

سوال ۱. عدد ۲۰۲۱ فوق‌العاده است. برای هر عدد طبیعی m اگر هر کدام از اعضای $\{m, ۲m+۱, ۳m\}$ فوق‌العاده باشند، آنگاه همه‌ی اعضای این مجموعه فوق‌العاده‌اند. آیا عدد ۲۰۲۱۲۰۲۱ نیز فوق‌العاده است؟ (۱۵ امتیاز)

سوال ۲. فرض کنید k عددی طبیعی باشد. علی یک لغت‌نامه \mathbb{D} از کلمات k حرفی متشکل از حروف A و B دارد. علی می‌خواهد داخل هر خانه‌ی یک جدول $k \times k$ یکی از حروف A یا B را بنویسد، به طوری که هر سطر (از چپ به راست) و هر ستون (از بالا به پایین) داخل \mathbb{D} باشد. کمترین تعداد لغاتی که باید داخل \mathbb{D} باشد چقدر است تا فارغ از کلمات داخل \mathbb{D} ، علی بتواند جدول را پر کند. (۱۵ امتیاز)

سوال ۳. برای $n > ۱$ در یک جدول $n \times n$ ، k خانه را علامت زده‌ایم. در هر مرحله می‌توانیم جای سطرها را با یکدیگر عوض کنیم، همین‌طور برای ستونها. می‌خواهیم کاری کنیم که این k خانه بالا یا روی قطر اصلی باشند. حداکثر k را پیدا کنید به طوری که اینکار امکان پذیر باشد. (۱۵ امتیاز)

سوال ۴. یک دسته با ۲۰۲۱۲۰۲۱ سنگ داریم. در یک حرکت هر دسته را میتوان به دو دسته‌ی ناتهی تقسیم کرد بطوریکه اختلاف سنگ‌های دو دسته توان نامنفی‌ای از ۲ باشد. بعد از تعدادی حرکت مشخص شد که تعداد سنگ‌ها داخل هر دسته توانی نامنفی از ۲ است. ثابت کنید تعداد حرکات زوج بوده است. (۱۵ امتیاز)

سوال ۵. دارا و سارا و تارا می‌خواهند با یکدیگر یک بازی انجام دهند. بدین صورت که دارا و سارا با یکدیگر هم تیمی هستند. سپس دارا از اتاق بیرون میرود و تارا روی یک کاغذ یک دنباله‌ی باینری مثل $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ را مینویسد. حال سارا با توجه به دنباله‌ی تارا دنباله‌ی $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ را مینویسد. سپس تارا میتواند یا کاری با دنباله‌ها نداشته باشد و تغییری ایجاد نکند و یا دنباله خود را به دنباله‌ی $(a_1, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1)$ و دنباله‌ی سارا را به دنباله‌ی $(1-b_1, 1-b_n, 1-b_{n-1}, \dots, 1-b_1)$ تغییر دهد. سپس دارا وارد اتاق میشود و بدون اطلاع از اینکه عملیاتی انجام شده یا نه، دنباله‌ها را میبیند. حال دارا باید با توجه به دنباله‌ی سارا، دنباله‌ی اصلی تارا را حدس بزند. به ازای چه n هایی دارا و سارا استراتژی برد دارند؟ (۳۰ امتیاز)

سوال ۶. یک حلزون روی یک نقطه از دایره با محیط یک نشسته است. اگر یک دنباله‌ی نامتناهی از اعداد حقیقی نامنفی مانند c_1, c_2, c_3, \dots داشته باشیم، حلزون در مرحله‌ی i به اندازه‌ی c_i به هر جهتی که بخواهد دور دایره حرکت میکند. بزرگترین عدد حقیقی C را پیدا کنید به طوری که اگر به ازای هر i داشته باشیم $c_i < C$ آنگاه حلزون میتواند با توجه به دنباله، مسیر خود را طوری تعیین کند که نقطه‌ای روی دایره وجود داشته باشد که هیچوقت از آن عبور نکند. (۱۵ امتیاز)

سوال ۷. برای هر عدد طبیعی n و k ، $f(n, ۲k)$ تعداد راه‌های پر کردن یک جدول $n \times ۲k$ به کمک nk دومینو است. (برای مثال: $f(۲, ۲) = ۲$ و $f(۳, ۲) = ۳$). تمام اعداد طبیعی n را پیدا کنید به طوری که برای هر عدد طبیعی k ، مقدار $f(n, ۲k)$ فرد باشد. (۱۵ امتیاز)

سوال ۸. فرض کنید $m, n \geq ۲$ دو عدد طبیعی متمایز باشند. یک جدول نامتناهی داریم که در هر خانه‌ی آن یک عدد حقیقی وجود دارد به طوری که:

۱- در هر جدول $m \times m$ جمع اعداد داخل $m^۲$ خانه‌ی آن ثابت است.

۲- در هر جدول $n \times n$ جمع اعداد داخل $n^۲$ خانه‌ی آن ثابت است.

۳- دو خانه با اعداد متفاوت وجود دارند.

فرض کنید S مجموعه‌ی تمامی اعدادی باشد که حداقل یکبار داخل جدول ظاهر شده‌اند. حداقل $|S|$ را براساس m و n بیابید. (۱۵ امتیاز)

سوال ۹. دو نفر به ترتیب روی یک دایره بازی میکنند. در ابتدا $n > ۳$ نقطه روی محیط دایره هستند. هر بازیکن در نوبت خود باید یک مثلث به کمک نقاط استفاده نشده بکشد به طوری که اضلاع کشیده شده، اضلاع قبلی را قطع نکنند. اولین کسی که نتواند حرکت کند بازنده است. چه کسی استراتژی برد دارد؟ (۱۵ امتیاز)