

دانشکدهٔ ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

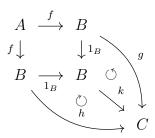
آزمون پایانی درس روشهای جبری و همجبری در علوم کامپیوتر

شنبه، ۲۹ دی ۱۴۰۳ - ساعت ۱۰ مدّت آزمون: ۴ ساعت

پرسش ۱. فرض کنید $f:A\to B$ یک مورفیسم در کتگوری $\mathbb C$ باشد. نشان دهید $f:A\to B$ اپی مورفیسم است اگر و تنها اگر مربّع زیر pushout باشد.

 $\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{f} & B \\
f \downarrow & & \downarrow 1 \\
B & \xrightarrow{1} & B
\end{array}$

و $A \stackrel{f}{\longrightarrow} B \stackrel{g}{\Longrightarrow} C$ کنید مربّع داده شده pushout باشد. همچنین فرض کنید مربّع داده شده pushout یاسخ: فرض کنید مربّع داده شده pushout داشته باشیم gf = hf یکتا وجود دارد به طوری که



جابه جا شود. در نتیجه g=k=h. پس f اپی مورفیسم است. g=k=h دلخواه برای جهت عکس، فرض کنید $f,g:B\to C$ و $f,g:B\to C$ دلخواه دیاگرام زیر جابه جایی باشد.

$$\begin{array}{cccc}
A & \xrightarrow{f} & B \\
f \downarrow & & \downarrow^{1_B} & g \\
B & \xrightarrow{1_B} & B & \downarrow \\
& & & \downarrow^{h} & C
\end{array}$$

از تعریف اپیمورفیسم داریم g=h در نتیجه مورف g=g در ویژگی g=g و g=g و یکتا g=g است.

پرسش ۲. فرض کنید E یک رابطهٔ هم ارزی روی مجموعهٔ X باشد. X/E را به مثابه یک هم –یکسانساز (coequalizer) توصیف کنید.

پاسخ: فرض کنید $E\subseteq X\times X$ یک رابطهٔ هم ارزی روی X، X دوی نگاشت شمول آن و $u(x)=[x]_E$ مورفهای تصویر باشند. همچنین $u(x)=[x]_E$ را به صورت $u(x)=[x]_E$ تعریف کنید. نشان می دهیم x به همراه مورف x هم یکسانساز دیاگرام

$$E \stackrel{p_1i}{\Longrightarrow} X$$

 $f: X \to Y$ و Y حال فرض کنید $up_1i = up_2i$ حال است. بنا به تعریف کلاس هم ارزی واضح است که $up_1i = up_2i$ حال هم اور $f(x_1) = f(x_2)$ داریم $f(x_1) = f(x_2)$ داریم واضح باشیم به قسمی که $f(x_1) = f(x_2)$ بعنی برای هم $f(x_1) = f(x_2)$ داریم است و داریم نتیجه، تابع $f'(x_1) = f(x_2)$ که به صورت $f'(x_1) = f(x_2)$ تعریف می شود خوش تعریف است و داریم نتیجه، $f'(u(x_1)) = f(x_2)$ بیس u یک هم-یکسان ساز برای u و u است.

پرسش ۳. فرض کنید $\mathbb{C} \xrightarrow[I]{F} \mathbb{C}$ و $\mathbb{C} \times X: I \to \mathbb{C}$ و جود داشته باشد.

.CoCone $(F \circ X, Z) \cong \mathbf{CoCone}(X, U(Z))$ نشان دهید (آ)

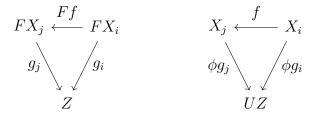
(ب) ثابت کنید
$$F\circ X:I\to \mathbb{D}$$
 هم حد دیاگرام $F\circ X:I\to \mathbb{D}$ است.

پاسخ:

 $Z \in \mathbb{D}_0$ و $W \in \mathbb{C}_0$ اگر adjunction اگر

$$\phi: Hom_{\mathbb{D}}(FW, Z) \cong Hom_{\mathbb{C}}(W, UZ)$$

حال اگر نشان دهیم برای هر دو شئ در تصویر $F\circ X$ که با Z تشکیل CoCone میدهد، معادلا دو شئ در \mathbb{C} با \mathbb{C} تشکیل CoCone میدهند، آنگاه این تناظر اثبات میشود. برای اینکار از یکریختی طبیعی ϕ استفاده میکنیم. فرض کنید \mathbb{C} با \mathbb{C} با شند به طوری که \mathbb{C} با \mathbb{C} با \mathbb{C} با تشکیل CoCone دهند:



حال با فرض جابه جایی بودن مثلث سمت چپ (۱) نشان میدهیم مثلث سمت راست جابه جایی است. طبق طبیعی بودن ϕ داریم:

$$Hom_{\mathbb{C}}(X_{j},UZ) \xrightarrow{\phi^{-1}} Hom_{\mathbb{D}}(FX_{j},Z)$$

$$Hom_{\mathbb{C}}(f,-) \downarrow \qquad \qquad \downarrow Hom_{\mathbb{D}}(Ff,-)$$

$$Hom_{\mathbb{C}}(X_{i},UZ) \xrightarrow{\phi^{-1}} Hom_{\mathbb{D}}(FX_{i},Z)$$

و به دلیل یکریختی بودن ϕ برای $\phi(g_j) \in Hom_{\mathbb{C}}(X_j,UZ)$ از مربع جابه جایی بالا داریم:

$$\phi(g_j)\circ f=(\phi\circ Hom_{\mathbb{D}}(Ff,-)\circ\phi^{-1})(\phi(g_j))$$
 (طبق طبیعی بودن)
$$=\phi\circ Hom_{\mathbb{D}}(Ff,-)(g_j)$$

$$=\phi(g_j\circ Ff)$$
 ((۱)) طبق (۱))
$$=\phi(g_i)$$

پس مثلث دوم هم جابه جایی شد. از طرفی این تناظر به کمک ϕ تعریف شده بود. پس یکریختی است. حال هر CoCone از تعدادی از این مثلثها تشکیل شده. بدیهی است که متناظر هر CoCone هم مجموعه ی تناظر یافته ی مثلثهایش است. پس داریم:

$$\mathbf{CoCone}(F\circ X,Z)\cong\mathbf{CoCone}(X,UZ)$$

(ب) ابتدا نشان ميدهيم الحاق چپ، همحد را حفظ ميكند:

$$Hom_{\mathbb{D}}(F(\varinjlim_{i \in I} X_{i}), Z) \cong Hom_{\mathbb{C}}(\varinjlim_{i \in I} X_{i}, UZ)$$

$$\cong \varinjlim_{i \in I} Hom_{\mathbb{C}}(X_{i}, UZ)$$

$$\cong \varinjlim_{i \in I} Hom_{\mathbb{D}}(FX_{i}, Z)$$

$$\cong Hom_{\mathbb{D}}(\varinjlim_{i \in I} FX_{i}, Z)$$

كه طبق يوندا داريم:

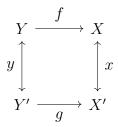
$$F(\varinjlim_{i\in I}X_i)=\varinjlim_{i\in I}FX_i$$
 که تعریف هم حد دیاگرام $F\circ X:I o \mathbb{D}$ است.

پرسش ۴. تعریف کنید ullet \Rightarrow ullet : 2 کتگوری پیشبافههای 2 را به صورت $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{Set}^{2^{op}}$ تعریف می کنیم.

- (آ) یک توصیف دقیق از $\hat{2}$ ارائه دهید. (ب) ثابت کنید $\hat{2}$ یک توپوس است.
 - است. کنید $Sub(\hat{\mathbf{2}})$ یک جبر هیتینگ است.

پاسخ:

(آ) هر عضو از 2 یک فانکتور از 2 به Set است. از آنجایی که دو عضو ابتدایی در 2 یکریخت هستند، پس به اشیای یکریختی نیز در Set میروند. و مورفهای بین آنها نیز به یک همریختی و وارون آن میروند. از طرفی به هر مورف همریختی در Set میتوان یک فانکتور نسبت داد که 2 را به آن همریختی میبرد. پس هر فانکتور تنها با یک یکریختی در Set مشخص میشود. پس درواقع 2 کتگوری تمام میبرد. پس درواقع 2 کتگوری تمام یکریختیهای (توابع ۱-۱ و پوشا) داخل Set است. مورفهای 2 هم تمام تبدیلات طبیعی بین این فانکتورها هستند. هر تبدیل هم معادل یک جفت تابع بین اشیای یکریخت است که دیاگرام جابه جایی شود:



که در آن x و y توابعی یک به یک پوشا هستند (وارون دارند) و با تعیین کردن f، تابع g به صورت یکتا مشخص میشود به طوری که دیاگرام بچرخد.

(ب)

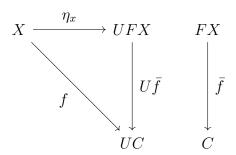
(پ)

 $U: \mathbb{C} \to \mathbb{X}$ پرسش ۵. فرض کنید \mathbb{C} یک کتگوری موضعاً کوچک و کامل، \mathbb{X} یک کتگوری دلخواه و \mathbb{X} یک فانکتور حافظ حد باشد. ثابت کنید گزارههای زیر همارز اند:

- است. لحاق چپ است. U
- .II برای هر شیء $\mathbb{X} \in \mathbb{X}$ ، فانکتور U در ویژگی زیر صدق میکند:

شرط مجموعهٔ جواب: مجموعهای از اشیاء مانند $(S_i)_{i\in I}$ در $\mathbb C$ به قسمی وجود دارد که برای هر شیء $ar f:S_i o C$ و هر مورف $X o US_i$ ، $i\in I$ و جود داشته باشد $f:S_i o C$ و G به صورتی که G و G به G و G به مانند G و مانند G و مانند و باید و باید G و مانند و باید و باید و باید و برای هر شیء و برای و برای و برای هر شیء و برای هر شیء و برای هر شیء و برای و برای و برای هر شیء و برای و برای هر شیء و برای و برای

پاسخ: $(\mathbf{I} \to \mathbf{II})$ فرض کنید F الحاق چپ U باشد. اگر η یکه ی این الحاق باشد، آنگاه طبق خاصیت $\bar{f}: FX \to C$ مورف یکتای $X \in \mathbb{Z}$ بطوریکه $X \in \mathbb{Z}$ و $X \in \mathbb{Z}$ مورف یکتای UMP یکه داریم برای هر $X \in \mathbb{Z}$ بطوریکه $X \in \mathbb{Z}$ همان مجموعه جواب است.



حال اگر شرط مجموعه جواب برقرار باشد ابتدا یک لم ثابت میکنیم: $(\mathbf{II} o \mathbf{I})$

لم ۱. اگر $\mathbb Z$ یک کتگوری موضعا کوچک و کامل باشد. آنگاه دو شرط زیر معادلند:

- (\tilde{l}) شئ ابتدایی دارد.
- (ب) مجموعه ی جواب داریم، به این معنی که $(D_i)_{i\in I}$ وجود دارد به طوریکه برای هر عضو دارد که برای هر عضو دلخواه $C\in\mathbb{C}$ یک $C\in\mathbb{C}$ وجود دارد به طوریکه

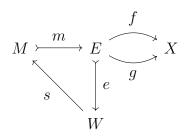
برای اثبات این لم دقت کنید که اگر شئ ابتدایی داشته باشیم آنگاه خود آن شئ، شرایط مجموعهی جواب را دارد. پس فرض میکنیم شرط مجموعه جواب را داریم و نشان میدهیم که شئ ابتدایی وجود دارد. از آنجایی که کتگوری کامل است پس ضرب اعضای این مجموعه را داریم. قرار دهید:

$$W = \prod_{i \in I} D_i$$

حال همسانساز همه ی مورفهای W به خودش را در نظر بگیرید. (این مورفها یک مجموعه هستند چون این کتگوری موضعا کوچک است.) فرض کنید این همسانساز (E,e) باشد:

$$E \xrightarrow{e} W \xrightarrow{1_W} W$$

W مونیک است چرا که همسانساز است. بدیهی است که از E به همه اشیا مورف است چرا که از E با میهای تصویر در ضرب میتوان به اعضای مجموعه جواب رفت و از آنجا به شئ دلخواه. حال فرض کنید این مورف یکتا نباشد یعنی برای یک شئ دو مورف از E به آن وجود داشته باشد مانند E و E. همسانساز این دو را در نظر بگیرید:



مونیک است و s یکی از مورفهای W به M است از آنجایی که از W به هر شئ میتوان رفت (تصویر به یکی از مولفه ها که به M مورف دارد).

پرسش ۶. فرض کنید \mathbb{C} یک کتگوری کوچک باشد. برای $P \in \mathbf{Set}^{\mathbb{C}^{op}}$ ثابت کنید

$$\varinjlim_{j \in \int P} yC_j \cong P$$

پاسخ:

پرسش ۷. فرض کنید $\epsilon: 1_{\mathbb{D}} \to FU$ و $\eta: UF \to 1_{\mathbb{C}}$ و تبدیلات طبیعی $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \frac{F}{\bot}$ همیکّهٔ الحاق $H = U\epsilon_F: T^2 \to T$ و $T = U\circ F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ نشان . $\mu = U\epsilon_F: T^2 \to T$ و $T = U\circ F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ نشان دهید (T, η, μ) یک موناد است.

پرسش ۸. فانکتورهای $(i \in \{0,1\})$ و $ev_i : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ و $\Delta : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ را به قسمی ورسش ۸. فانکتورهای $\Delta : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ و $\Delta : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ و $\Delta : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ و تعریف کنید که برای A_1 ، A_0 و A_1 ، A_0 و داشته باشیم A_1 ، A_0 و A_1 ، A_0 و A_1 ، A_0 و A_1 ، A_0 و A_1 ، A_0 و تعریف کنید:

است. $ev_1 \rightarrow ev_1$ داراى الحاق جي است. ev_0 داراى الحاق جي است. $ev_1 \rightarrow \Delta \rightarrow ev_0$

ياسخ:

پرسش ۹. کتگوری جبرهای فانکتور $X^2 + X + 1$ را مشخّص کنید. شیء ابتدایی این کتگوری چه ساختار دادهٔ استقراییای را تعریف می کند؟ پاسخ: