

سوالات شمارش مرحله ۱ ترکیه

سوال ۱. به چند طریق میتوان یک مجموعه‌ی ۶ عضوی را به ۳ زیرمجموعه افراز کرد؟

پاسخ. ۹۰ □

سوال ۲. به چند طریق میتوانیم اعداد ۱ تا ۶ را روی وجوه تاس بنویسیم به طوری که اعداد متوالی یک یال مشترک داشته باشند؟

پاسخ. ۱۰ □

سوال ۳. ۱۲ زوج دور یک دایره نشسته اند به طوری که تمامی مردها در کنار یکدیگر هستند و هر فرد دقیقاً روبروی همسر خود قرار دارد. حداقل تعداد جابه‌جایی‌های افراد مجاور برای اینکه زوج‌ها کنار یکدیگر باشند.

پاسخ. ۶۶ □

سوال ۴. حداکثر تعداد زیرمجموعه‌های $\{1, 2, \dots, 10\}$ را به طوری که هیچکدام زیرمجموعه دیگری نباشند پیدا کنید. (۱۹۹۸)

پاسخ. (5^1) □

سوال ۵. ۴ جعبه با گنجایش ۳ و ۵ و ۷ و ۸ داریم. به چند طریق میتوانیم ۱۹ توپ یکسان را درون این جعبه‌ها قرار دهیم؟

پاسخ. $1 - \binom{4}{3}$ □

سوال ۶. به چند طریق میتوان ۱۰ نفر را در ۸ اتاق متمایز تقسیم کرد به طوری که در هر اتاق دست کم یک نفر قرار گیرد؟

پاسخ. $\frac{1}{4} \times 8! \times \binom{4}{2} + \binom{4}{1} \times 8! \times \binom{4}{1}$ □

سوال ۷. در یک جدول ۳ در ۳ دو خانه را آبی و دو خانه را قرمز رنگ کرده‌ایم بطوریکه خانه‌های هم‌رنگ در یک سطر یا یک ستون نیستند. به چند طریق میتوان این رنگ‌آمیزی را انجام داد؟

پاسخ. 11×18 □

سوال ۸. به چند طریق میتوان اعداد ۰ تا ۹ را ردیفی نوشت بطوریکه اعداد فرد بصورت صعودی و اعداد زوج بصورت نزولی باشند؟

پاسخ. (5^1) □

سوال ۹. به چند طریق میتوان ۷ توپ سفید و ۷ توپ قرمز را داخل ۷ جعبه گذاشت بطوریکه در هر جعبه دقیقاً ۲ توپ باشد.

پاسخ. $393 = 1 + \frac{7!}{3!3!} + \frac{7!}{4!3!2!} + \frac{7!}{5!2!}$ □

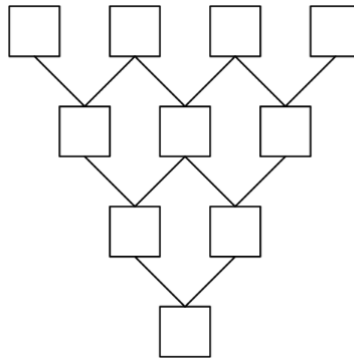
سوال ۱۰. چند جایگشت از اعداد یک تا ۵ وجود دارد بطوریکه k عدد اول دنباله مجموعه‌ی $1, 2, \dots, k$ نباشد. ($k < 5$)

پاسخ. $f(n) = n! - f(n-1)/1! - f(n-2)/2! - \dots - f(1).(n-1)!$
□ $f(5) = 71$

سوال ۱۱. ۶ کارت با ارقام ۱، ۱، ۳، ۴، ۴، ۵ داریم. به ترتیب سه کارت از آنها را میکشیم و به ترتیب کشیده شده با آنها یک عدد سه رقمی تشکیل میدهیم. احتمال بخش پذیر بودن این عدد بر ۳ چقدر است؟

پاسخ. $\square \frac{36}{180} = \frac{1}{5}$

سوال ۱۲. اعداد را داخل مربعها به گونه ای قرار داده ایم که هر خانه برابر تفاضل دو خانه بالای سرش است. حداکثر مقدار برای خانه پایینی چقدر است؟



پاسخ. $\square 4$

سوال ۱۳. ۳۰ توپ در ۴ ظرف A, B, C, D پخش شده اند به طوری که جمع تعداد توپهای A و B بیشتر از جمع تعداد توپهای داخل C و D است. به چند طریق میتوان اینکار را انجام داد؟

پاسخ. $\square (33) - 256 = 2600$

سوال ۱۴. A, B, C در یک تورنومنت بازی میکنند به طوری که ابتدا A و B با یکدیگر بازی میکنند و برنده با C بازی میکند. در هر مرحله فردی که بیرون نشسته با برنده ی بازی، بازی میکند. اگر یک نفر دو بازی متوالی برنده شود قهرمان میشود. احتمال قهرمان شدن C را بدست آورید.

پاسخ. $\square p = \frac{1}{4}(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}p) \Rightarrow p = \frac{2}{5}$

سوال ۱۵. اگر هر زیرمجموعه ی k تایی از مجموعه ی $S = \{1, 2, 3, \dots, 32\}$ سه عضو داشته باشد که به ترتیب یکدیگر را عاد میکنند، آنگاه k حداقل چند است؟

پاسخ. $\square 25$

سوال ۱۶. چند عدد ۵ رقمی با ارقام فرد داریم به طوری که حداقل یک جفت متوالی از ارقام حاصل جمع برابر با ۱۰ داشته باشند؟

پاسخ. $\square 55 - 5 \times 4^4 = 3125 - 1280 = 1845$

سوال ۱۷. در هر مرحله جای دوتا عدد مختلف از دنباله ی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ را عوض میکنیم. بعد از دو مرحله به چند جایگشت متفاوت میتوانیم برسیم؟

پاسخ. $\square 105 + 70 + 1 = 176$

سوال ۱۸. ۳۱ نفر دور یک دایره نشسته اند. به چند طریق میتوان سه نفر انتخاب کرد به طوری که بین هر دو نفر انتخاب شده حداقل ۴ نفر باشند؟

پاسخ. $\square (1^8) \times 31 \times \frac{1}{4} = 1581$

سوال ۱۹. ۷ توپ در یک ردیف داریم. به چند طریق میتوان این توپ‌ها را با سه رنگ قرمز، آبی یا سیاه رنگ کنیم به طوری که دو سیاه متوالی نداشته باشیم؟

پاسخ. $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$, ۱۲۲۴ □

سوال ۲۰. ۷ توپ در یک ردیف را با به گونه‌ای رنگ کرده‌ایم که ۲ توپ سفید، ۲ توپ آبی و ۳ توپ قرمز هستند. احتمال اینکه دو توپ متوالی سفید یا دو توپ متوالی آبی داشته باشیم چقدر است؟

پاسخ. $\frac{1}{3}$ □

سوال ۲۱. به چند طریق میتوان ۱۷ توپ قرمز یکسان و ۱۰ توپ سفید یکسان را در ۴ جعبه متفاوت قرار داد به طوری که در هر جعبه تعداد توپ‌های قرمز از سفید بیشتر باشد؟

پاسخ. $5720 = \binom{17}{3} \cdot \binom{10}{3}$ □

سوال ۲۲. ۱۶ توپ سفید و ۴ توپ قرمز متفاوت را در ۴ جعبه متفاوت قرار می‌دهیم، به گونه‌ای که در هر جعبه ۵ توپ باشد. احتمال اینکه در هر جعبه دقیقاً یک توپ قرمز باشد چقدر است؟

پاسخ. $\frac{5^4}{4^4}$ □

سوال ۲۳. چند عدد ۱۰ رقمی متشکل از ۱، ۲، ۳ داریم به طوری که رقم اول و آخر یکسان باشند و هیچ دو رقم مجاور یکسان نباشند.

پاسخ. $3(6^4 + 8^4 + 2^4 + 2) = 510$ □

سوال ۲۴. به چند طریق میتوان دو زیرمجموعه‌ی متفاوت از $\{1, 2, \dots, 7\}$ انتخاب کرد به طوری که یکی شامل دیگری باشد؟

پاسخ. $3^7 - 2^7 = 2059$ □