen juez debe buscar simultáneamente bajos valores para α y β.

Universidad del Rosario

Toma de decisiones

Error tipo I

Un E1 para una prueba estadística es el error de rechazar H_0 cuando es verdadera. El nivel de significancia para la prueba de hipótesis α es:

$$\alpha = P(\text{E1}) = P(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ verdadera})$$

Este representa un máximo riesgo tolerable de rechazar erróneamente H_0, y una vez definido, permite fijar los valores críticos y evaluar la hipótesis estadística con una confianza de $1 - \alpha$. Usualmente $\alpha = 0{,}05$

Contenido

Universidad del Rosario

Pruebas de hipótesis

Ejemplos

Se quiere saber si es una minoría los estudiantes de la facultad interesados en la programación en R. Se busca probar $H_0 : p = 0{,}5$ respecto a la alternativa de $H_1 : p < 0{,}5$. Si se toma como estadístico de prueba a X como el total de personas interesadas en programación en R para una muestra de $n = 15$ personas y $RR = \{X \leq 2\}$, calcule $\alpha = P(\text{E1})$ y $\beta = P(\text{E2})$ (suponga que $p = 0{,}3$ para calcular β).

Recuerde que

$$\alpha = P(\text{E1}) = P(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ verdadera})$$

Es decir

$$\alpha = P(X \leq 2 | p = 0{,}5)$$

Con $X \sim Bin(15, 0{,}5)$ bajo H_0. Con lo cual

$$\alpha = \binom{15}{0} 0{,}5^{15} + \binom{15}{1} 0{,}5^{15} + \binom{15}{2} 0{,}5^{15}$$

Es aproximadamente igual a 0.004. Es decir que la $RR = \{X \leq 2\}$ indica un riesgo muy bajo de concluir que R le interesa a una minoría de los estudiantes cuando en realidad le interesa a la mitad.

Pruebas de hipótesis

Ejemplos

Recuerde que

$$\beta = P(\mathrm{E2}) = P(\text{No Rechazar } H_0 | H_0 \text{ falsa})$$

Es decir

$$P(X > 2 | p = 0{,}3)$$

Con $X \sim Bin(15, 0{,}3)$ bajo H_1. Con lo cual

$$\beta = \sum_{x=3}^{15} \binom{15}{x} 0{,}3^x \times 0{,}7^{15-x}$$

Es aproximadamente igual a 0.873. Es decir que la $RR = \{X \leq 2\}$ indica un riesgo muy alto de concluir que R le interesa a la mitad de los estudiantes cuando en realidad le interesa a una minoría ($p = 0{,}3$).

Universidad del Rosario

Suponga ahora que $p = 0{,}1$, entonces se tiene que $\beta = P(\text{E2})$ es igual a

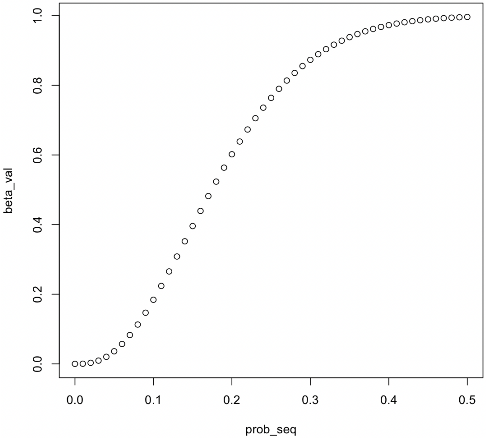
$$\beta = \sum_{x=3}^{15} \binom{15}{x} 0{,}1^{x} \times 0{,}9^{15-x}$$

Con $X \sim Bin(15, 0{,}3)$ bajo la nueva H_1. Este es aproximadamente igual a 0.184. Es decir que la $RR = \{X \leq 2\}$ indica un riesgo muy bajo de concluir que R le interesa a la mitad de los estudiantes cuando en realidad le interesa a una minoría ($p = 0{,}1$).

Pruebas de hipótesis

Ejemplos

Figura 1: Probabilidades de E2 bajo múltiples valores de p con $RR = \{X \leq 2\}$



Como ejercicio, obtenga el gráfico en esta imagen.

Universidad del Rosario

Para terminar, calcule α, obtenga el gráfico de β anterior con una $RR = \{X \leq 5\}$ y compare con los resultados anteriores.

Pruebas de hipótesis

Ejemplos

Se tiene

$$\alpha = P(X \leq 5|p = 0{,}5) = \sum_{x=0}^{5} \binom{15}{x} 0{,}5^{15} = 0{,}151$$

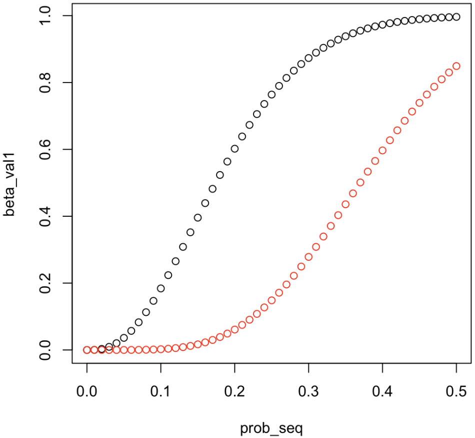
Con lo cual incrementa α respecto al caso anterior. Por otra parte

$$\beta = P(X > 5|p = p_1 < 0{,}5) = \sum_{x=3}^{15} \binom{15}{x} p_1^x \times (1 - p_1)^{15-x}$$

Pruebas de hipótesis

Ejemplos

Figura 2: Probabilidades de E2 bajo múltiples valores de p con $RR_1 = \{X \leq 3\}$ y $RR_2 = \{Y \leq 5\}$



Como ejercicio, obtenga el gráfico en esta imagen.

El salario mensual promedio de un matemático recién egresado es de 1.800.000 COP. Se toma una muestra aleatoria de $n = 30$ médicos recién egresados, quienes se espera tengan un mayor salario, y cuentan con un salario promedio de 2.000.000 COP y una desviación estándar de 300.000 COP. Pruebe la hipótesis apropiada con una confianza del 99 %.

Pruebas de hipótesis

Ejemplos

Se supone que se cuenta con una muestra aleatoria de observaciones $Y_1, ..., Y_{30}$ y se busca probar la hipótesis basada en un estimador $\hat{\theta} = \bar{Y}$ con distribución aproximadamente normal con media θ y error estándar $\sigma_{\hat{\theta}}$. Sea $\theta_0 = 1.800.000$ un valor específico de θ

$$\begin{cases} H_0: & \theta = 1{,}800{,}000 \\ H_1: & \theta > 1{,}800{,}000 \end{cases}$$

A medida que $\hat{\theta}$ se aleja más de θ_0, esto soporta más a H_1. Llega un punto en el que la diferencia lleva a que el estadístico caiga en RR:

$$RR = \{\hat{\theta} : \hat{\theta} > 1{,}800{,}000 + z_\alpha \sigma_{\hat{\theta}}\} = \left\{\hat{\theta} : \frac{\hat{\theta} - 1{,}800{,}000}{\sigma_{\hat{\theta}}} > z_\alpha \right\}$$

Universidad del Rosario

Pruebas de hipótesis

Ejemplos

Recuerde que

$$\sigma_{\hat{\theta}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{300{,}000}{\sqrt{30}} = 54{,}777$$

Con lo cual

$$RR = \{\hat{\theta} : \hat{\theta} > 1{,}800{,}000 + 2{,}32 \times 54{,}777\} = \left\{\hat{\theta} : \frac{\hat{\theta} - 1{,}800{,}000}{54{,}777} > 2{,}32\right\}$$

Es decir

$$RR = \{\hat{\theta} : \hat{\theta} > 1{,}927{,}419\} = \left\{\hat{\theta} : \frac{\hat{\theta} - 1{,}800{,}000}{54{,}777} > 2{,}32\right\}$$

Como $\hat{\theta} = 2{,}000{,}000$, este valor cae en RR. Note que

$$\frac{\hat{\theta} - 1{,}800{,}000}{54{,}777} = \frac{2{,}000{,}00 - 1{,}800{,}000}{54777} = 3{,}65 > 2{,}32$$

Pruebas de hipótesis

Ejemplos

La producción diaria de una planta durante los últimos años ha sido de 880 toneladas de producto. Se desea conocer si este año ha cambiado tomando una muestra aleatoria de 50 días del año. Esta presenta una media de 871 toneladas diarias. La desviación poblacional es asumida a la presentada los años anteriores e igual a 21 toneladas. Pruebe la hipótesis apropiada con una confianza del 95 %.

Universidad del Rosario

Se supone que se cuenta con una muestra aleatoria de observaciones $Y_1, ..., Y_{50}$ y se busca probar la hipótesis basada en un estimador $\hat{\theta} = \bar{Y}$ con distribución aproximadamente normal con media θ y error estándar $\sigma_{\hat{\theta}}$. Sea $\theta_0 = 880$ un valor específico de θ

$$\begin{cases} H_0: & \theta = 880 \\ H_1: & \theta \neq 880 \end{cases}$$

A medida que $\hat{\theta}$ se aleja más de θ_0, esto soporta más a H_1. Llega un punto en el que la diferencia lleva a que el estadístico caiga en RR:

$$RR = \{\hat{\theta} : \hat{\theta} < 880 - z_{1-\alpha/2}(21/\sqrt{50})\} \cup \{\hat{\theta} : \hat{\theta} > 880 + z_{1-\alpha/2}(21/\sqrt{50})\}$$

Así, con $z_{1-\alpha/2} = z_{1-0,025} = 1{,}96$ (note el cambio de $\alpha/2$ por $1-\alpha/2$), se tiene

$$RR = \{\hat{\theta} : \hat{\theta} < 874{,}17\} \cup \{\hat{\theta} : \hat{\theta} > 885{,}82\}$$

Rechazo H_0 a favor de H_1 con una confianza del 95 %. Recuerde que puede usar la RR con el estadístico estandarizado y obtendrá la misma conclusión.

Pruebas de hipótesis

Ejemplos

El estándar de ingesta de sodio diario máximo es de 3300mg aunque se considera que el consumo usual es mayor a dicho umbral. Se selecciona una muestra de 100 personas con una media de 3400mg de sodio con una desviación de 1100mg. Evalúe la hipótesis subyacente con un $\alpha = 0{,}05$ y calcule la probabilidad de encontrar un valor igual o mayor al observado asumiendo cierta la hipótesis nula.

Universidad del Rosario

Pruebas de hipótesis

Ejemplos

Se supone que se cuenta con una muestra aleatoria de observaciones $Y_1, ..., Y_{100}$ y se busca probar la hipótesis basada en un estimador $\hat{\theta} = \bar{Y}$ con distribución aproximadamente normal con media θ y error estándar $\sigma_{\hat{\theta}}$. Sea $\theta_0 = 3300$ un valor específico de θ

$$\begin{cases} H_0 : & \theta = 3300 \\ H_1 : & \theta > 3300 \end{cases}$$

A medida que $\hat{\theta}$ se aleja más de θ_0, esto soporta más a H_1. Llega un punto en el que la diferencia lleva a que el estadístico caiga en RR:

$$RR = \{\hat{\theta} : \hat{\theta} > 3300 + z_{1-\alpha/2}(1100/\sqrt{100})\}$$

Así, con $z_{1-\alpha} = z_{1-0,05} = 1{,}64$ (note nuevamente cambio de α por $1-\alpha$), se tiene

$$RR = \{\hat{\theta} : \hat{\theta} > 3480\}$$

No rechazo H_0 con una confianza del 95 %.

Universidad del Rosario

Pruebas de hipótesis

Ejemplos

Recuerde que de manera equivalente puede encontrar el estadístico estandarizado

$$RR = \{\hat{\theta} : \hat{\theta} > 3300 + z_{1-\alpha/2}(1100/\sqrt{100})\} = \left\{\hat{\theta} : \frac{\hat{\theta} - 3300}{110} > 1{,}64\right\}$$

Donde el estadístico estandarizado es igual a

$$\frac{3400 - 3300}{110} = 0{,}91$$

Como $0{,}91 < 1{,}64$, equivalentemente, no rechazo H_0.

Universidad del Rosario

La probabilidad preguntada en el enunciado, la cual corresponde al **valor p** de la prueba, está dada por:

$$p_v = P(Z > 0{,}91) = 1 - P(Z < 0{,}91) = 1 - \Phi(0{,}91) = 0{,}1814$$

Note que $p_v > \alpha$, lo cual es equivalente a rechazar H_0 con una confianza $1 - \alpha$.