

سلام. برای اینکه مستقیم جواب سوال برآتون اسپویل نشه تصمیم گرفتم جواب سوالا رو به صورت مستقیم نذارم داخل تمرین. برای هر سوال اگر به جواب رسیدید، اون عدد رو داخل یکی از سایتها بایی که پایین اشاره کردم وارد کنید و ۵ حرف اول رو با جوابی که پایین بهتون داده شده مقایسه کنید. لطفا کلک نزنید و از ایده‌های هوشمندانه مانند حفظ کردن هش اعداد استفاده نکنید. دقت کنید که هش‌ها نسبت به اسپیس اضافه و اینتر زدن حساسن، پس فقط خود عدد رو وارد کنید تا هش درستی بهتون داده بشه. به علاوه برای سوالات کسری، تا جای ممکن کسر رو ساده کنید و با صورت و مخرجی که دادم مقایسه کنید. سایتها بایی که میتوانید استفاده کنید:

<https://tools.keycdn.com/sha256-online-generator>

سوال ۱. به چند طریق میتوان یک مجموعه‌ی ۶ عضوی را به ۳ زیرمجموعه افزای کرد؟

پاسخ. ۹۰ □

سوال ۲. به چند طریق میتوانیم اعداد ۱ تا ۶ را روی وجهه تاس بنویسیم به طوری که اعداد متوالی یک یا ل مشترک داشته باشند؟

پاسخ. ۱۰ □

سوال ۳. ۱۲ زوج دور یک دایره نشسته اند به طوری که تمامی مردها در کنار یکدیگر هستند و هر فرد دقیقاً رو بروی همسر خود قرار دارد. حداقل تعداد جایه‌جایی‌های افراد مجاور برای اینکه زوج‌ها کنار یکدیگر باشند.

پاسخ. ۶۶ □

سوال ۴. حداقل تعداد زیرمجموعه‌های $\{1, 2, \dots, 10\}$ را به طوری که هیچ‌کدام زیرمجموعه دیگری نباشند پیدا کنید. (۱۹۹۸)

پاسخ. $252 = 5^{\binom{10}{2}}$ □

سوال ۵. ۴ جعبه با گنجایش ۳ و ۵ و ۷ و ۸ داریم. به چند طریق میتوانیم ۱۹ توب یکسان را درون این جعبه‌ها قرار دهیم؟

پاسخ. $34 = 1 - \binom{7}{3}$ □

سوال ۶. به چند طریق میتوان ۱۰ نفر را در ۸ اتاق متمایز تقسیم کرد به طوری که در هر اتاق دست کم یک نفر قرار گیرد؟

پاسخ. $30240000 = \frac{1}{3} \times 8! \times \binom{8}{2} \times \binom{8}{2} \times \binom{8}{2}$ □

سوال ۷. در یک جدول ۳ در ۳ دو خانه را آبی و دو خانه را قرمز رنگ کرده‌ایم بطوریکه خانه‌های همنونگ در یک سطر یا یک ستون نیستند. به چند طریق میتوان این رنگ‌آمیزی را انجام داد؟

پاسخ. $18 \times 11 = 198$ □

سوال ۸. به چند طریق میتوان اعداد ۰ تا ۹ را ردیفی نوشت بطوریکه اعداد فرد بصورت صعودی و اعداد زوج بصورت نزولی باشند؟

پاسخ. $252 = 5^4$ \square

سوال ۹. به چند طریق میتوان ۷ توب سفید و ۷ توب قرمز را داخل ۷ جعبه گذاشت بطوریکه در هر جعبه دقیقاً ۲ توب باشد.

پاسخ. $393 = \frac{7!}{3!3!2!} + \frac{7!}{5!} + 1$ \square

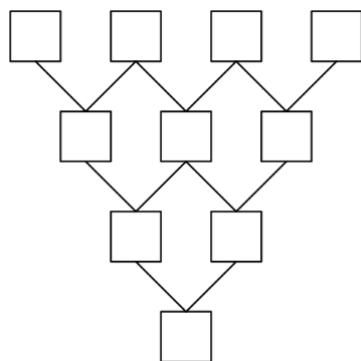
سوال ۱۰. چند جایگشت از اعداد یک تا ۵ وجود دارد بطوریکه k عدد اول دنباله مجموعه‌ی $k, 2, \dots, 1$ نباشد. ($k < 5$)

پاسخ. $f(n) = n! - f(n-1)/1! - f(n-2)/2! - \dots - f(1).(n-1)!$
 $f(5) = 71$ \square

سوال ۱۱. ۶ کارت با ارقام ۱، ۱، ۴، ۴، ۳، ۵ داریم. به ترتیب سه کارت از آنها را میکشیم و به ترتیب کشیده شده با آنها یک عدد سه رقمی تشکیل میدهیم. احتمال بخش پذیر بودن این عدد بر ۳ چقدر است؟

پاسخ. $\frac{36}{180} = \frac{1}{5}$ \square

سوال ۱۲. اعداد را داخل مربعها به گونه‌ای قرار داده‌ایم که هر خانه برابر تفاضل دو خانه بالای سرش است. حداکثر مقدار برای خانه پایینی چقدر است؟



پاسخ. ۴ \square

سوال ۱۳. ۳۰ توب در ۴ ظرف A, B, C, D پخش شده‌اند به طوری که جمع تعداد توب‌های A و B بیشتر از جمع تعداد توب‌های داخل C و D است. به چند طریق میتوان اینکار را انجام داد؟

پاسخ. $2600 = 256 - 3^3$ \square

سوال ۱۴. A, B, C در یک تورنومنت بازی میکنند به طوری که ابتدا A و B با یکدیگر بازی میکنند و برنده با C بازی میکنند. در هر مرحله فردی که بیرون نشسته با برنده‌ی بازی، بازی میکند. اگر یک نفر دو بازی متوالی برنده شود قهرمان میشود. احتمال قهرمان شدن C را بدست آورید.

پاسخ. $p = \frac{2}{7} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} p \right) \Rightarrow p = \frac{2}{7}$ \square

سوال ۱۵. اگر هر زیرمجموعه‌ی k تایی از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 32\} = S$ سه عضو داشته باشد که به ترتیب یکدیگر را عاد میکنند، آنگاه k حداقل چند است؟

پاسخ. ۲۵ \square

سوال ۱۶. چند عدد ۵ رقمی با ارقام فرد داریم به طوری که حداقل یک جفت متولی از ارقام حاصل جمع برابر با ۱۰ داشته باشند؟

$$\text{پاسخ. } 1845 = 1280 - 5 \times 4^4 = 3125 - 5^5 \square$$

سوال ۱۷. در هر مرحله جای دوتا عدد مختلف از دنباله‌ی $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ را عوض میکنیم. بعد از دو مرحله به چند جایگشت متفاوت میتوانیم برسیم؟

$$\text{پاسخ. } 105 + 70 + 1 = 176 \square$$

سوال ۱۸. ۳۱ نفر دور یک دایره نشسته‌اند. به چند طریق میتوان سه نفر انتخاب کرد به طوری که بین هر دو نفر انتخاب شده حداقل ۴ نفر باشند؟

$$\text{پاسخ. } 1581 = \frac{1}{3} \times 31 \times 18 \square$$

سوال ۱۹. ۷ توب در یک ردیف داریم. به چند طریق میتوان این توب‌هارو با سه رنگ قرمز، آبی یا سیاه رنگ کنیم به طوری که دو سیاه متولی نداشته باشیم؟

$$\text{پاسخ. } a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}, a_7 = 1224 \square$$

سوال ۲۰. ۷ توب در یک ردیف را با به گونه‌ای رنگ کرده‌ایم که ۲ توب سفید، ۲ توب آبی و ۳ توب قرمز هستند. احتمال اینکه دو توب متولی سفید یا دو توب متولی آبی داشته باشیم چقدر است؟

$$\text{پاسخ. } \frac{1}{21} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} \square$$

سوال ۲۱. به چند طریق میتوان ۱۷ توب قرمز یکسان و ۱۰ توب سفید یکسان را در ۴ جعبه متفاوت قرار داد به طوری که در هر جعبه تعداد توب‌های قرمز از سفید بیشتر باشد؟

$$\text{پاسخ. } 5720 = 4 \cdot 13 \square$$

سوال ۲۲. ۱۶ توب سفید و ۴ توب قرمز متفاوت را در ۴ جعبه متفاوت قرار میدهیم، به گونه‌ای که در هر جعبه ۵ توب باشد. احتمال اینکه در هر جعبه دقیقاً یک توب قرمز باشد چقدر است؟

$$\text{پاسخ. } \frac{5^4}{969} = \frac{125}{24} \square$$

سوال ۲۳. چند عدد ۱۰ رقمی متشکل از $1, 2, 3$ داریم به طوری که رقم اول و آخر یکسان باشند و هیچ دو رقم مجاوری یکسان نباشند.

$$\text{پاسخ. } 510 = 3(64 + 80 + 24 + 2) \square$$

سوال ۲۴. به چند طریق میتوان دو زیرمجموعه‌ی متفاوت از $\{1, 2, \dots, 7\}$ انتخاب کرد به طوری که یکی شامل دیگری باشد؟

$$\text{پاسخ. } 2059 = 2^7 - 2^7 \square$$

۲۰۰۱

سوال ۲۵. چند عدد پنج رقمی با ارقام فرد وجود دارد به طوریکه حداقل یک جفت رقم متوالی با جمع ۱۰ داشته باشد.

پاسخ. $1845 = 3125 - 1280 - 5 \cdot 4^4$

□

سوال ۲۶. در هر مرحله جای دو تا از اعداد در جایگشت $1, 2, \dots, 7$ را جایشان را عوض می‌کنیم. بعد از دو مرحله به چند جایگشت متفاوت می‌توانیم بررسیم؟

پاسخ. $105 + 70 + 1 = 176$

□

سوال ۲۷. یک پلکان داریم که در ردیف اول ۱۰ مربع دارد، در ردیف دوم ۹ مربع و ... در ردیف دهم ۱ مربع دارد. چند زیر مستطیل در این پلکان وجود دارد؟

پاسخ. ۷۱۵

□

سوال ۲۸. صادق یک عدد دو رقمی را مدنظر دارد. در هر مرحله میتوانیم یک عدد دو رقمی را حدس بزنیم و صادق به ما تعداد رقم‌هایی که درست حدس زدیم را می‌گوید. حداقل به چند حدس نیاز داریم تا عدد مورد نظر را پیدا کنیم؟

پاسخ. ۱۰

□

سوال ۲۹. دور یک دایره ۵ شهر با فاصله‌های $4, 1, 5, 2, 5$ هستند. میخواهیم بیمارستانی احداث کنیم که فاصله‌اش از دورترین شهر حداقل باشد. چند جا میتوانیم این بیمارستان را نصب کنیم؟ (در نقطه‌ای صحیح باید احداث شود)

پاسخ. ۲

□

۲۰۰۲

سوال ۳۰. در یک سینما، ده ردیف صندلی وجود دارد و در هر ردیف ۱۰ صندلی. چقدر احتمال دارد دو دوست بدون هماهنگی قبلی صندلی‌های مجاور بخرند؟

پاسخ. $\frac{1}{55}$

□

سوال ۳۱. کلیدهای یک گاو‌صندوق با پنج قفل را کپی زدیم و بین ۸ نفر تقسیم کردیم به طوریکه با کلیدهای هر ۵ نفر از این ۸ نفر میتوان گاو‌صندوق را باز کرد. حداقل تعداد کلیدها را پیدا کنید.

پاسخ. ۲۵

□

سوال ۳۲. اعداد $N, \dots, 2, 1$ دور دایره چیده شده‌اند به گونه‌ای که هر دو عدد متوالی یک رقم یکسان در نمایش ده دهی خود دارند. حداقل مقدار N را بیابید.

پاسخ. ۲۹

□

سوال ۳۳. به ازای هر $i = 0, 1, 2, \dots$ ، تعداد ۸ توپ با وزن 2^i داریم. داخل هر جعبه میتوانیم هرچقدر که بخواهیم توپ بگذاریم به طوریکه وزن جعبه‌ها یکسان باشد. حداکثر تعداد جعبه‌ها را بیابید.

پاسخ. ۱۵ □

۲۰۰۳

سوال ۳۴. حداکثر چند عدد طبیعی کمتر از ۵۱ می‌توان یافت طوریکه هیچ‌کدام مضرب ۳ دیگری نباشد.

پاسخ. ۳۸ □

سوال ۳۵. تعداد صفرهای سمت راست عدد $!2000$ را بدست آورید.

پاسخ. ۴۹۹ □

سوال ۳۶. احتمال رخداد یک جایگشت از کلمه‌ی ABRAKADABRA به طوریکه قبل از اولین A هیچ B رخنداده باشد.

پاسخ. $\frac{5}{7}$ □

سوال ۳۷. دو تیم استقلال و پرسپولیس هردو وارد یک تورنومنت تک حذفی ۱۶ تیمه شده‌اند. احتمال برد هر تیم در هر مرحله $\frac{1}{2}$ است. احتمال اینکه در این تورنومنت یک بازی استقلال پرسپولیس داشته باشیم چقدر است؟

پاسخ. $\frac{1}{8}$ □

سوال ۳۸. ۲۰۰۳ نقطه در صفحه داریم. نقطه‌ی وسط پاره خط واصل هر دو تایی را علامت می‌زنیم. حداقل چند نقطه علامت می‌خورند؟

پاسخ. ۴۰۰۳ □

سوال ۳۹. وزن ۹ توپ با رنگ‌های متفاوت اعداد $9, 2, 1$ است. اما ما نمیدانیم کدام یک چه وزنی دارد. یک ترازوی دو کفه‌ای داریم که کفه‌ی سنگین‌تر را نشان می‌دهد و تفاضل دو کفه را نیز به ما میدهد. حداقل چند بار نیاز به استفاده از ترازو داریم تا بتوانیم وزن همه توپ‌ها را بدانیم؟
??????

پاسخ. ۱ □