

سوال ۱. به چند طریق میتوان یک مجموعه‌ی ۶ عضوی را به ۳ زیرمجموعه افراز کرد؟

پاسخ. ۹۰ □

سوال ۲. به چند طریق میتوانیم اعداد ۱ تا ۶ را روی وجوه تاس بنویسیم به طوری که اعداد متوالی یک یال مشترک داشته باشند؟

پاسخ. ۱۰ □

سوال ۳. ۱۲ زوج دور یک دایره نشسته اند به طوری که تمامی مردها در کنار یکدیگر هستند و هر فرد دقیقاً روبروی همسر خود قرار دارد. حداقل تعداد جابه‌جایی‌های افراد مجاور برای اینکه زوج‌ها کنار یکدیگر باشند.

پاسخ. ۶۶ □

سوال ۴. حداکثر تعداد زیرمجموعه‌های  $\{1, 2, \dots, 10\}$  را به طوری که هیچکدام زیرمجموعه دیگری نباشند پیدا کنید. (۱۹۹۸)

پاسخ.  $252 = \binom{10}{5}$  □

سوال ۵. ۴ جعبه با گنجایش ۳ و ۵ و ۷ و ۸ داریم. به چند طریق میتوانیم ۱۹ توپ یکسان را درون این جعبه‌ها قرار دهیم؟

پاسخ.  $34 = \binom{13}{3} - 1$  □

سوال ۶. به چند طریق میتوان ۱۰ نفر را در ۸ اتاق متمایز تقسیم کرد به طوری که در هر اتاق دست کم یک نفر قرار گیرد؟

پاسخ.  $30240000 = \frac{1}{4} \times 8! \times \binom{8}{4} + \binom{8}{2} \times 8! \times \binom{1}{2}$  □

سوال ۷. در یک جدول ۳ در ۳ دو خانه را آبی و دو خانه را قرمز رنگ کرده‌ایم بطوریکه خانه‌های هم‌رنگ در یک سطر یا یک ستون نیستند. به چند طریق میتوان این رنگ‌آمیزی را انجام داد؟

پاسخ.  $198 = 11 \times 18$  □

سوال ۸. به چند طریق میتوان اعداد ۰ تا ۹ را ردیفی نوشت بطوریکه اعداد فرد بصورت صعودی و اعداد زوج بصورت نزولی باشند؟

پاسخ.  $252 = \binom{10}{5}$  □

سوال ۹. به چند طریق میتوان ۷ توپ سفید و ۷ توپ قرمز را داخل ۷ جعبه گذاشت بطوریکه در هر جعبه دقیقاً ۲ توپ باشد.

پاسخ.  $393 = 1 + \frac{7!}{3!3!} + \frac{7!}{4!3!2!}$  □

سوال ۱۰. چند جایگشت از اعداد یک تا ۵ وجود دارد بطوریکه  $k$  عدد اول دنباله مجموعه‌ی  $1, 2, \dots, k$  نباشد. ( $k < 5$ )

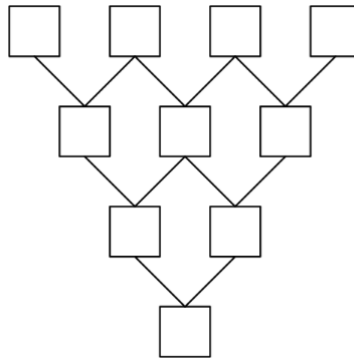
پاسخ.  $f(n) = n! - f(n-1)/1! - f(n-2)/2! - \dots - f(1)/(n-1)!$  □

$f(5) = 71$  □

سوال ۱۱. ۶ کارت با ارقام ۱، ۱، ۳، ۴، ۴، ۵ داریم. به ترتیب سه کارت از آنها را میکشیم و به ترتیب کشیده شده با آنها یک عدد سه رقمی تشکیل میدهیم. احتمال بخش‌پذیر بودن این عدد بر ۳ چقدر است؟

پاسخ.  $\frac{36}{180} = \frac{1}{5}$  □

سوال ۱۲. اعداد را داخل مربعها به گونه‌ای قرار داده‌ایم که هر خانه برابر تفاضل دو خانه بالای سرش است. حداکثر مقدار برای خانه پایینی چقدر است؟



پاسخ. ۴ □

سوال ۱۳. ۳۰ توپ در ۴ ظرف  $A, B, C, D$  پخش شده‌اند به طوری که جمع تعداد توپ‌های  $A$  و  $B$  بیشتر از جمع تعداد توپ‌های داخل  $C$  و  $D$  است. به چند طریق میتوان اینکار را انجام داد؟

پاسخ.  $2600 = 256 - \binom{33}{3}$  □

سوال ۱۴.  $A, B, C$  در یک تورنمنت بازی میکنند به طوری که ابتدا  $A$  و  $B$  با یکدیگر بازی میکنند و برنده با  $C$  بازی میکند. در هر مرحله فردی که بیرون نشسته با برنده بازی، بازی میکند. اگر یک نفر دو بازی متوالی برنده شود قهرمان میشود. احتمال قهرمان شدن  $C$  را بدست آورید.

پاسخ.  $p = \frac{2}{7} \Rightarrow p = \frac{1}{7}(\frac{1}{7} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{7}p)$  □

سوال ۱۵. اگر هر زیرمجموعه‌ی  $k$  تایی از مجموعه‌ی  $S = \{1, 2, 3, \dots, 32\}$  سه عضو داشته باشد که به ترتیب یکدیگر را عاد میکنند، آنگاه  $k$  حداقل چند است؟

پاسخ. ۲۵ □

سوال ۱۶. چند عدد ۵ رقمی با ارقام فرد داریم به طوری که حداقل یک جفت متوالی از ارقام حاصل جمع برابر با ۱۰ داشته باشند؟

پاسخ.  $1845 = 1280 - 3125 = 5^4 - 5^5$  □

سوال ۱۷. در هر مرحله جای دوتا عدد مختلف از دنباله‌ی ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷ را عوض میکنیم. بعد از دو مرحله به چند جایگشت متفاوت میتوانیم برسیم؟

پاسخ.  $176 = 1 + 70 + 105$  □

سوال ۱۸. ۳۱ نفر دور یک دایره نشسته‌اند. به چند طریق میتوان سه نفر انتخاب کرد به طوری که بین هر دو نفر انتخاب شده حداقل ۴ نفر باشند؟

پاسخ.  $1581 = \frac{1}{3} \times 31 \times \binom{18}{2}$  □

سوال ۱۹. ۷ توپ در یک ردیف داریم. به چند طریق میتوان این توپ‌ها را با سه رنگ قرمز، آبی یا سیاه رنگ کنیم به طوری که دو سیاه متوالی نداشته باشیم؟

پاسخ.  $a_7 = 1224, a_{n-2} + 2a_{n-1} = a_n$  □

سوال ۲۰. ۷ توپ در یک ردیف را با به گونه‌ای رنگ کرده‌ایم که ۲ توپ سفید، ۲ توپ آبی و ۳ توپ قرمز هستند. احتمال اینکه دو توپ متوالی سفید یا دو توپ متوالی آبی داشته باشیم چقدر است؟

پاسخ.  $\frac{1}{31} = \frac{1}{31}$  □

سوال ۲۱. به چند طریق میتوان ۱۷ توپ قرمز یکسان و ۱۰ توپ سفید یکسان را در ۴ جعبه متفاوت قرار داد به طوری که در هر جعبه تعداد توپ‌های قرمز از سفید بیشتر باشد؟

پاسخ.  $5720 = \binom{17}{4} \cdot \binom{13}{0}$  □

سوال ۲۲. ۱۶ توپ سفید و ۴ توپ قرمز متفاوت را در ۴ جعبه متفاوت قرار می‌دهیم، به گونه‌ای که در هر جعبه ۵ توپ باشد. احتمال اینکه در هر جعبه دقیقاً یک توپ قرمز باشد چقدر است؟

پاسخ.  $\frac{5^4}{\binom{4}{4}} = \frac{125}{96}$  □

سوال ۲۳. چند عدد ۱۰ رقمی متشکل از ۱، ۲، ۳ داریم به طوری که رقم اول و آخر یکسان باشند و هیچ دو رقم مجاوری یکسان نباشند.

پاسخ.  $3(64 + 80 + 24 + 2) = 510$  □

سوال ۲۴. به چند طریق میتوان دو زیرمجموعه‌ی متفاوت از  $\{1, 2, \dots, 7\}$  انتخاب کرد به طوری که یکی شامل دیگری باشد؟

پاسخ.  $3^7 - 2^7 = 2059$  □

## ۲۰۰۱

سوال ۲۵. چند عدد پنج رقمی با ارقام فرد وجود دارد به طوریکه حداقل یک جفت رقم متوالی با جمع ۱۰ داشته باشد.

پاسخ.  $5^5 - 5 \cdot 4^4 = 3125 - 1280 = 1845$  □

سوال ۲۶. در هر مرحله جای دو تا از اعداد در جایگشت ۱، ۲، ...، ۷ را جایشان را عوض می‌کنیم. بعد از دو مرحله به چند جایگشت متفاوت می‌توانیم برسیم؟

پاسخ.  $105 + 70 + 1 = 176$  □