

Economía Financiera II

Curva de Nelson-Siegel

Andrés C. Medina

Universidad de Santiago de Chile

5 de mayo de 2018



1 Tasa Forward Instantánea

2 Nelson Siegel

- Ecuacion Diferencial 2do.
 - Ecuación Diferencial 2do. Orden Raíces Distintas
 - Ecuación Diferencial 2do. Orden Raices Iguales
- Dinámica Tasa Forward
- Dinámica Tasa Forward
- Treasury Bond 30Y

Tasa Forward Instantánea

Consideremos una inversión inicial en un período $[t, T]$ a una tasa continuamente capitalizable $R(t, T)$ el monto total que genera ésta inversión en el vencimiento T está dado por:

$$I(t, T) = e^{R(t, T)(T-t)}$$

Si ésta cantidad se reinvierte en el período $[T, T + \Delta T]$ el monto total de la inversión en la fecha $T + \Delta T$ es:

$$\begin{aligned} L(t, T, T + \Delta T) &= I(t, T)e^{f(t, T, T+\Delta T)\Delta T} \\ &= e^{R(t)(T-t)}e^{f(t, T, T+\Delta T)\Delta T} \end{aligned}$$

Tasa Forward Instantánea

Otra alternativa consiste en invertir una unidad monetaria en un plazo igual a la suma de los plazos anteriores, es decir $[t, T + \Delta T]$. En este caso el monto total que genera esta inversión en el vencimiento está dado por:

$$J(t, T, \Delta T) = e^{R(t, T + \Delta T)(T + \Delta T - t)}$$

Si se está en equilibrio, no existe oportunidad de arbitraje, luego $L(t, T, T + \Delta T) = J(t, T + \Delta T)$, por tanto:

$$R(t, T)(T - t) + f(t, T, T + \Delta T)\Delta T = \\ R(t, T, T + \Delta T)(T + \Delta T - t)$$

Tasa Forward Instantánea

Por otro lado, notar que:

$$B(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)} \rightarrow R(t, T) = -\frac{\ln B(t, T)}{(T-t)}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} -\ln B(t, T) + f(t, T, T + \Delta T)\Delta T &= -\ln B(t, T, T + \Delta T) \\ f(t, T, T + \Delta T)\Delta T &= \ln B(t, T) - \ln B(t, T, T + \Delta T) \\ e^{f(t, T, T + \Delta T)\Delta T} &= e^{\ln B(t, T) - \ln B(t, T, T + \Delta T)} \\ e^{f(t, T, T + \Delta T)} &= e^{\frac{\ln B(t, T) - \ln B(t, T, T + \Delta T)}{\Delta T}} \end{aligned}$$

Como las **Tasas Forward** instantánea se define como:

$$f(t, T) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} f(t, T, T + \Delta T) = -\frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T}$$

Tasa Forward Instantánea

De lo anterior, se desprende que:

$$\begin{aligned}\int_t^T f(t, s) ds &= - \int_t^T d \ln B(t, s) \\ &= - \ln B(t, T) + \ln B(t, t) \\ &= - \ln B(t, T) \\ B(t, T) &= \exp \left(- \int_t^T f(t, s) ds \right)\end{aligned}$$

Como $B(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$, entonces:

$$R(t, T) = \frac{1}{(T-t)} \int_t^T f(t, s) ds$$

- 1 El modelo propuesto por Nelson-Siegel, asume que las tasas forward instantánea es la solución de una ecuación diferencial la cual presenta formas variadas (monótonas, encorvadas, sigmoidea, entre otras)
- 2 Los autores se basan en la **Teoría de las Expectativas**, si las tasas Spot son generadas por una ecuación diferencial entonces, las tasas forward, siendo predicciones, serán la solución a dichas ecuaciones.
- 3 A diferencia de los modelos de Vasicek, Cox-Ingersoll-Ross y Hull-White, el modelo de Nelson-Siegel se concentra en la **evolución** de la tasa forward instantánea y no en la dinámica de la tasa corta.

Ecuación Diferencial 2do. Orden Raíces Distintas

Una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no homogénea $x = x(t)$ con coeficientes constantes y condiciones de borde se pueden escribir como:

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) - \beta_0 b = 0, \quad t < T, \quad x(T) = A \quad \dot{x}(T) = B \quad (1)$$

Las cantidades a, b y β_0 se suponen conocidas. Consideremos en primera instancia la siguiente ecuación:

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = 0 \quad t < T \quad (2)$$

La ecuación característica asociada a (2) es:

$$m^2 + am + b = 0$$

Cuyas soluciones vienen determinadas por:

$$m_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Ecuación Diferencial 2do. Orden Raíces Distintas

Para asegurar que $m_{1,2} \in \mathbb{R}$, es necesario suponer que $a^2 > 4b$. En este caso, la **solución general** de la ecuación (2) satisface:

$$x_g(t) = \beta_1 e^{m_1(t-T)} + \beta_2 e^{m_2(t-T)}, \quad t < T \quad (3)$$

Si se sustituye (3) en (2) conduce a:

$$(m_1^2 + am_1 + b)\beta_1 e^{m_1(t-T)} + (m_2^2 + am_2 + b)\beta_2 e^{m_2(t-T)} = 0 \quad (4)$$

Si creamos constantes $m_1 = 1/\tau_1$ y $m_2 = 1/\tau_2$ entonces (4) se puede reescribir como:

$$x_g(t) = \beta_1 e^{-(T-t)/\tau_1} + \beta_2 e^{(T-t)/\tau_2}, \quad t < T$$

Ecuación Diferencial 2do. Orden Raíces Distintas

La **solución particular** de (1) se supone que viene dada de la siguiente forma:

$$x_p(t) = a + \gamma(t - T) \quad (5)$$

Si sustituyo (5) en (1) conduce a:

$$a\gamma + b(a + \gamma(t - T)) - \beta_0 b = 0$$

Claramente, si $\gamma = 0$, entonces $a = \beta_0$. En consecuencia, $x_p(t) = \beta_0$. Por lo tanto, la solución (1), que es $x(t) = x_g(t) + x_p(t)$ es:

$$x(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-(T-t)/\tau_1} + \beta_2 e^{(T-t)/\tau_2}, \quad t < T \quad (6)$$

Ecuación Diferencial 2do. Orden Raíces Distintas

La dinámica de la tasa forward se modela a través de la solución (6) con raíces reales y distintas, de tal manera que:

$$f(t, \beta, \tau_1) = \beta_0 + \beta_1 e^{-(T-t)/\tau_1} + \beta_2 e^{-(T-t)/\tau_2} \quad (7)$$

Anteriormente, encontramos que:

$$\begin{aligned} R(t, T) &= \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, s) ds \\ &= \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - e^{-(T-t)/\tau_1}}{\frac{T-t}{\tau_1}} \right) + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-(T-t)/\tau_2}}{\frac{T-t}{\tau_2}} \right) \end{aligned}$$

Claramente $R(t, \infty) = \beta_0$. Para determinar la tasa corta a partir de la curva de rendimiento, consideremos el cambio de variable $v = T - t$, luego

$$r_t = \lim_{v \rightarrow 0} R(t, t + v)$$

Ecuación Diferencial 2do. Orden Raíces Distintas

$$\begin{aligned}r_t &= \lim_{v \rightarrow 0} R(t, t + v) \\&= \beta_0 + \beta_1 \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-v/\tau_1}}{v/\tau_1} + \beta_2 \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-v/\tau_2}}{v/\tau_2} \\&= \beta_0 + \beta_1 + \beta_2\end{aligned}$$

Conclusiones

- 1 β_0 contribución tasa forward a largo plazo
- 2 β_1 y β_2 muestran la contribución de la tasa forward en el corto plazo. $f(t, \infty) = \beta_0$ y $f(t, t) = r_t = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2$
- 3 $\tau > 0$ determina la velocidad con la que, β_1 y β_2 convergen a 0 y el inverso $1/\tau$ corresponde a la velocidad con la que la tasa forward instantánea converge a su valor de largo plazo β_0

Ecuación Diferencial 2do. Orden Raíces Iguales

En el caso de raíces reales iguales a τ , se supone que la tasa forward es conducida por la ecuación

$$\begin{aligned}f(t, T) &= \beta_0 + \beta_1 e^{-(T-t)/\tau} + \beta_2 \left(\frac{T-t}{\tau} \right) e^{-(T-t)/\tau} \\&= \beta_0 + \left[\beta_1 + \beta_2 \left(\frac{T-t}{\tau} \right) \right] e^{-(T-t)/\tau}\end{aligned}$$

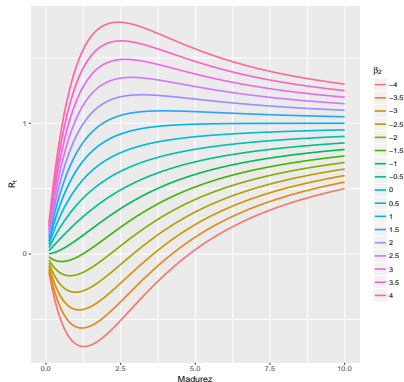
La curva de Rendimiento esta dada por:

$$\begin{aligned}R(t, T) &= \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, s) ds \\&= \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \left(\frac{1 - e^{-(T-t)/\tau}}{\frac{T-t}{\tau}} \right) - \beta_2 e^{-(T-t)/\tau}\end{aligned}$$

Dinámica Tasa Forward

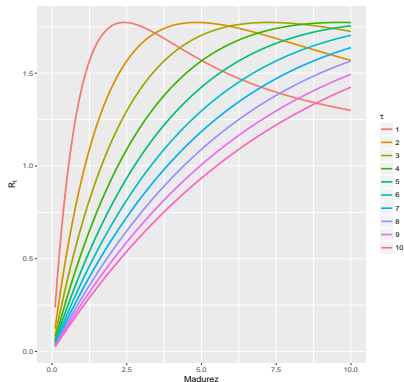
```
options(warn = -1)
tau <- 1 # parametro rapidez conv
beta0 <- 1 # parametro largo plazo
beta1 <- -1 # parametro corto plazo + b2
## Grilla para beta2
beta2 <- c(-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4)
T <- 10 # Madurez 10 años
t <- seq(T,0,length.out = 100)
# Curvas para una grilla de beta2
Rt <- matrix(0,ncol=length(beta2),
             nrow=length(t))

for(i in 1:length(t)){
  for(j in 1:length(beta2)){
    Rt[i,j] <-
      beta0 + (beta1 + beta2[j])*
      (1-exp(-(T-t[i])/tau))/((T-t[i])/tau)-
      beta2[j]*exp(-(T-t[i])/tau)
  }}
## Convierto Matriz a Dataframe
df <- data.frame(t=seq(0,T,length.out = 100),Rt)
colnames(df) <- c("t",
                  paste0("beta",seq(1,length(beta2))))
```



Dinámica Tasa Forward

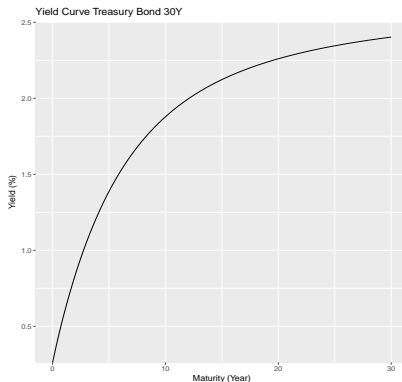
```
options(warn = -1)
beta0 <- 1 # parametro largo plazo
beta1 <- -1 # parametro corto plazo
beta2 <- 4 # Parametro corto plazo
## Grilla para tau(rapidez)
tau <- c(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)
T <- 10 # Madurez 10 años
t <- seq(T,0,length.out = 100)
# Guarda Curvas para distintos beta2
Rt <- matrix(0,ncol=length(tau),nrow=length(t))
for(i in 1:length(t)){
  for(j in 1:length(tau)){
    Rt[i,j] <-
      beta0 + (beta1 + beta2)*
      (1-exp(-(T-t[i])/tau[j]))/((T-t[i])/tau[j]) -
      beta2*exp(-(T-t[i])/tau[j]))
  }}
## Convierto Matriz a Dataframe
df <- data.frame(t=seq(0,T,length.out = 100),Rt)
colnames(df) <- c("t",
  paste0("tau",seq(1,length(tau))))
```



Dinámica Tasa Forward

```
## Data
data <- data.frame(year=t,yield=r)
## Parametros Iniciales
theta0 <- c(0.5,0.5,0.5,1.5)
## Minimo Curva forma Analitica
minNN <- function(data,theta)
{ ## Minimiza la suma de cuadrados del error
  with(data,sum((theta[1]+(theta[2]+theta[3])*
    (theta[4]/year)*(1-exp(-year/theta[4]))-theta[3]*
      exp(-year/theta[4]))^2))}
## Optimizo Parametros
opt_theta <- optim(theta0,minNN,data=data)
```

```
options(warn = -1)
T <- 30 # Madurez 10 años
t <- seq(0,T,length.out =100)
Rt <- matrix(0,ncol=1,nrow=length(t))
for(i in 1:length(t)){
  Rt[i] <-
    beta0 + (beta1 + beta2)*(tau/t[i])*
    (1-exp(-t[i]/tau)-beta2*exp(-t[i]/tau))}
```



Splines

```
## Splines
spl  <- smooth.spline(data$yield~data$year)
coef <- spl$fit$coef

## Curva
plot01 <- ggplot(data,aes(year,yield*100)) +
  geom_point() +
  stat_smooth(se=FALSE,color='darkred') +
  xlab("Maturity (Year)") +
  ylab("Yield (%)")
plot01
```

