制作者 : **Anman**

自習用数学問題集

更新日 : 24/8/2022 version 0.3

この資料は, 自習用の数学問題集です. 証明問題に比重を置いています. 易しくはありません.
問題の順番に規則性はほとんどなく, 分野はごっちゃ, 難易度順に並んでいるわけでもありません. ただし, 後の問題で使うような知識が前半に来ないように編集していく予定です.

数学記号や用語の定義は, 教科書ごとに著しく差があれば問題文中で定義しますが, 多くの教科書で使われているものは一々定義することはありません.

また, この問題集の解答が正しい保証はありません. 参考にする場合は気を付けてください.

集合

更新日 : 24/8/2022 version 0.3

Kuratowski の順序対を理解しよう.

問 1–1: 次の問に答えよ.

(1) $\langle a, b\rangle$ を $\langle a, b\rangle \coloneqq \{\{a\}, \{a, b\}\}$ と定めるとき,

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \iff (a = c) \land (b = d)$$

となることを示せ. (補足: 外延的記法において, 同一の元を重複して書くことは禁じられていない. 同じものをいくつ書いてもその効果はただ 1 つだけ書いたのと同じものとしている)

(2) 順序対を拡張して ***n*-対**を次のように定義する.

$$\langle a_1\rangle \coloneqq a_1, \qquad \langle a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n\rangle \coloneqq \langle\langle a_1, \cdots, a_{n-1}\rangle, a_n\rangle$$

このとき,

$$\langle a_1, \cdots, a_n\rangle = \langle b_1, \cdots, b_n\rangle \iff a_1 = b_1 \land \cdots a_n = b_n$$

が成り立つことを示せ.

解:

(1) $\Longleftarrow$ は明らか. $\Longrightarrow$ は背理法で示す.
まず, $a \neq c$ と仮定すると, $\{a\} \neq \{c\}$ より, $\{a\} = \{c, d\}$ とならなくてはならない. このとき, $a = c = d$ となり, $a \neq c$ に矛盾. よって $a = c$ でなくてはならない.
次に $b \neq d$ を仮定する. $a = c$ より $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \implies \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$ が成り立つ. ここで,

(i) $a = b$ のとき
$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\}$ より, $\{a, d\} = \{a\}$ となるから, $d = a = b$ で $b \neq d$ に矛盾.

(ii) $a \neq b$ のとき
$\{a, d\} = \{a\}$ または $\{a, d\} = \{a, b\}$ でなくてはならない. ここで $\{a, d\} = \{a, b\}$ とすると, $b = d$ で矛盾. また, $\{a, d\} = \{a\}$ とすると, $d = a$ となり, 今度は $\{\{a\}, \{a, d\}\} = \{\{a\}\}$ となり, $\{a, b\} = \{a\}$ より, $b = a = d$ より矛盾.

以上より, $b = d$ より, $a = c \land b = d$ が成り立つ.

(2) (i) $\Longrightarrow$
帰納法により示す. $n = 1$ のときは明らか.
次に $\langle a_1, \cdots, a_k\rangle = \langle b_1, \cdots, b_k\rangle \implies a_1 = b_1 \land \cdots a_k = b_k$ が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned}\langle a_1, \cdots, a_{k+1}\rangle = \langle b_1, \cdots, b_{k+1}\rangle &\implies \langle\langle a_1, \cdots, a_k\rangle, a_{k+1}\rangle = \langle\langle b_1, \cdots, b_k\rangle, b_{k+1}\rangle \\ &\implies \langle a_1, \cdots, a_k\rangle = \langle b_1, \cdots, b_k\rangle \land a_{k+1} = b_{k+1} \\ &\implies a_1 = b_1 \land \cdots a_k = b_k \land a_{k+1} = b_{k+1}\end{aligned}$$

が成り立つことから, $\langle a_1, \cdots, a_n\rangle = \langle b_1, \cdots, b_n\rangle \implies a_1 = b_1 \land \cdots a_n = b_n$ が成り立つ.
(集合の集合を認めれば, (1) において元が集合でも問題ない... はず)

(ii) $\Longleftarrow$
上の議論を逆にたどればよい.

以上より, $\langle a_1, \cdots, a_n\rangle = \langle b_1, \cdots, b_n\rangle \iff a_1 = b_1 \land \cdots a_n = b_n$ が成り立つ.

二項関係に関する用語を理解する.

問 1–2: その元が全て順序対であるような集合を二項関係という. 二項関係 R の定義域 $\mathrm{dom}(R)$ および値域 $\mathrm{rng}(R)$ を次のように定義する. (このとき, 明らかに $R \subset \mathrm{dom}(R) \times \mathrm{rng}(R)$ である)

$$\mathrm{dom}(R) := \{x \mid \exists y,\ \langle x, y\rangle \in R\}$$
$$\mathrm{rng}(R) := \{y \mid \exists x,\ \langle x, y\rangle \in R\}$$

また, R による集合 X の像 $R[X]$ を

$$R[X] := \{y \mid \exists x \in X,\ \langle x, y\rangle \in R\}$$

によって定義する (ここで, X は $\mathrm{dom}(R)$ の部分集合とは限らない)
このとき, 次を証明せよ. ただし, $\mathrm{dom}(R) = A,\ \mathrm{rng}(R) \subset B$ として, X, X_1, X_2 はそれぞれ A の部分集合とする.

(1) $X_1 \subset X_2 \implies R[X_1] \subset R[X_2]$

(2) $R[X_1 \cup X_2] = R[X_1] \cup R[X_2]$

(3) $R[X_1 \cap X_2] \subset R[X_1] \cap R[X_2]$

(4) $R[A - X] \supset R[A] - R[X]$

解:

(1) $y \in R[X_1]$ とすると, $\langle x, y\rangle \in R$ となる $x \in X_1$ が存在する. 今, $X_1 \subset X_2$ より x は $x \in X_2$ でもあるから, $y \in R[X_2]$ となる. よって, $R[X_1] \subset R[X_2]$ が成り立つ.

(2) (i) $R[X_1 \cup X_2] \subset R[X_1] \cup R[X_2]$ を示す.
$y \in R[X_1 \cup X_2]$ とすると, $\langle x, y\rangle \in R$ となる $x \in X_1 \cup X_2$ が存在する. この x に関して[1], $x \in X_1$ のときは $y \in R[X_1]$, $x \in X_2$ のときは $y \in R[X_2]$ となるので, $y \in R[X_1] \cup R[X_2]$ より, $R[X_1 \cup X_2] \subset R[X_1] \cup R[X_2]$ が成り立つ.

(ii) $R[X_1 \cup X_2] \supset R[X_1] \cup R[X_2]$ を示す.
$y \in R[X_1] \cup R[X_2]$ とすると, $\langle x, y\rangle \in R$ となる $x \in X_1$ が存在する, または $\langle x, y\rangle \in R$ となる $x \in X_2$ が存在する. いずれの場合も $x \in X_1 \cup X_2$ となるので $y \in R[X_1 \cup X_2]$ となるから, $R[X_1 \cup X_2] \supset R[X_1] \cup R[X_2]$

以上より, $R[X_1 \cup X_2] = R[X_1] \cup R[X_2]$ が成り立つ.

(3) $y \in R[X_1 \cap X_2]$ と仮定すると, $\langle x, y\rangle \in R$ となる $x \in X_1 \cap X_2$ が存在する. この x に関して $x \in X_1$ かつ $x \in X_2$ であるから, $y \in R[X_1] \cap R[X_2]$ となる. よって $R[X_1 \cap X_2] \subset R[X_1] \cap R[X_2]$ となる.
ちなみに, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ かつ $R[X_1] \cap R[X_2] \neq \emptyset$ となるように X_1, X_2 を上手く設定すると, $R[X_1 \cap X_2] \not\supset R[X_1] \cap R[X_2]$ となる例が見つかる.

(4) $y \in R[A] - R[X]$ とすると, $y \in R[A]$ かつ $y \notin R[X]$ となる. $y \in R[A]$ より $\langle x, y\rangle \in R$ となる $x \in A$ が存在する. ここで $x \in X$ と仮定すると, $y \in R[X]$ となってしまうので, $x \notin X$ となる. よって $x \in A - X$ より, $y \in R[A - X]$ となる. 以上より, $R[A - X] \supset R[A] - R[X]$ が成り立つ.
ちなみに $A - X \neq \emptyset$ かつ $R[A] - R[X] = \emptyset$ となるように X を設定すると, $R[A - X] \not\subset R[A] - R[X]$ となる例が見つかる.

[1] x は複数存在する可能性があるが 1 つについて示せば十分であることに注意. 以後の問題も同様.

逆関係, 合成関係, 写像に関する用語を理解する.

問 1–3: 次の問に答えよ.

(1) 関係 $R \subset A \times B$ が与えられたとき, その逆関係 R^{-1} を $R^{-1} := \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R\}$ により定める. $R^{-1}[Y_1 \cap Y_2] \subset R^{-1}[Y_1] \cap R^{-1}[Y_2]$ を示せ. ただし, $Y_1, Y_2 \subset B$ とする.

(2) 2 つの関係 R, S が与えられたとき, その合成関係 $R \circ S$ を $R \circ S := \{\langle x, z\rangle \mid \exists y,\ \langle x, y\rangle \in S \land \langle y, z\rangle \in R\}$ により定める. $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$ を示せ.

(3) 関係 R が $\langle x, y\rangle \in R \land \langle x, z\rangle \in R \implies y = z$ をみたすとき, R を写像とよぶ. 特に $\mathrm{dom}(R) = A,\ \mathrm{rng}(R) \subset B$ のときは, R は A から B への写像[1]と呼ぶ. R が写像のとき, (1) において $R^{-1}[Y_1 \cap Y_2] \supset R^{-1}[Y_1] \cap R^{-1}[Y_2]$ を示せ（つまり (1) とから R が写像であれば $R^{-1}[Y_1 \cap Y_2] = R^{-1}[Y_1] \cap R^{-1}[Y_2]$ が成り立つ）

(4) f が A から B への写像であるとき, A の元 x に関して $\langle x, y\rangle \in f$ となる $y \in B$ がただ一つ存在する. これを f による x の像とよび, $f(x)$ と表す. ここで, $(\forall x, x' \in A)[x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')]$ が成り立つとき f を単射とよぶ.[2] また, $\mathrm{rng}(f) = B$ のとき, f を全射といい, 全射かつ単射のとき全単射という. f が A から B への全単射のとき, 逆関係 f^{-1} が B から A への全単射の写像[3]であることを示せ.

解:

(1) $R^{-1} \subset B \times A$ より, 問 1-2 (3) において記号を置き換えればすぐに示される.[4]

(2) $\langle z, x\rangle \in (R \circ S)^{-1}$ とすると, $\langle x, z\rangle \in R \circ S$ より, $\langle x, y\rangle \in S \land \langle y, z\rangle \in R$ となる y が存在する. この y に対して, $\langle z, y\rangle \in R^{-1}$ かつ $\langle y, x\rangle \in S^{-1}$ より, $\langle z, x\rangle \in S^{-1} \circ R^{-1}$ となる. よって $(R \circ S)^{-1} \subset S^{-1} \circ R^{-1}$ となる. また, 同様の議論を逆にたどることにより, $S^{-1} \circ R^{-1} \subset (R \circ S)^{-1}$ となる. 以上より, $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$ が成り立つ.

(3) $x \in R^{-1}[Y_1] \cap R^{-1}[Y_2]$ とすると, $(\exists y \in Y_1,\ \langle y, x\rangle \in R^{-1}) \land (\exists y' \in Y_2,\ \langle y', x\rangle \in R^{-1})$ が成り立つ. y, y' に関して, $\langle x, y\rangle \in R$ かつ $\langle x, y'\rangle \in R$ が成り立つから, R が写像であることより $y = y'$ となる. よって $\exists y \in Y_1 \cap Y_2,\ \langle y, x\rangle \in R^{-1}$ が成り立つから, $x \in R^{-1}[Y_1 \cap Y_2]$ より, $R^{-1}[Y_1 \cap Y_2] \supset R^{-1}[Y_1] \cap R^{-1}[Y_2]$ となる.

(4) $\mathrm{dom}(f^{-1}) = B,\ \mathrm{rng}(f^{-1}) = A$ であることと f^{-1} が写像であること, および f^{-1} が単射であることを示せばよい. まず,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dom}(f^{-1}) &= \{y \mid \exists x,\ \langle y, x\rangle \in f^{-1}\} \\
&= \{y \mid \exists x,\ \langle x, y\rangle \in f\} \\
&= \mathrm{rng}(f) \\
&= B \quad (\because f \text{ が全射より})
\end{aligned}
$$

より, $\mathrm{dom}(f^{-1}) = B$ となり, 同様にして $\mathrm{rng}(f^{-1}) = A$ が成り立つ.
次に, $\langle y, x\rangle \in f^{-1}$ かつ $\langle y, x'\rangle \in f^{-1}$ とすると, $\langle x, y\rangle \in f$ かつ $\langle x', y\rangle \in f$ であり, f が写像であることから $y = f(x) = f(x')$ となる. ここで f は単射であることから, $x = x'$ となるから f^{-1} は写像となる.
最後に f^{-1} が写像であることから, $\langle y, f^{-1}(y)\rangle \in f^{-1}$ かつ $\langle y', f^{-1}(y')\rangle \in f^{-1}$ より, $\langle f^{-1}(y), y\rangle \in f$ かつ $\langle f^{-1}(y'), y'\rangle \in f$ となる. ここで, $f^{-1}(y) = f^{-1}(y')$ と仮定すると, f が写像であることから, $y = y'$ となるから f^{-1} は単射となる.
以上より, f^{-1} は B から A への全単射となる.

---

[1] A を始集合, B を終集合とよぶ.
[2] f が単射であることを示す際に, 対偶である $(\forall x, x' \in A)[f(x) = f(x') \implies x = x']$ を示す場合が非常に多い.
また, f が写像であるもとで, f が単射であることと逆関係 f^{-1} が写像であることは本質的に同じ.
[3] これを f の逆写像とよぶ
[4] 問 1-2 の他の 3 つも同様である.

選択公理を理解する.

問 1–4: 次の問に答えよ.

(1) Λ から A_λ への写像を 集合族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ という. ここで, Λ から A_λ への写像 a のうち, $a_\lambda \in A_\lambda$ を満たすものの全体を集合族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の直積といい, $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ で表す. 今 $\prod_{n\in\boldsymbol{N}} A_n$ を $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ と表すとき, $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ は n-対の性質を持つことを示せ (ほぼ明らか)

(2) 選択公理 (AC)

$$\Lambda \neq \emptyset \wedge \forall\lambda \in \Lambda,\ A_\lambda \neq \emptyset \implies \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$$

から従属選択公理 (DC)

$$\begin{cases} A \neq \emptyset \\ (\forall x \in A)[\exists y \in A,\ \langle x, y\rangle \in R] \qquad (R \subset A \times A) \end{cases} \implies \exists f : \boldsymbol{N} \to A,\ \langle f(n), f(n+1)\rangle \in R$$

を示せ.

(3) 従属選択公理 (DC) から可算選択公理 (CC)

$$\forall n \in \boldsymbol{N},\ A_n \neq \emptyset \implies \prod_{n\in\boldsymbol{N}} A_n \neq \emptyset$$

を示せ.

解:

(1) $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ は 写像 A によって各 $n \in \boldsymbol{N}$ を写した先 $A(1), A(2), \cdots, A(n)$ を表す. ここで, 写像の相等条件を考えれば, $(A_1, A_2, \cdots, A_n) = (B_1, B_2, \cdots, B_n) \implies A_1 = B_1 \wedge A_2 = B_2 \wedge \cdots \wedge A_n = B_n$ となり n-対の性質を持つ.[1]

(2) $R_x = \{y \in A \mid \langle x, y\rangle \in R\}$ とすれば, DC の仮定より $R_x \neq \emptyset$ となるから, AC から $\prod_{x\in A} R_x \neq \emptyset$, 成り立つ. すなわち, $\exists g : A \to A$, $(\forall x \in A)[\langle x, g(x)\rangle \in R_x]$ が成り立つ. そこで, A の任意の元を x_0 とし, $x_n = g(x_{n-1})$ と帰納的に $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ を作れば, $\forall n \in \boldsymbol{N}$, $\langle x_n, x_{n+1}\rangle \in R$ となる. したがって, $f(n) = x_n$ となるように f を定めれば, $\langle f(n), f(n+1)\rangle \in R$ となる.

(3) $P = \left\{ p \;\middle|\; (\exists\, n \in \boldsymbol{N}) \left[p : \{0, 1, \cdots, n\} \to \bigcup_{i=0}^{n} A_n \ \wedge\ (\forall i \in \{0, 1, \cdots, n\})\, [p(i) \in A_i]\right] \right\}$ を考える. p は写像であるが, 写像は二項関係の特別な場合（すなわち $p \subset \{0, 1, \cdots, n\} \times \bigcup_{i=0}^{n} A_n$ ）であることに注意して $R = \{\, \langle p, q\rangle \in P \times P \mid p \subsetneq q \,\}$ と二項関係 R を定めると, pRq ならば q は写像として p の真の拡大となる. 今, $\forall n \in \boldsymbol{N}$, $A_n \neq \emptyset$ より, $\forall p \in P$, $\exists q \in P$, $\langle p, q\rangle \in R$ が成り立つ（A_{n+1} から元を 1 つ選んで拡大すればよい）よって, DC より $f : \boldsymbol{N} \to P$ で $\forall n \in \boldsymbol{N}$, $\langle f(n), f(n+1)\rangle \in R$ となるものが存在する. ここで $f(n) \subset \boldsymbol{N}\times P$ にであることに注意して, $a = \bigcup_{n\in\boldsymbol{N}} f(n)$ とすれば, 任意の n に対して, $\mathrm{dom}(f(n)) \subsetneq \mathrm{dom}(f(n+1))$ より $\forall n \in \boldsymbol{N}$, $n \in \mathrm{dom}(f(n))$ となるから $\boldsymbol{N} \subset \bigcup_{n\in\boldsymbol{N}} \mathrm{dom}(f(n))$ となる. また, $\forall n \in \boldsymbol{N}$, $\mathrm{dom}(f(n)) \subset \boldsymbol{N}$ より, $\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}} \mathrm{dom}(f(n)) \subset \boldsymbol{N}$ となるから, $\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}} \mathrm{dom}(f(n)) = \boldsymbol{N}$ となる. ここで $\mathrm{dom}(a) = \bigcup_{n\in\boldsymbol{N}} \mathrm{dom}(f(n))$ より, $\mathrm{dom}(a) = \boldsymbol{N}$ となる. さらに, 集合 P の定義より $\forall n \in \boldsymbol{N}$, $a(n) \in A_n$ となる. 以上より $a \in \prod_{n\in\boldsymbol{N}} A_n$ となり, $\prod_{n\in\boldsymbol{N}} A_n \neq \emptyset$ となる.

---

[1] これにより, $\prod_{n\in\boldsymbol{N}} A_n$ は直積集合 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ と同一視される.

選択公理の簡単な応用例.

問 1–5: f を A から B への写像とするとき, 次を示せ. ただし, I_X は X から X への恒等写像を表すものとする.

(1) f が全射 $\iff$ $f \circ g = I_B$ となるような写像 $g : B \to A$ が存在する

(2) f が単射 $\iff$ $h \circ f = I_A$ となるような写像 $h : A \to B$ が存在する

(3) A から B への単射が存在する $\iff$ B から A への全射が存在する

解:

(1) (i) $\Longrightarrow$

f は全射より, $\forall b \in B,\ f^{-1}\{b\} \neq \emptyset$ となる. よって, 選択公理より $g \in \prod_{b \in B} f^{-1}\{b\}$ となる $g : B \to A$ が存在する. この g は 任意の $b \in B$ に対して, $g(b) \in f^{-1}\{b\}$ となるから, $\forall b \in B,\ f(g(b)) = b$ となるから $f \circ g = I_B$ を満たす.

(ii) $\Longleftarrow$

$f \circ g = I_B$ となる $g : B \to A$ の存在を仮定すると, $\forall b \in B,\ f(g(b)) = b$ となる. $g(b) \in A$ より, f は全射となる.

以上より, 「f が全射 $\iff$ $f \circ g = I_B$ となるような写像 $g : B \to A$ が存在する」が成り立つ.

(2) (i) $\Longrightarrow$

f の終域を B から $\mathrm{rng}(f)$ へ縮小すると f は全単射となる. このとき, 逆写像 $f^{-1} : \mathrm{rng}(f) \to A$ が存在し, 今 $a \in A$ を適当にとり, $h : B \to A$ を

$$h(b) = \begin{cases} a & (y \in B - \mathrm{rng}(f) \text{ のとき}) \\ f^{-1}(b) & (y \in \mathrm{rng}(f) \text{ のとき}) \end{cases}$$

のように定めれば, $h \circ f = I_A$ を満たす.

(ii) $\Longleftarrow$

$f(a) = f(a') \implies a = h(f(a)) = h(f(a')) = a'$ より f は単射となる.

以上より, 「f が単射 $\iff$ $h \circ f = I_A$ となるような写像 $h : A \to B$ が存在する 」が成り立つ.

(3) (i) $\Longrightarrow$

A から B への単射を ϕ とすれば (2) より, $\psi \circ \phi = I_A$ となる写像 $\psi : A \to B$ が存在する. この ψ は (1) より全射である（(1) において B と A を逆にみればよい）

(ii) $\Longleftarrow$

B から A への全射を ψ とすれば (1) より, $\psi \circ \phi = I_A$ となる写像 $\phi : A \to B$ が存在する（(1) において B と A を逆にみればよい）ここで, この ϕ は (2) より単射である.

以上より, 「A から B への単射が存在する $\iff$ B から A への全射が存在する」が成り立つ.

問題というよりかは確認.

問 1–6: 次の問に答えよ.

(1) R を集合 A 上の同値関係とする. A の元 x に対して, 集合 $\{y \in A \mid xRy\}$ を x の R による同値類といい, 以後 $[x]_R$ と表す. また, 同値類全体の集合を A の R による商集合といい A/R と表す. ここで, A/R によって定まる集合族が A の直和分割となることを示せ. ただし, ある集合 X の部分集合族 $(X_i)_{i \in I}$ が次の三条件を満たすとき, $(X_i)_{i \in I}$ は X の直和分割と呼ばれる.

$$\forall i \in I,\ X_i \neq \emptyset \tag{1}$$

$$\bigcup_{i \in I} X_i = X \tag{2}$$

$$i, j \in I \wedge i \neq j \implies X_i \cap X_j = \emptyset \tag{3}$$

(2) 空でない集合 A のある集合族 $(C_i)_{i \in I}$ が A の直和分割であるとする. 任意の A の元 x に対し, $x \in C_i$ となる $i \in I$ がただ一つ存在することを示せ.

(3) (2) において, 関係 R を $xRy \iff \exists i \in I,\ x \in C_i \wedge y \in C_i$ により定めると, R は A 上の同値関係となることを示せ.

解:

(1) A/R によって定まる族を $(X)_{X \in A/R}$ で表すことにすると

(i) 任意の X を一つとり, その代表元[1]を x とすると, $x \in X$ より $X \neq \emptyset$ となる（$A/R \coloneqq \{[x]_R \mid x \in A\}$ としているので, 代表元の存在が保証される）

(ii) 任意の $x \in A$ に対し, $x \in [x]_R \in A/R$ より, $x \in X$ となる $X \in A/R$ が存在することから $\bigcup_{X \in A/R} X = A$ となる.

(iii) 任意の $X, Y \in A/R$ に対して, $X \neq Y$ のとき, $X \cap Y \neq \emptyset$ と仮定する. $c \in X \cap Y$ とすれば xRc かつ yRc となる（x, y はそれぞれ X, Y の代表元とする） ここで, R は同値関係より xRy となり $y \in [x]_R\ (= X)$ となる. $y \in [x]_R$ であるとき, $[x]_R = [y]_R$ であるので, $X = Y$ となるが, これは $X \neq Y$ に矛盾. よって $X \cap Y = \emptyset$ となる.

以上より, A/R によって定まる集合族は A の直和分割となる.

(2) まず, 直和分割の条件 (2) より, $\bigcup_{i \in I} C_i = A$ より, 任意の A の元 x に対して $x \in C_i$ となる $i \in I$ が存在する. また, $x \in C_i$ かつ $x \in C_j$ となる $i, j\ (i \neq j)$ が存在すると仮定すると, $x \in C_i \cap C_j$ より, 直和分割の条件 (3) に矛盾することから, $x \in C_i$ かつ $x \in C_j$ となる $i, j\ (i \neq j)$ は存在しない.
以上より, 任意の A の元 x に対し, $x \in C_i$ となる $i \in I$ がただ一つ存在する.

(3)

(i) (2) より 任意の $x \in A$ に対して, $x \in C_i$ となる i が存在することから, $\forall x \in A,\ xRx$ で反射律が成立.

(ii) 対称律は明らかに成立.

(iii) $xRy \wedge yRz$ が成り立つとすると, $(\exists i \in I,\ x \in C_i \wedge y \in C_i) \wedge (\exists j \in I,\ y \in C_j \wedge z \in C_j)$ が成り立つ. ここで $i \neq j$ とすると, $y \in C_i \cap C_j$ より, $(C_i)_{i \in I}$ が直和分割であることに反するから, $i = j$ となる. これより, $\exists k \in I,\ x \in C_k \wedge z \in C_k$ が成り立つので xRz で推移律が成立.

以上より, R は A 上の同値関係となる.

---

[1] $X \in A/R$ に対する X の元

Bernstein の定理を理解

問 1–7: 集合 A から B への全単射（B から A への全単射でもある）が存在するとき A と B は対等であるといい, $A \sim B$ で表す. このとき, 次の問に答えよ.

(1) A から B への単射が存在し, かつ B から A への単射が存在すれば $A \sim B$ となることを示せ.

(2) A から B への全射が存在し, かつ B から A への全射が存在すれば $A \sim B$ となることを示せ.

(3) $A \sim B'$ となるような $B' \subset B$ が存在し, かつ $B \sim A'$ となるような $A' \subset A$ が存在すれば $A \sim B$ となることを示せ.

解:

(1) f を A から B への単射, g を B から A への単射とする.
このとき, $B_0 = B - f[A]$ とし, $A_n = g[B_{n-1}], B_n = f[A_n]$ として, A の部分集合族 $(A_n)_{n\in\{1,2,3,\ldots\}}$, B の部分集合族 $(B_n)_{n\in\{0,1,2,\ldots\}}$ を定める. また, $A - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A^*$, $B - \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = B^*$ とする.
ここで,

$$
\begin{aligned}
f[A^*] &= f[A] - f\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] \\
&= (B - B_0) - f\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] \quad (\because f \text{ が単射より}) \\
&= B - \left(B_0 \cup f\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right]\right) \\
&= B - \left(B_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} f[A_n]\right) \\
&= B - \left(B_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \quad (\because f[A_n] = B_n \text{ より}) \\
&= B - \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \\
&= B^*
\end{aligned}
$$

また,

$$
\begin{aligned}
g\left[\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right] &= \bigcup_{n=1}^{\infty} g[B_{n-1}] \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad (\because g[B_{n-1}] = A_n \text{ より})
\end{aligned}
$$

となる. よって f の定義域を A^*, 終集合を B^* に変えた写像と, g の定義域を $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$, 終集合を $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ に変えた写像は, それぞれ全単射となる. そこで, A から B への写像 F を $a \in A^*$ のとき $F(a) = f(a)$, $a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ のときは $F(a) = g^{-1}(a)$ とすれば F は全単射となり, $A \sim B$ となる.

(2) 問 1-5 (3) よりすぐに示せる.

(3) A から B' への全単射の写像の終集合を B に拡大すれば, その写像は単射となる. 同様に B から A' への全単射も B から A への単射にすることが可能である. よって (1) とから $A \sim B$ となる.

●● Bernstein の定理の証明の補足 ●●

Bernstein の定理の証明は次の図をイメージすると良い.

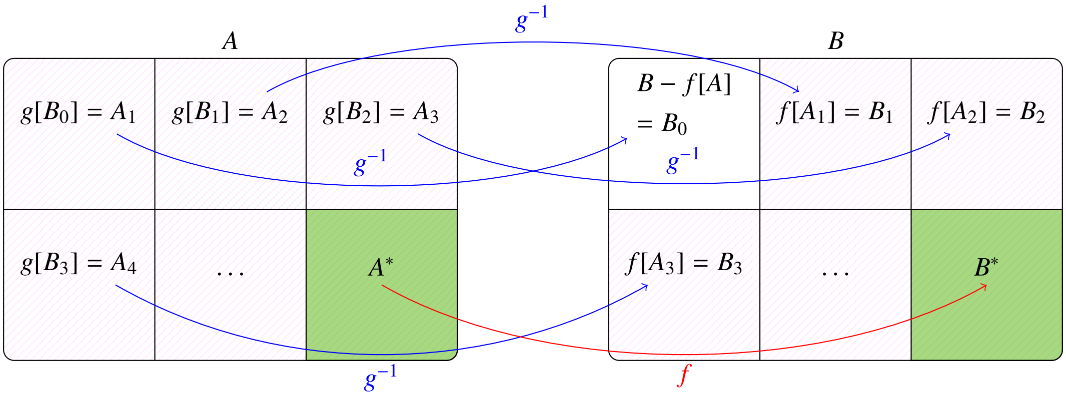

図 1: Bernstein の定理のイメージ

上図において g^{-1}, f をまとめた写像が全単射だと証明している. なお, マゼンダ色の領域は $A \to f[A]$ の対応を表す. また, 図中における各集合の共通部分が無いのは, f, g の単射性による.

位相

更新日 : 24/8/2022 version 0.3

まずは数学の道具（概念）に慣れるための基礎問題.

問 2–1: 次の問に答えよ.

(1) n 次元実空間における任意の 2 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し, シュワルツの不等式

$$|(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$$

を示せ.

(2) n 次元実空間 $\mathbb{R}^n$ における 2 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ の距離 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を次のように定義する.

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

このとき, 三角不等式 $d(\boldsymbol{x}, z) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, z)$ を示せ.

解:

(1) いくつかやり方があるが, ここでは天下りだが代数的に済む解法を示す.

(i) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ のとき

両辺 0 で成立.

(ii) $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ のとき

任意の実数 a, b に対して,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}\|^2 \\ &= \|a\|^2\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2ab \cdot (\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) + \|b\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 \end{aligned}$$

ここで, $a = \|\boldsymbol{y}\|^2,\ b = -(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})$ とすると,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\boldsymbol{y}\|^4\|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\|\boldsymbol{y}\|^2|(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})|^2 + |\boldsymbol{y}|^2|(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})|^2 \\ &= \|\boldsymbol{y}\|^2(\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})|^2) \end{aligned}$$

今 $\|\boldsymbol{y}\|^2 \neq 0$ より, 両辺 $\|\boldsymbol{y}\|^2$ で割り, 平方根をとれば $|(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$ が成り立つ.

以上より, シュワルツの不等式が示された.

(2) まず, 通常の三角不等式 $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ を示す. これは (1) のシュワルツの不等式を利用することで次のように示される.

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\ &\leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + |\boldsymbol{y}|^2 \\ &= (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2 \end{aligned}$$

この三角不等式より, $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}-z\| \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{y}-z\|$ が成り立ち, $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ より, $d(\boldsymbol{x}, z) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+d(\boldsymbol{y}, z)$ が成り立つ.

前問について補足する.

まず, シュワルツの不等式を示す際に用いた証明は天下りすぎる. そこで, 二次関数と判別式を用いた証明が良く本で紹介されている. これは, $\|\boldsymbol{x}\|^2t^2 - 2(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})t + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \|t\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 \geq 0$ の判別式が $D \leq 0$ であることから証明する. この手法からは, 等号成立条件が $\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{y}$ となる実数 t が存在することとすぐにわかる. 一方, 先の天下りな証明からは等号成立条件はわかりにくい. 先の証明からは, 等号が成立することから $\|\|\boldsymbol{y}\|^2\|\boldsymbol{x}\| - |(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})|\|\boldsymbol{y}\|^2\|^2 = 0$ より $t = (\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})/(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y})$ と具体的な t を示すことと, 逆に $\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{y}$ を代入することから, 等号が成立することを示す.

また, 三角不等式の方では等号成立条件はシュワルツの不等式の等号成立条件と $(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) = |(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})|$ をまとめた, 「$(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) \geq 0$ かつ $\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{y}$ となる実数 t が存在する」こととなる.

問 2–2: 次の問に答えよ.

(1) 二つの集合 A, B に対して, 次が成り立つことを示せ.

$$A \not\subset B \iff A \cap B^c \neq \emptyset$$

ただし, この問題以降 A が B の部分集合であることを $A \subset B$ と示すこととする.

(2) $\langle X, d \rangle$ を距離空間とし, A を X の部分集合とする. このとき, A の内部 A°, 閉包 $\overline{A}$, 境界 ∂A を次のように定義する. ただし, x の近傍の全体を $\boldsymbol{V}(x)$ とする (すなわち, $\boldsymbol{V}(x) := \{V \subset X \mid \exists \epsilon > 0, B(x\,;\epsilon) \subset V\}$) また, $B(x\,;\epsilon)$ は半径 ϵ の開球 (ϵ -近傍) である.

$$\begin{aligned}
A^\circ &:= \{x \in X \mid \exists \epsilon > 0, B(x\,;\epsilon) \subset A\} \\
\overline{A} &:= \{x \in X \mid \forall V \in \boldsymbol{V}(x), V \cap A \neq \emptyset\} \\
\partial A &:= \{x \in X \mid \forall V \in \boldsymbol{V}(x), V \cap A \neq \emptyset \wedge V - A \neq \emptyset\}
\end{aligned}$$

このとき, $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$ となることを示せ.

解:

(1) 以下の同値変形により示される.

$$\begin{aligned}
A \not\subset B &\iff \exists x,\ \neg(x \in A \implies x \in B) \\
&\iff \exists x,\ \neg(\neg(x \in A) \vee x \in B) \\
&\iff \exists x,\ x \in A \wedge x \in B^c \\
&\iff A \cap B^c \neq \emptyset
\end{aligned}$$

(2) まず, 以下の同値変形

$$\begin{aligned}
x \in (A^\circ)^c &\iff x \notin A^\circ \\
&\iff \neg(\exists \epsilon > 0)[B(x\,;\epsilon) \subset A] \\
&\iff (\forall \epsilon > 0)[B(x\,;\epsilon) \not\subset A] \\
&\iff (\forall \epsilon > 0)[B(x\,;\epsilon) \cap A^c \neq \emptyset] \quad (\because (1) \text{ より})
\end{aligned}$$

より $x \in (A^\circ)^c \iff (\forall \epsilon > 0)[B(x\,;\epsilon) \cap A^c \neq \emptyset]$ が成り立つ.
これより, $(\forall \epsilon > 0)[B(x\,;\epsilon) \cap A^c \neq \emptyset] \iff x \in \overline{A^c}$ が成り立つことを示せばよい.

(i) $\implies$
近傍の定義より, 任意の $V \in \boldsymbol{V}(x)$ に対し, $B(x\,;\epsilon_0) \subset V$ となる $\epsilon_0 > 0$ が存在するが, 今, この ϵ_0 に対して $B(x\,;\epsilon_0) \cap A^c \neq \emptyset$ となるので, $V \cap A^c \neq \emptyset$ となる. これより, $x \in \overline{A^c}$ となる.

(ii) $\impliedby$
任意の $\epsilon > 0$ に対して, $B(x\,;\epsilon) \subset B(x\,;\epsilon)$ が成り立つので, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $B(x\,;\epsilon) \in \boldsymbol{V}(x)$ となる. よって, 閉包の定義より, $x \in \overline{A^c}$ となるとき, $(\forall \epsilon > 0)[B(x\,;\epsilon) \cap A^c \neq \emptyset]$ が成り立つ.

以上より, $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$ が成り立つ.

●● 内部, 閉包, 境界の定義における補足 ●●

まず, なぜ内部の定義における ϵ の量化子がなぜ全称ではなく存在なのかについて. これは以下の図 1 をイメージするといい. ϵ が大きい $\boldsymbol{x}$ の開球は A に含まれなくなる.

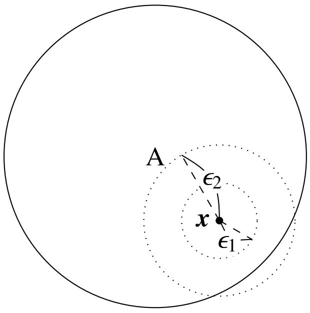

図 1: 内部のイメージ

次に, なぜ閉包の定義があのような定義になっているかについて. これは以下の図 2 をイメージするといい. $\boldsymbol{x}$ のような境界上の点もきちんと閉包に含まれている.

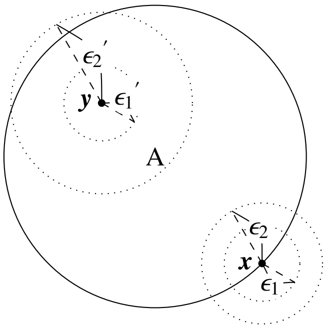

図 2: 閉包と境界のイメージ

最後に, 境界の定義だが, これは上図 2 の $\boldsymbol{y}$ ように閉包から境界以外の点を除いている.

問 2–3: $\langle X, d\rangle$ を距離空間とし, A を X の部分集合とする. このとき, 次の問に答えよ. ただし, 内部, 境界, 閉包の定義は前問と同じものとする.

(1) $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$ を示せ.

(2) $\partial A = \overline{A} - A^\circ$ を示せ.

(3) A の外部 A^e を $A^e := (A^c)^\circ$ のように定義する. このとき, $A^\circ \cup \partial A \cup A^e = X$ であることを示せ.

(4) $A^\circ, \partial A, A^e$ がそれぞれ互いに素であることを示せ.

解:

(1) まず, $x \in A^\circ$ のとき, $\exists \epsilon > 0, B(x\,;\epsilon) \subset A$ であり, $x \in B(x\,;\epsilon)$ とから $A^\circ \subset A$ となる.
次に, $x \in A$ のとき, 任意の x の近傍 V に関して, 近傍の定義より $x \in V$ となる. よって $V \cap A \neq \emptyset$ より, $A \subset \overline{A}$ となる.
以上より, $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$ が成り立つ.

(2) まず, $\partial A \subset \overline{A} - A^\circ$ を示す.
境界と閉包の定義より $\partial A \subset \overline{A}$ は明らか. よって $x \in \partial A \implies x \notin A^\circ$ を示せばよい.
さて, 任意の $\epsilon > 0$ に対して $B(x\,;\epsilon) \in \boldsymbol{V}(x)$ である (問 2-2 (2) 参照) から, $x \in \partial A$ のとき, 境界の定義より $B(x\,;\epsilon) - A \neq \emptyset$ が成り立つ. これより, $B(x\,;\epsilon) \not\subset A$ となる. 今, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $B(x\,;\epsilon) \not\subset A$ が示され, これは $x \notin A^\circ$ であることに他ならない.
よって, $\partial A \subset \overline{A} - A^\circ$ が成り立つ.
次に, $\overline{A} - A^\circ \subset \partial A$ を示す.
これは, 先の議論を逆にたどることにより示せる (問 2-2 (2) を参照するとよい)
以上より, $\partial A = \overline{A} - A^\circ$ が成り立つ.

(3) まず, $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$ となることを示す.
これは次のように示される.

$$
\begin{aligned}
A^\circ \cup \partial A &= A^\circ \cup (\overline{A} - A^\circ) && (\because (2) \text{ より}) \\
&= \overline{A} && (\because (1) \text{ より } A^\circ \subset \overline{A})
\end{aligned}
$$

次に, 問 2-2 (2) より, $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$ が成り立つから, $(A^e)^c = ((A^c)^\circ)^c = \overline{(A^c)^c} = \overline{A}$ が成り立つ. これより, $A^e \cup \overline{A} = X$ より, $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$ とから, $A^\circ \cup \partial A \cup A^e = X$ が成り立つ.

(4) まず, $A^\circ \cup \partial A$ だが, これは (2) より明らかに $A^\circ \cup \partial A = \emptyset$ が成り立つ.
次に $A^\circ \cap A^e = \emptyset$ を背理法により示す.
$A^\circ \cap A^e$ の元の存在を仮定すると, (1) より $x \in A^\circ \cap A^e \implies x \in \overline{A} \cap A^e$ が成り立つが, (3) より $(A^e)^c = \overline{A}$ であるから, $\overline{A} \cap A^e = \emptyset$ で矛盾. よって, $A^\circ \cap A^e = \emptyset$ が成り立つ.
最後に $\partial A \cap A^e = \emptyset$ を背理法により示す.
$\partial A \cap A^e$ の元の存在を仮定すると, (2) より $x \in \partial A \cap A^e \implies x \in \overline{A} \cap A^e$ が成り立ち, 先と同様にして矛盾.
よって, $\partial A \cap A^e = \emptyset$ が成り立つ.
以上より, $A^\circ, \partial A, A^e$ はそれぞれ互いに素である.

代数学

更新日 : 24/8/2022 version 0.3

最初らへんは初等整数論の問題だけど, 後から変更の可能性大.

問 3–1: 以降の問題では, 正の整数全体の集合を $\mathbb{Z}^+$ で表す. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 次の条件を満たす $\mathbb{Z}^+$ の部分集合 S を考える.

$$1 \in S \tag{1}$$
$$\forall n \in \mathbb{Z}^+[n \in S \implies n+1 \in s] \tag{2}$$

整列性（任意の空でない自然数の集合は最小限を持つ）を認めた上で, $S = \mathbb{Z}^+$ を満たすことを示せ.

(2) $\mathbb{Z}^+$ の元の各々に対し, 命題 $P(n)$ が与えられたとし, それについて次の二つのことが示されたとする.

$$P(1) \text{ は真} \tag{1}$$
$$\forall n \in \mathbb{Z}^+[P(n) \text{ が真} \implies P(n+1) \text{ も真}] \tag{2}$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}^+$ に対して, $P(n)$ が真となることを示せ.

解:

(1) $\mathbb{Z}^+ - S = S'$ とし, $S' = \emptyset$ となることを背理法により示す.
$S' \neq \emptyset$ と仮定すると, 整列性より $n_0 = \min S'$ となる $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ が存在する. 今, $n_0 > 1$ より, $n_0 - 1 \geq 1$ となり $n_0 - 1 \in \mathbb{Z}^+$ である. ここで $n_0 - 1 < n_0 = \min \mathbb{Z}^+$ より $n_0 - 1 \notin S'$, すなわち $n_0 - 1 \in S$ となる.
これより, S が満たす条件 (2) より, $n_0 \in S$ となり, $n_0 \in S'$ に矛盾.
以上より, $S' = \emptyset$ であり, $S = \mathbb{Z}^+$ が成り立つ.

(2) $S = \{ n \in \mathbb{Z}^+ \mid P(n) \text{ が真} \}$ と集合 S を定義すると, (1) より $S = \mathbb{Z}^+$ が成り立つ. よって, 全ての $n \in \mathbb{Z}^+$ に対して, $P(n)$ が真となる