

دانشکدهٔ ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

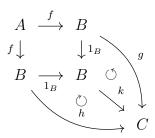
آزمون پایانی درس روشهای جبری و همجبری در علوم کامپیوتر

شنبه، ۲۹ دی ۱۴۰۳ - ساعت ۱۰ مدّت آزمون: ۴ ساعت

پرسش ۱. فرض کنید $f:A\to B$ یک مورفیسم در کتگوری $\mathbb C$ باشد. نشان دهید $f:A\to B$ اپی مورفیسم است اگر و تنها اگر مربّع زیر pushout باشد.

 $\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{f} & B \\
f \downarrow & & \downarrow 1 \\
B & \xrightarrow{1} & B
\end{array}$

و $A \stackrel{f}{\longrightarrow} B \stackrel{g}{\Longrightarrow} C$ کنید مربّع داده شده pushout باشد. همچنین فرض کنید مربّع داده شده pushout یاسخ: فرض کنید مربّع داده شده pushout داشته باشیم gf = hf یکتا وجود دارد به طوری که



جابه جا شود. در نتیجه g=k=h. پس f اپی مورفیسم است. g=k=h دلخواه برای جهت عکس، فرض کنید $f,g:B\to C$ و $f,g:B\to C$ دلخواه دیاگرام زیر جابه جایی باشد.

$$\begin{array}{cccc}
A & \xrightarrow{f} & B \\
f \downarrow & & \downarrow^{1_B} & g \\
B & \xrightarrow{1_B} & B & \downarrow \\
& & & \downarrow^{h} & C
\end{array}$$

از تعریف اپیمورفیسم داریم g=h در نتیجه مورف g=g در ویژگی g=g و g=g و یکتا g=g است.

پرسش ۲. فرض کنید E یک رابطهٔ هم ارزی روی مجموعهٔ X باشد. X/E را به مثابه یک هم –یکسانساز (coequalizer) توصیف کنید.

پاسخ: فرض کنید $E\subseteq X\times X$ یک رابطهٔ هم ارزی روی X، X دوی X نگاشت شمول آن و $u(x)=[x]_E$ مورفهای تصویر باشند. همچنین $u(x)=[x]_E$ را به صورت $u(x)=[x]_E$ تعریف کنید. نشان می دهیم x به همراه مورف x هم یکسانساز دیاگرام

$$E \stackrel{p_1i}{\Longrightarrow} X$$

 $f: X \to Y$ و Y حال فرض کنید $up_1i = up_2i$ حال است. بنا به تعریف کلاس هم ارزی واضح است که $up_1i = up_2i$ حال هم اور $f(x_1) = f(x_2)$ داریم $f(x_1) = f(x_2)$ داریم واضح باشیم به قسمی که $f(x_1) = f(x_2)$ بعنی برای هم $f(x_1) = f(x_2)$ داریم است و داریم نتیجه، تابع $f'(x_1) = f(x_2)$ که به صورت $f'(x_1) = f(x_2)$ تعریف می شود خوش تعریف است و داریم نتیجه، $f'(u(x_1)) = f(x_2)$ بیس u یک هم-یکسان ساز برای u و u است.

پرسش ۳. فرض کنید $\mathbb{C} \xrightarrow[I]{F} \mathbb{C}$ و $\mathbb{C} \times X: I \to \mathbb{C}$ و جود داشته باشد.

.CoCone $(F \circ X, Z) \cong \mathbf{CoCone}(X, U(Z))$ نشان دهید (آ)

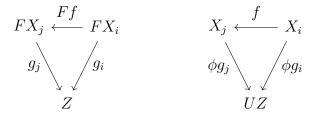
(ب) ثابت کنید
$$F\circ X:I\to \mathbb{D}$$
 هم حد دیاگرام $F\circ X:I\to \mathbb{D}$ است.

پاسخ:

 $Z \in \mathbb{D}_0$ و $W \in \mathbb{C}_0$ اگر adjunction اگر

$$\phi: Hom_{\mathbb{D}}(FW, Z) \cong Hom_{\mathbb{C}}(W, UZ)$$

حال اگر نشان دهیم برای هر دو شئ در تصویر $F\circ X$ که با Z تشکیل CoCone میدهد، معادلا دو شئ در \mathbb{C} با \mathbb{C} تشکیل CoCone میدهند، آنگاه این تناظر اثبات میشود. برای اینکار از یکریختی طبیعی ϕ استفاده میکنیم. فرض کنید \mathbb{C} با \mathbb{C} با شند به طوری که \mathbb{C} با \mathbb{C} با \mathbb{C} با تشکیل CoCone دهند:



حال با فرض جابه جایی بودن مثلث سمت چپ (۱) نشان میدهیم مثلث سمت راست جابه جایی است. طبق طبیعی بودن ϕ داریم:

$$Hom_{\mathbb{C}}(X_{j},UZ) \xrightarrow{\phi^{-1}} Hom_{\mathbb{D}}(FX_{j},Z)$$

$$Hom_{\mathbb{C}}(f,-) \downarrow \qquad \qquad \downarrow Hom_{\mathbb{D}}(Ff,-)$$

$$Hom_{\mathbb{C}}(X_{i},UZ) \xrightarrow{\phi^{-1}} Hom_{\mathbb{D}}(FX_{i},Z)$$

و به دلیل یکریختی بودن ϕ برای $\phi(g_j) \in Hom_{\mathbb{C}}(X_j,UZ)$ از مربع جابه جایی بالا داریم:

$$\phi(g_j)\circ f=(\phi\circ Hom_{\mathbb{D}}(Ff,-)\circ\phi^{-1})(\phi(g_j))$$
 (طبق طبیعی بودن)
$$=\phi\circ Hom_{\mathbb{D}}(Ff,-)(g_j)$$

$$=\phi(g_j\circ Ff)$$
 ((۱)) طبق (۱))
$$=\phi(g_i)$$

پس مثلث دوم هم جابه جایی شد. از طرفی این تناظر به کمک ϕ تعریف شده بود. پس یکریختی است. حال هر CoCone از تعدادی از این مثلثها تشکیل شده. بدیهی است که متناظر هر CoCone هم مجموعه ی تناظر یافته ی مثلثهایش است. پس داریم:

$$\mathbf{CoCone}(F\circ X,Z)\cong\mathbf{CoCone}(X,UZ)$$

(ب) ابتدا نشان ميدهيم الحاق چپ، همحد را حفظ ميكند:

$$Hom_{\mathbb{D}}(F(\varinjlim_{i \in I} X_{i}), Z) \cong Hom_{\mathbb{C}}(\varinjlim_{i \in I} X_{i}, UZ)$$

$$\cong \varinjlim_{i \in I} Hom_{\mathbb{C}}(X_{i}, UZ)$$

$$\cong \varinjlim_{i \in I} Hom_{\mathbb{D}}(FX_{i}, Z)$$

$$\cong Hom_{\mathbb{D}}(\varinjlim_{i \in I} FX_{i}, Z)$$

كه طبق يوندا داريم:

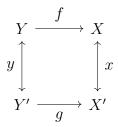
$$F(\varinjlim_{i\in I}X_i)=\varinjlim_{i\in I}FX_i$$
 که تعریف هم حد دیاگرام $F\circ X:I o \mathbb{D}$ است.

پرسش ۴. تعریف کنید ullet \Rightarrow ullet : 2 کتگوری پیشبافههای 2 را به صورت $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{Set}^{2^{op}}$ تعریف می کنیم.

- (آ) یک توصیف دقیق از $\hat{2}$ ارائه دهید. (ب) ثابت کنید $\hat{2}$ یک توپوس است.
 - است. کنید $Sub(\hat{\mathbf{2}})$ یک جبر هیتینگ است.

پاسخ:

(آ) هر عضو از 2 یک فانکتور از 2 به Set است. از آنجایی که دو عضو ابتدایی در 2 یکریخت هستند، پس به اشیای یکریختی نیز در Set میروند. و مورفهای بین آنها نیز به یک همریختی و وارون آن میروند. از طرفی به هر مورف همریختی در Set میتوان یک فانکتور نسبت داد که 2 را به آن همریختی میبرد. پس هر فانکتور تنها با یک یکریختی در Set مشخص میشود. پس درواقع 2 کتگوری تمام میبرد. پس درواقع 2 کتگوری تمام یکریختیهای (توابع ۱-۱ و پوشا) داخل Set است. مورفهای 2 هم تمام تبدیلات طبیعی بین این فانکتورها هستند. هر تبدیل هم معادل یک جفت تابع بین اشیای یکریخت است که دیاگرام جابه جایی شود:



که در آن x و y توابعی یک به یک پوشا هستند (وارون دارند) و با تعیین کردن f، تابع g به صورت یکتا مشخص میشود به طوری که دیاگرام بچرخد.

(ب)

(پ)

 $U: \mathbb{C} \to \mathbb{X}$ پرسش ۵. فرض کنید \mathbb{C} یک کتگوری موضعاً کوچک و کامل، \mathbb{X} یک کتگوری دلخواه و \mathbb{X} یک فانکتور حافظ حد باشد. ثابت کنید گزارههای زیر همارز اند:

- است. لحاق چپ است. U
- .II برای هر شیء $\mathbb{X} \in \mathbb{X}$ ، فانکتور U در ویژگی زیر صدق میکند:

شرط مجموعهٔ جواب: مجموعهای از اشیاء مانند $(S_i)_{i\in I}$ در $\mathbb C$ به قسمی وجود دارد که برای هر شیء $ar f:S_i o C$ و هر مورف $X o US_i$ ، $i\in I$ و جود داشته باشد $f:S_i o C$ و G به صورتی که G و G به G و G به مانند G و مانند G و مانند و باید و باید G و مانند و باید و باید و باید و برای هر شیء و برای و برای و برای هر شیء و برای هر شیء و برای هر شیء و برای و برای و برای هر شیء و برای و برای

پرسش ۶. فرض کنید \mathbb{C} یک کتگوری کوچک باشد. برای $P \in \mathbf{Set}^{\mathbb{C}^{op}}$ ثابت کنید

$$\varinjlim_{j \in \int P} yC_j \cong P$$

پاسخ:

پرسش ۷. فرض کنید $\epsilon:1_{\mathbb{D}} \to FU$ و $\eta:UF \to 1_{\mathbb{C}}$ و تبدیلات طبیعی $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \stackrel{F}{\underset{U}{\longrightarrow}} \mathbb{D}$ به ترتیب یکّه و همیکّهٔ الحاق $\mu=U\epsilon_F:T^2 \to T$ و $T=U\circ F:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ نشان . $\mu=U\epsilon_F:T^2 \to T$ و $T=U\circ F:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ نشان دهید (T,η,μ) یک موناد است.

است. $ev_1 \rightarrow C$ داراى الحاق جي است و ev_0 داراى الحاق جي است. $ev_1 \rightarrow C$ داراى الحاق جي است.

پاسخ:

پرسش ۹. کتگوری جبرهای فانکتور $X^2 + X + 1$ را مشخّص کنید. شیء ابتدایی این کتگوری چه ساختار دادهٔ استقرایی ای را تعریف می کند؟ پاسخ: