Economía Financiera II

Vasicek & Nelson-Siegel

Andrés C. Medina

Universidad de Santiago de Chile

6 de noviembre de 2017

Contenidos

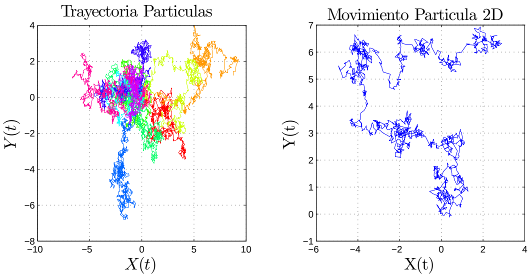
Conceptos Claves

1. Espacio de Probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
2. Filtración $\mathcal{F}$ o Familia de σ-álgebras
3. Martingala
4. Semimartingala
5. Proceso Adaptado o No-Anticipatorio

Movimiento Browniano

Un **Movimiento Browniano** estándar unidimensional, es un proceso estocástico $\{W_t : t \geq 0\}$ tal que:

- $W_0 = 0$ casi seguramente
- Las trayectorias W_t son continuas pero no diferenciables.
- El proceso tiene incrementos independientes
- La variable $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$



Propiedades Estadísticas

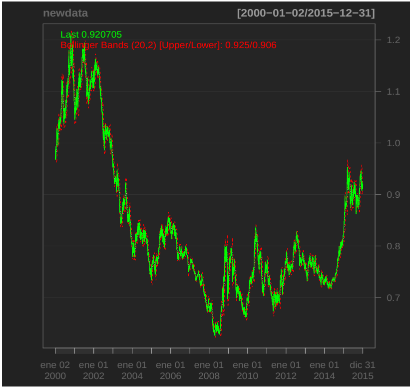
Un proceso Wienner $\{W_t : t \geq 0\}$ tiene las siguientes propiedades

a) $\mathbb{E}(W_t) = 0, \forall t \geq 0$

b) $\mathbb{E}|W_t - W_s|^2 = t - s$

c) $\mathbb{E}(W_t^2) = t, \forall t \geq 0$

d) $\text{Cov}\left[(W(t) - W(s))\right] = \text{mín}(s, t), \forall t \geq 0$

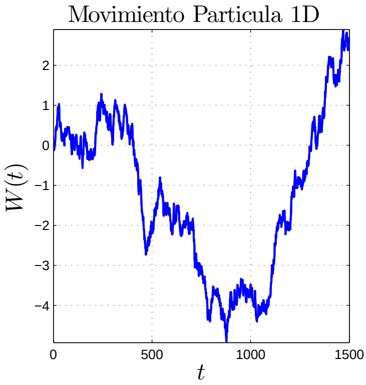


Problema de Variación no Acotada

Notar que W_t es un proceso continuo, pero no diferenciable, por lo tanto se puede demostrar que sobre un intervalo de tiempo $[a, b]$ casi todas las trayectorias tienen variación no acotada, esto es:

$$\sup_{\Delta} \sum_{i=1}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}| = \infty$$

Donde Δ es la partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ del intervalo $[a, b]$



Integración Estocástica

Supongamos que $X(s)$, es un proceso estoćastico que cumple ciertas condiciones, ¿Cómo Cálculo ?

$$\int_0^t X(s)dW(s) \tag{1}$$

Partiendo de la vereda determinística, supongamos que $X(s)$ y $W(s)$ no son procesos estocásticos. Asumimos que $f(s)$ y $g(s)$ son funciones suaves, de clase $\mathcal{C}^2$ en el tiempo s y consideremos la integral:

$$\int_0^t g(s)f(s) \tag{2}$$

Integración Estocástica

Como $f(s)$ es diferenciable, se puede escribir como $df(s) = f^{'}(s)ds$. Sustituyendo esto, en la integral (2)

$$\int_0^t g(s)f(s) = \int_0^t g(s)f^{'}(s)ds$$

¿Qué sucede si $f(s)$ no es diferenciable?, afortunadamente, aunque $f(s)$ no sea demasiado irregular como función de s (función de variación acotada), se puede demostrar que aún la integral esta bien definida:

$$\begin{aligned}
\int_0^t g(s)df(s) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} g(s_i)\left[f(s_{i+1}) - f(s_i)\right] \\
\int_0^t X(s,\omega)dW(s,\omega) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i,\omega)\left[W(s_{i+1},\omega) - W(s_i,\omega)\right]
\end{aligned}$$

Si nos tomamos de la ▸ propiedad b) sabemos que la variación de un incremento browniano está dado como:

$$\mathbb{E}\left[(W(s_{t+i}) - W(s_i))^2\right] = s_{i+1} - s_i$$

Si $X(s_i)$ es independiente del incremento $W(s_{i+1}) - W(s_i)$, se tiene:

$$\mathbb{E}\left[\Big(X(s_i)(W(s_{i+1}) - W(s_i))\Big)^2\right] = \mathbb{E}\left[X(s_i)^2\right]\Big(s_{i+1} - s_i\Big)$$

Aplicando sumatoria ...

$$\mathbb{E}\left[\Big(\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(W(s_{i+1}) - W(s_i))\Big)^2\right] = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}\left[X(s_i)^2\right]\Big(s_{i+1} - s_i\Big)$$

Observando el lado derecho de la igualdad anterior, se puede reconocer como una aproximación de la integral, luego:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(W(s_{i+1}) - W(s_i))\right)^2\right] = \int_0^t \mathbb{E}\left[X(s)^2\right] ds$$

Si el límite existe, entonces:

$$\mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(W(s_{i+1}) - W(s_i))\right)^2\right] = \int_0^t \mathbb{E}\left[X(s)^2\right] ds$$

Integración Estocástica

Adaptabilidad Proceso Integrador

Una variable aleatoria X es llamada $\mathcal{F}_s$-adaptada si X puede ser escrita como un límite de sucesión de funciones $W(\tau)$ para uno o más $\tau \leq s$ pero no como función de cualquier $W(u)$ con $u > s$. Un proceso estocástico $X(s)$ se dice que es adaptado si para cada tiempo $s \in [0, t]$ la variable $X(s)$ es $\mathcal{F}_s$-adaptada

Ejemplo: La integral $X(s) = \int_0^s W(\tau)d\tau$ define un proceso adaptado puesto que el límite de sumas del movimiento browniano en diferentes tiempos menores a s.

$$X(s) = \int_0^s W(\tau)d\tau = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} W(\tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i)$$

Integración Estocástica

Integral de Ito

Un proceso estocástico $X(s)$ es integrable según Ito en el intervalo $[0, t]$ si:

1. $X(s)$ es adaptado para $s \in [0, t]$
2. $\int_0^t \mathbb{E}(X(s)^2)ds < \infty$

La integral de Ito se define como una variable aleatoria:

$$\int_0^t X(s,\omega)dW(s,\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i,\omega)\Big(W(s_{i+1},\omega) - W(s_i,\omega)\Big)$$

Donde el límite es considerado por cada $\omega \in \Omega$

Propiedades Integral de Ito

1. $\mathbb{E}\left[\int_0^t h(s)dW(s)\right] = 0$
2. $\text{Var}\left[\int_0^t h(s)dW(s)\right] = \int_0^t \Big(h(s)\Big)^2 ds$
3. $\text{Cov}\left[\int_0^t h_1(\tau)dW(\tau), \int_0^t h_2(\tau)dW(\tau)\right] = \int_0^{t\wedge s} h_1(\tau)h_2(\tau)d\tau$
4. $\int_0^t h(s)dW(s) \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^t \Big(h(s)\Big)^2 ds\right)$

Modelo Vasicek

1. *An Equilibrium Characterization of the Term Structure* representa una de las contribuciones más importantes a la teoría de tasas de interés en tiempo continuo.
2. Forma parte de los modelos de equilibrio general debido al uso de condiciones de no arbitraje para caracterizar el precio de un bono cero cupón a un plazo dado.
3. La solución del modelo se puede resolver mediante un enfoque probabílistico, basado en la caracterización de la distribución de tasas cortas de interés y mediante una EDP que caracteriza el precio de un bono cero cupon cuando la tasa de interés es un proceso Ornstein-Ulhenbeck.

Motivación

Sea la ecuación diferencial de primer orden:

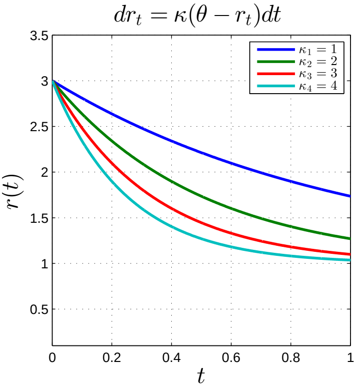
$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt$$

Mediante el factor integrante $\mu(t) = e^{\int_0^t \kappa t} = e^{\kappa t}$

$$r_t = (r_0 - \theta)e^{-\kappa(t - t_0)} + \theta \quad t > 0$$

Aplicando límite $t \to \infty$

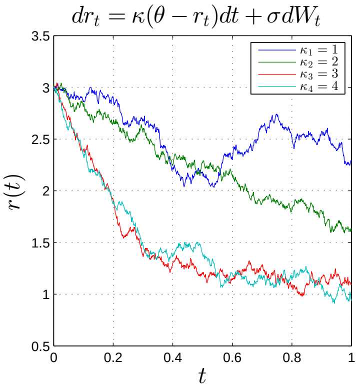
$$\lim_{t\to\infty} r_t = \theta$$



Motivación

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$$

- r_t tipo de interés en el instante t.
- θ tipo de interés medio a largo plazo.
- κ Velocidad de ajuste.
- σ parámetro de difusión se asume constante.



Solución Probabilística

La solución del modelo Vasicek esta dado por:

$$r_t = \theta + (r_0 - \theta)e^{-\kappa t} + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW_S$$

Utilizando ▸ Propiedades de la Integral de Ito

$$\begin{aligned} E(r_t) &= \theta + (r_0 - \theta)e^{-\kappa t} \\ V(r_t) &= \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t}) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$r_t \sim N\left(\theta + (r_0 - \theta)e^{-\kappa t}, \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t})\right)$$

Solución Probabilística

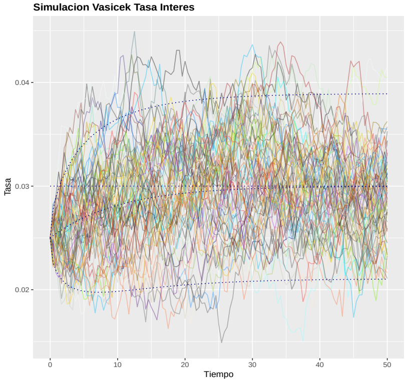
Utilizando ▸ Propiedad 4

$$\int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW_s \sim N\left(0, \mathrm{V}(r_t)\right)$$

Luego, la solución a la sde es:

$$\begin{aligned} r_t &= \theta + (r_0 - \theta) e^{-\kappa t} \\ &+ \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa}} \sqrt{1 - e^{-2\kappa t}} Z_t \end{aligned}$$

Donde Z_t es una variable aleatoria tal que $Z_t \sim N(0, 1)$



Valorización de un Bono

Considere un portfolio de dos bonos con vencimiento diferentes, T_1 y T_2, el bono $B(r_t, t, T1)$ y $B(r_t, t, T_2)$. El portfolio a cubrir consiste en w_1 unidades del bono de precio $B(r_t, t, T_1)$ y w_2 de $B(r_t, t, T_2)$, es decir:

$$\boldsymbol{\pi}_t = w_1 B_1 + w_2 B_2$$

Utilizando el lema de Ito (Regla de la Cadena) se tiene:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\pi}_t = w_1 &\left(\frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{\partial B_1}{\partial r_t}\mu(r_t, t) + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t)\frac{\partial^2 B_1}{\partial r_t^2} \right) dt + \\ w_2 &\left(\frac{\partial B_2}{\partial t} + \frac{\partial B_2}{\partial r_t}\mu(r_t, t) + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t)\frac{\partial^2 B_2}{\partial r_t^2} \right) dt + \\ &\left(w_1 \frac{\partial B_1}{\partial r_t} + w_2 \frac{\partial B_2}{\partial r_t} \right) \sigma(r_t, t) dW_t \end{aligned}$$

Valorización de un Bono

$$d\pi_t =$$

$$w_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t)\frac{\partial^2 B_1}{\partial r_t^2} \right) dt + w_2 \left(\frac{\partial B_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t)\frac{\partial^2 B_2}{\partial r_t^2} \right) dt$$

$$+ \left(w_1 \frac{\partial B_1}{\partial r_t} + w_2 \frac{\partial B_2}{\partial r_t} \right) \mu(r_t, t) dt + \left(w_1 \frac{\partial B_1}{\partial r_t} + w_2 \frac{\partial B_2}{\partial r_t} \sigma^2(r_t, t) \right) dW_t$$

Si $w_1 = 1$ y $w_2 = \frac{-\partial B_1}{\partial r_t} \frac{\partial r_t}{\partial B_2}$, se elimina el riesgo de mercado.

$$\boxed{\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t)\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - m(r, t)\frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0}$$

Valorización de un Bono

Para resolver la ecuación anterior , se requiere una forma funcional específica, la cual viene dada por la siguiente relación

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t)\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + (\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t))\frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0$$

Vasicek, supone que la tasa corta de interés, sigue un proceso de difusión O-U

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$$

Con $\mu(r_t, t) = \kappa(\theta - r_t)$ y $\sigma(r_t, t) = \sigma$, se tiene:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t)\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + \kappa(\theta^* - r_t)\frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0$$

Valorización de un Bono

Supongamos una solución general del tipo

$$B(t, T) = e^{A(t,T) - r_t D(t,T)}$$

Obteniendo derivadas parciales y reemplazando en EDP anterior, se tiene

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - \kappa\theta^* D + r_t \left(-\frac{\partial D}{\partial t} + \kappa D - 1 \right) = 0$$

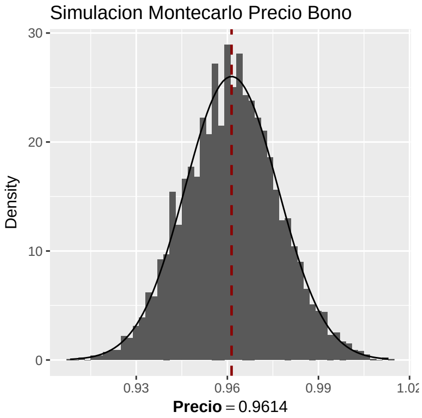
Donde

$$\begin{aligned} D(t, T) &= \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa\tau}) \\ \gamma &= \kappa^2 \left(\theta^* - \frac{\sigma}{\kappa} \right) - \frac{\sigma^2}{2} \\ A(t, T) &= \frac{\gamma}{\kappa^2}(D(t, T) - \tau) - \frac{1}{4\kappa}(\sigma^2 D(t, T)^2) \end{aligned}$$

Valorización de un Bono

```r
## Zero Cupon Solucion EDP Vasicek
ZeroCuponVasicek <-
function(r0, k, theta, beta, T){
  b.vas <- (1/k)*(1-exp(-T*k))
  a.vas <- (theta-beta^2/(2*k^2))*(T-b.vas)+
    (beta^2)/(4*k)*b.vas^2
  return(exp(-a.vas-b.vas*r0))
}
```

```r
## Parametros Modelo
theta <- 0.10
k     <- 0.5
beta  <- 0.03
## Secuencia Tasas
r0 <- seq(0.00, 0.20, 0.01)
n <- length(r0)
## Matriz Guarda Yield
yield <- matrix(0, 10, n)
maturity <- seq(1, 10, 1)
for(i in 1:n){
  for(T in 1:length(maturity)){
    yield[T,i] <-
      -log(ZeroCuponVasicek(r0[i], k,
                            theta, beta, T))/T
  }}
```



Calibración Modelo Vasicek

Si discretizamos la solución probabilística del modelo Vasicek como:

$$r_{i+1} = r_i e^{-\kappa \Delta t} + \theta(1 - e^{-\kappa \Delta t}) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa}}\sqrt{1 - e^{-2\kappa \Delta t}} \cdot N(0,1)$$

La relación entre un ajuste lineal y el modelo de parámetros esta dado por:

$$\begin{aligned} a &= e^{-\kappa \Delta t} \\ b &= \theta(1 - e^{-\kappa \Delta t}) \\ sd(\epsilon) &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa}}\sqrt{1 - e^{-2\kappa \Delta t}} \end{aligned}$$

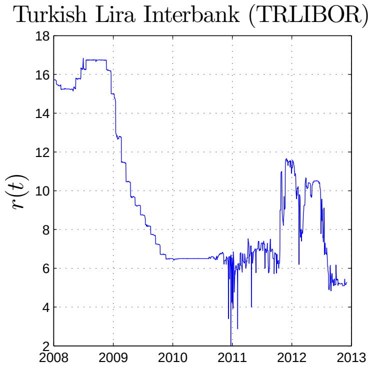
Reescribiendo estas ecuaciones, se tiene : $\kappa = -\frac{\log a}{\Delta t}$, $\theta = \frac{b}{1-a}$, $\sigma = sd(\epsilon)\sqrt{\frac{-2\log a}{\Delta t(1-a^2)}}$

Calibración TRLibor

Metodos de Calibración:

a) Métodos MCO
b) Máxima Verosimilitud
c) Jackniffe
d) Filtros de Kalman

$$
\begin{aligned}
S_{t+1} &= \boldsymbol{\mu} + FS_t + \epsilon_t \\
Y_t &= A + HS_t \\
\boldsymbol{\mu} &= \boldsymbol{\theta}(1 - \exp(-\kappa)dt) \\
F &= \exp(-\kappa)dt
\end{aligned}
$$



Contenidos

Tasa Forward Instantánea

Consideremos una inversión inicial en un período $[t, T]$ a una tasa continuamente capitalizable $R(t, T)$ el monto total que genéra ésta inversión en el vencimiento T está dado por:

$$I(t, T) = e^{R(t,T)(T-t)}$$

Si ésta cantidad se reinvierte en el período $[T, T + \Delta T]$ el monto total de la inversión en la fecha $T + \Delta T$ es:

$$\begin{aligned} L(t, T, T + \Delta T) &= I(t, T) e^{f(t,T,T+\Delta T)\Delta T} \\ &= e^{R(t)(T-t)} e^{f(t,T,T+\Delta T)\Delta T} \end{aligned}$$

Tasa Forward Instantánea

Otra alternativa consiste en invertir una unidad monetaria en un plazo igual a la suma de los plazos anteriores, es decir $[t, T + \Delta T]$. En este caso el monto total que genéra esta inversión en el vencimiento está dado por:

$$J(t, T, \Delta T) = e^{R(t, T+\Delta T)(T+\Delta T - t)}$$

Si se está en equilibrio, no existe oportunidad de arbitraje, luego $L(t, T, T + \Delta T) = J(t, T + \Delta T)$, por tanto:

$$\begin{aligned} R(t, T)(T - t) + f(t, T, T + \Delta T)\Delta T = \\ R(t, T, T + \Delta T)(T + \Delta T - t) \end{aligned}$$

Tasa Forward Instantánea

Por otro lado, notar que:

$$B(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \rightarrow R(t,T) = -\frac{\ln B(t,T)}{(T-t)}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
-\ln B(t,T) + f(t,T,T+\Delta T)\Delta T &= -\ln B(t,T,T+\Delta T) \\
f(t,T,T+\Delta T)\Delta T &= \ln B(t,T) - \ln B(t,T,T+\Delta T) \\
e^{f(t,T,T+\Delta T)\Delta T} &= e^{\ln B(t,T) - \ln B(t,T,T+\Delta T)} \\
e^{f(t,T,T+\Delta T)} &= e^{\frac{\ln B(t,T) - \ln B(t,T,T+\Delta T)}{\Delta T}}
\end{aligned}$$

Como las **Tasas Forward** instantánea se define como:

$$f(t,T) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} f(t,T,T+\Delta T) = -\frac{\partial \ln B(t,T)}{\partial T}$$

Tasa Forward Instantánea

De lo anterior, se desprende que:

$$
\begin{aligned}
\int_t^T f(t,s)ds &= -\int_t^T d\ln B(t,s) \\
&= -\ln B(t,T) + \ln B(t,t) \\
&= -\ln B(t,T) \\
B(t,T) &= \exp\left(-\int_t^T f(t,s)ds\right)
\end{aligned}
$$

Como $B(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$, entonces:

$$
R(t,T) = \frac{1}{(T-t)} \int_t^T f(t,s)ds
$$

1. El modelo propuesto por Nelson-Siegel, asume que las tasas forward instantánea es la solución de una ecuación diferencial la cual presenta formas variadas (monótonas, encorvadas, sigmoidea, entre otras)
2. Los autores se basan en la **Teoría de las Expectativas**, si las tasas Spot son generadas por una ecuación diferencial entonces, las tasas forward, siendo predicciones, serán la solución a dichas ecuaciones.
3. A diferencia de los modelos de Vasicek, Cox-Ingersoll-Ross y Hull-White, el modelo de Nelson-Siegel se concentra en la **evolución** de la tasa forward instantánea y no en la dinámica de la tasa corta.

Ecuación Diferencial 2do. Orden Raíces Distintas

Una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no homogénea $x = x(t)$ con coeficientes constantes y condiciones de borde se pueden escribir como:

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) - \beta_0 b = 0, \quad t < T \quad , x(T) = A \quad \dot{x}(t) = B \quad (1)$$

Las cantidades a,b y β_0 se suponen conocidas. Consideremos en primera instancia la siguiente ecuación:

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = 0 \quad t < T \qquad (2)$$

La ecuación característica asociada a (2) es:

$$m^2 + am + b = 0$$

Cuyas soluciones vienen determinadas por:

$$m_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Ecuación Diferencial 2do. Orden Raíces Distintas

Para asegurar que $m_{1,2} \in \mathbb{R}$, es necesario suponer que $a^2 > 4b$. En este caso, la **solución general** de la ecuación (2) satisface:

$$x_g(t) = \beta_1 e^{m_1(t-T)} + \beta_2 e^{m_2(t-T)}, \quad t < T \tag{3}$$

Si se sustituye (3) en (2) conduce a:

$$(m_1^2 + am_1 + b)\beta_1 e^{m_1(t-T)} + (m_2^2 + am_2 + b)\beta_2 e^{m_2(t-T)} = 0 \tag{4}$$

Si creamos constantes $m_1 = 1/\tau_1$ y $m_2 = 1/\tau_2$ entonces (4) se puede reescribir como:

$$\boxed{x_g(t) = \beta_1 e^{-(T-t)/\tau_1} + \beta_2 e^{(T-t)/\tau_2}, \quad t < T}$$

La **solución particular** de (1) se supone que viene dada de la siguiente forma:

$$x_p(t) = a + \gamma(t - T) \tag{5}$$

Si sustituyo (5) en (1) conduce a:

$$a\gamma + b(a + \gamma(t - T)) - \beta_0 b = 0$$

Claramente, si $\gamma = 0$, entonces $a = \beta_0$. En consecuencia, $x_p(t) = \beta_0$. Por lo tanto, la solución (1), que es $x(t) = x_g(t) + x_p(t)$ es:

$$\boxed{x(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-(T-t)/\tau_1} + \beta_2 e^{(T-t)/\tau_2}, \quad t < T} \tag{6}$$

Ecuación Diferencial 2do. Orden Raíces Distintas

La dinámica de la tasa forward se modela a través de la solución (6) con raices reales y distintas, de tal manera que:

$$f(t,\beta,\tau_1) = \beta_0 + \beta_1 e^{-(T-t)/\tau_1} + \beta_2 e^{-(T-t)/\tau_2} \tag{7}$$

Anteriormente, encontramos que:

$$\begin{aligned} R(t,T) &= \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,s)ds \\ &= \beta_0 + \beta_1\left(\frac{1-e^{-(T-t)/\tau_1}}{\frac{T-t}{\tau_1}}\right) + \beta_2\left(\frac{1-e^{-(T-t)/\tau_2}}{\frac{T-t}{\tau_2}}\right) \end{aligned}$$

Claramente $R(t,\infty) = \beta_0$. Para determinar la tasa corta a partir de la curva de rendimiento, consideremos el cambio de variable $v = T - t$, luego

$$r_t = \lim_{v\to 0} R(t,t+v)$$

Ecuación Diferencial 2do. Orden Raíces Distintas

$$
\begin{aligned}
r_t &= \lim_{v \to 0} R(t, t+v) \\
&= \beta_0 + \beta_1 \lim_{v \to 0} \frac{1 - e^{-v/\tau_1}}{v/\tau_1} + \beta_2 \lim_{v \to 0} \frac{1 - e^{-v/\tau_2}}{v/\tau_2} \\
&= \beta_0 + \beta_1 + \beta_2
\end{aligned}
$$

Conclusiones

1. β_0 contribución tasa forward a largo plazo
2. β_1 y β_2 muestran la contribución de la tasa forward en el corto plazo. $f(t, \infty) = \beta_0$ y $f(t, t) = r_t = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2$
3. $\tau > 0$ determina la velocidad con la que, β_1 y β_2 convergen a 0 y el inverso $1/\tau$ corresponde a la velocidad con la que la tasa forward instántanea converge a su valor de largo plazo β_0

Ecuación Diferencial 2do. Orden Raíces Iguales

En el caso de raices reales iguales a τ, se supone que la tasa forward es conducida por la ecuación

$$\begin{aligned} f(t,T) &= \beta_0 + \beta_1 e^{-(T-t)/\tau} + \beta_2 \left(\frac{T-t}{\tau}\right) e^{-(T-t)/\tau} \\ &= \beta_0 + \left[\beta_1 + \beta_2 \left(\frac{T-t}{\tau}\right)\right] e^{-(T-t)/\tau} \end{aligned}$$

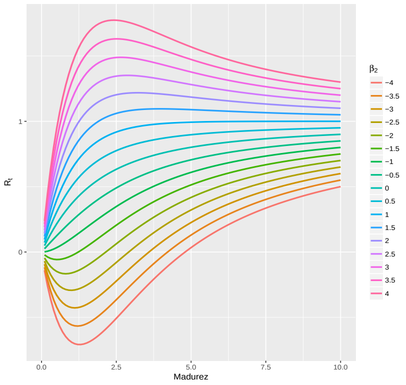
La curva de Rendimiento esta dada por:

$$\begin{aligned} R(t,T) &= \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,s)ds \\ &= \beta_0 + (\beta_1+\beta_2)\left(\frac{1-e^{-(T-t)/\tau}}{\frac{T-t}{\tau}}\right) - \beta_2 e^{-(T-t)/\tau} \end{aligned}$$

Dinámica Tasa Forward

```r
options(warn = -1)
tau   <-  1  # parametro rapidez conv
beta0 <-  1  # parametro largo plazo
beta1 <- -1  # parametro corto plazo + b2
## Grilla para beta2
beta2 <- c(-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4)
T <- 10 # Madurez 10 an~os
t <- seq(T,0,length.out =100)
# Curvas para una grilla de beta2
Rt <- matrix(0,ncol=length(beta2),
             nrow=length(t))

for(i in 1:length(t)){
  for(j in 1:length(beta2)){
  Rt[i,j] <-
      beta0 + (beta1 + beta2[j])*
    (1-exp(-(T-t[i])/tau))/((T-t[i])/tau)-
    beta2[j]*exp(-(T-t[i])/tau)
  }}
## Convierto Matriz a Dataframe
df <- data.frame(t=seq(0,T,length.out =100),Rt)
colnames(df) <- c("t",
                  paste0("beta",seq(1,length(beta2))))
```



Dinámica Tasa Forward

```
options(warn = -1)
beta0 <-  1  # parametro largo plazo
beta1 <- -1  # parametro corto plazo
beta2 <-  4  # Parametro corto plazo
## Grilla para tau(rapidez)
tau   <- c(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)
T <- 10 # Madurez 10 an~os
t <- seq(T,0,length.out =100)
# Guarda Curvas para distintos beta2
Rt <- matrix(0,ncol=length(tau),nrow=length(t))
for(i in 1:length(t)){
  for(j in 1:length(tau)){
    Rt[i,j] <-
      beta0 + (beta1 + beta2)*
      (1-exp(-(T-t[i])/tau[j]))/((T-t[i])/tau[j])-
      beta2*exp(-(T-t[i])/tau[j])
  }}
## Convierto Matriz a Dataframe
df <- data.frame(t=seq(0,T,length.out =100),Rt)
colnames(df) <- c("t",
                  paste0("tau",seq(1,length(tau))))
```