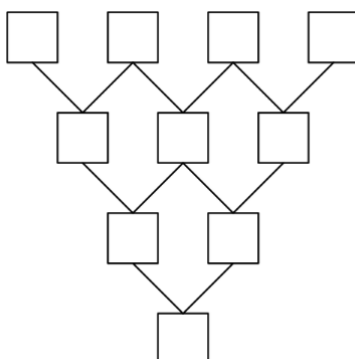


سوال ۱. اعداد را داخل مربعها به گونه‌ای قرار داده‌ایم که هر خانه برابر تفاضل دو خانه بالای سرش است. حداکثر مقدار برای خانه پایینی چقدر است؟



پاسخ. ۴ □

سوال ۲. ۳۰ توپ در ۴ ظرف A, B, C, D پخش شده‌اند به طوری که جمع تعداد توپ‌های A و B بیشتر از جمع تعداد توپ‌های داخل C و D است. به چند طریق میتوان اینکار را انجام داد؟

پاسخ. $2600 = \binom{33}{3} - 256$ □

سوال ۳. A, B, C در یک تورنمنت بازی میکنند به طوری که ابتدا A و B با یکدیگر بازی میکنند و برنده با C بازی میکند. در هر مرحله فردی که بیرون نشسته با برنده‌ی بازی، بازی میکند. اگر یک نفر دو بازی متوالی برنده شود قهرمان میشود. احتمال قهرمان شدن C را بدست آورید.

پاسخ. $p = \frac{2}{5} \Rightarrow p = \frac{1}{5}(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}p)$ □

سوال ۴. اگر هر زیرمجموعه‌ی k تایی از مجموعه‌ی $S = \{1, 2, 3, \dots, 32\}$ سه عضو داشته باشد که به ترتیب یکدیگر را عاد میکنند، آنگاه k حداقل چند است؟

پاسخ. ۲۵ □

سوال ۵. چند عدد ۵ رقمی با ارقام فرد داریم به طوری که حداقل یک جفت متوالی از ارقام حاصل جمع برابر با ۱۰ داشته باشند؟

پاسخ. $1845 = 1280 - 3125 = 5 \times 4^4 - 5^5$ □

سوال ۶. در هر مرحله جای دو تا عدد مختلف از دنباله‌ی $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ را عوض میکنیم. بعد از دو مرحله به چند جایگشت متفاوت میتوانیم برسیم؟

پاسخ. $176 = 1 + 70 + 105$ □

سوال ۷. ۳۱ نفر دور یک دایره نشسته‌اند. به چند طریق میتوان سه نفر انتخاب کرد به طوری که بین هر دو نفر انتخاب شده حداقل ۴ نفر باشند؟

پاسخ. $1581 = \frac{1}{3} \times 31 \times \binom{18}{2}$ □

سوال ۸. ۷ توپ در یک ردیف داریم. به چند طریق میتوان این توپ‌ها را با سه رنگ قرمز، آبی یا سیاه رنگ کنیم به طوری که دو سیاه متوالی نداشته باشیم؟

پاسخ. $1224 = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ □ a_n

سوال ۹. ۷ توپ در یک ردیف را با به گونه‌ای رنگ کرده‌ایم که ۲ توپ سفید، ۲ توپ آبی و ۳ توپ قرمز هستند. احتمال اینکه دو توپ متوالی سفید یا دو توپ متوالی آبی داشته باشیم چقدر است؟

پاسخ. $\frac{1}{3}$ □

سوال ۱۰. به چند طریق میتوان ۱۷ توپ قرمز یکسان و ۱۰ توپ سفید یکسان را در ۴ جعبه متفاوت قرار داد به طوری که در هر جعبه تعداد توپ‌های قرمز از سفید بیشتر باشد؟

پاسخ. $5720 = \binom{17}{3} \cdot \binom{10}{3}$ □

سوال ۱۱. ۱۶ توپ سفید و ۴ توپ قرمز متفاوت را در ۴ جعبه متفاوت قرار می‌دهیم، به گونه‌ای که در هر جعبه ۵ توپ باشد. احتمال اینکه در هر جعبه دقیقاً یک توپ قرمز باشد چقدر است؟

پاسخ. $\frac{5^4}{4!}$ □

سوال ۱۲. چند عدد ۱۰ رقمی متشکل از ۱، ۲، ۳ داریم به طوری که رقم اول و آخر یکسان باشند و هیچ دو رقم مجاور یکسان نباشند.

پاسخ. $3(6^4 + 8^0 + 2^4 + 2) = 510$ □

سوال ۱۳. به چند طریق میتوان دو زیرمجموعه‌ی متفاوت از $\{1, 2, \dots, 7\}$ انتخاب کرد به طوری که یکی شامل دیگری باشد؟

پاسخ. $3^7 - 2^7 = 2059$ □