امین ذوالفقاریان - ۶۱۰۳۰۰۱۱۸

سوال ۱. جانشینی زیر را انجام دهید:

$$(\lambda z.(\lambda x.yx)xz)[x := zx]$$

اثبات.

$$\begin{aligned}(\lambda z.(\lambda x.yx)xz)[x := zx] &\cong (\lambda a.(\lambda b.yb)xa)[x := zx]\\ &= (\lambda a.(\lambda b.yb)zxa)\\ &= (\lambda a.yzxa)\end{aligned}$$

سوال ۲. **(آ)** ترم s را چنان بیابید که برای ترم‌های دلخواه داده شده t و u داشته باشیم:

$$\lambda_\beta \vdash stu = ut$$

(ب) نشان دهید که ترمی مثل s چنان موجود است که برای هر ترم داده شده‌ی t:

$$\lambda_\beta \vdash st = ss$$

اثبات.

(آ) قرار دهید $s = (\lambda xy.yx)$:

$$\begin{aligned}stu &= (\lambda xy.yx)tu\\ &= ut\end{aligned}$$

(ب) قرار دهید $s = (\lambda x.y)$ به طوری که $x \neq y$. دقت کنید که داریم: $(\lambda x.y)s = y$:

$$st = (\lambda x.y)t = y = (\lambda x.y)s = ss$$

سوال ۳. (آ) ثابت کنید برای هر ترم بسته‌ی s، یک ترم بسته‌ی t وجود دارد که:

$$\lambda_\beta \vdash t = ts$$

(ب) ثابت کنید برای هر ترم بسته‌ی s، یک ترم بسته‌ی t' وجود دارد که:

$$\lambda_\beta \vdash t'(\lambda x.x)ss = t's$$

اثبات.

(آ) ترم $F = \lambda x.xS$ را در نظر بگیرید. از آنجایی که S بسته است پس F هم بسته است. از طرفی طبق قضیه نقطه ثابت وجود دارد t به گونه‌ای که داشته باشیم: $Ft = t$. به بیان بهتر:

$$t = Ft = (\lambda x.xS)t = tS$$

تنها باقی میماند که نشان دهیم t بسته است. برای این نیز فرض کنید این نقطه‌ی ثابت با کمک کامبینیتور Y بدست آمده است. در این صورت چون Y و S و F بسته هستند، پس t نیز بسته است.

(ب)