

سوال ۱. به چند طریق میتوان یک مجموعه‌ی ۶ عضوی را به ۳ زیرمجموعه افزایش کرد؟

پاسخ. ۹۰ □

سوال ۲. به چند طریق میتوانیم اعداد ۱ تا ۶ را روی وجهه تاس بنویسیم به طوری که اعداد متولی یک یا مشترک داشته باشند؟

پاسخ. ۱۰ □

سوال ۳. ۱۲ زوج دور یک دایره نشسته اند به طوری که تمامی مردها در کنار یکدیگر هستند و هر فرد دقیقاً روی همسر خود قرار دارد. حداقل تعداد جایه‌جایی‌های افراد مجاور برای اینکه زوج‌ها کنار یکدیگر باشند.

پاسخ. ۶۶ □

سوال ۴. حداکثر تعداد زیرمجموعه‌های $\{1, 2, \dots, 10\}$ را به طوری که هیچکدام زیرمجموعه دیگری نباشند پیدا کنید. (۱۹۹۸)

پاسخ. (۵) □

سوال ۵. ۴ جعبه با گنجایش ۳ و ۵ و ۷ و ۸ داریم. به چند طریق میتوانیم ۱۹ توب یکسان را درون این جعبه‌ها قرار دهیم؟

پاسخ. ۱ - (۷) □

سوال ۶. به چند طریق میتوان ۱۰ نفر را در ۸ اتاق متمایز تقسیم کرد به طوری که در هر اتاق دست کم یک نفر قرار گیرد؟

پاسخ. $\frac{1}{7} \times 8! \times \binom{1}{2} \times \binom{8}{2} + \binom{1}{2} \times 8! \times \binom{1}{3} \times \binom{8}{3}$ □

سوال ۷. در یک جدول ۳ در ۳ دو خانه را آبی و دو خانه را قرمز رنگ کرده‌ایم بطوریکه خانه‌های همنگ در یک سطر یا یک ستون نیستند. به چند طریق میتوان این رنگ‌آمیزی را انجام داد؟

پاسخ. ۱۸ × ۱۱ □

سوال ۸. به چند طریق میتوان اعداد ۰ تا ۹ را ردیفی نوشت بطوریکه اعداد فرد بصورت صعودی و اعداد زوج بصورت نزولی باشند؟

پاسخ. (۵) □

سوال ۹. به چند طریق میتوان ۷ توب سفید و ۷ توب قرمز را داخل ۷ جعبه گذاشت بطوریکه در هر جعبه دقیقاً ۲ توب باشد.

پاسخ. $393 = 1 + \frac{7!}{3!3!} + \frac{7!}{5!} + \frac{7!}{2!2!2!}$ □

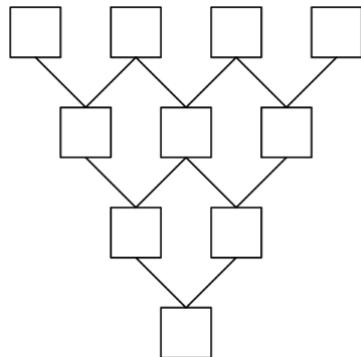
سوال ۱۰. چند جایگشت از اعداد یک تا ۵ وجود دارد بطوریکه k عدد اول دنباله مجموعه‌ی $k, 2, \dots, 1$ نباشد. ($k < 5$)

پاسخ. $f(n) = n! - f(n-1)/1! - f(n-2)/2! - \dots - f(1)/(n-1)! \quad f(5) = 71$ □

سوال ۱۱. ۶ کارت با ارقام ۱، ۱، ۱، ۴، ۴، ۳، ۵ داریم. به ترتیب سه کارت از آنها را میکشیم و به ترتیب کشیده شده با آنها یک عدد سه رقمی تشکیل میدهیم. احتمال بخش پذیر بودن این عدد بر ۳ چقدر است؟

پاسخ. $\square \frac{36}{780} = \frac{1}{20}$

سوال ۱۲. اعداد را داخل مربعها به گونه‌ای قرار داده‌ایم که هر خانه برابر تفاضل دو خانه بالای سرش است. حداکثر مقدار برای خانه پایینی چقدر است؟



پاسخ. $\square 4$

سوال ۱۳. ۳۰ توب در ۴ ظرف A, B, C, D پخش شده‌اند به طوری که جمع تعداد توب‌های A و B بیشتر از جمع تعداد توب‌های داخل C و D است. به چند طریق میتوان اینکار را انجام داد؟

پاسخ. $\square 2600 - 256 = 2344$

سوال ۱۴. A, B, C در یک تورنومنت بازی میکنند به طوری که ابتدا A و B با یکدیگر بازی میکنند و برنده با C بازی میکنند. در هر مرحله فردی که بیرون نشسته با برنده‌ی بازی، بازی میکند. اگر یک نفر دو بازی متوالی برنده شود قهرمان میشود. احتمال قهرمان شدن C را بدست آورید.

پاسخ. $\square p = \frac{2}{7}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{7}p) \implies p = \frac{2}{7}$

سوال ۱۵. اگر هر زیرمجموعه‌ی k تایی از مجموعه‌ی $S = \{1, 2, 3, \dots, 32\}$ سه عضو داشته باشد که به ترتیب یکدیگر را عاد میکنند، آنگاه k حداقل چند است؟

پاسخ. $\square 25$

سوال ۱۶. چند عدد ۵ رقمی با ارقام فرد داریم به طوری که حداقل یک جفت متوالی از ارقام حاصل جمع برابر با ۱۰ داشته باشند؟

پاسخ. $\square 1845 = 1280 - 5 \times 44 = 3125 - 5^5$

سوال ۱۷. در هر مرحله جای دوتا عدد مختلف از دنباله‌ی $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ را عوض میکنیم. بعد از دو مرحله به چند جایگشت متفاوت میتوانیم برسیم؟

پاسخ. $\square 176 = 105 + 70 + 1$

سوال ۱۸. ۳۱ نفر دور یک دایره نشسته‌اند. به چند طریق میتوان سه نفر انتخاب کرد به طوری که بین هر دو نفر انتخاب شده حداقل ۴ نفر باشند؟

پاسخ. $\square 1581 = 31 \times \binom{18}{3}$

سوال ۱۹. ۷ توب در یک ردیف داریم. به چند طریق میتوان این توب‌هارو با سه رنگ قرمز، آبی یا سیاه رنگ کنیم به طوری که دو سیاه متوالی نداشته باشیم؟

پاسخ. $\square a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}, 1224$

سوال ۲۰. ۷ توب در یک ردیف را با به گونه‌ای رنگ کرده‌ایم که ۲ توب سفید، ۲ توب آبی و ۳ توب قرمز هستند. احتمال اینکه دو توب متوالی سفید یا دو توب متوالی آبی داشته باشیم چقدر است؟

پاسخ. $\frac{1}{21} \cdot 13 = 5720$

سوال ۲۱. به چند طریق میتوان ۱۷ توب قرمز یکسان و ۱۰ توب سفید یکسان را در ۴ جعبه متفاوت قرار داد به طوری که در هر جعبه تعداد توب‌های قرمز از سفید بیشتر باشد؟

پاسخ. $5720 = 13 \cdot 64 + 24 + 80 + 24$

سوال ۲۲. ۱۶ توب سفید و ۴ توب قرمز متفاوت را در ۴ جعبه متفاوت قرار میدهیم، به گونه‌ای که در هر جعبه ۵ توب باشد. احتمال اینکه در هر جعبه دقیقاً یک توب قرمز باشد چقدر است؟

پاسخ. $\frac{5^4}{4^5}$

سوال ۲۳. چند عدد ۱۰ رقمی متشکل از ۱, ۲, ۳ داریم که رقم اول و آخر یکسان باشند و هیچ دو رقم مجاوری یکسان نباشند.

پاسخ. $510 = 64 + 80 + 24 + 2$

سوال ۲۴. به چند طریق میتوان دو زیرمجموعه‌ی متفاوت از $\{1, 2, \dots, 7\}$ انتخاب کرد به طوری که یکی شامل دیگری باشد؟

پاسخ. $2059 = 27 - 37$

۲۰۰۱

سوال ۲۵. چند عدد پنج رقمی با ارقام فرد وجود دارد به طوریکه حداقل یک جفت رقم متوالی با جمع ۱۰ داشته باشد.

پاسخ. $1845 = 3125 - 5 \cdot 4^4 = 1280 - 55$

سوال ۲۶. در هر مرحله جای دو تا از اعداد در جایگشت $\{1, 2, \dots, 7\}$ را جایشان را عوض می‌کنیم. بعد از دو مرحله به چند جایگشت متفاوت می‌توانیم برسیم؟

پاسخ. $176 = 105 + 70 + 1$

سوال ۲۷. یک پلکان داریم که در ردیف اول ۱۰ مربع دارد، در ردیف دوم ۹ مربع و ... در ردیف دهم ۱ مربع دارد. چند زیر مستطیل در این پلکان وجود دارد؟

پاسخ. 715

سوال ۲۸. صادق یک عدد دو رقمی را مدنظر دارد. در هر مرحله میتوانیم یک عدد دو رقمی را حدس بزنیم و صادق به ما تعداد رقم‌هایی که درست حدس زدیم را می‌گوید. حداقل به چند حدس نیاز داریم تا عدد مورد نظر را پیدا کنیم؟

پاسخ. 10

سوال ۲۹. دور یک دایره ۵ شهر با فاصله‌های $4, 1, 2, 5, 5$ هستند. میخواهیم بیمارستانی احداث کنیم که فاصله‌اش از دورترین شهر حداقل باشد. چند جا میتوانیم این بیمارستان را نصب کنیم؟ (در نقطه‌ای صحیح باید احداث شود)

پاسخ. 2

۲۰۰۲

سوال ۳۰. در یک سینما، ده ردیف صندلی وجود دارد و در هر ردیف ۱۰ صندلی. چقدر احتمال دارد دو دوست بدون هماهنگی قبلی صندلی‌های مجاور بخندند؟

پاسخ. $\frac{1}{55}$

سوال ۳۱.

پاسخ.

□