امین ذوالفقاریان - ۶۱۰۳۰۰۱۱۸

سوال ۱. جانشینی زیر را انجام دهید:

$$(\lambda z.(\lambda x.yx)xz)[x := zx]$$

اثبات.

$$\begin{aligned}(\lambda z.(\lambda x.yx)xz)[x := zx] &\cong (\lambda a.(\lambda b.yb)xa)[x := zx]\\ &= (\lambda a.(\lambda b.yb)zxa)\\ &= (\lambda a.yzxa)\end{aligned}$$

سوال ۲. (آ) ترم s را چنان بیابید که برای ترم‌های دلخواه داده شده t و u داشته باشیم:

$$\lambda_\beta \vdash stu = ut$$

(ب) نشان دهید که ترمی مثل s چنان موجود است که برای هر ترم داده شده‌ی t:

$$\lambda_\beta \vdash st = ss$$

اثبات.

(آ) قرار دهید $s = (\lambda xy.yx)$:

$$\begin{aligned}stu &= (\lambda xy.yx)tu\\ &= ut\end{aligned}$$

(ب) قرار دهید $s = (\lambda x.y)$ به طوری که $x \neq y$. دقت کنید که داریم: $(\lambda x.y)s = y$:

$$st = (\lambda x.y)t = y = (\lambda x.y)s = ss$$

سوال ۳. (آ) ثابت کنید برای هر ترم بسته‌ی s، یک ترم بسته‌ی t وجود دارد که:

$$\lambda_\beta \vdash t = ts$$

(ب) ثابت کنید برای هر ترم بسته‌ی s، یک ترم بسته‌ی t' وجود دارد که:

$$\lambda_\beta \vdash t'(\lambda x.x)ss = t's$$

اثبات.

(آ) ترم $F = \lambda x.xS$ را در نظر بگیرید. از آنجایی که S بسته است پس F هم بسته است. از طرفی طبق قضیه نقطه ثابت وجود دارد t به گونه‌ای که داشته باشیم: $Ft = t$. به بیان بهتر:

$$t = Ft = (\lambda x.xS)t = tS$$

تنها باقی میماند که نشان دهیم t بسته است. برای این نیز فرض کنید این نقطه‌ی ثابت با کمک کامبینیتور Y بدست آمده است. در این صورت چون Y و S و F بسته هستند، پس t نیز بسته است.

(ب) دوباره تابع $F = \lambda y.y(\lambda x.x)s$ را در نظر بگیرید. و فرض کنید t' نقطه‌ی ثابتی برای آن باشد که به کمک کامبینیتور Y بدست آمده است. دقت کنید که مشابه استدلال قبلی t' بسته است. حال داریم:

$$\begin{aligned}t' = Ft' = (\lambda y.y(\lambda x.x)s)t' = t'(\lambda x.x)s\\ \implies t's = t'(\lambda x.x)ss\end{aligned}$$

سوال ۴. ثابت کنید ترم Fای موجود نیست که برای هر ترم داده شده X و Y داشته باشیم:

$$\lambda_\beta \vdash F(XY) = X$$

(سازگاری λ_β مفروض است.)

اثبات. قرار دهید $X = \lambda xy.y$ و $Y = \lambda x.xx$. آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} XY &= \lambda y.y \\ YX &= (\lambda xy.y)(\lambda xy.y) = \lambda y.y \\ \implies & XY = YX \end{aligned}$$

بدیهتا $X \neq Y$ چرا که:

$$\begin{aligned} Xxx &= (\lambda xy.y) = x \\ Yxx &= (\lambda x.xx)xx = xxx \end{aligned}$$

حال داریم:

$$X = F(XY) = F(YX) = Y$$

که تناقض است چرا که میدانستیم $X \neq Y$.

سوال ۵. ثابت کنید هر λـترم M به یکی از دو فرم زیر است:

$$M \equiv \lambda \overrightarrow{x}.yN_۱ \ldots N_n$$
$$M \equiv \lambda \overrightarrow{x}.(\lambda y.P)QN_۱ \ldots N_n$$

اثبات.

سوال ۶. قرار دهید

$$? \triangleq \lambda abcdefghijklmnopqstuvwxyzr.(r(thisisafixedpointcombinator))$$
$$\$ = ??????????????????????????$$

ثابت کنید \$ یک ترکیب‌گر نقطه ثابت است یعنی برای هر $F \in \Lambda$ داریم:

$$\$F = F(\$F)$$

اثبات. نماد $?(n)$ را به گونه‌ای تعریف میکنیم که یعنی n تا ? پشت یکدیگر داریم. حال جایگذاری میکنیم:

$$\begin{aligned} \$ &= ?????????????????????????? \\ &= \lambda abcdefghijklmnopqstuvwxyzr.(r(thisisafixedpointcombinator))(۲۵)? \\ &= \lambda bcdefghijklmnopqstuvwxyzr.(r(thisis?fixedpointcombin?tor))(۲۴)? \\ &= \lambda cdefghijklmnopqstuvwxyzr.(r(thisis?fixedpointcom?in?tor))(۲۳)? \\ &\vdots \\ &= \lambda r.(r(??????????????????????????r)) = \lambda r.(r((۲۶)?r)) \\ &= \lambda r.(r(\$r)) \end{aligned}$$

حال با این تعریف داریم:

$$\$F = \lambda r.(r(\$r))F = F(\$F)$$

که نشان میدهد این ترکیب‌گر نقطه ثابت است.

سوال ۷. λـ ترم‌های O و E را چنان تعریف کنید که

$$OC_m =_\beta \begin{cases} true & If\ m\ is\ odd \\ false & O.W. \end{cases} \quad , EC_m =_\beta \begin{cases} true & If\ m\ is\ even \\ false & O.W. \end{cases}$$

اثبات.

$$\lambda fx.f^n(x)$$
$$\lambda x.(\lambda yz.zy)(\lambda yz.zy)x$$
$$x\lambda yz.zy$$