سوال ۱. فرض کنید m و n اعداد مثبت و صحیح باشند. و S مجموعه‌ی نقاط (x, y) باشد به طوریکه $1 \leqslant x \leqslant 2m$ و $1 \leqslant y \leqslant 2n$. به یک چینش از mn مستطیل خوشحال میگوییم، اگر هر نقطه در S دقیقا راس یک مستطیل باشد و ضلع همه‌ی مستطیل‌ها موازی بردار x و y باشد. ثابت کنید تعداد چینش‌های خوشحال فرد است. **(تناظر، شمارش)** **(۲۰۲۴)**

سوال ۲. فرض کنید $n \geqslant 3$. روآن و کلین یک بازی روی یک یک جدول $n \times n$ انجام میدهند. به طوری که هر خانه یا به رنگ قرمز است یا آبی. روآن میتواند سطرها را جایگشت دهد و کلین میتواند ستونها را جایگشت دهد. به یک رنگ‌آمیزی از جدول ترتیبی میگوییم اگر:

۱. هرطور که روآن سطرها را جابه‌جا کند، کلین میتواند با حرکت ستونها جدول را به حالت اولیه برگرداند
۲. هرطور که کلین ستونها را جابه‌جا کند، روآن میتواند با حرکت ستونها جدول را به حالت اولیه برگرداند

برحسب n چند رنگ‌آمیزی ترتیبی وجود دارد؟ **(جدول، ساده)** **(۲۰۲۴)**

سوال ۳. فرض کنید n عددی طبیعی و فرد باشد و جدولی $n \times n$ را در نظر بگیرید. میگوییم یک مجموعه C از دومینوها ماکسیمال است، اگر C دقیقا $(n^2-1)/2$ دومینو داشته باشد و هر دومینو دقیقا دو خانه‌ی مجاور را بپوشاند و دومینوها همپوشانی نداشته باشند. پس C کل جدول به جز یک خانه را میپوشاند. در هر مرحله میتوانیم یک دومینو را در راستای خودش حرکت دهیم تا خانه‌ی خالی را بپوشاند. که یک مجموعه‌ی ماکسیمال دیگر به ما میدهد با یک خانه‌ی خالی متفاوت. فرض کنید $k(C)$ تعداد حالات ماکسیمالی باشد که با این حرکت دومینوها به آنها رسید. حداکثر $k(C)$ را بر حسب n پیدا کنید. **(ناوردایی، استقرا)** **(۲۰۲۳)**

سوال ۴. یک عدد a انتخاب شده است. آلیس و باب یک بازی انجام میدهند به طوریکه تعدادی عدد صحیح مثبت روی تخته نوشته شده‌اند. در نوبت آلیس، یک عدد x را از روی تخته انتخاب میکند و آنرا با $x+a$ جایگزین میکند. و در نوبت باب، او یک عدد زوج مانند $2y$ را از روی تخته انتخاب میکند و با y جایگزین میکند. بازی زمانی تمام میشود که باب حرکتی برای انجام نداشته باشد. پس از مدتی باب متوجه میشود که هرطوری که آلیس بازی کند، باب میتواند بازی را تمام کند. ثابت کنید در اینصورت هرطور که آلیس و باب بازی کنند بازی تمام میشود. **(استراتژی، ناوردایی، نظریه‌اعداد)** **(۲۰۲۳)**

سوال ۵. دو نفر B و R با یکدیگر روی یک جدول بینهایت بازی میکنند که همه‌ی خانه‌ها سفید هستند. با شروع از B در هر مرحله B یک خانه‌ی سفید را به رنگ آبی در میاورد و R دو خانه‌ی سفید را به رنگ قرمز درمیاورد. تا جایی این بازی ادامه پیدا میکند تا B تصمیم به اتمام بازی بگیرد. در اینصورت امتیاز B برابر بزرگترین مجموعه‌ی خانه‌های آبی همبند است. (یک مجموعه‌ی همبند به گونه ای است که با حرکت از روی ضلع‌های مجاور میتوان از هر خانه به خانه‌ی دیگر رفت.) بیشترین امتیازی که B میتواند همواره کسب کند چند است؟ **(رنگ‌آمیزی)** **(۲۰۲۳)**

سوال ۶. فرض کنید a و b اعداد صحیح مثبتی باشند. جدولی $(a+b+1)\times(a+b+1)$ داریم به طوری که هر خانه‌ی آن به یکی از دو رنگ قرمز یا آبی رنگ شده‌اند. به طوری که حداقل a^2+ab-b خانه‌ی آبی و b^2+ab-a خانه‌ی قرمز داریم. ثابت کنید میتوان a خانه‌ی آبی و b خانه‌ی قرمز انتخاب کرد به طوریکه هیچ یک با دیگری هم‌سطر یا هم‌ستون نباشد. **(لانه‌کبوتری، الگوریتم)** **(۲۰۲۲)**

سوال ۷. فرض کنید $n > 1$ عددی طبیعی باشد. کارل n کتاب روی یک قفسه در یک ردیف دارد. هر کتاب یک ارتفاع و یک عرضی دارد. هیچ دو کتابی ارتفاع و یا عرض یکسانی ندارند. در ابتدا کتابها بر اساس ارتفاع به صورت صعودی از چپ به راست مرتب شده‌اند. در هر مرحله کارل میتواند دو کتاب مجاور را انتخاب کند و به شرطی که کتاب چپی از کتاب راستی عریض تر و کوتاه‌تر باشد و جای آنها را جابجا میکند. کارل تا جایی که حرکتی نماند این کار را انجام میدهد. ثابت کنید فارغ از حرکات کارل بعد از تعدادی متناهی حرکت متوقف میشود و پس از توقف کتابها بر اساس عرض به صورت صعودی از چپ به راست مرتب شده اند. **(بدیهی)** **(۲۰۲۰)**

سوال ۸. یک مکعب $۲۰۲۰ \times ۲۰۲۰ \times ۲۰۲۰$ داریم. به یک مکعب $۲۰۲۰ \times ۱ \times ۱$ در هر جهتی یک پرتو میگوییم. تعدادی پرتو داخل این مکعب هستند که شرایط زیر را دارند:
۱. اضلاع هر پرتو موازی اضلاع مکعب باشند و پرتو کاملا داخل مکعب باشد.
۲. هیچ دو پرتویی یکدیگر را قطع نمیکنند.
۳. چهار وجه ۲۰۲۰×۱ از یک پرتو باید یا مجاور وجه مکعب باشند، یا یا مماس بر چنین وجهی از یک پرتوی دیگر باشند.
کمترین تعداد پرتوهایی که میتوان داخل مکعب قرار داد به طوریکه شرایط بالا برقرار باشد را بیابید. **(کران، مکعب)** **(۲۰۲۰)**

سوال ۹. فرض کنید $(a_۱, b_۱), (a_۲, b_۲), \dots, (a_{۱۰۰}, b_{۱۰۰})$ جفت‌های متمایزی از اعداد صحیح نامنفی باشند. فرض کنید N تعداد جفت‌های (i,j) باشد به طوریکه $۱ \leqslant i < j \leqslant ۱۰۰$ و $|a_ib_j - a_jb_i| = ۱$. بیشترین مقدار ممکن برای N را پیدا کنید. **(هندسه، کران)** **(۲۰۲۰)**

سوال ۱۰. تعداد $a+b$ کاسه در یک ردیف داریم. که از چپ به راست به ترتیب از ۱ تا $a+b$ نامگذاری شده‌اند. در ابتدا هرکدام از a کاسه اول یک سیب و هر کدام از b کاسه‌ی آخر یک موز دارند. یک حرکت در بازی به طوری است که یک سیب را از کاسه‌ی i به کاسه‌ی $i+۱$ انتقال داده و یک موز را از کاسه‌ی j به $j-۱$ انتقال بدهیم به طوریکه $i-j$ عددی زوج باشد. در یک کاسه میتواند چندین میوه قرار گیرد. میخواهیم کاری کنیم که بتوانیم با تعدادی حرکت b کاسه‌ی اول هرکدام یک موز داشته باشند و a کاسه‌ی آخر هرکدام یک سیب داشته باشند. ثابت کنید چنین کاری انجام پذیر است، اگر و تنها اگر ab زوج باشد. **(ناوردایی، استقرا)** **(۲۰۱۹)**

سوال ۱۱. فرض کنید n عددی صحیح و نامنفی باشد. تعداد حالاتی که میتوان $(n+۱)^۲$ زیرمجموعه‌ی $S_{i,j} \subseteq \{۱, ۲, \dots, ۲n\}$ انتخاب کرد به طوریکه:
۱. برای هر $۰ \leqslant i,j \leqslant n$، مجموعه‌ی $S_{i,j}$ دقیقا $i+j$ عضو دارد.
۲. $S_{i,j} \subseteq S_{k,l}$ هرگاه $۰ \leqslant i \leqslant k \leqslant n$ و $۰ \leqslant j \leqslant l \leqslant n$
را پیدا کنید. **(شمارش)** **(۲۰۱۹)**

سوال ۱۲. برای هر عدد صحیح مثبت n، تعداد اعداد n رقمی مثبت را پیدا کنید که هیچ دو رقم متوالی یکسانی نداشته باشند و رقم آخر عدد اول باشد. **(مولد)** **(۲۰۱۸)**

سوال ۱۳. کارل n کارت با تمام شماره‌های ۱ تا n را دارد و به ترتیب رندومی روی میزش در یک ردیف قرار گرفته‌اند. به یک جفت (a,b) یک نابه‌جایی میگوییم، اگر $a > b$ باشد ولی a سمت راست b باشد. ابتدا کارت شماره‌ی ۱ را انتخاب کرده و آنرا به مکان قرینه‌ش نسبت به وسط منتقل میکنیم. یعنی اگر این کارت سوم از سمت چپ باشد، آنرا به کارت سوم از سمت راست منتقل میکنیم و بقیه شیفت میخورند. این کار را برای تمام اعداد ۱ تا n انجام میدهیم. ثابت کنید بعد از این n مرحله، تعداد نابه‌جایی‌ها تغییری نمیکند. **(ناوردایی)** **(۲۰۱۸)**

$$۳, ۱, ۴, ۲ \to ۳, ۴, ۱, ۲ \to ۲, ۳, ۴, ۱ \to ۲, ۴, ۳, ۱ \to ۲, ۳, ۴, ۱$$

سوال ۱۴. فرض کنید نقاط $P_۱, P_۲, \dots, P_{۲n}$ روی دایره‌ی $x^۲+y^۲=۱$ باشد. و هیچکدام $(۱,۰)$ نباشند. هر نقطه یا آبی است یا قرمز به طوری که دقیقا n تا آبی و n تا قرمز هستند. فرض کنید $R_۱, \dots, R_n$ یک ترتیب دلخواه از نقاط قرمز باشد. فرض کنید $B_۱$ نزدیکترین نقطه‌ی آبی پادساعتگرد به $R_۱$ باشد. به همین روش برای هر i، B_i را انتخاب میکنیم. نشان دهید تعداد کمانهای پادساعتگرد $R_i \to B_i$ که از $(۱,۰)$ میگذرد، فارغ از ترتیب ابتدایی نقاط قرمز است. **(دادینامیک)** **(۲۰۱۷)**

سوال ۱۵. استیو $m \geqslant ۱$ سنگ یکسان را روی یک جدول $n \times n$ می‌گذارد. هر مربع واحد میتواند هر مقدار دلخواهی سنگ داشته باشد. بعد از چینش این سنگ‌ها به هر نحوی، او میتواند حرکتی انجام دهد که به شرح زیر است: ۴ خانه که راس‌های یک مستطیل هستند را انتخاب میکند، مانند $(i,k), (i,l), (j,k), (j,l)$. سپس در یک حرکت یا یک سنگ از هر کدام از خانه‌های (i,k) و (j,l) برمیداریم و آنها را به ترتیب به (i,l) و (j,k) میبریم. و یا برعکس. دو روش از سنگ چیدن‌ها در جدول یکسان هستند اگر با تعداد از این حرکات بتوان آنها را به یکدیگر تبدیل کرد. چند چینش غیر یکسان داریم؟ **(شمارش)** **(۲۰۱۵)**

سوال ۱۶. با داشتن یک دنباله از اعداد حقیقی، یک حرکت شامل برداشتن و حذف دو عدد و اضافه کردن میانگین آنها است. نشان دهید دنباله‌ای از ۲۰۱۵ عدد وجود دارد که بعد از یک حرکت روی دنباله (هر حرکتی) همواره راهی هست که بعد از تعداد متناهی حرکت میتوان به دنباله‌ی ثابت رسید. **(الگوریتم، آسان)** **(۲۰۱۵)**