制作者 : **Anman**

自習用数学問題集

更新日 : 2/10/2022 version 0.3

この資料は, 自習用の数学問題集です. 教科書の理論を追っていくような証明問題に比重を置いています. 易しくはありません.
問題の順番に規則性はほとんどなく, 分野はごっちゃ, 難易度順に並んでいるわけでもありません. ただし, 後の問題で使うような知識が前半に来ないように編集していく予定です. 最終的には, これ一つで数学の基礎内容を包含できればと夢見ています. 数学記号や用語の定義は, 教科書ごとに著しく差があれば問題文中で定義しますが, 多くの教科書で使われているものは一々定義することはありません.

また, この問題集の解答が正しい保証はありません. 参考にする場合は気を付けてください.

制作者 : Anman

数理論理学

更新日 : 2/10/2022 version 0.3

制作中.

問 1–1: 制作中

(1) 未定

解:

(1)

$$\frac{(\Phi \wedge \Psi)}{\Phi}$$

集合

更新日 : 2/10/2022 version 0.3

ZC の公理における空集合. 数理論理学との連係はまだ無理（勉強中）で簡単な略した自己流のものに留める.

問 2–1: 次の問に答えよ.

(1) $\mathrm{emp}(x) \iff \forall z,\ z \notin x$ と定義する. $\mathrm{emp}(x) \land \mathrm{emp}(y) \implies x = y$ を示せ.

(2) $\exists y,\ \mathrm{emp}(y)$ を示せ.

解:

(1) 以下の証明図（省略済み）より, $\mathrm{emp}(x) \land \mathrm{emp}(y) \implies x = y$ が成り立つ. ここでは, 外延性の公理「$\forall x \forall y((\forall z,\ z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$」を用いている.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\mathrm{emp}(x) \land \mathrm{emp}(y)]_1$}
\UnaryInfC{$\forall z, z \notin x$}
\UnaryInfC{$s \notin x$}
\UnaryInfC{$\neg(s \in x)$}
\AxiomC{$[s \in x]_2$}
\BinaryInfC{$\perp$}
\UnaryInfC{$s \in y$}
\RightLabel{2}
\UnaryInfC{$s \in x \to s \in y$}
\AxiomC{$[\mathrm{emp}(x) \land \mathrm{emp}(y)]_1$}
\UnaryInfC{$\forall z, z \notin y$}
\UnaryInfC{$s \notin y$}
\UnaryInfC{$\neg(s \in y)$}
\AxiomC{$[s \in y]_3$}
\BinaryInfC{$\perp$}
\UnaryInfC{$s \in x$}
\RightLabel{3}
\UnaryInfC{$s \in y \to s \in x$}
\BinaryInfC{$s \in x \leftrightarrow s \in y$}
\UnaryInfC{$\forall z,\ z \in x \leftrightarrow z \in y$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\forall x \forall y((\forall z,\ z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$}
\UnaryInfC{$\forall y((\forall z,\ z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$}
\UnaryInfC{$(\forall z,\ z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y$}
\BinaryInfC{$x = y$}
\RightLabel{1}
\UnaryInfC{$(\mathrm{emp}(x) \land \mathrm{emp}(y)) \to x = y$}
\end{prooftree}
$$

(2) 以下の証明図より $\exists y,\ \mathrm{emp}(y)$ となる. 分出公理「ϕ は x, z 以外の自由変数があれば, $w_1, \dots w_n$ であり, y を自由変数として含まない論理式のとき, $\forall z \forall w_1, \dots w_n \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow (x \in z \land \phi))$」を用いている.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\forall x(x \in y_0 \leftrightarrow (x \in z \land x \neq x))]_1$}
\UnaryInfC{$x \in y_0 \leftrightarrow (x \in z \land x \neq x)$}
\UnaryInfC{$x \in y_0 \to (x \in z \land x \neq x)$}
\AxiomC{$[x \in y_0]_2$}
\BinaryInfC{$x \in z \land x \neq x$}
\UnaryInfC{$x \neq x$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$x = x$}
\BinaryInfC{$\perp$}
\RightLabel{2}
\UnaryInfC{$x \notin y_0$}
\UnaryInfC{$\forall x, x \notin y_0$}
\UnaryInfC{$\exists y \forall x, x \notin y$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\forall z \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow (x \in z \land x \neq x))$}
\UnaryInfC{$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow (x \in z \land x \neq x))$}
\RightLabel{1}
\BinaryInfC{$\exists y \forall x, x \notin y$}
\UnaryInfC{$\vdots$}
\UnaryInfC{$\exists y, \forall z, z \notin y$}
\UnaryInfC{$\exists y,\ \mathrm{emp}(y)$}
\end{prooftree}
$$

●● まとめ ●●

(1), (2) より $\mathrm{emp}(x)$ となる x がただ一つ存在する. この唯一の x を $\emptyset$ で表し, 空集合とよぶ. よって, $\forall z, z \notin \emptyset$ が成り立つ.

分出公理とクラス. 数理論理学との連係がまだ無理なため, この問題からはより素朴的な議論に留める. 後に編集可能性あり.

問 2–2: 次の問に答えよ.

(1) $\forall x,\ x \in A \leftrightarrow \phi(x)$ を満たす集合 A が存在すれば, それは一意に定まることを示せ.

(2) (1) における A を以後, $\{x \mid \phi(x)\}$ で表す[1] が, (1) において集合 A が存在しない場合にもこの表記を許すこととし, クラスとよぶことにする. A が存在すれば, クラス $\{x \mid \phi(x)\}$ は集合であり, A が存在しなければ, $\{x \mid \phi(x)\}$ は真クラスであるとよぶ. $\{x \mid x \neq x\}$ が集合であることを示せ.

(3) $\{x \mid x = x\}$ は真クラスであることを示せ.

解:

(1) $(\forall x,\ x \in A \leftrightarrow \phi(x)) \land (\forall x,\ x \in B \leftrightarrow \phi(x)) \to A = B$ を示す.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x,\ x \in A \leftrightarrow \phi(x)) \land (\forall x,\ x \in B \leftrightarrow \phi(x))]_1}{\forall x,\ x \in A \leftrightarrow \phi(x)}}{s \in A \leftrightarrow \phi(s)}}{\vdots} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x,\ x \in A \leftrightarrow \phi(x)) \land (\forall x,\ x \in B \leftrightarrow \phi(x))]_1}{\forall x,\ x \in B \leftrightarrow \phi(x)}}{s \in B \leftrightarrow \phi(s)}}{\vdots}}{s \in A \leftrightarrow s \in B}}{\forall z,\ z \in A \leftrightarrow z \in B}\ \text{外延性の公理を用いる}}{A = B}}{(\forall x,\ x \in A \leftrightarrow \phi(x)) \land (\forall x,\ x \in B \leftrightarrow \phi(x)) \to A = B}\ 1
$$

(2) この問題以降, 素朴的な議論で示すこととする.
問題 2-1 より, $\forall x,\ x \notin \emptyset$ より, $\forall x,\ x \in \emptyset \leftrightarrow x \neq x$ が成り立つから, $\{x \mid x \neq x\}$ は集合である. さらに外延性の公理による空集合の一意性より, $\{x \mid x \neq x\} = \emptyset$ となる.

(3) まず, クラス $\{x \in z \mid x \notin x\}$ を考える. 分出公理より, このクラスは集合である（また, 外延性の公理より一意でもある） $R = \{x \in z \mid x \notin x\}$ とすると, $R \in R \leftrightarrow R \in z \land R \notin R$ [2] となる. よって, $R \in z$ と仮定すると, $R \in R \land R \notin R$ が成り立ち矛盾するので $R \notin z$ となる. これより, 分出公理の z の任意性とから, $\forall z \exists R,\ R \notin z$ すなわち $\neg(\exists z \forall R,\ R \in z)$ [3]が成り立つ.
さて, $\{x \mid x = x\}$ が集合と仮定すると, $\forall x,\ x \in A \leftrightarrow x = x$ となる集合 A が存在する. よって, $x = x \to x \in A$ において, $x = x$ は常に成り立つこととから, $x \in A$ となるから, $\exists A \forall x,\ x \in A$ が成り立つが, これは $\neg(\exists z \forall R,\ R \in z)$ に矛盾する. よって, $\{x \mid x = x\}$ は真クラスである.

---

[1] (1) と同様に, $\forall x,\ x \in A \leftrightarrow x \in z \land \phi(x)$ の場合は $\{x \mid x \in z \land \phi(x)\}$ の表記も使用する. また, $\{x \in z \mid \phi(x)\}$ は $\{x \mid x \in z \land \phi(x)\}$ の略記とする.
[2] これより, ラッセルの逆理を回避が可能となる. $R \in z$ を仮定しない限り, $R \notin R$ から $R \in R$ が言えないからである.
[3] 素朴的には, すべての集合を含む集合は存在しないと主張している.

Kuratowski の順序対を理解しよう.

問 2–3: 次の問に答えよ.

(1) $\langle a, b\rangle$ を $\langle a, b\rangle := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ と定めるとき,

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \iff (a = c) \wedge (b = d)$$

となることを示せ. (補足: 外延的記法において, 同一の元を重複して書くことは禁じられていない. 同じものをいくつ書いてもその効果はただ 1 つだけ書いたのと同じものとしている)

(2) 順序対を拡張して ***n*-対**を次のように定義する.

$$\langle a_1\rangle := a_1, \qquad \langle a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n\rangle := \langle\langle a_1, \cdots, a_{n-1}\rangle, a_n\rangle$$

このとき,

$$\langle a_1, \cdots, a_n\rangle = \langle b_1, \cdots, b_n\rangle \iff a_1 = b_1 \wedge \cdots a_n = b_n$$

が成り立つことを示せ.

解:

(1) $\Longleftarrow$ は明らか. $\Longrightarrow$ は背理法で示す.
まず, $a \neq c$ と仮定すると, $\{a\} \neq \{c\}$ より, $\{a\} = \{c, d\}$ とならなくてはならない. このとき, $a = c = d$ となり, $a \neq c$ に矛盾. よって $a = c$ でなくてはならない.
次に $b \neq d$ を仮定する. $a = c$ より $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \implies \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$ が成り立つ. ここで,

(i) $a = b$ のとき
$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\}$ より, $\{a, d\} = \{a\}$ となるから, $d = a = b$ で $b \neq d$ に矛盾.

(ii) $a \neq b$ のとき
$\{a, d\} = \{a\}$ または $\{a, d\} = \{a, b\}$ でなくてはならない. ここで $\{a, d\} = \{a, b\}$ とすると, $b = d$ で矛盾. また, $\{a, d\} = \{a\}$ とすると, $d = a$ となり, 今度は $\{\{a\}, \{a, d\}\} = \{\{a\}\}$ となり, $\{a, b\} = \{a\}$ より, $b = a = d$ より矛盾.

以上より, $b = d$ より, $a = c \wedge b = d$ が成り立つ.

(2) (i) $\Longrightarrow$
帰納法により示す. $n = 1$ のときは明らか.
次に $\langle a_1, \cdots, a_k\rangle = \langle b_1, \cdots, b_k\rangle \implies a_1 = b_1 \wedge \cdots a_k = b_k$ が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned}\langle a_1, \cdots, a_{k+1}\rangle = \langle b_1, \cdots, b_{k+1}\rangle &\implies \langle\langle a_1, \cdots, a_k\rangle, a_{k+1}\rangle = \langle\langle b_1, \cdots, b_k\rangle, b_{k+1}\rangle \\ &\implies \langle a_1, \cdots, a_k\rangle = \langle b_1, \cdots, b_k\rangle \wedge a_{k+1} = b_{k+1} \\ &\implies a_1 = b_1 \wedge \cdots a_k = b_k \wedge a_{k+1} = b_{k+1}\end{aligned}$$

が成り立つことから, $\langle a_1, \cdots, a_n\rangle = \langle b_1, \cdots, b_n\rangle \implies a_1 = b_1 \wedge \cdots a_n = b_n$ が成り立つ.
(集合の集合を認めれば, (1) において元が集合でも問題ない... はず)

(ii) $\Longleftarrow$
上の議論を逆にたどればよい.

以上より, $\langle a_1, \cdots, a_n\rangle = \langle b_1, \cdots, b_n\rangle \iff a_1 = b_1 \wedge \cdots a_n = b_n$ が成り立つ.

二項関係に関する用語を理解する.

問 2–4: その元が全て順序対であるような集合を二項関係という. 二項関係 R の定義域 $\mathrm{dom}(R)$ および値域 $\mathrm{rng}(R)$ を次のように定義する.（このとき, 明らかに $R \subset \mathrm{dom}(R) \times \mathrm{rng}(R)$ である）

$$\mathrm{dom}(R) \coloneqq \{x \mid \exists y,\ \langle x, y\rangle \in R\}$$
$$\mathrm{rng}(R) \coloneqq \{y \mid \exists x,\ \langle x, y\rangle \in R\}$$

また, R による集合 X の像 $R[X]$ を

$$R[X] \coloneqq \{y \mid \exists x \in X,\ \langle x, y\rangle \in R\}$$

によって定義する（ここで, X は $\mathrm{dom}(R)$ の部分集合とは限らない）
このとき, 次を証明せよ. ただし, $\mathrm{dom}(R) = A,\ \mathrm{rng}(R) \subset B$ として, X, X_1, X_2 はそれぞれ A の部分集合とする.

(1) $X_1 \subset X_2 \implies R[X_1] \subset R[X_2]$

(2) $R[X_1 \cup X_2] = R[X_1] \cup R[X_2]$

(3) $R[X_1 \cap X_2] \subset R[X_1] \cap R[X_2]$

(4) $R[A - X] \supset R[A] - R[X]$

解:

(1) $y \in R[X_1]$ とすると, $\langle x, y\rangle \in R$ となる $x \in X_1$ が存在する. 今, $X_1 \subset X_2$ より x は $x \in X_2$ でもあるから, $y \in R[X_2]$ となる. よって, $R[X_1] \subset R[X_2]$ が成り立つ.

(2) (i) $R[X_1 \cup X_2] \subset R[X_1] \cup R[X_2]$ を示す.
$y \in R[X_1 \cup X_2]$ とすると, $\langle x, y\rangle \in R$ となる $x \in X_1 \cup X_2$ が存在する. この x に関して[1], $x \in X_1$ のときは $y \in R[X_1]$, $x \in X_2$ のときは $y \in R[X_2]$ となるので, $y \in R[X_1] \cup R[X_2]$ より, $R[X_1 \cup X_2] \subset R[X_1] \cup R[X_2]$ が成り立つ.

(ii) $R[X_1 \cup X_2] \supset R[X_1] \cup R[X_2]$ を示す.
$y \in R[X_1] \cup R[X_2]$ とすると, $\langle x, y\rangle \in R$ となる $x \in X_1$ が存在する, または $\langle x, y\rangle \in R$ となる $x \in X_2$ が存在する. いずれの場合も $x \in X_1 \cup X_2$ となるので $y \in R[X_1 \cup X_2]$ となるから, $R[X_1 \cup X_2] \supset R[X_1] \cup R[X_2]$

以上より, $R[X_1 \cup X_2] = R[X_1] \cup R[X_2]$ が成り立つ.

(3) $y \in R[X_1 \cap X_2]$ と仮定すると, $\langle x, y\rangle \in R$ となる $x \in X_1 \cap X_2$ が存在する. この x に関して $x \in X_1$ かつ $x \in X_2$ であるから, $y \in R[X_1] \cap R[X_2]$ となる. よって $R[X_1 \cap X_2] \subset R[X_1] \cap R[X_2]$ となる.
ちなみに, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ かつ $R[X_1] \cap R[X_2] \neq \emptyset$ となるように X_1, X_2 を上手く設定すると, $R[X_1 \cap X_2] \not\supset R[X_1] \cap R[X_2]$ となる例が見つかる.

(4) $y \in R[A] - R[X]$ とすると, $y \in R[A]$ かつ $y \notin R[X]$ となる. $y \in R[A]$ より $\langle x, y\rangle \in R$ となる $x \in A$ が存在する. ここで $x \in X$ と仮定すると, $y \in R[X]$ となってしまうので, $x \notin X$ となる. よって $x \in A - X$ より, $y \in R[A - X]$ となる. 以上より, $R[A - X] \supset R[A] - R[X]$ が成り立つ.
ちなみに $A - X \neq \emptyset$ かつ $R[A] - R[X] = \emptyset$ となるように X を設定すると, $R[A - X] \not\subset R[A] - R[X]$ となる例が見つかる.

---

[1] x は複数存在する可能性があるが 1 つについて示せば十分であることに注意. 以後の問題も同様.

逆関係, 合成関係, 写像に関する用語を理解する.

問 2–5: 次の問に答えよ.

(1) 関係 $R \subset A \times B$ が与えられたとき, その逆関係 R^{-1} を $R^{-1} := \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R\}$ により定める. $R^{-1}[Y_1 \cap Y_2] \subset R^{-1}[Y_1] \cap R^{-1}[Y_2]$ を示せ. ただし, $Y_1, Y_2 \subset B$ とする.

(2) 2 つの関係 R, S が与えられたとき, その合成関係 $R \circ S$ を $R \circ S := \{\langle x, z\rangle \mid \exists y,\ \langle x, y\rangle \in S \wedge \langle y, z\rangle \in R\}$ により定める. $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$ を示せ.

(3) 関係 R が $\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, z\rangle \in R \implies y = z$ をみたすとき, R を写像とよぶ. 特に $\mathrm{dom}(R) = A,\ \mathrm{rng}(R) \subset B$ のときは, R は A から B への写像[1]と呼ぶ. R が写像のとき, (1) において $R^{-1}[Y_1 \cap Y_2] \supset R^{-1}[Y_1] \cap R^{-1}[Y_2]$ を示せ（つまり (1) とから R が写像であれば $R^{-1}[Y_1 \cap Y_2] = R^{-1}[Y_1] \cap R^{-1}[Y_2]$ が成り立つ）

(4) f が A から B への写像であるとき, $A(= \mathrm{dom}(f))$ の元 x に関して $\langle x, y\rangle \in f$ となる $y \in B$ がただ一つ存在する. これを f による x の像とよび, $f(x)$ と表す. ここで, $(\forall x, x' \in A)[x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')]$ が成り立つとき f を単射とよぶ.[2] また, $\mathrm{rng}(f) = B$ のとき, f を全射といい, 全射かつ単射のとき全単射という. f が A から B への全単射のとき, 逆関係 f^{-1} が B から A への全単射の写像[3]であることを示せ.

解:

(1) $R^{-1} \subset B \times A$ より, 問 2-4 (3) において記号を置き換えればすぐに示される. [4]

(2) $\langle z, x\rangle \in (R \circ S)^{-1}$ とすると, $\langle x, z\rangle \in R \circ S$ より, $\langle x, y\rangle \in S \wedge \langle y, z\rangle \in R$ となる y が存在する. この y に対して, $\langle z, y\rangle \in R^{-1}$ かつ $\langle y, x\rangle \in S^{-1}$ より, $\langle z, x\rangle \in S^{-1} \circ R^{-1}$ となる. よって $(R \circ S)^{-1} \subset S^{-1} \circ R^{-1}$ となる. また, 同様の議論を逆にたどることにより, $S^{-1} \circ R^{-1} \subset (R \circ S)^{-1}$ となる. 以上より, $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$ が成り立つ.

(3) $x \in R^{-1}[Y_1] \cap R^{-1}[Y_2]$ とすると, $(\exists y \in Y_1,\ \langle y, x\rangle \in R^{-1}) \wedge (\exists y' \in Y_2,\ \langle y', x\rangle \in R^{-1})$ が成り立つ. y, y' に関して, $\langle x, y\rangle \in R$ かつ $\langle x, y'\rangle \in R$ が成り立つから, R が写像であることより $y = y'$ となる. よって $\exists y \in Y_1 \cap Y_2,\ \langle y, x\rangle \in R^{-1}$ が成り立つから, $x \in R^{-1}[Y_1 \cap Y_2]$ より, $R^{-1}[Y_1 \cap Y_2] \supset R^{-1}[Y_1] \cap R^{-1}[Y_2]$ となる.

(4) $\mathrm{dom}(f^{-1}) = B,\ \mathrm{rng}(f^{-1}) = A$ であることと f^{-1} が写像であること, および f^{-1} が単射であることを示せばよい. まず,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dom}(f^{-1}) &= \{y \mid \exists x,\ \langle y, x\rangle \in f^{-1}\} \\
&= \{y \mid \exists x,\ \langle x, y\rangle \in f\} \\
&= \mathrm{rng}(f) \\
&= B \quad (\because f \text{ が全射より})
\end{aligned}
$$

より, $\mathrm{dom}(f^{-1}) = B$ となり, 同様にして $\mathrm{rng}(f^{-1}) = A$ が成り立つ.
次に, $\langle y, x\rangle \in f^{-1}$ かつ $\langle y, x'\rangle \in f^{-1}$ とすると, $\langle x, y\rangle \in f$ かつ $\langle x', y\rangle \in f$ であり, f が写像であることから $y = f(x) = f(x')$ となる. ここで f は単射であることから, $x = x'$ となるから f^{-1} は写像となる.
最後に f^{-1} が写像であることから, $\langle y, f^{-1}(y)\rangle \in f^{-1}$ かつ $\langle y', f^{-1}(y')\rangle \in f^{-1}$ より, $\langle f^{-1}(y), y\rangle \in f$ かつ $\langle f^{-1}(y'), y'\rangle \in f$ となる. ここで, $f^{-1}(y) = f^{-1}(y')$ と仮定すると, f が写像であることから, $y = y'$ となるから f^{-1} は単射となる.
以上より, f^{-1} は B から A への全単射となる.

---

[1] A を始集合, B を終集合とよぶ.
[2] f が単射であることを示す際に, 対偶である $(\forall x, x' \in A)[f(x) = f(x') \implies x = x']$ を示す場合が非常に多い.
また, f が写像であるもとで, f が単射であることと逆関係 f^{-1} が写像であることは本質的に同じ.
[3] これを f の逆写像とよぶ
[4] 問 2-4 の他の 3 つも同様である.

合成写像と二項関係.

問 2–6: 次の問に答えよ.

(1) 写像 $f: A \to B,\ g: B \to C$ の合成関係 $g \circ f$ は A から C への写像であることを示せ.

(2) 写像 $f: A \to B$ と $g: B \to C$ がそれぞれ全単射のとき, $g \circ f$ は A から C への全単射となることを示せ.

(3) X から X への写像で, 任意の $x \in X$ に対して, その像が x となるものを恒等写像といい I_X で表す. I_X は全単射であることを示せ.

解:

(1) (i) $\mathrm{dom}(g \circ f) = A$ を示す.
$x \in \mathrm{dom}(g \circ f)$ とすると, $\langle x, z \rangle \in g \circ f$ となる z が存在するから, さらに $\langle x, y \rangle \in f$ となる y が存在する. よって, $x \in \mathrm{dom}(f) = A$ となるから, $\mathrm{dom}(g \circ f) \subset A$ となる.
また, $x \in A$ とすると, $A = \mathrm{dom}(f)$ より, $\langle x, y \rangle \in f$ となる y が存在するから, 同様に $\langle y, z \rangle \in g$ となる z が存在する. これより, $\langle x, z \rangle \in g \circ f$ より, $x \in \mathrm{dom}(g \circ f)$ より, $A \subset \mathrm{dom}(g \circ f)$ となる.
以上より, $A = \mathrm{dom}(g \circ f)$ となる.

(ii) $\mathrm{rng}(g \circ f) \subset C$ を示す.
$z \in \mathrm{rng}(g \circ f)$ とすると, $\langle x, z \rangle \in g \circ f$ となる x が存在するから, $\langle y, z \rangle \in g$ となる y が存在する. よって $z \in \mathrm{rng}(g) \subset C$ より, $z \in C$ となる. よって, $\mathrm{rng}(g \circ f) \subset C$ となる.

(iii) $\langle x, z \rangle \in g \circ f \land \langle x, z' \rangle \in g \circ f \implies z = z'$ を示す.
$\langle x, z \rangle \in g \circ f \land \langle x, z' \rangle \in g \circ f$ とすると, $\langle x, y \rangle \in f \land \langle y, z \rangle \in g$ となる y と $\langle x, y' \rangle \in f \land \langle y', z' \rangle \in g$ となる y' が存在する. ここで f が写像より, $y = y'$ であり, g も写像であるから $z = z'$ となる.

以上より, $g \circ f$ は A から C への写像である.[1]

(2) (1) より, $g \circ f$ は A から C への写像であるので, $g \circ f$ が全単射であることを示す.

(i) 全射性を示す.
$z \in C$ とすると, g が全射より, $\langle y, z \rangle \in g$ となる $y \in B$ が存在する. ここで, f も全射より, この y に対して, $\langle x, y \rangle \in f$ となる $x \in A$ が存在する. これより, $\langle x, z \rangle \in g \circ f$ となる x が存在することから $z \in \mathrm{rng}(g \circ f)$ となり, $\mathrm{rng}(g \circ f) = C$ となる. よって, $g \circ f$ は全射となる.

(ii) 単射性を示す.
$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ とすると, g が単射より, $f(x) = f(x')$ であり, f も単射であることから $x = x'$ となる. よって, $g \circ f$ は単射である.

以上より, $g \circ f$ は全単射である.

(3) (i) 全射性を示す.
$x \in X$ とすると, I_X が写像より, $\langle x, y \rangle \in I_X$ となる y がただ一つ存在し, 恒等写像の定義より $y = x$ である. よって, $\forall x \in X,\ \langle x, x \rangle \in I_X$ となるから, $X \subset \mathrm{rng}(I_X)$ より, $X = \mathrm{rng}(I_X)$ で I_X は全射である.

(ii) 単射性を示す.
任意の $x, x' \in X$ に対して, $I_X(x) = I_X(x')$ とすると, $I_X(x) = x,\ I_X(x') = x'$ より, $x = x'$ となるから, I_X は単射である.

以上より, I_X は全単射である.

---

[1] 合成関係が写像となっているときは, 合成写像とよぶ.

逆写像と二項関係.

問 2–7: 次の問に答えよ.

(1) 写像 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ の合成写像 $g \circ f : A \to C$ が全単射であるとき, g は全射であり, f は単射であることを示せ.

(2) 写像 $f : A \to B$ が全単射のとき, $f^{-1} \circ f = I_A,\ f \circ f^{-1} = I_B$ を示せ.

(3) 写像 $f : A \to B,\ g : B \to C,\ h : C \to D$ に対して $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ を示せ.

(4) 写像 $f : A \to B,\ g : B \to A$ に対して, $f \circ g = I_B,\ g \circ f = I_A$ であるとき, f, g はそれぞれ全単射であり, $g = f^{-1},\ f = g^{-1}$ となることを示せ.

解:

(1) (i) g が全射であることを示す.
$C \subset \mathrm{rng}(g)$ を示せばよい. $z \in C$ とすると, $g \circ f$ が全単射であるから, $\langle x, z\rangle \in g \circ f$ となる $x \in A$ が存在する. そして, この x, z に対して, $\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle y, z\rangle \in g$ となる y が存在する (f が写像より $y = f(x)$ となる）よって $z \in C \implies \exists y, \langle y, z\rangle \in g$ より, $z \in \mathrm{rng}(g)$ となり, g は全射となる.

(ii) f が単射であることを示す.
任意の $x, x' \in A$ に対して, $f(x) = f(x')$ と仮定すると, $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ となる. ここで, $g \circ f$ は単射であるから, $x = x'$ となる. よって f は単射となる.

(2) まず, $f^{-1} \circ f \subset I_A$ を示す.
$\langle x, y\rangle \in f^{-1} \circ f$ とすると, 問 2-6 (1) より, $f^{-1} \circ f$ は A から A への写像であるから, $x, y \in A (= \mathrm{dom}(g \circ f))$ であり, また, $\langle x, z\rangle \in f \wedge \langle z, y\rangle \in f^{-1}$ となる z が存在し, $\langle z, x\rangle \in f^{-1} \wedge \langle z, y\rangle \in f^{-1}$ となる. ここで, 問 2-5 (4) より, f^{-1} は B から A への写像であるから, $x = y$ となる. よって, $\langle x, y\rangle \in f^{-1} \circ f$ ならば $x = y$ より, $\langle x, y\rangle \in I_A$ となるので $f^{-1} \circ f \subset I_A$ となる.
次に, $I_A \subset f^{-1} \circ f$ を示す.
$\langle x, y\rangle \in I_A$ とすると, $x \in \mathrm{dom}(I_A) = A$ より, $\langle x, f(x)\rangle \in f \wedge \langle f(x), x\rangle \in f^{-1}$ となるから $\langle x, x\rangle \in f^{-1} \circ f$ となる. また, I_A は恒等写像であるから $x = y$ となる. よって, $\langle x, y\rangle \in f^{-1} \circ f$ となるので $I_A \subset f^{-1} \circ f$ となる.
以上より, $f^{-1} \circ f = I_A$ となる. $f \circ f^{-1} = I_B$ も同様に示せる.

(3) $\langle x, w\rangle \in h \circ (g \circ f)$ とすると, $\langle x, z\rangle \in g \circ f,\ \langle z, w\rangle \in h$ となる z が存在し, $\langle x, y\rangle \in f,\ \langle y, z\rangle \in g$ となる y が存在する. よって, $\langle y, w\rangle \in h \circ g$ となり, $\langle x, w\rangle \in (h \circ g) \circ f$ となる. よって, $h \circ (g \circ f) \subset (h \circ g) \circ f$ となる. 同様に, $h \circ (g \circ f) \supset (h \circ g) \circ f$ となるので, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ となる.[1]

(4) まず, 問 2-6(3) より, I_A, I_B は共に全単射である. よって (1) より $f,\ g$ は共に全単射である.
次に, (2) より, $f \circ g = I_B$ ならば $f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ I_B$ から $g = f^{-1}$ となる. 同様に, $f = g^{-1}$ となる.

[1] この結合法則は一般の二項関係においても成り立つ.

順序関係と順序集合

問 2–8: R がある集合 A 上の二項関係であるとき, $\langle x, y\rangle \in R$ であることを以後 xRy と表す.

(1) $\leq$ が 集合 A 上の二項関係であり, 任意の $x, y, z \in A$ に対して, 次の $(O1) \sim (O3)$ を満たすとき, $\leq$ は A 上の順序（関係）であるといい, 集合 A 上に一つの順序関係 $\leq$ が定められているとき, $\langle A, \leq\rangle$ を順序集合という.

(O1) $\quad x \leq x \quad$ (反射律)

(O2) $\quad x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y \quad$ (反対称律)

(O3) $\quad x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z \quad$ (推移律)

$x \leq y \wedge x \neq y$ が成り立つとき, またそのときに限り $x < y$ と二項関係 $<$ を定めれば, 次の (O4), (O5) が成り立つことを示せ.

(O4) $\quad x < y \implies y \nless x \coloneqq \neg(y < x)$

(O5) $\quad x < y \wedge y < z \implies x < z$

(2) (1) とは逆に (O4), (O5) を満たす二項関係 $<$ が集合 A 上に与えられたとき, $x < y \vee x = y$ が成り立つとき, またその時に限り $x \leq y$ と二項関係 $\leq$ を定めれば $\leq$ は順序関係になることを示せ.

(3) 順序集合 $\langle A, \leq\rangle$ において, 集合 A の任意の二元 x, y に関して $x \leq y$ または $y \leq x$ が成り立つとき, $\leq$ は全順序（関係）といい, $\langle A, \leq\rangle$ は全順序集合という. $\langle A, \leq\rangle$ が全順序集合のとき, $x \nless y \iff y \leq x$ を示せ.

解:

(1) まず, $x < y$ が成り立つ下で $y < x$ が成り立つと仮定すると, $x \leq y \wedge y \leq x$ より (O2) から $x = y$ となるが, これは $x \neq y$ に矛盾する. よって (O4) が成り立つ.
次に, $x < y \wedge y < z$ が成り立つと仮定すると, $x \leq y \wedge y \leq z$ が成り立つから, (O3) より $x \leq z$ が成り立つ. ここで, $x = z$ が成り立つと仮定すると, $z < y \wedge y < z$ が成り立ち, $y = z$ となるが, これは $y \neq z$ に矛盾する. よって $x \neq z$ となり, $x < z$ より (O5) が成り立つ.

(2) (i) 反射律の成立
$x = x$ が常に成立ことから, $x < x \vee x = x$ も常に成立する. よって, 反射律が成立する.

(ii) 反対称律の成立
$x \leq y \wedge y \leq x$ が成り立つが $x \neq y$ だと仮定すると, $x < y \wedge y < x$ が成り立つ. これより, (O5) から $x < x$ となるが, (O4) より $(x < x) \wedge \neg(x < x)$ が成り立ち, 矛盾式が導出される. よって $x = y$ より 反対称律が成立する.

(iii) 推移律の成立
$x \leq y \wedge y \leq z$ が成り立つと仮定すると, $(x < y \vee x = y) \wedge (y < z \vee y = z)$ が成り立つ. $x < y \wedge y < z$ の場合は (O5) より $x < z$ より $x \leq z$ となり, $x < y \wedge y = z$ の場合は $x < z$ で $x \leq z$ となる. $x = y \wedge y < z$ の場合も $x < z$ より $x \leq z$ であり, $x = y \wedge y = z$ の場合は $x = z$ で $x \leq z$ となるから, 推移律が成り立つ.

(3) $x \nless y$ とすると, $x \nleq y \vee x = y$ となる. $x \nleq y$ の場合は $\leq$ が全順序より, $y \leq x$ であり, $x = y$ の場合も $y \leq x$ となるから $x \nless y \implies y \leq x$ となる.
$y \leq x$ として, $x < y$ が成り立つと仮定する. $x < y$ より, $x \neq y$ であるから $y \leq x$ より $y < x$ が成り立つ. よって $x < y \wedge y < x$ が成り立つが, これは (1) で述べた通り $x \neq y$ に矛盾する. よって $y \leq x \implies x \nless y$ となる.
以上より, $x \nless y \iff y \leq x$ が成り立つ.

最大元, 極大元, 部分順序集合, 上界, 上限.

問 2–9: $\langle A, \leq\rangle$ を一つの与えられた順序集合とする. A の空でない部分集合 M を考える. $a, b \in M$ に関して $a \leq b$ が成り立つとき, またその時に限り $a \leq_M b$ と二項関係 $\leq_M$ を定めると, これは明らかに M 上の順序関係となる. ここで $\langle M, \leq_M\rangle$ を $\langle A, \leq\rangle$ の部分順序集合といい, 誤解が生まれない場合には $\langle M, \leq\rangle$ で表す.

(1) A に一つの元 a があって, $\forall x \in A,\ x \leq a$ が成り立つとき, a を A の最大元といい $\max A$ と表す. 最大元が任意の順序集合の台集合[1] に存在するとは限らないが, 存在すれば一意的に定まることを示せ.

(2) A の元 a に関して, $\neg(\exists x \in A,\ a < x)$ が成り立つとき, a を A の極大元という. 極大元の存在やその一意性は一般には保証されないが, $\max A$ が存在するとき, $a = \max A$ となることを示せ.

(3) A が全順序集合のとき, a が A の最大限であることと a が A の極大元であることは同値であることを示せ.

(4) A の元 a 関して, $\forall x \in M,\ x \leq a$ が成り立つとき, a を M の A における上界という. M の A における上界全体の集合を M^* とすると, $M^* \neq \emptyset$ のとき, M は A において上に有界という. M が A において上に有界かつ $\min M^*$ が存在するとき, $\min M^*$ を M の A における上限といい $\sup M$ と表す. $\sup M$ が存在すれば一意的であることを示せ.

(5) $\sup M$ が存在するという下で, $\sup M \in M \iff (\max M (\in M)$ が存在$)$ を示せ.

解:

(1) $\max A$ が存在するとし, $a = \max A,\ a' = \max A$ かつ $a \neq a'$ とすると, a, a' 共に A の最大限より $a \leq a'$ かつ $a' \leq a$ より $a = a'$ となり矛盾する. よって, $\max A$ が存在すれば, それは一意に定まる.

(2) $a = \max A$ とし, a が A の極大元でないとする. a は A の極大元ではないから $a < x$ となる $x \in A$ が存在する. これより $a \leq x$ かつ $a \neq x$ となるが, $a = \max A$ より $x \leq a$ でもあるから $a = x \wedge a \neq x$ となり矛盾する. よって $a = \max A$ は A の極大元となる.

(3) A が全順序集合のとき,

$$\begin{aligned} \forall x \in A,\ x \leq a &\iff \forall x \in A,\ \neg(a < x) && (\because \text{問 2-8 (3) より}) \\ &\iff \neg(\exists x \in A,\ a < x) \end{aligned}$$

より, A が全順序集合のとき, a が A の最大限となることと, A の極大元になることは同値である.

(4) $\sup M$ が存在すれば $\min M^*$ が存在し, 最小元の一意性より $\sup M$ は一意的に定まる.

(5) $a \in A$ に関して

$$a = \sup M \iff \begin{cases} \forall x \in M,\ x \leq a & (\because a \text{ は } M \text{ の上界}) \quad \text{(a)} \\ \forall x' \in M^*,\ a \leq x' & (\because a \text{ は上界の最小値}) \quad \text{(b)} \end{cases}$$

となるから, $\sup M \in M$ とすると (a) より, $\max M = \sup M$ となる. また, $a = \max M$ とすると, 明らかに (a) が成り立ち, また, $a \in M$ より (b) も成り立つ. よって, $a = \sup M$ となり, $\sup M = \max M$ より, $\sup M \in M$ となる.

[1] 順序集合 $\langle A, \leq\rangle$ における集合 A をその台集合という. また, 順序関係を明示しなくても誤解が生まれない場合は A のことを順序集合とよぶことがある.

●● 最大元, 上限の補足 ●●

最大元と上限についてまとめると次の表のようになる（最小元, 下限も同様）

表 1: $\max M, \sup M$ の存在

$\max M$ の存在	$\sup M$ の存在	説明
存在する	存在する	$\sup M = \max M,\ \sup M \in M$
存在する	存在しない	ありえない.
存在しない	存在する	$\sup M \notin M$ となる.
存在しない	存在しない	起こりうる.

- $\max M$ が存在 $\implies$ $\sup M = \max M$
- $\max M$ が存在しない $\implies$ $\sup M$ が存在し $\sup M \notin M$, または $\sup M$ は存在しない.
- $\sup M$ が存在し, $\sup M \in M$ $\implies$ $\max M = \sup M$
- $\sup M$ が存在し, $\sup M \notin M$ $\implies$ $\max M$ は存在しない.
- $\sup M$ が存在しない $\implies$ $\max M$ は存在しない.

順序写像, 順序単射, 順序同型写像, 順序同型

問 2–10: 次の問に答えよ.

(1) 2 つの順序集合 $\langle A, \leq\rangle$ および $\langle A', \leq'\rangle$ を考える. $f : A \to A'$ で $a, b \in A$ に対して $a \leq b \implies f(a) \leq' f(b)$ となるとき, f は $\langle A, \leq\rangle$ から $\langle A', \leq'\rangle$ への順序写像とよばれる.[1] f が順序写像で, さらに $a, b \in A$ に対して $f(a) \leq' f(b) \implies a \leq b$ となるとき, f は単射となることを示せ.[2]

(2) f が A から A' への順序単射かつ f が全射のとき, f は $\langle A, \leq\rangle$ から $\langle A', \leq'\rangle$ への順序同型写像とよばれる.[3] f が A から A' への順序同型写像のとき, f^{-1} は A' から A への順序同型写像となることを示せ.

(3) $\langle A, \leq\rangle$ から $\langle A', \leq'\rangle$ への順序同型写像が存在するとき, 両者は順序同型であるといい, $\langle A, \leq\rangle \simeq \langle A', \leq'\rangle$ と表す（または略して $A \simeq A'$ と表す）$\langle A, \leq\rangle \simeq \langle A, \leq\rangle$ となることを示せ.

(4) $\langle A, \leq\rangle \simeq \langle A', \leq'\rangle \implies \langle A', \leq'\rangle \simeq \langle A, \leq\rangle$ となることを示せ.

(5) $\langle A, \leq\rangle \simeq \langle A', \leq'\rangle \wedge \langle A', \leq'\rangle \simeq \langle A'', \leq''\rangle \implies \langle A, \leq\rangle \simeq \langle A'', \leq''\rangle$ となることを示せ.

解:

(1) $f(a) = f(b)$ とすると, $f(a) \leq' f(b)$ かつ $f(b) \leq' f(a)$ となるから, $a \leq b$ かつ $b \leq a$ より $a = b$ となる. よって, f は単射となる.

(2) $f : A \to A'$ は全単射より, 2-5 (4) より f^{-1} は A' から A への全単射写像である. ここで, $a', b' \in A'$ とすると, f が全射より, $\langle a, a'\rangle \in f$, $\langle b, b'\rangle \in f$ となる $a, b \in A$ が存在する. ここで, f は写像より, $a' = f(a)$, $b' = f(b)$ となる. また, $\langle a', a\rangle \in f^{-1}$ で $a = f^{-1}(a')$ となり, 同様に $b = f^{-1}(b')$ となる.
よって, $a' \leq' b'$ とすると, $f(a) \leq' f(b)$ より, f が順序同型写像であることとから $f^{-1}(a') \leq f^{-1}(b')$ となり, f^{-1} は順序写像となる. また, さらに $f^{-1}(a') \leq f^{-1}(b')$ とすると, $a \leq b$ より, f の順序単射性より, $a' \leq b'$ となり, f^{-1} は順序単射となる. ここで, f^{-1} は全（単）射であったから f は順序同型写像となる.

(3) I_A が $\langle A, \leq\rangle$ から $\langle A, \leq\rangle$ への順序同型写像となる. よって, $A \simeq A'$ となる.

(4) $\langle A, \leq\rangle$ から $\langle A', \leq'\rangle$ への順序同型写像の一つを f とすると, (3) より, f^{-1} は $\langle A', \leq'\rangle$ から $\langle A, \leq\rangle$ への順序同型写像となる. よって, $A \simeq A' \implies A' \simeq A$ となる.

(5) A から A' への順序同型写像の一つを f, A' から A'' への順序同型写像の一つを f' とし, $f'' = f' \circ f$ とする. まず, 問 2-6 (2) より f'' は A から A'' への全単射である. 次に $a \leq b$ とすると, $f(a) \leq f(b)$ より $f'(f(a)) \leq f'(f(b))$, すなわち $f''(a) \leq f''(b)$ となり, f'' は順序写像となる. 同様に, $f''(a) \leq f''(b)$ とすると, $a \leq b$ となり, f'' は順序単射となるから, 全射であることとから f'' は A から A'' への順序同型写像となる. よって, $A \simeq A' \wedge A' \simeq A'' \implies A \simeq A''$ となる.

[1] 誤解がない生まれない場合にには A から A' への順序写像や単に順序写像という場合がある

[2] この f を $\langle A, \leq\rangle$ から $\langle A', \leq'\rangle$ への順序単射という. これも誤解の生まれない場合には A から A' への順序単射や単に順序単射という場合がある.

[3] 注 1, 2 と同様.

整列集合, 直前直後の元, 切片

問 2–11: 次の問に答えよ.

(1) W が順序集合で, その空でない任意の部分集合が最小元をもつとき, W を整列集合という. W は全順序集合であることを示せ.

(2) A を任意の順序集合とし, $a, b \in A$ とする. $a < b \land \neg(\exists x \in A,\ a < x < b)$ が成り立つとき, A の中で b は a の直後の元, a は b は直前の元であるという. また, $\{x \in A \mid x < a\}$ を A の a による切片といい, $\mathrm{seg}_A(a)$ で表す. **全順序集合** A の中で b が a の**直前**の元であることと $b = \max \mathrm{seg}_A(a)$ であることが同値であることを示せ. [1]

(3) tmp

解:

(1) W の任意の異なる二元 a, b に対して, $\{a, b\} \subset W$ より, $\{a, b\}$ に最小元が存在する. 最小元の一意性（問 2-9 参考）より, a, b のどちらか一方が $\min\{a, b\}$ となる. ここで, a が最小元のとき, $a \leq b$ で比較可能, また, b が最小元のときも $b \leq a$ となり比較可能である. よって, W は全順序集合となる.

(2) (i) $\Longrightarrow$

b が a の直前の元とすると, $b \in A$ かつ $b < a$ より, $b \in \mathrm{seg}_A(a)$ となる. また, $x \not\leq b$ となる $x \in \mathrm{seg}_A(a)$ が存在すると仮定すると, 問 2-8 (3) より, $x > b$ となる. また, $x \in \mathrm{seg}_A(a)$ より, $x < a$ より, $b < x < a$ となるが, これは $\neg(\exists x \in A,\ b < x < a)$ に矛盾する. よって, $\forall x \in \mathrm{seg}_A(a),\ x \leq b$ となり, $b = \max \mathrm{seg}_A(a)$ となる.

(ii) $\Longleftarrow$

$b = \max \mathrm{seg}_A(a)$ とすると, まず, $b \in \mathrm{seg}_A(a)$ より, $b < a$ となる. 次に, $b < x_0 < a$ となる $x_0 \in \mathrm{seg}_A(a)$ が存在すると仮定する. ここで, $\forall x \in \mathrm{seg}_A(a),\ x \leq b$ より, $b < x_0 \leq b$ となる. $b < x_0$ より, $b \neq x_0$ であるから, $b < x_0 < b$ となるが, これは矛盾. よって, $\neg(\exists x \in A,\ a < x < b)$ が成り立つ. よって, b は a の直前の元である.

[1] これより, a の直前の元は a に対して一意に定まる. 直後の元も同様.

選択公理を理解する.

問 2–12: 次の問に答えよ.

(1) Λ から A_λ への写像を 集合族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ という. ここで, Λ から A_λ への写像 a のうち, $a_\lambda \in A_\lambda$ を満たすものの全体を集合族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の直積といい, $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ で表す. 今 $\prod_{n\in \boldsymbol{N}} A_n$ を $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ と表すとき, $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ は n-対の性質を持つことを示せ (ほぼ明らか)

(2) 選択公理 (AC)

$$\Lambda \neq \emptyset \wedge \forall\lambda \in \Lambda,\ A_\lambda \neq \emptyset \implies \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$$

から従属選択公理 (DC)

$$\begin{cases} A \neq \emptyset \\ (\forall x \in A)[\exists y \in A,\ \langle x, y\rangle \in R] \qquad (R \subset A \times A) \end{cases} \implies \exists f : \boldsymbol{N} \to A,\ \langle f(n), f(n+1)\rangle \in R$$

を示せ.

(3) 従属選択公理 (DC) から可算選択公理 (CC)

$$\forall n \in \boldsymbol{N},\ A_n \neq \emptyset \implies \prod_{n\in \boldsymbol{N}} A_n \neq \emptyset$$

を示せ.

解:

(1) $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ は 写像 A によって各 $n \in \boldsymbol{N}$ を写した先 $A(1), A(2), \cdots, A(n)$ を表す. ここで, 写像の相等条件を考えれば, $(A_1, A_2, \cdots, A_n) = (B_1, B_2, \cdots, B_n) \implies A_1 = B_1 \wedge A_2 = B_2 \wedge \cdots \wedge A_n = B_n$ となり n-対の性質を持つ.[1]

(2) $R_x = \{y \in A \mid \langle x, y\rangle \in R\}$ とすれば, DC の仮定より $R_x \neq \emptyset$ となるから, AC から $\prod_{x\in A} R_x \neq \emptyset$, 成り立つ. すなわち, $\exists g : A \to A,\ (\forall x \in A)[\langle x, g(x)\rangle \in R_x]$ が成り立つ. そこで, A の任意の元を x_0 とし, $x_n = g(x_{n-1})$ と帰納的に $(x_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ を作れば, $\forall n \in \boldsymbol{N},\ \langle x_n, x_{n+1}\rangle \in R$ となる. したがって, $f(n) = x_n$ となるように f を定めれば, $\langle f(n), f(n+1)\rangle \in R$ となる.

(3) $P = \left\{ p \ \middle|\ (\exists\, n \in \boldsymbol{N}) \left[p : \{0, 1, \cdots, n\} \to \bigcup_{i=0}^n A_n \ \wedge\ (\forall i \in \{0, 1, \cdots, n\})\, [p(i) \in A_i]\right] \right\}$ を考える. p は写像であるが, 写像は二項関係の特別な場合（すなわち $p \subset \{0, 1, \cdots, n\} \times \bigcup_{i=0}^n A_n$ ）であることに注意して $R = \{\, \langle p, q\rangle \in P \times P \mid p \subsetneq q\,\}$ と二項関係 R を定めると, pRq ならば q は写像として p の真の拡大となる. 今, $\forall n \in \boldsymbol{N},\ A_n \neq \emptyset$ より, $\forall p \in P,\ \exists q \in P,\ \langle p, q\rangle \in R$ が成り立つ（A_{n+1} から元を 1 つ選んで拡大すればよい）よって, DC より $f : \boldsymbol{N} \to P$ で $\forall n \in \boldsymbol{N},\ \langle f(n), f(n+1)\rangle \in R$ となるものが存在する. ここで $f(n) \subset \boldsymbol{N}\times P$ にであることに注意して, $a = \bigcup_{n\in \boldsymbol{N}} f(n)$ とすれば, 任意の n に対して, $\mathrm{dom}(f(n)) \subsetneq \mathrm{dom}(f(n+1))$ より $\forall n \in \boldsymbol{N},\ n \in \mathrm{dom}(f(n))$ となるから $\boldsymbol{N} \subset \bigcup_{n\in \boldsymbol{N}} \mathrm{dom}(f(n))$ となる. また, $\forall n \in \boldsymbol{N},\ \mathrm{dom}(f(n)) \subset \boldsymbol{N}$ より, $\bigcup_{n\in \boldsymbol{N}} \mathrm{dom}(f(n)) \subset \boldsymbol{N}$ となるから, $\bigcup_{n\in \boldsymbol{N}} \mathrm{dom}(f(n)) = \boldsymbol{N}$ となる. ここで $\mathrm{dom}(a) = \bigcup_{n\in \boldsymbol{N}} \mathrm{dom}(f(n))$ より, $\mathrm{dom}(a) = \boldsymbol{N}$ となる. さらに, 集合 P の定義より $\forall n \in \boldsymbol{N},\ a(n) \in A_n$ となる. 以上より $a \in \prod_{n\in \boldsymbol{N}} A_n$ となり, $\prod_{n\in \boldsymbol{N}} A_n \neq \emptyset$ となる.

[1] これにより, $\prod_{n\in \boldsymbol{N}} A_n$ は直積集合 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ と同一視される.

選択公理の簡単な応用例.

問 2–13: f を A から B への写像とするとき, 次を示せ. ただし, I_X は X から X への恒等写像を表すものとする.

(1) f が全射 $\iff$ $f \circ g = I_B$ となるような写像 $g : B \to A$ が存在する

(2) f が単射 $\iff$ $h \circ f = I_A$ となるような写像 $h : A \to B$ が存在する

(3) A から B への単射が存在する $\iff$ B から A への全射が存在する

解:

(1) (i) $\Longrightarrow$

f は全射より, $\forall b \in B,\ f^{-1}\{b\} \neq \emptyset$ となる. よって, 選択公理より $g \in \prod_{b \in B} f^{-1}\{b\}$ となる $g : B \to A$ が存在する. この g は 任意の $b \in B$ に対して, $g(b) \in f^{-1}\{b\}$ となるから, $\forall b \in B,\ f(g(b)) = b$ となるから $f \circ g = I_B$ を満たす.

(ii) $\Longleftarrow$

$f \circ g = I_B$ となる $g : B \to A$ の存在を仮定すると, $\forall b \in B,\ f(g(b)) = b$ となる. $g(b) \in A$ より, f は全射となる.

以上より,「 f が全射 $\iff$ $f \circ g = I_B$ となるような写像 $g : B \to A$ が存在する」が成り立つ.

(2) (i) $\Longrightarrow$

f の終域を B から $\mathrm{rng}(f)$ へ縮小すると f は全単射となる. このとき, 逆写像 $f^{-1} : \mathrm{rng}(f) \to A$ が存在し, 今 $a \in A$ を適当にとり, $h : B \to A$ を

$$h(b) = \begin{cases} a & (y \in B - \mathrm{rng}(f) \text{ のとき}) \\ f^{-1}(b) & (y \in \mathrm{rng}(f) \text{ のとき}) \end{cases}$$

のように定めれば, $h \circ f = I_A$ を満たす.

(ii) $\Longleftarrow$

$f(a) = f(a') \implies a = h(f(a)) = h(f(a')) = a'$ より f は単射となる.

以上より,「 f が単射 $\iff$ $h \circ f = I_A$ となるような写像 $h : A \to B$ が存在する 」が成り立つ.

(3) (i) $\Longrightarrow$

A から B への単射を ϕ とすれば (2) より, $\psi \circ \phi = I_A$ となる写像 $\psi : A \to B$ が存在する. この ψ は (1) より全射である((1) において B と A を逆にみればよい)

(ii) $\Longleftarrow$

B から A への全射を ψ とすれば (1) より, $\psi \circ \phi = I_A$ となる写像 $\phi : A \to B$ が存在する((1) において B と A を逆にみればよい)ここで, この ϕ は (2) より単射である.

以上より,「A から B への単射が存在する $\iff$ B から A への全射が存在する」が成り立つ.

問題というよりかは確認.

問 2–14: 次の問に答えよ.

(1) R を集合 A 上の同値関係とする. A の元 x に対して, 集合 $\{y \in A \mid xRy\}$ を x の R による同値類といい, 以後 $[x]_R$ と表す. また, 同値類全体の集合を A の R による商集合といい A/R と表す. ここで, A/R によって定まる集合族が A の直和分割となることを示せ. ただし, ある集合 X の部分集合族 $(X_i)_{i\in I}$ が次の三条件を満たすとき, $(X_i)_{i\in I}$ は X の直和分割と呼ばれる.

$$\forall i \in I,\ X_i \neq \emptyset \tag{1}$$

$$\bigcup_{i\in I} X_i = X \tag{2}$$

$$i, j \in I \wedge i \neq j \implies X_i \cap X_j = \emptyset \tag{3}$$

(2) 空でない集合 A のある集合族 $(C_i)_{i\in I}$ が A の直和分割であるとする. 任意の A の元 x に対し, $x \in C_i$ となる $i \in I$ がただ一つ存在することを示せ.

(3) (2) において, 関係 R を $xRy \iff \exists i \in I,\ x \in C_i \wedge y \in C_i$ により定めると, R は A 上の同値関係となることを示せ.

解:

(1) A/R によって定まる族を $(X)_{X\in A/R}$ で表すことにすると

(i) 任意の X を一つとり, その代表元[1]を x とすると, $x \in X$ より $X \neq \emptyset$ となる（$A/R := \{[x]_R \mid x \in A\}$ としているので, 代表元の存在が保証される）

(ii) 任意の $x \in A$ に対し, $x \in [x]_R \in A/R$ より, $x \in X$ となる $X \in A/R$ が存在することから $\bigcup_{X\in A/R} X = A$ となる.

(iii) 任意の $X, Y \in A/R$ に対して, $X \neq Y$ のとき, $X \cap Y \neq \emptyset$ と仮定する. $c \in X \cap Y$ とすれば xRc かつ yRc となる（x, y はそれぞれ X, Y の代表元とする） ここで, R は同値関係より xRy となり $y \in [x]_R\ (= X)$ となる. $y \in [x]_R$ であるとき, $[x]_R = [y]_R$ であるので, $X = Y$ となるが, これは $X \neq Y$ に矛盾. よって $X \cap Y = \emptyset$ となる.

以上より, A/R によって定まる集合族は A の直和分割となる.

(2) まず, 直和分割の条件 (2) より, $\bigcup_{i\in I} C_i = A$ より, 任意の A の元 x に対して $x \in C_i$ となる $i \in I$ が存在する. また, $x \in C_i$ かつ $x \in C_j$ となる $i, j\ (i \neq j)$ が存在すると仮定すると, $x \in C_i \cap C_j$ より, 直和分割の条件 (3) に矛盾することから, $x \in C_i$ かつ $x \in C_j$ となる $i, j\ (i \neq j)$ は存在しない.
以上より, 任意の A の元 x に対し, $x \in C_i$ となる $i \in I$ がただ一つ存在する.

(3)

(i) (2) より 任意の $x \in A$ に対して, $x \in C_i$ となる i が存在することから, $\forall x \in A,\ xRx$ で反射律が成立.

(ii) 対称律は明らかに成立.

(iii) $xRy \wedge yRz$ が成り立つとすると, $(\exists i \in I,\ x \in C_i \wedge y \in C_i) \wedge (\exists j \in I,\ y \in C_j \wedge z \in C_j)$ が成り立つ. ここで $i \neq j$ とすると, $y \in C_i \cap C_j$ より, $(C_i)_{i\in I}$ が直和分割であることに反するから, $i = j$ となる. これより, $\exists k \in I,\ x \in C_k \wedge z \in C_k$ が成り立つので xRz で推移律が成立.

以上より, R は A 上の同値関係となる.

---

[1] $X \in A/R$ に対する X の元

Bernstein の定理を理解

問 2–15: 集合 A から B への全単射（B から A への全単射でもある）が存在するとき A と B は対等であるといい, $A \sim B$ で表す. このとき, 次の問に答えよ.

(1) A から B への単射が存在し, かつ B から A への単射が存在すれば $A \sim B$ となることを示せ.

(2) A から B への全射が存在し, かつ B から A への全射が存在すれば $A \sim B$ となることを示せ.

(3) $A \sim B'$ となるような $B' \subset B$ が存在し, かつ $B \sim A'$ となるような $A' \subset A$ が存在すれば $A \sim B$ となることを示せ.

解:

(1) f を A から B への単射, g を B から A への単射とする.
このとき, $B_0 = B - f[A]$ とし, $A_n = g[B_{n-1}], B_n = f[A_n]$ として, A の部分集合族 $(A_n)_{n\in\{1,2,3,\dots\}}$, B の部分集合族 $(B_n)_{n\in\{0,1,2,\dots\}}$ を定める. また, $A - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A^*, B - \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = B^*$ とする.
ここで,

$$\begin{aligned}
f[A^*] &= f[A] - f\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] \\
&= (B - B_0) - f\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] \quad (\because f \text{ が単射より}) \\
&= B - \left(B_0 \cup f\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right]\right) \\
&= B - \left(B_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} f[A_n]\right) \\
&= B - \left(B_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \quad (\because f[A_n] = B_n \text{ より}) \\
&= B - \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \\
&= B^*
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
g\left[\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right] &= \bigcup_{n=1}^{\infty} g[B_{n-1}] \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad (\because g[B_{n-1}] = A_n \text{ より})
\end{aligned}$$

となる. よって f の定義域を A^*, 終集合を B^* に変えた写像と, g の定義域を $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$, 終集合を $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ に変えた写像は, それぞれ全単射となる. そこで, A から B への写像 F を $a \in A^*$ のとき $F(a) = f(a)$, $a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ のときは $F(a) = g^{-1}(a)$ とすれば F は全単射となり, $A \sim B$ となる.

(2) 問 2-13 (3) よりすぐに示せる.

(3) A から B' への全単射の写像の終集合を B に拡大すれば, その写像は単射となる. 同様に B から A' への全単射も B から A への単射にすることが可能である. よって (1) とから $A \sim B$ となる.

●● Bernstein の定理の証明の補足 ●●

Bernstein の定理の証明は次の図をイメージすると良い.

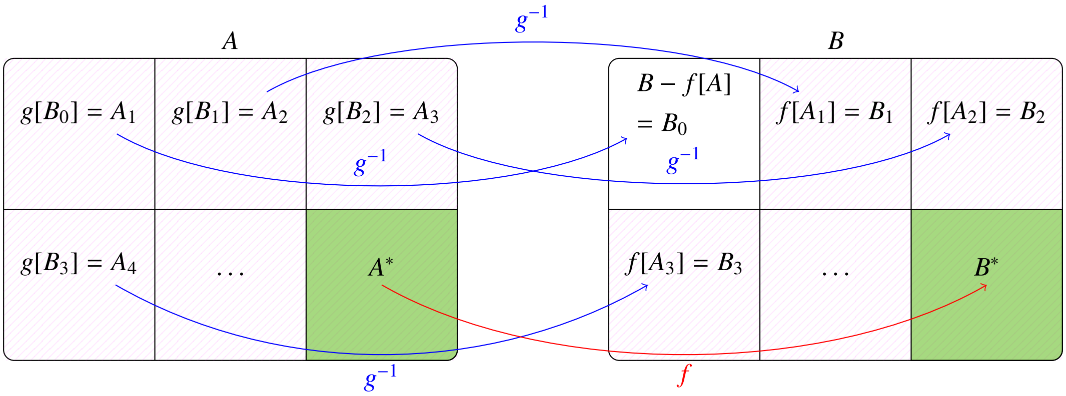

図 1: Bernstein の定理のイメージ

上図において g^{-1}, f をまとめた写像が全単射だと証明している. なお, マゼンダ色の領域は $A \to f[A]$ の対応を表す. また, 図中における各集合の共通部分が無いのは, f, g の単射性による.

代数学

更新日 : 2/10/2022 version 0.3

ペアノシステムの数学的帰納法.

問 3–1: 次の条件 (N1) から (N3) を満たす, 集合 $\boldsymbol{N}$, その一つの元 0, および写像 $\sigma : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ の対 $\langle \boldsymbol{N}, 0, \sigma \rangle$ をペアノシステムという.

(N1) $\sigma : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ は単射である.

(N2) $0 \notin \sigma(\boldsymbol{N})$

(N3) $S \subset \boldsymbol{N}$ のとき, S が次の二条件を満たせば $S = \boldsymbol{N}$ となる.

$$0 \in S \tag{1}$$

$$\sigma(S) \subset S \tag{2}$$

特に, (N3) を数学的帰納法の公理とよぶ. また, σ は後継者写像といい, n に対して $\sigma(n)$ はその後継者とよばれる.

(1) 任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対して, $n \in S \implies \sigma(n) \in S$ が成り立つとすると, $\sigma(S) \subset S$ が成り立つことを示せ. ただし, $S \subset \boldsymbol{N}$ とする.

(2) 任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対して, $\sigma(n) \neq n$ を示せ.

(3) 任意の $n \in \boldsymbol{N} \backslash \{0\}$ に対して, $\exists m \in \boldsymbol{N},\ \sigma(m) = n$ を示せ.

解:

(1) $y \in \sigma(S)$ とすると, $\sigma(S)$ の定義から, $\langle x, y \rangle \in \sigma$ となる $x \in S$ が存在する. 今, $\forall n \in \boldsymbol{N},\ n \in S \implies \sigma(n) \in S$ が成り立つので, $\sigma(x) \in S$ となる. また, σ は写像より $y = \sigma(x)$ となるから, $y \in S$ となる. よって, $\sigma(S) \subset S$ となる.

(2) $S = \{n \in \boldsymbol{N} \mid \sigma(n) \neq n\}$ とする. まず, (N2) より $0 \in S$ となる. 次に, 任意の $n \in \boldsymbol{N}$ を一つとると, $n \in S$ ならば $\sigma(n) \neq n$ より, (N1) から $\sigma(\sigma(n)) \neq \sigma(n)$ となり, $\sigma(n) \in S$ となる. よって, (1) より, $\sigma(S) \subset S$ となるから, (N3) より $S = \boldsymbol{N}$ となる. これは, $\forall n \in \boldsymbol{N},\ \sigma(n) \neq n$ を意味する. [1]

(3) $S = \{0\} \cup \sigma(\boldsymbol{N})$ とすると, 明らかに $0 \in S$ となる. また, 任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対して, $n \in S$ とすると, $\sigma(n) \in \sigma(\boldsymbol{N}) \subset S$ となる. よって, (N3) より, $S = \boldsymbol{N}$ となる. ゆえに $\boldsymbol{N}$ の 0 以外の元は $\sigma(\boldsymbol{N})$ に含まれる. 以上より, 任意の $n \in \boldsymbol{N} \backslash \{0\}$ に対して, $\exists m \in \boldsymbol{N},\ \sigma(m) = n$ となる. ちなみに, (N2) とから, $\boldsymbol{N} \backslash \{0\} = \sigma(\boldsymbol{N})$ が成り立つ（外延性から示せる）

[1] $P(0)$ が真, かつ $P(n)$ が真ならば $P(\sigma(n))$ が真であれば $S = \{n \in \boldsymbol{N} \mid P(n)\}$ とすることで N3 から $S = \boldsymbol{N}$ を示す方法はよく使われる.

ペアノシステムの一意性.

問 3–2: 次の問に答えよ.

(1) X を一つの集合とし, X の一つの元 x_0 と写像 $\phi : X \to X$ とが与えられたとする. このとき, 次の二条件を満たすような写像 $f : \boldsymbol{N} \to X$ がただ一つ存在することを示せ.

$$f(0) = x_0 \tag{i}$$
$$\forall n \in \boldsymbol{N},\ f(\sigma(n)) = \phi(f(n)) \tag{ii}$$

(2) $\langle \boldsymbol{N}, 0, \sigma \rangle$ と $\langle \boldsymbol{N}', 0', \sigma' \rangle$ が共にペアノシステムであるとき, $\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{N}'$ への全単射 f で, $f(0) = 0'$ かつ, 任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $f(\sigma(n)) = \sigma'(f(n))$ となるものが一意的に存在することを示せ.

解:

(1) (I) まず, f の一意性から示す.
相違な写像 $f : \boldsymbol{N} \to X,\ f' : \boldsymbol{N} \to X$ が共に条件 (i), (ii) を満たすとする. ここで, $S = \{n \in \boldsymbol{N} \mid f(n) = f'(n)\}$ とすると, (i) より $0 \in S$ である. また, 任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対して, $n \in S$ とすると, (ii) より $f(\sigma(n)) = \phi(f(n)) = \phi(f'(n)) = f'(\sigma(n))$ となるから, $\sigma(n) \in S$ となるから問 3-1 (1) より, $S \subset \sigma(S)$ となる. よって, 数学的帰納法の公理より, $S = \boldsymbol{N}$ となる. よって, $f = f'$ となり, 矛盾. よって, f が存在するとすれば一意である.

(II) 次に, f の存在を示す.
まず, 次の二条件を満たす $\boldsymbol{N} \times X$ の部分集合 R を考える.

$$\langle 0, x_0 \rangle \in R \tag{1}$$
$$\forall (n \in \boldsymbol{N})[\langle n, x \rangle \in R \implies \langle \sigma(n), \phi(x) \rangle \in R] \tag{2}$$

条件 (1), (2) を満たす集合全体を $\mathcal{F}$ とすると, $\boldsymbol{N} \times X \in \mathcal{F}$ より $\mathcal{F} \neq \emptyset$ である（条件 (2) は $\sigma(n) \in \boldsymbol{N},\ \phi(x) \in X$ より満たされる）よって, $\bigcap_{R \in \mathcal{F}} R$ を考えることができる.
ここで,

$$f = \bigcap_{R \in \mathcal{F}} R$$

としたとき, この f が $\boldsymbol{N}$ から X への写像であり, 二条件 (i), (ii) を満たすことを示す.
まず, f が $\boldsymbol{N}$ から X への写像であることを示すために, $T = \{n \in \boldsymbol{N} \mid \langle n, x \rangle \in f$ なる x が唯一つ存在する $\}$ を考える.

(a) $0 \in T$ を示す.
f についてすぐにわかる通り, $f \in \mathcal{F}$ であるから, $0 \in T$ となる.

(b) $\forall n \in \boldsymbol{N},\ n \in T \implies \sigma(n) \in T$ を示す.
$n \in T$ とすると, $\langle \sigma(n), x_n \rangle \in f$ となる $x_n \in X$ がただ一つ存在する. まず, $f \in \mathcal{F}$ より, 条件 (2) から $\langle \sigma(n), \phi(x_n) \rangle \in f$ より, $\exists x \in X,\ \langle n, x \rangle \in f$ となる. よって, この x の一意性（つまり $x = \phi(x_n)$ のみである）を示せば, $\sigma(n) \in T$ となる. 一意性を得るために $\langle \sigma(n), y \rangle \in f$ となる $y \in X \backslash \{\phi(x_n)\}$ が存在すると仮定する. ここで, $g = f \backslash \{\langle \sigma(n), y \rangle\}$ として, $g \in \mathcal{F}$ を示す.

- 条件 (1)
ペアノシステムの公理 N2 より, $0 \notin \boldsymbol{N}$ であるから, $\sigma(n) \neq 0$ より, $\langle 0, x_0 \rangle \in g$ である.
- 条件 (2)
$\langle n_g, x_g \rangle \in g$ を任意にとったとき, $\langle n_g, x_g \rangle \in f$ であり, $f \in \mathcal{F}$ とから, f が条件 (2) を

満たすことから, $\langle \sigma(n_g), \phi(x_g) \rangle \in f$ となる. $n_g \neq n$ の場合はペアノシステムの公理 N1 より, $\langle \sigma(n_g), x_g \rangle \neq \langle \sigma(n), y \rangle$ である（第一成分が異なることより）から, $\langle \sigma(n_g), x_g \rangle \in g$ となる. また, $n_g = n$ の場合は, 今 $n \in T$ で $\langle n, x_n \rangle \in f$ となる $x_n \in X$ はただ一つ存在することから, $x_g = x_n$ でなくてはならない. よって, $\langle \sigma(n_g), \phi(x_g) = \phi(x_n) \rangle \in f$ であり, $y \neq \phi(x_n)$ より, $\langle \sigma(n_g), x_g \rangle \neq \langle \sigma(n), y \rangle$ となるから $\langle \sigma(n_g), x_g \rangle \in g$ となる. 以上より, $\langle n_g, x_g \rangle \in g \implies \langle \sigma(n_g), x_g \rangle \in g$ となる.

以上より, $g \in \mathcal{F}$ である. さて, 今 $g \subsetneq f$ である. ここで, $f = \bigcap_{R \in \mathcal{F}} R$ より, $\forall R \in \mathcal{F},\ f \subset R$ より, $g \in \mathcal{F}$ とから $g \subset f$ となるが, これは $g \subsetneq f$ に矛盾する. よって, $\langle \sigma(n), y \rangle \in f$ となる $y \in X \backslash \{\phi(x_n)\}$ は存在しない, すなわち $\langle \sigma(n), x_n \rangle \in f$ となる $x_n \in X$ がただ一つ存在する. 以上より, $\sigma(n) \in T$ となり, $\forall n \in \mathbf{N},\ n \in T \implies \sigma(n) \in T$ が成り立つ.

上の (a), (b) より, 問 3-1 (1) より $T = \mathbf{N}$ となる. よって, f は $\mathbf{N}$ から X への写像となる. また, $0 \in T$ を示す際に述べた通り, $f \in \mathcal{F}$ より, f は二条件 (1), (2) を満たす. これより, すぐにわかる通り f が満たすべき二条件 (i), (ii) も満たされる. 以上より, f の存在性が示された.

(2) (1) において, $X = \mathbf{N}'$, $\phi = \sigma$, $x_0 = 0'$ とすると, $f(0) = 0'$ かつ $\forall n \in \mathbf{N},\ f(\sigma(n)) = \sigma'(f(n))$ となる $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}'$ が存在する. この f が全単射であることを示す. 先と逆に考えて $f'(0') = 0$ かつ $\forall n' \in \mathbf{N}',\ f'(\sigma'(n')) = \sigma(f'(n'))$ となる $f' : \mathbf{N}' \to \mathbf{N}$ も存在する. ここで, $g = f' \circ f$ とすると, g は $\mathbf{N}$ から $\mathbf{N}$ への写像となり, $g(0) = 0$ かつ $\forall n \in \mathbf{N},\ g(\sigma(n)) = f'(f(\sigma(n))) = f'(\sigma'(f(n))) = \sigma(f'(f(n))) = \sigma(g(n))$ より, g は条件 (i), (ii) を満たす. ここで, $\mathbf{N}$ から $\mathbf{N}$ への写像である $I_\mathbf{N}$ も, 条件 (i), (ii) を満たす. よって, (1) より g は一意であるから $g = f' \circ f = I_\mathbf{N}$ となる. 同様に, $f \circ f' = I_{\mathbf{N}'}$ となるから, 問 2-7 (4) より, f は全単射である.

●● 前問題の補足 ●●

前問題における各写像の様子を次図に示す.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, mapsto, "\sigma"] \arrow[d, bend right, "f"'] & \sigma(0) \arrow[r, mapsto, "\sigma"] \arrow[d, bend right, "f"'] & \cdots \arrow[r, mapsto, "\sigma"] & n \arrow[r, mapsto, "\sigma"] \arrow[d, bend right, "f"'] & \sigma(n) \arrow[d, bend right, "f"'] \\
x_0 \arrow[r, mapsto, "\phi"'] & \phi(x_0) \arrow[r, mapsto, "\phi"'] & \cdots \arrow[r, mapsto, "\phi"'] & f(n) \arrow[r, mapsto, "\phi"'] & \phi(f(n))
\end{tikzcd}$$

図 1: 前問題のイメージ

また, 写像の存在だけでなく一意性も示したのは以下のような要素の順番の入れ替えを防ぐためである. 以下ではわかりやすさを優先し, 全単射の例としている.

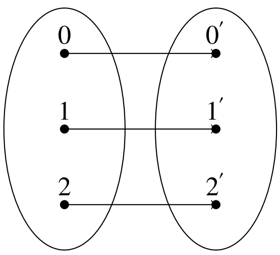

図 2: 全単射の例 1

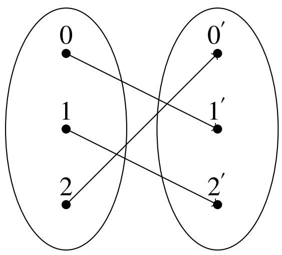

図 3: 全単射の例 2

自然数の加法.

問 3–3: 問 3-2 より, $m \in \boldsymbol{N}$ のとき,

$$(\mathrm{A1})_m \qquad f_m(0) = m$$
$$(\mathrm{A2})_m \qquad f_m \circ \sigma = \sigma \circ f_m \qquad (\text{すなわち}, \forall n \in \boldsymbol{N},\ f_m(\sigma(n)) = \sigma(f_m(n)))$$

を満たす $f_m : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ が一意的に存在する. ここで, $m, n \in \boldsymbol{N}$ に対して, $f_m(n)$ を m, n の和とよび, $m + n$ と表す.

(1) $m \in \boldsymbol{N}$ のとき, $m + 0 = m$ となることを示せ.

(2) $m, n \in \boldsymbol{N}$ のとき, $m + \sigma(n) = \sigma(m + n)$ となることを示せ.

(3) $f_0 = I_{\boldsymbol{N}}$ となることを示せ.

(4) $n \in \boldsymbol{N}$ のとき, $0 + n = n$ となることを示せ.

(5) $m, n \in \boldsymbol{N}$ のとき, $\sigma(m) + n = \sigma(m + n)$ となることを示せ.

解:

(1) $(\mathrm{A1})_m$ より, $m + 0 = m$ が成り立つ.

(2) $(\mathrm{A2})_m$ より, $m + \sigma(n) = f_m(\sigma(n)) = \sigma(f_m(n)) = \sigma(m + n)$ となる.

(3) 恒等写像の定義から, $I_{\boldsymbol{N}}(0) = 0$ である. また, $I_{\boldsymbol{N}}(\sigma(n)) = \sigma(n) = \sigma(I_{\boldsymbol{N}}(n))$ より, $I_{\boldsymbol{N}}$ は, 条件 $(\mathrm{A1})_0$, $(\mathrm{A2})_0$ を満たす. よって, f_0 の一意性から $f_0 = I_{\boldsymbol{N}}$ となる.

(4) (3) より, $0 + n = f_0(n) = I_{\boldsymbol{N}}(n) = n$ となる.

(5) $h = \sigma \circ f_m$ とすると, $h(0) = \sigma(m)$ であり,

$$\begin{aligned} h \circ \sigma &= (\sigma \circ f_m) \circ \sigma \\ &= \sigma \circ (f_m \circ \sigma) && (\because \text{問題 2-7 (3) の写像の結合法則より}) \\ &= \sigma \circ (\sigma \circ f_m) && (\because (\mathrm{A2})_m \text{ より}) \\ &= \sigma \circ h \end{aligned}$$

より, h は条件 $(\mathrm{A1})_{\sigma(m)}$ $(\mathrm{A2})_{\sigma(m)}$ を満たす. よって, $f_{\sigma(m)}$ の一意性より $f_{\sigma(m)} = \sigma \circ f_m$ となるから $\sigma(m) + n = f_{\sigma(m)}(n) = \sigma(f_m(n)) = \sigma(m + n)$ となる.

●● 加法のイメージ ●●

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, mapsto, "\sigma"] \arrow[d, bend right, "f_m"'] & \sigma(0) \arrow[r, mapsto, "\sigma"] \arrow[d, bend right, "f_m"'] & \cdots \arrow[r, mapsto, "\sigma"] & n \arrow[r, mapsto, "\sigma"] \arrow[d, bend right, "f_m"'] & \sigma(n) \arrow[d, bend right, "f_m"'] \\
m \arrow[r, mapsto, "\sigma"'] & \sigma(m) \arrow[r, mapsto, "\sigma"'] & \cdots \arrow[r, mapsto, "\sigma"'] & m + n \arrow[r, mapsto, "\sigma"'] & \sigma(m + n)
\end{tikzcd}$$

図 1: 加法のイメージ

自然数の加法の交換律と結合律, 数学的帰納法. 半群, モノイド, 可換半群, 可換モノイドの定義.

問 3–4: 空でない集合 G に $G\times G$ から G への 1 つの写像（G 上の（二項）演算という）$*$ [1]が与えられたとする. $\langle a,b\rangle\in G\times G$ の $*$ による像を $a*b$ と表す[2] ことにして, 次の条件 (G1) を満たすとき, $*$ は結合律を満たす, あるいは結合的であるという.

(G1) $\quad \forall a,b,c\in G,\ (a*b)*c=a*(b*c)$ $\quad$ (結合律)

また, 空でない集合 G 上のある二項演算 $*$ が結合律を満たすとき $\langle G,*\rangle$ は半群であるという.
$\langle G,*\rangle$ が半群であり, さらに条件 (G2) を満たすとき, $\langle G,*\rangle$ はモノイドであるという.

(G2) $\quad \exists e\in G,\ \forall a\in G,\ e*a=a*e=a$

条件 (G2) によって存在する $e\in G$ を G の $*$ に関する単位元という.
また, 二項演算 $*$ が次の条件を満たすとき, $*$ は交換律を満たす, あるいは可換であるといい, $*$ が可換かつ $\langle G,*\rangle$ が半群のとき, $\langle G,*\rangle$ を可換半群とよぶ. 同様にモノイドの場合は可換モノイドという.

$\forall a,b\in G,\ a*b=b*a$ $\quad$ (交換律)

(1) $\forall m,n\in \boldsymbol{N}$ に対して, 問 3-3 における $f_m(n)$ を像とする写像は $\boldsymbol{N}$ 上の二項演算となり, これを $+$ で表すこととする. [3] $\langle \boldsymbol{N},+\rangle$ が可換モノイドであることを示せ.

(2) $1:=\sigma(0)$ と定義する. $\boldsymbol{N}$ の部分集合 S が $0\in S$ かつ $\forall n\in\boldsymbol{N},\ n\in S\implies n+1\in S$ を満たすとき, $S=\boldsymbol{N}$ となることを示せ.

解:

(1) 問 3-3 (1), (4) より, $\boldsymbol{N}$ の加法に単位元 0 が存在する. よって, 加法が結合律と交換律を満たすことを示せばよい.

(i) 交換律
任意の $n\in\boldsymbol{N}$ を一つとり, $S=\{m\in\boldsymbol{N}\mid m+n=n+m\}$ とする.
$\boldsymbol{N}$ の加法に関して単位元が存在することから, $0\in S$ となる. また $m\in S$ と仮定すると, $m+n=n+m$ となり, 問 3-3 (2), (4) より, $\sigma(m)+n=\sigma(m+n)=\sigma(n+m)=n+\sigma(m)$ となるから, $\forall m\in\boldsymbol{N},\ m\in S\implies\sigma(m)\in S$ が成り立つ. よって, 問 3-1 (1) とから $S=\boldsymbol{N}$ が成り立つ. 今, n は任意にとっているので, $\forall m,n\in\boldsymbol{N},\ m+n=n+m$ が成り立つ.

(ii) 結合律
交換律の成立を示したものと同等な帰納法で示す.
任意の $n,k\in\boldsymbol{N}$ をとる. まず, 問 3-3 (3) より, $(0+n)+k=n+k=0+(n+k)$ が成り立つ.
次に, 任意の $m\in\boldsymbol{N}$ を一つとり, この m に対して, $(m+n)+k=m+(n+k)$ が成り立つと仮定する. ここで, 問 3-3 (5) より, $(\sigma(m)+n)+k=\sigma(m+n)+k=\sigma((m+n)+k)$ であり, 先の仮定から, $\sigma((m+n)+k)=\sigma(m+(n+k))=\sigma(m)+(n+k)$ となるから, $(\sigma(m)+n)+k=\sigma(m)+(n+k)$ が成り立つ.[4]

(2) 問 3-3 より, $n+1=n+\sigma(0)=\sigma(n+0)=\sigma(n)$ となる. よって, 問 3-1 (1) より, $\sigma(S)\subset S$ となり, 数学的帰納法の公理より, $S=\boldsymbol{N}$ となる.

---

[1] 記号 $*$ が二項演算を表すとき, $*$ はしばしば乗法（演算）とよばれる.
[2] 厳密には, $(a*b)$ と表し, 一番外側の括弧を省略してもよいこととする. 後の問題でわかるように, $*$ が結合的であれば, 全ての括弧を省略することが可能である.
[3] 記号 $+$ が二項演算とき, $+$ はしばしば加法（演算）とよばれる.
[4] これにより, $P(0)\wedge\forall n\in\boldsymbol{N},\ P(n)\implies P(n+1)$ から $\forall n\in\boldsymbol{N},\ P(n)$ が成り立つといえる.

自然数の乗法.

問 3–5: 問 3-2 より, $m \in \boldsymbol{N}$ のとき, f_m を問 3-3 の f_m として,

$$(\mathrm{M1})_m \qquad g_m(0) = 0$$
$$(\mathrm{M2})_m \qquad g_m \circ \sigma = f_m \circ g_m \qquad (\text{すなわち}, \forall n \in \boldsymbol{N},\ f_m(\sigma(n)) = \sigma(f_m(n)))$$

を満たす $g_m : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ が一意的に存在する. ここで, $m, n \in \boldsymbol{N}$ に対して, $g_m(n)$ を 像とする写像は $\boldsymbol{N}$ 上の二項演算となり, これを $*$ で表すこととする. $m, n \in \boldsymbol{N}$ に対して, $m * n (= g_m(n))$ を m, n の積とよぶ（m, n の積は mn や $m \cdot n$ と表す場合もある[1]）また, 一般に, 空でない集合 G 上に二つの異なる二項演算が定義されているときに, 一方を加法, もう一方を乗法と見なした場合, 加法の引数となる G の要素が, (ab) のように G の積で表されているとき, その要素の一番外側の括弧を省略し, ab と表すことを許す.

(1) $m \in \boldsymbol{N}$ のとき, $m0 = 0$ となることを示せ.

(2) $m, n \in \boldsymbol{N}$ のとき, $m \cdot \sigma(n) = m(n+1) = mn + m$ となることを示せ.

(3) $n \in \boldsymbol{N}$ のとき, $0n = 0$ となることを示せ.

(4) $m, n \in \boldsymbol{N}$ のとき, $\sigma(m) \cdot n = (m+1)n = mn + n$ となることを示せ.

解:

(1) $(\mathrm{M1})_m$ より, $m0 = 0$ が成り立つ.

(2) まず, 問 3-4 (2) より, $\sigma(n) = n + 1$ であるから, $m \cdot \sigma(n) = m(n+1)$ が成り立つ. 次に, $(\mathrm{M2})_m$ より, $m \cdot \sigma(n) = m + mn$ となるので, 問 3-4 (1) より, 加法が交換律を満たすことから, $m \cdot \sigma(n) = mn + m$ となる. よって, $m \cdot \sigma(n) = m(n+1) = mn + m$ となる.

(3) 任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対して, $\psi_0(n) = 0$ となるような定値写像 ψ_0 を考えると, $\psi_0(0) = 0$ より ψ_0 は $(\mathrm{M1})_0$ を満たす. また, $\psi_0(\sigma(n)) = 0$ であり, 問 3-3 (4) の $f_0(0) = 0$ とから, $\psi_0(\sigma(n)) = f_0(\psi_0(n))$ より, ψ_0 は $(\mathrm{M2})_0$ を満たす. よって, 問 3-2 (1) より, $g_0 = \psi_0$ となるから, $0n = 0$ となる.

(4) まず, (2) と同様にして $\sigma(m) \cdot n = (m+1)n$ が成り立つ. 次に, 任意の n に対して, $f_{g_m(n)}(n)$ を像とする写像 h を考える（すなわち $h(n) = mn + n$ となる）と, $h(0) = f_0(0) = 0$ となる. また, (2) および加法の結合律と交換律より

$$\begin{aligned}
h(\sigma(n)) &= m \cdot \sigma(n) + \sigma(n) \\
&= (mn + m) + (n + 1) \\
&= (n + 1) + (m + mn) \\
&= n + (1 + (m + mn)) \\
&= n + ((m + 1) + mn) \\
&= n + (\sigma(m) + mn) \\
&= \sigma(m) + (mn + n) \\
&= \sigma(m) + h(n) \\
&= f_{\sigma(m)}(h(n))
\end{aligned}$$

となるから, h は $(\mathrm{M1})_{\sigma(m)}$ と $(\mathrm{M2})_{\sigma(m)}$ を満たすので, 問 3-2 (1) より, $g_{\sigma(m)} = h$ となる. よって, $\sigma(m) \cdot n = mn + n$ となるから, $\sigma(m) \cdot n = (m+1)n = mn + n$ となる.

[1] 厳密には, $(a * b)$, (ab) または $(a \cdot b)$ と表し, 一番外側の括弧を省略してもよいこととする. 後の問題でわかるように, $*$ が結合的であれば, 全ての括弧を省略することが可能である.

制作者 : **Anman**

●● 乗法のイメージ ●●

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, mapsto, "\sigma"] \arrow[d, bend right, "g_m"'] & \sigma(0) \arrow[r, mapsto, "\sigma"] \arrow[d, bend right, "g_m"'] & \cdots \arrow[r, mapsto, "\sigma"] & n \arrow[r, mapsto, "\sigma"] \arrow[d, bend right, "g_m"'] & \sigma(n) \arrow[d, bend right, "g_m"'] \\
0 \arrow[r, mapsto, "f_m"'] & f_m(0) \arrow[r, mapsto, "f_m"'] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \cdots \arrow[r, mapsto, "f_m"'] & mn \arrow[r, mapsto, "f_m"'] & m + mn \\
 & m & & &
\end{tikzcd}
$$

図 1: 乗法のイメージ

乗法の交換律, 結合律. 加法と乗法の分配律.

問 3–6: 次の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{N}$ における乗法が交換律を満たす, すなわち, 任意の $m, n \in \boldsymbol{N}$ に対して, $mn = nm$ となることを示せ.

(2) 一般に, 空でない集合 G に二つの二項演算が与えられ, 各々を加法と乗法としたとき, 任意の $a, b, c \in G$ に対して, 次の条件を満たすとき, 乗法は加法に対して左分配律を満たす, または左側から分配的であるという.

$$a(b + c) = ab + ac \qquad\qquad (左分配律)$$

また, 次の条件を満たす場合には, 乗法は加法に対して右分配律を満たす, または右側から分配的であるという.

$$(b + c)a = ba + ca \qquad\qquad (右分配律)$$

乗法が加法に対して左分配律も右分配律も満たすとき, 乗法は加法に対して（両側）分配律を満たす, または両側から分配的だという.
$\boldsymbol{N}$ において, 乗法は加法に対して分配律を満たすことを示せ.

(3) $\boldsymbol{N}$ における乗法が結合律を満たす, すなわち, 任意の $m, n, k \in \boldsymbol{N}$ に対して, $(mn)k = m(nk)$ となることを示せ.

解:

(1) 任意の $n \in \boldsymbol{N}$ を一つとり, m に関する数学的帰納法で示す. まず, 問 3-5 (1), (3) より $0n = 0 = n0$ で $0n = n0$ が成り立つ. 次に, 任意の $m \in \boldsymbol{N}$ をとり, この m に対して $mn = nm$ が成り立つと仮定すると, この仮定と問 3-5 (2), (4) から, $\sigma(m) \cdot n = mn + n = nm + n = n \cdot \sigma(m)$ となり, $\forall m \in \boldsymbol{N},\ (mn = nm \implies \sigma(m) \cdot n = n \cdot \sigma(m))$ が成り立つ. 以上より, 任意の $m, n \in \boldsymbol{N}$ に対して, $mn = nm$ となる.

(2) 乗法が加法に対して左分配律を満たす, すなわち $m(n + k) = mn + mk$ であることを示せば, (1) より, 乗法の交換律から, 乗法は右分配律を満たすので, 左分配律のみ示せば十分である.
任意の $m, n \in \boldsymbol{N}$ をとり, k に関する数学的帰納法で示す.
まず, 問 3-3 (1) および 問 3-5 (3) より, $m(n + 0) = mn = mn + m0$ が成り立つ.
次に, 任意の $k \in \boldsymbol{N}$ を一つとり, この k に対して, $m(n + k) = mn + mk$ が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned}
m(n + \sigma(k)) &= m(n + (k + 1)) \\
&= m((n + k) + 1) \\
&= m(n + k) + m \\
&= (mn + mk) + m \\
&= mn + (mk + m) \\
&= mn + m \cdot \sigma(k)
\end{aligned}$$

となるから, $\forall k \in \boldsymbol{N},\ m(n + k) = mn + mk \implies m(n + \sigma(k)) = mn + m\sigma(k)$ が成り立つ. よって, $\forall k \in \boldsymbol{N},\ m(n + k) = mn + mk$ となり, 乗法は加法に対して分配律を満たす.

(3) 任意の $m, n \in \boldsymbol{N}$ をとり, k に関する数学的帰納法で示す.
まず, $(mn)0 = 0 = m0 = m(n0)$ より, $(mn)0 = m(n0)$ が成り立つ.
次に, 任意の $k \in \boldsymbol{N}$ を一つとり, この k に対して, $(mn)k = m(nk)$ が成り立つと仮定すると, 乗法の加法に対する分配律から $(mn)\sigma(k) = (mn)k + mn = m(nk) + mn = m(nk + n) = m(n \cdot \sigma(k))$ より, $(mn)\sigma(k) = m(n \cdot \sigma(k))$ となる. 以上より, $\boldsymbol{N}$ における乗法は結合律を満たす.

自然数の順序への準備

問 3–7: 次の問に答えよ.

(1) $k \in \boldsymbol{N} \backslash \{0\}$ のとき, 任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対して, $n + k \neq n$ となることを示せ.

(2) $k \in \boldsymbol{N} \backslash \{0\}$ のとき, 任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対して, $n + k \neq 0$ となることを示せ.

(3) 任意の $m, n \in \boldsymbol{N}$ に対して, 次の 3 つのいずれか一つだけ必ず成り立つことを示せ.

(i) ある $k \in \boldsymbol{N} \backslash \{0\}$ に対して $m = n + k$

(ii) $m = n$

(iii) ある $l \in \boldsymbol{N} \backslash \{0\}$ に対して $n = m + l$

解:

(1) n に関する数学的帰納法で示す.
まず, $0 + k = k \neq 0$ より, $0 + k \neq 0$ より, $n = 0$ のとき, $n + k \neq n$ が成り立つ.
次に, 任意の $n \in \boldsymbol{N}$ を一つとり, この n に対して, $n + k \neq n$ となるとを仮定すると, $\sigma(n) + k = \sigma(n + k)$ で, σ の単射性より, $n + k \neq n$ とから, $\sigma(n + k) \neq \sigma(n)$ となり, $\sigma(n) + k \neq \sigma(n)$ となる. 以上より, $k \in \boldsymbol{N} \backslash \{0\}$ のとき, 任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対して, $n + k \neq n$ となる.

(2) 背理法で示す. ある $n_0 \in \boldsymbol{N}$ に対して, $n_0 + k = 0$ となると仮定する. まず, $k \neq 0$ より, 問 3-1 (3) より, ある $m \in \boldsymbol{N}$ に対して, $\sigma(m) = k$ となる. ここで, $n_0 + k = n_0 + \sigma(m) = \sigma(n_0 + m)$ となるが, ペアノシステムの条件 (N2) より, $\sigma(n_0 + m) \neq 0$ となる. よって, 背理法の過程に矛盾することから, $k \in \boldsymbol{N} \backslash \{0\}$ のとき, 任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対して, $n + k \neq 0$ となる.

(3) まず, (i) から (iii) のどの 2 つも両立し得ないことを示す.
(i) かつ (ii) が同時に成り立つと仮定すると, $n = n + k$ となり, これは (1) により矛盾する. 次に, (ii) かつ (iii) が同時に成り立つと仮定すると, 同様に (1) により矛盾する. 最後に, (i) かつ (iii) が同時に成り立つと仮定すると, $m = m + (l + k)$ となる. ここで, (2) より $l + k \neq 0$ であるから, (1) により $m \neq m + (l + k)$ となり矛盾する. 以上より, (i) から (iii) のどの 2 つも両立し得ない.
次に, (i) から (iii) のいずれかが必ず成り立つことを示す.
任意の n をとり, (i) から (iii) のいずれかが成り立つような $m \in \boldsymbol{N}$ の集合を S として m に関する数学的帰納法で示す. まず, $n = 0$ であれば, $m = 0$ のとき (ii) が成り立ち, $n \neq 0$ であれば, $m = 0$ のとき, $l = n$ として (iii) が成り立つので, $m \in S$ である.
次に, $m \in S$ とする. m について, (i) が成り立つと仮定すると, $m = n + k$ より, $\sigma(m) = \sigma(n + k) = n + \sigma(k)$ で $\sigma(k) \neq 0$ より $\sigma(m) \in S$ となる. また, m について, (ii) が成り立つと仮定すると, $m = n$ より, $\sigma(m) = \sigma(n) = n + \sigma(0)$ で $\sigma(0) \neq 0$ より, $\sigma(m) \in S$ となる. 最後に, m について, (iii) が成り立つと仮定すると, $n = m + l$ かつ $l \neq 0$ であり, $l = \sigma(l')$ とすると $n = m + \sigma(l') = \sigma(m) + l'$ であり, $l' = 0$ であれば $\sigma(m) = n$ が, $l' \neq 0$ であれば $n = \sigma(m) + l'$ かつ $l' \neq 0$ が成り立つから, $\sigma(m) \in S$ となる.
よって, $\forall m \in \boldsymbol{N},\ m \in S \implies \sigma(m) \in S$ が成り立つ.
以上より, 任意の $m, n \in \boldsymbol{N}$ に対して, (i) から (iii) のいずれか一つが必ず成り立つ.

位相

まずは数学の道具（概念）に慣れるための基礎問題.

問 4–1: 次の問に答えよ.

(1) n 次元実空間における任意の 2 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し, シュワルツの不等式

$$|(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$$

を示せ.

(2) n 次元実空間 $\mathbb{R}^n$ における 2 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ の距離 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を次のように定義する.

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

このとき, 三角不等式 $d(\boldsymbol{x}, z) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, z)$ を示せ.

解:

(1) いくつかやり方があるが, ここでは天下りだが代数的に済む解法を示す.

(i) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ のとき

両辺 0 で成立.

(ii) $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ のとき

任意の実数 a, b に対して,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}\|^2 \\ &= \|a\|^2\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2ab \cdot (\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) + \|b\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 \end{aligned}$$

ここで, $a = \|\boldsymbol{y}\|^2,\ b = -(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})$ とすると,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\boldsymbol{y}\|^4\|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\|\boldsymbol{y}\|^2|(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})|^2 + |\boldsymbol{y}\|^2|(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})|^2 \\ &= \|\boldsymbol{y}\|^2(\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})|^2) \end{aligned}$$

今 $\|\boldsymbol{y}\|^2 \neq 0$ より, 両辺 $\|\boldsymbol{y}\|^2$ で割り, 平方根をとれば $|(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$ が成り立つ.

以上より, シュワルツの不等式が示された.

(2) まず, 通常の三角不等式 $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ を示す. これは (1) のシュワルツの不等式を利用することで次のように示される.

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\ &\leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + |\boldsymbol{y}\|^2 \\ &= (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2 \end{aligned}$$

この三角不等式より, $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}-z\| \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{y}-z\|$ が成り立ち, $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ より, $d(\boldsymbol{x}, z) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+d(\boldsymbol{y}, z)$ が成り立つ.

●● 前問の補足 ●●

まず, シュワルツの不等式を示す際に用いた証明は天下りすぎる．そこで, 二次関数と判別式を用いた証明が良く本で紹介されている．これは, $\|\boldsymbol{x}\|^2 t^2 - 2(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})t + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \|t\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 \geq 0$ の判別式が $D \leq 0$ であることから証明する．この手法からは, 等号成立条件が $\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{y}$ となる実数 t が存在することとすぐにわかる. 一方, 先の天下りな証明からは等号成立条件はわかりにくい. 先の証明からは, 等号が成立することから $\|\|\boldsymbol{y}\|^2\|\boldsymbol{x}\| - |(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})|\|\boldsymbol{y}\|^2\|^2 = 0$ より $t = (\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})/(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y})$ と具体的な t を示すことと, 逆に $\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{y}$ を代入することから, 等号が成立することを示す.

また, 三角不等式の方では等号成立条件はシュワルツの不等式の等号成立条件と $(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) = |(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})|$ をまとめた, 「$(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) \geq 0$ かつ $\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{y}$ となる実数 t が存在する」こととなる.

問 4–2: 次の問に答えよ.

(1) 二つの集合 A, B に対して, 次が成り立つことを示せ.

$$A \not\subset B \iff A \cap B^c \neq \emptyset$$

ただし, この問題以降 A が B の部分集合であることを $A \subset B$ と示すこととする.

(2) $\langle X, d\rangle$ を距離空間とし, A を X の部分集合とする. このとき, A の内部 A°, 閉包 $\overline{A}$, 境界 ∂A を次のように定義する. ただし, x の近傍の全体を $\boldsymbol{V}(x)$ とする (すなわち, $\boldsymbol{V}(x) := \{V \subset X \mid \exists\epsilon > 0, B(x\,;\epsilon) \subset V\}$) また, $B(x\,;\epsilon)$ は半径 ϵ の開球 (ϵ -近傍) である.

$$\begin{aligned} A^\circ &:= \{x \in X \mid \exists\epsilon > 0, B(x\,;\epsilon) \subset A\} \\ \overline{A} &:= \{x \in X \mid \forall V \in \boldsymbol{V}(x), V \cap A \neq \emptyset\} \\ \partial A &:= \{x \in X \mid \forall V \in \boldsymbol{V}(x), V \cap A \neq \emptyset \wedge V - A \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

このとき, $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$ となることを示せ.

解:

(1) 以下の同値変形により示される.

$$\begin{aligned} A \not\subset B &\iff \exists x,\ \neg(x \in A \implies x \in B) \\ &\iff \exists x,\ \neg(\neg(x \in A) \vee x \in B) \\ &\iff \exists x,\ x \in A \wedge x \in B^c \\ &\iff A \cap B^c \neq \emptyset \end{aligned}$$

(2) まず, 以下の同値変形

$$\begin{aligned} x \in (A^\circ)^c &\iff x \notin A^\circ \\ &\iff \neg(\exists\epsilon > 0)[B(x\,;\epsilon) \subset A] \\ &\iff (\forall\epsilon > 0)[B(x\,;\epsilon) \not\subset A] \\ &\iff (\forall\epsilon > 0)[B(x\,;\epsilon) \cap A^c \neq \emptyset] \quad (\because (1) \text{ より}) \end{aligned}$$

より $x \in (A^\circ)^c \iff (\forall\epsilon > 0)[B(x\,;\epsilon) \cap A^c \neq \emptyset]$ が成り立つ.
これより, $(\forall\epsilon > 0)[B(x\,;\epsilon) \cap A^c \neq \emptyset] \iff x \in \overline{A^c}$ が成り立つことを示せばよい.

(i) $\implies$
近傍の定義より, 任意の $V \in \boldsymbol{V}(x)$ に対し, $B(x\,;\epsilon_0) \subset V$ となる $\epsilon_0 > 0$ が存在するが, 今, この ϵ_0 に対して $B(x\,;\epsilon_0) \cap A^c \neq \emptyset$ となるので, $V \cap A^c \neq \emptyset$ となる. これより, $x \in \overline{A^c}$ となる.

(ii) $\impliedby$
任意の $\epsilon > 0$ に対して, $B(x\,;\epsilon) \subset B(x\,;\epsilon)$ が成り立つので, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $B(x\,;\epsilon) \in \boldsymbol{V}(x)$ となる. よって, 閉包の定義より, $x \in \overline{A^c}$ となるとき, $(\forall\epsilon > 0)[B(x\,;\epsilon) \cap A^c \neq \emptyset]$ が成り立つ.

以上より, $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$ が成り立つ.

●● 内部, 閉包, 境界の定義における補足 ●●

まず, なぜ内部の定義における ϵ の量化子がなぜ全称ではなく存在なのかについて. これは以下の図 1 をイメージするといい. ϵ が大きい $\boldsymbol{x}$ の開球は A に含まれなくなる.

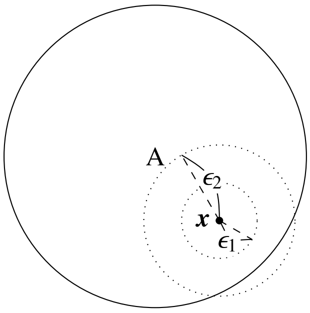

図 1: 内部のイメージ

次に, なぜ閉包の定義があのような定義になっているかについて. これは以下の図 2 をイメージするといい. $\boldsymbol{x}$ のような境界上の点もきちんと閉包に含まれている.

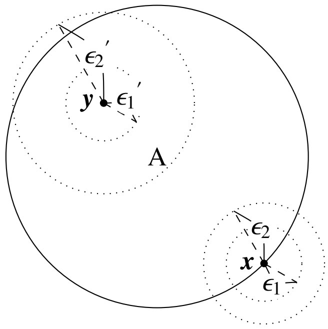

図 2: 閉包と境界のイメージ

最後に, 境界の定義だが, これは上図 2 の $\boldsymbol{y}$ ように閉包から境界以外の点を除いている.

問 4–3: $\langle X, d\rangle$ を距離空間とし, A を X の部分集合とする. このとき, 次の問に答えよ. ただし, 内部, 境界, 閉包の定義は前問と同じものとする.

(1) $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$ を示せ.

(2) $\partial A = \overline{A} - A^\circ$ を示せ.

(3) A の外部 A^e を $A^e := (A^c)^\circ$ のように定義する. このとき, $A^\circ \cup \partial A \cup A^e = X$ であることを示せ.

(4) $A^\circ, \partial A, A^e$ がそれぞれ互いに素であることを示せ.

解:

(1) まず, $x \in A^\circ$ のとき, $\exists \epsilon > 0, B(x\,; \epsilon) \subset A$ であり, $x \in B(x\,; \epsilon)$ とから $A^\circ \subset A$ となる.
次に, $x \in A$ のとき, 任意の x の近傍 V に関して, 近傍の定義より $x \in V$ となる. よって $V \cap A \neq \emptyset$ より, $A \subset \overline{A}$ となる.
以上より, $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$ が成り立つ.

(2) まず, $\partial A \subset \overline{A} - A^\circ$ を示す.
境界と閉包の定義より $\partial A \subset \overline{A}$ は明らか. よって $x \in \partial A \implies x \notin A^\circ$ を示せばよい.
さて, 任意の $\epsilon > 0$ に対して $B(x\,; \epsilon) \in \boldsymbol{V}(x)$ である (問 4-2 (2) 参照) から, $x \in \partial A$ のとき, 境界の定義より $B(x\,; \epsilon) - A \neq \emptyset$ が成り立つ. これより, $B(x\,; \epsilon) \not\subset A$ となる. 今, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $B(x\,; \epsilon) \not\subset A$ が示され, これは $x \notin A^\circ$ であることに他ならない.
よって, $\partial A \subset \overline{A} - A^\circ$ が成り立つ.
次に, $\overline{A} - A^\circ \subset \partial A$ を示す.
これは, 先の議論を逆にたどることにより示せる (問 4-2 (2) を参照するとよい)
以上より, $\partial A = \overline{A} - A^\circ$ が成り立つ.

(3) まず, $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$ となることを示す.
これは次のように示される.

$$
\begin{aligned}
A^\circ \cup \partial A &= A^\circ \cup (\overline{A} - A^\circ) && (\because (2) \text{ より}) \\
&= \overline{A} && (\because (1) \text{ より } A^\circ \subset \overline{A})
\end{aligned}
$$

次に, 問 4-2 (2) より, $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$ が成り立つから, $(A^e)^c = ((A^c)^\circ)^c = \overline{(A^c)^c} = \overline{A}$ が成り立つ. これより, $A^e \cup \overline{A} = X$ より, $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$ とから, $A^\circ \cup \partial A \cup A^e = X$ が成り立つ.

(4) まず, $A^\circ \cup \partial A$ だが, これは (2) より明らかに $A^\circ \cup \partial A = \emptyset$ が成り立つ.
次に $A^\circ \cap A^e = \emptyset$ を背理法により示す.
$A^\circ \cap A^e$ の元の存在を仮定すると, (1) より $x \in A^\circ \cap A^e \implies x \in \overline{A} \cap A^e$ が成り立つが, (3) より $(A^e)^c = \overline{A}$ であるから, $\overline{A} \cap A^e = \emptyset$ で矛盾. よって, $A^\circ \cap A^e = \emptyset$ が成り立つ.
最後に $\partial A \cap A^e = \emptyset$ を背理法により示す.
$\partial A \cap A^e$ の元の存在を仮定すると, (2) より $x \in \partial A \cap A^e \implies x \in \overline{A} \cap A^e$ が成り立ち, 先と同様にして矛盾.
よって, $\partial A \cap A^e = \emptyset$ が成り立つ.
以上より, $A^\circ, \partial A, A^e$ はそれぞれ互いに素である.

解析学

更新日 : 2/10/2022 version 0.3

制作中.

問 5–1: 制作中

(1) 未定

解:

(1) 未定

問題置き場

更新日 : 2/10/2022 version 0.3

編集の都合上, 後から追加する予定の問題. 基本的に応用的な問題.

問 6–1: 正の整数全体の集合を $\mathbb{Z}^+$ で表す. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 次の条件を満たす $\mathbb{Z}^+$ の部分集合 S を考える.

$$1 \in S \tag{1}$$
$$\forall n \in \mathbb{Z}^+[n \in S \implies n+1 \in s] \tag{2}$$

整列性（任意の空でない自然数の集合は最小限を持つ）を認めた上で, $S = \mathbb{Z}^+$ を満たすことを示せ.

(2) $\mathbb{Z}^+$ の元の各々に対し, 命題 $P(n)$ が与えられたとし, それについて次の二つのことが示されたとする.

$$P(1) \text{ は真} \tag{1}$$
$$\forall n \in \mathbb{Z}^+[P(n) \text{ が真} \implies P(n+1) \text{ も真}] \tag{2}$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}^+$ に対して, $P(n)$ が真となることを示せ.

解:

(1) $\mathbb{Z}^+ - S = S'$ とし, $S' = \emptyset$ となることを背理法により示す.
$S' \neq \emptyset$ と仮定すると, 整列性より $n_0 = \min S'$ となる $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ が存在する. 今, $n_0 > 1$ より, $n_0 - 1 \geq 1$ となり $n_0 - 1 \in \mathbb{Z}^+$ である. ここで $n_0 - 1 < n_0 = \min \mathbb{Z}^+$ より $n_0 - 1 \notin S'$, すなわち $n_0 - 1 \in S$ となる.
これより, S が満たす条件 (2) より, $n_0 \in S$ となり, $n_0 \in S'$ に矛盾.
以上より, $S' = \emptyset$ であり, $S = \mathbb{Z}^+$ が成り立つ.

(2) $S = \{\, n \in \mathbb{Z}^+ \mid P(n) \text{ が真} \,\}$ と集合 S を定義すると, (1) より $S = \mathbb{Z}^+$ が成り立つ. よって, 全ての $n \in \mathbb{Z}^+$ に対して, $P(n)$ が真となる