

سلام. برای اینکه مستقیم جواب سوال براتون اسپویل نشه تصمیم گرفتم جواب سوالا رو به صورت مستقیم نذارم داخل تمرین. برای هر سوال اگر به جواب رسیدید، اون عدد رو داخل یکی از سایت‌هایی که پایین اشاره کردم وارد کنید و ۵ حرف اول رو با جوابی که پایین بهتون داده شده مقایسه کنید. لطفاً کلک نزنید و از ایده‌های هوشمندانه مانند حفظ کردن هشت اعداد استفاده نکنید. دقت کنید که هشت‌ها نسبت به اسپیس اضافه و اینتر زدن حساسن، پس فقط خود عدد رو وارد کنید تا هشت درستی بهتون داده بشه. به علاوه برای سوالات کسری، تا جای ممکن کسر رو ساده کنید و با صورت و مخرجی که دادم مقایسه کنید. سایت‌هایی که میتونید استفاده کنید:

<https://tools.keycdn.com/sha256-online-generator>

سوال ۱. به چند طریق میتوان یک مجموعه‌ی ۶ عضوی را به ۳ زیرمجموعه افراز کرد؟

پاسخ. ۹۰
□

سوال ۲. به چند طریق میتوانیم اعداد ۱ تا ۶ را روی وجوه تاس بنویسیم به طوری که اعداد متوالی یک یال مشترک داشته باشند؟

پاسخ. ۱۰
□

سوال ۳. ۱۲ زوج دور یک دایره نشسته اند به طوری که تمامی مردها در کنار یکدیگر هستند و هر فرد دقیقاً روبروی همسر خود قرار دارد. حداقل تعداد جابه‌جایی‌های افراد مجاور برای اینکه زوج‌ها کنار یکدیگر باشند.

پاسخ. ۶۶
□

سوال ۴. حداکثر تعداد زیرمجموعه‌های $\{1, 2, \dots, 10\}$ را به طوری که هیچکدام زیرمجموعه دیگری نباشند پیدا کنید. (۱۹۹۸)

پاسخ. $252 = \binom{10}{5}$
□

سوال ۵. ۴ جعبه با گنجایش ۳ و ۵ و ۷ و ۸ داریم. به چند طریق میتوانیم ۱۹ توپ یکسان را درون این جعبه‌ها قرار دهیم؟

پاسخ. $34 = \binom{7}{3} - 1$
□

سوال ۶. به چند طریق میتوان ۱۰ نفر را در ۸ اتاق متمایز تقسیم کرد به طوری که در هر اتاق دست کم یک نفر قرار گیرد؟

پاسخ. $3024000 = \frac{1}{4} \times 8! \times \binom{8}{4} + \binom{8}{2} \times 8!$
□

سوال ۷. در یک جدول ۳ در ۳ دو خانه را آبی و دو خانه را قرمز رنگ کرده‌ایم بطوریکه خانه‌های هم‌رنگ در یک سطر یا یک ستون نیستند. به چند طریق میتوان این رنگ‌آمیزی را انجام داد؟

پاسخ. $198 = 11 \times 18$
□

سوال ۸. به چند طریق میتوان اعداد ۰ تا ۹ را ردیفی نوشت بطوریکه اعداد فرد بصورت صعودی و اعداد زوج بصورت نزولی باشند؟

پاسخ. $252 = (5!)$ □

سوال ۹. به چند طریق میتوان ۷ توپ سفید و ۷ توپ قرمز را داخل ۷ جعبه گذاشت بطوریکه در هر جعبه دقیقا ۲ توپ باشد.

پاسخ. $393 = \frac{7!}{3!3!} + \frac{7!}{3!3!2!} + \frac{7!}{5!} + 1$ □

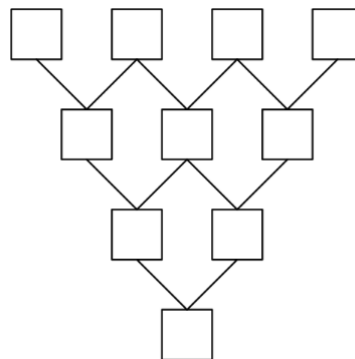
سوال ۱۰. چند جایگشت از اعداد یک تا ۵ وجود دارد بطوریکه k عدد اول دنباله مجموعه‌ی $1, 2, \dots, k$ نباشد. ($k < 5$)

پاسخ. $f(n) = n! - f(n-1)/1! - f(n-2)/2! - \dots - f(1)/(n-1)!$
 $f(5) = 71$ □

سوال ۱۱. ۶ کارت با ارقام ۱، ۱، ۳، ۴، ۴، ۵ داریم. به ترتیب سه کارت از آنها را میکشیم و به ترتیب کشیده شده با آنها یک عدد سه رقمی تشکیل میدهیم. احتمال بخش پذیر بودن این عدد بر ۳ چقدر است؟

پاسخ. $\frac{36}{180} = \frac{1}{5}$ □

سوال ۱۲. اعداد را داخل مربعها به گونه‌ای قرار داده‌ایم که هر خانه برابر تفاضل دو خانه بالای سرش است. حداکثر مقدار برای خانه پایینی چقدر است؟



پاسخ. ۴ □

سوال ۱۳. ۳۰ توپ در ۴ ظرف A, B, C, D پخش شده‌اند به طوری که جمع تعداد توپ‌های A و B بیشتر از جمع تعداد توپ‌های داخل C و D است. به چند طریق میتوان اینکار را انجام داد؟

پاسخ. $2600 = \binom{33}{3}$ □

سوال ۱۴. A, B, C در یک تورنمنت بازی میکنند به طوری که ابتدا A و B با یکدیگر بازی میکنند و برنده با C بازی میکند. در هر مرحله فردی که بیرون نشسته با برنده‌ی بازی، بازی میکند. اگر یک نفر دو بازی متوالی برنده شود قهرمان میشود. احتمال قهرمان شدن C را بدست آورید.

پاسخ. $p = \frac{1}{4}(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}p) \Rightarrow p = \frac{2}{5}$ □

سوال ۱۵. اگر هر زیرمجموعه‌ی k تایی از مجموعه‌ی $S = \{1, 2, 3, \dots, 32\}$ سه عضو داشته باشد که به ترتیب یکدیگر را عاد میکنند، آنگاه k حداقل چند است؟

پاسخ. ۲۵

□

سوال ۱۶. چند عدد ۵ رقمی با ارقام فرد داریم به طوری که حداقل یک جفت متوالی از ارقام حاصل جمع برابر با ۱۰ داشته باشند؟

پاسخ. $55 - 5 \times 4^4 = 3125 - 1280 = 1845$

□

سوال ۱۷. در هر مرحله جای دوتا عدد مختلف از دنباله‌ی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ را عوض میکنیم. بعد از دو مرحله به چند جایگشت متفاوت میتوانیم برسیم؟

پاسخ. $105 + 70 + 1 = 176$

□

سوال ۱۸. ۳۱ نفر دور یک دایره نشسته‌اند. به چند طریق میتوان سه نفر انتخاب کرد به طوری که بین هر دو نفر انتخاب شده حداقل ۴ نفر باشند؟

پاسخ. $(\frac{1}{2}) \times 31 \times \frac{1}{3} = 1581$

□

سوال ۱۹. ۷ توپ در یک ردیف داریم. به چند طریق میتوان این توپ‌ها را با سه رنگ قرمز، آبی یا سیاه رنگ کنیم به طوری که دو سیاه متوالی نداشته باشیم؟

پاسخ. $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}, a_7 = 1224$

□

سوال ۲۰. ۷ توپ در یک ردیف را با به گونه‌ای رنگ کرده‌ایم که ۲ توپ سفید، ۲ توپ آبی و ۳ توپ قرمز هستند. احتمال اینکه دو توپ متوالی سفید یا دو توپ متوالی آبی داشته باشیم چقدر است؟

پاسخ. $\frac{1}{11} \div \frac{1}{11} = \frac{1}{11}$

□

سوال ۲۱. به چند طریق میتوان ۱۷ توپ قرمز یکسان و ۱۰ توپ سفید یکسان را در ۴ جعبه متفاوت قرار داد به طوری که در هر جعبه تعداد توپ‌های قرمز از سفید بیشتر باشد؟

پاسخ. $(\frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{3}) = 5720$

□

سوال ۲۲. ۱۶ توپ سفید و ۴ توپ قرمز متفاوت را در ۴ جعبه متفاوت قرار میدهم، به گونه‌ای که در هر جعبه ۵ توپ باشد. احتمال اینکه در هر جعبه دقیقاً یک توپ قرمز باشد چقدر است؟

پاسخ. $\frac{5^4}{(\frac{1}{4})} = \frac{125}{969}$

□

سوال ۲۳. چند عدد ۱۰ رقمی متشکل از ۱، ۲، ۳ داریم به طوری که رقم اول و آخر یکسان باشند و هیچ دو رقم مجاوری یکسان نباشند.

پاسخ. $3(64 + 80 + 24 + 2) = 510$

□

سوال ۲۴. به چند طریق میتوان دو زیرمجموعه‌ی متفاوت از $\{1, 2, \dots, 7\}$ انتخاب کرد به طوری که یکی شامل دیگری باشد؟

پاسخ. $37 - 2^7 = 2059$

□

۲۰۰۱

سوال ۲۵. چند عدد پنج رقمی با ارقام فرد وجود دارد به طوریکه حداقل یک جفت رقم متوالی با جمع ۱۰ داشته باشد.

پاسخ. $۱۸۴۵ - ۱۲۸۰ = ۳۱۲۵ - ۵۰۴۴ = ۵۵$ □

سوال ۲۶. در هر مرحله جای دو تا از اعداد در جایگشت ۱, ۲, ..., ۷ را جایشان را عوض می‌کنیم. بعد از دو مرحله به چند جایگشت متفاوت می‌توانیم برسیم؟

پاسخ. $۱۷۶ = ۱ + ۷۰ + ۱۰۵$ □

سوال ۲۷. یک پلکان داریم که در ردیف اول ۱۰ مربع دارد، در ردیف دوم ۹ مربع و ... در ردیف دهم ۱ مربع دارد. چند زیر مستطیل در این پلکان وجود دارد؟

پاسخ. ۷۱۵ □

سوال ۲۸. صادق یک عدد دو رقمی را مدنظر دارد. در هر مرحله می‌توانیم یک عدد دو رقمی را حدس بزنیم و صادق به ما تعداد رقم‌هایی که درست حدس زدیم را می‌گوید. حداقل به چند حدس نیاز داریم تا عدد مورد نظر را پیدا کنیم؟

پاسخ. ۱۰ □

سوال ۲۹. دور یک دایره ۵ شهر با فاصله‌های ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ هستند. می‌خواهیم بیمارستانی احداث کنیم که فاصله‌اش از دورترین شهر حداقل باشد. چند جا می‌توانیم این بیمارستان را نصب کنیم؟ (در نقطه‌ای صحیح باید احداث شود)

پاسخ. ۲ □

۲۰۰۲

سوال ۳۰. در یک سینما، ده ردیف صندلی وجود دارد و در هر ردیف ۱۰ صندلی. چقدر احتمال دارد دو دوست بدون هماهنگی قبلی صندلی‌های مجاور بخرند؟

پاسخ. $\frac{۱}{۵۵}$ □

سوال ۳۱. کلیدهای یک گاوصندوق با پنج قفل را کپی زدیم و بین ۸ نفر تقسیم کردیم به طوریکه با کلیدهای هر ۵ نفر از این ۸ نفر می‌توان گاوصندوق را باز کرد. حداقل تعداد کلیدها را پیدا کنید.

پاسخ. ۲۵ □

سوال ۳۲. اعداد $۱, ۲, \dots, N$ دور دایره چیده شده‌اند به گونه‌ای که هر دو عدد متوالی یک رقم یکسان در نمایش ده دهی خود دارند. حداقل مقدار N را بیابید.

پاسخ. ۲۹ □

سوال ۳۳. به ازای هر $i = 0, 1, 2, \dots$ ، تعداد ۸ توپ با وزن 2^i داریم. داخل هر جعبه میتوانیم هرچقدر که بخواهیم توپ بگذاریم به طوریکه وزن جعبه‌ها یکسان باشد. حداکثر تعداد جعبه‌ها را بیابید.

پاسخ. ۱۵
□

۲۰۰۳

سوال ۳۴. حداکثر چند عدد طبیعی کمتر از ۵۱ می‌توان یافت طوریکه هیچکدام مضرب ۳ دیگری نباشد.

پاسخ. ۳۸
□

سوال ۳۵. تعداد صفرهای سمت راست عدد $2000!$ را بدست آورید.

پاسخ. ۴۹۹
□

سوال ۳۶. احتمال رخداد یک جایگشت از کلمه‌ی ABRAKADABRA به طوریکه قبل از اولین A هیچ B رخ نداده باشد.

پاسخ. $\frac{5}{7}$
□

سوال ۳۷. دو تیم استقلال و پرسپولیس هردو وارد یک تورنومنت تک حذفی ۱۶ تیمه شده‌اند. احتمال برد هر تیم در هر مرحله $\frac{1}{2}$ است. احتمال اینکه در این تورنومنت یک بازی استقلال پرسپولیس داشته باشیم چقدر است؟

پاسخ. $\frac{1}{8}$
□

سوال ۳۸. ۲۰۰۳ نقطه در صفحه داریم. نقطه‌ی وسط پاره‌خط واصل هر دوتایی را علامت میزنیم. حداقل چند نقطه علامت میخورند؟

پاسخ. ۴۰۰۳
□

سوال ۳۹. وزن ۹ توپ با رنگ‌های متفاوت اعداد ۱, ۲, ..., ۹ است. اما ما نمیدانیم کدام یک چه وزنی دارد. یک ترازوی دو کفه‌ای داریم که کفه‌ی سنگین‌تر را نشان می‌دهد و تفاضل دو کفه را نیز به ما میدهد. حداقل چند بار نیاز به استفاده از ترازو داریم تا بتوانیم وزن همه توپ‌ها را بدانیم؟؟؟؟

پاسخ. ۱
□