سوال ۱. به چند طریق میتوان یک مجموعه‌ی ۶ عضوی را به ۳ زیرمجموعه افراز کرد؟

پاسخ. ۹۰ □

سوال ۲. به چند طریق میتوانیم اعداد ۱ تا ۶ را روی وجوه تاس بنویسیم به طوری که اعداد متوالی یک یال مشترک داشته باشند؟

پاسخ. ۱۰ □

سوال ۳. ۱۲ زوج دور یک دایره نشسته اند به طوری که تمامی مردها در کنار یکدیگر هستند و هرفرد دقیقا روبروی همسر خود قرار دارد. حداقل تعداد جابه‌جایی‌های افراد مجاور برای اینکه زوج‌ها کنار یکدیگر باشند.

پاسخ. ۶۶ □

سوال ۴. حداکثر تعداد زیرمجموعه‌های $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ را به طوری که هیچکدام زیرمجموعه دیگری نباشند پیدا کنید.(۱۹۹۸)

پاسخ. $\binom{۱۰}{۵}$ □

سوال ۵. ۴ جعبه با گنجایش ۳ و ۵ و ۷ و ۸ داریم. به چند طریق میتوانیم ۱۹ توپ یکسان را درون این جعبه‌ها قرار دهیم؟

پاسخ. $\binom{۷}{۳} - ۱$ □

سوال ۶. به چند طریق میتوان ۱۰ نفر را در ۸ اتاق متمایز تقسیم کرد به طوری که در هر اتاق دست کم یک نفر قرار گیرد؟

پاسخ. $\binom{۱۰}{۳} \times ۸! + \binom{۱۰}{۲} \times \binom{۸}{۲} \times ۸! \times \frac{۱}{۲}$ □

سوال ۷. در یک جدول ۳ در ۳ دو خانه را آبی و دو خانه را قرمز رنگ کرده‌ایم بطوریکه خانه‌های همرنگ در یک سطر یا یک ستون نیستند. به چند طریق میتوان این رنگ‌آمیزی را انجام داد؟

پاسخ. ۱۸×۱۱ □

سوال ۸. به چند طریق میتوان اعداد ۰ تا ۹ را ردیفی نوشت بطوریکه اعداد فرد بصورت صعودی و اعداد زوج بصورت نزولی باشند؟

پاسخ. $\binom{۱۰}{۵}$ □

سوال ۹. به چند طریق میتوان ۷ توپ سفید و ۷ توپ قرمز را داخل ۷ جعبه گذاشت بطوریکه در هر جعبه دقیقا ۲ توپ باشد.

پاسخ. $\frac{۷!}{۳!۳!} + \frac{۷!}{۲!۳!۲!} + \frac{۷!}{۵!} + ۱ = ۳۹۳$ □

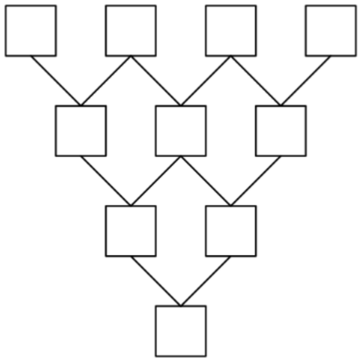
سوال ۱۰. چند جایگشت از اعداد یک تا ۵ وجود دارد بطوریکه k عدد اول دنباله مجموعه‌ی $۱, ۲, \ldots, k$ نباشد. $(k < ۵)$

پاسخ. $f(n) = n! - f(n-۱)/۱! - f(n-۲)/۲! - \cdots - f(۱).(n-۱)!$
$f(۵) = ۷۱$ □

سوال ۱۱. ۶ کارت با ارقام ۱، ۱، ۳، ۴، ۴، ۵ داریم. به ترتیب سه کارت از آنها را میکشیم و به ترتیب کشیده شده با آنها یک عدد سه رقمی تشکیل میدهیم. احتمال بخش‌پذیر بودن این عدد بر ۳ چقدر است؟

پاسخ. $\frac{۳۶}{۱۸۰} = \frac{۱}{۵}$ □

سوال ۱۲. اعداد را داخل مربعها به گونه‌ای قرار داده‌ایم که هر خانه برابر تفاضل دو خانه بالای سرش است. حداکثر مقدار برای خانه پایینی چقدر است؟



پاسخ. ۴ □

سوال ۱۳. ۳۰ توپ در ۴ ظرف A, B, C, D پخش شده‌اند به طوری که جمع تعداد توپ‌های A و B بیشتر از جمع تعداد توپ‌های داخل C و D است. به چند طریق میتوان اینکار را انجام داد؟

پاسخ. $\binom{۳۳}{۳} - ۲۵۶ = ۲۶۰۰$ □

سوال ۱۴. A, B, C در یک تورنومنت بازی میکنند به طوری که ابتدا A و B با یکدیگر بازی میکنند و برنده با C بازی میکند. در هر مرحله فردی که بیرون نشسته با برنده‌ی بازی، بازی میکند. اگر یک نفر دو بازی متوالی برنده شود قهرمان میشود. احتمال قهرمان شدن C را بدست آورید.

پاسخ. $p = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}p) \implies p = \frac{۲}{۷}$ □

سوال ۱۵. اگر هر زیرمجموعه‌ی kتایی از مجموعه‌ی $S = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۳۲\}$ سه عضو داشته باشد که به ترتیب یکدیگر را عاد میکنند، آنگاه k حداقل چند است؟

پاسخ. ۲۵ □

سوال ۱۶. چند عدد ۵ رقمی با ارقام فرد داریم به طوری که حداقل یک جفت متوالی از ارقام حاصل جمع برابر با ۱۰ داشته باشند؟

پاسخ. $۵^۵ - ۵ \times ۴^۴ = ۳۱۲۵ - ۱۲۸۰ = ۱۸۴۵$ □

سوال ۱۷. در هر مرحله جای دوتا عدد مختلف از دنباله‌ی $۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷$ را عوض میکنیم. بعد از دو مرحله به چند جایگشت متفاوت میتوانیم برسیم؟

پاسخ. $۱۰۵ + ۷۰ + ۱ = ۱۷۶$ □

سوال ۱۸. ۳۱ نفر دور یک دایره نشسته‌اند. به چند طریق میتوان سه نفر انتخاب کرد به طوری که بین هر دو نفر انتخاب شده حداقل ۴ نفر باشند؟

پاسخ. $\binom{۱۸}{۲} \times ۳۱ \times \frac{۱}{۳} = ۱۵۸۱$ □

سوال ۱۹. ۷ توپ در یک ردیف داریم. به چند طریق میتوان این توپ‌هارو با سه رنگ قرمز، آبی یا سیاه رنگ کنیم به طوری که دو سیاه متوالی نداشته باشیم؟

پاسخ. $a_n = ۲a_{n-۱} + ۲a_{n-۲}, ۱۲۲۴$ □

سوال ۲۰. ۷ توپ در یک ردیف را با به گونه‌ای رنگ کرده‌ایم که ۲ توپ سفید، ۲ توپ آبی و ۳ توپ قرمز هستند. احتمال اینکه دو توپ متوالی سفید یا دو توپ متوالی آبی داشته باشیم چقدر است؟

پاسخ. $\frac{۱۰۰}{۲۱۰}$ □

سوال ۲۱. به چند طریق میتوان ۱۷ توپ قرمز یکسان و ۱۰ توپ سفید یکسان را در ۴ جعبه متفاوت قرار داد به طوری که در هر جعبه تعداد توپ‌های قرمز از سفید بیشتر باشد؟

پاسخ. $\binom{۱۳}{۳}\cdot\binom{۶}{۳} = ۵۷۲۰$. □

سوال ۲۲. ۱۶ توپ سفید و ۴ توپ قرمز متفاوت را در ۴ جعبه متفاوت قرار میدهیم، به گونه‌ای که در هر جعبه ۵ توپ باشد. احتمال اینکه در هر جعبه دقیقا یک توپ قرمز باشد چقدر است؟

پاسخ. $\frac{۵^۴}{\binom{۲۰}{۴}}$ □

سوال ۲۳. چند عدد ۱۰ رقمی متشکل از ۱, ۲, ۳ داریم به طوری که رقم اول و آخر یکسان باشند و هیچ دو رقم مجاوری یکسان نباشند.

پاسخ. $۳(۶۴ + ۸۰ + ۲۴ + ۲) = ۵۱۰$ □

سوال ۲۴. به چند طریق میتوان دو زیرمجموعه‌ی متفاوت از $\{۱, ۲, \ldots, ۷\}$ انتخاب کرد به طوری که یکی شامل دیگری باشد؟

پاسخ. $۳^۷ - ۲^۷ = ۲۰۵۹$ □

۲۰۰۱

سوال ۲۵. چند عدد پنج رقمی با ارقام فرد وجود دارد به طوریکه حداقل یک جفت رقم متوالی با جمع ۱۰ داشته باشد.

پاسخ. $۵^۵ - ۵\cdot ۴^۴ = ۳۱۲۵ - ۱۲۸۰ = ۱۸۴۵$ □

سوال ۲۶. در هر مرحله جای دو تا از اعداد در جایگشت $۱, ۲, \ldots, ۷$ را جایشان را عوض می‌کنیم. بعد از دو مرحله به چند جایگشت متفاوت می‌توانیم برسیم؟

پاسخ. $۱۰۵ + ۷۰ + ۱ = ۱۷۶$ □