دانشکدهٔ ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

آزمون پایانی درس روش‌های جبری و هم‌جبری در علوم کامپیوتر

شنبه، ۲۹ دی ۱۴۰۳ – ساعت ۱۰   مدّت آزمون: ۴ ساعت

پرسش ۱. فرض کنید $f : A \to B$ یک مورفیسم در کتگوری $\mathbb{C}$ باشد. نشان دهید f اپی‌مورفیسم است اگر و تنها اگر مربّع زیر pushout باشد.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "1"] \\
B \arrow[r, "1"'] & B
\end{tikzcd}$$

پاسخ: فرض کنید مربّع داده شده pushout باشد. همچنین فرض کنید $A \xrightarrow{f} B \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} C$ و داشته باشیم $gf = hf$. از تعریف pushout می‌دانیم $k : B \to C$ یکتا وجود دارد به طوری که

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "1_B"] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
B \arrow[r, "1_B"'] \arrow[drr, bend right, "h"] & B \arrow[dr, "k"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & {} \\
& {} & C
\end{tikzcd}$$

جابه‌جا شود. در نتیجه $g = k = h$. پس f اپی‌مورفیسم است.

برای جهت عکس، فرض کنید f اپی‌مورفیسم باشد. همچنین فرض کنید برای C و $f, g : B \to C$ دل‌خواه دیاگرام زیر جابه‌جایی باشد.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "1_B"] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
B \arrow[r, "1_B"'] \arrow[drr, bend right, "h"] & B & \\
& & C
\end{tikzcd}$$

از تعریف اپی‌مورفیسم داریم $g = h$. در نتیجه مورف $g : B \to C$ در ویژگی $g = g1_B$ و $h = g1_B$ یکتا است.

پرسش ۲. فرض کنید E یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ X باشد. X/E را به مثابه یک هم-یکسان‌ساز (coequalizer) توصیف کنید.

پاسخ: فرض کنید $E \subseteq X \times X$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی X، $i : E \to X \times X$ نگاشت شمول آن و $p_1, p_2 : X \times X \to X$ مورف‌های تصویر باشند. همچنین $u : X \to X/E$ را به صورت $u(x) = [x]_E$ تعریف کنید. نشان می‌دهیم X/E به همراه مورف u هم-یکسان‌ساز دیاگرام

$$E \underset{p_2 i}{\overset{p_1 i}{\rightrightarrows}} X$$

است. بنا به تعریف کلاس هم‌ارزی واضح است که $up_1i = up_2i$. حال فرض کنید Y و $f : X \to Y$ داشته باشیم به قسمی که $fp_1i = fp_2i$، یعنی برای هر $(x_1, x_2) \in E$ داریم $f(x_1) = f(x_2)$. در نتیجه، تابع $f' : X/E \to Y$ که به صورت $f'([x]) = f(x)$ تعریف می‌شود خوش‌تعریف است و داریم $f'(u(x)) = f(x)$. پس u یک هم-یکسان‌ساز برای p_1i و p_2i است.

پرسش ۳. فرض کنید $\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbb{D} \arrow[l, shift left, "U"] \end{tikzcd}$ و $X : I \to \mathbb{C}$ چنان باشد که $\varinjlim_{i \in I} X_i$ وجود داشته باشد.

(آ) نشان دهید $\mathbf{CoCone}(F \circ X, Z) \cong \mathbf{CoCone}(X, U(Z))$.

(ب) ثابت کنید $F(\varinjlim_{i \in I} X_i)$ هم‌حد دیاگرام $F \circ X : I \to \mathbb{D}$ است.

پاسخ:

(آ) طبق adjunction اگر $W \in \mathbb{C}_0$ و $Z \in \mathbb{D}_0$:

$$\phi : Hom_{\mathbb{D}}(FW, Z) \cong Hom_{\mathbb{C}}(W, UZ)$$

حال اگر نشان دهیم برای هر دو شئ در تصویر $F \circ X$ که با Z تشکیل CoCone میدهند، معادلا دو شئ در $\mathbb{C}$ با UZ تشکیل CoCone میدهند، آنگاه این تناظر اثبات میشود. برای اینکار از یکریختی طبیعی ϕ استفاده میکنیم. فرض کنید $X_i, X_j \in im(X)$ باشند به طوری که FX_i و FX_j با Z تشکیل CoCone دهند:

$$\begin{tikzcd} FX_j & & FX_i \arrow[ll, "Ff"'] \arrow[dl, "g_i"] \\ & Z \arrow[from=ul, "g_j"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_j & & X_i \arrow[ll, "f"'] \arrow[dl, "\phi g_i"] \\ & UZ \arrow[from=ul, "\phi g_j"'] & \end{tikzcd}$$

حال با فرض جابه‌جایی بودن مثلث سمت چپ (۱) نشان میدهیم مثلث سمت راست جابه‌جایی است. طبق طبیعی بودن ϕ داریم:

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathbb{C}}(X_j, UZ) \arrow[r, "\phi^{-1}"] \arrow[d, "Hom_{\mathbb{C}}(f,-)"'] & Hom_{\mathbb{D}}(FX_j, Z) \arrow[d, "Hom_{\mathbb{D}}(Ff,-)"] \\ Hom_{\mathbb{C}}(X_i, UZ) \arrow[r, "\phi^{-1}"'] & Hom_{\mathbb{D}}(FX_i, Z) \end{tikzcd}$$

و به دلیل یکریختی بودن ϕ برای $\phi(g_j) \in Hom_{\mathbb{C}}(X_j, UZ)$ از مربع جابه‌جایی بالا داریم:

$$\begin{aligned} \phi(g_j) \circ f &= (\phi \circ Hom_{\mathbb{D}}(Ff,-) \circ \phi^{-1})(\phi(g_j)) && \text{(طبق طبیعی بودن)} \\ &= \phi \circ Hom_{\mathbb{D}}(Ff,-)(g_j) \\ &= \phi(g_j \circ Ff) && \text{(طبق (۱))} \\ &= \phi(g_i) \end{aligned}$$

پس مثلث دوم هم جابه‌جایی شد. از طرفی این تناظر به کمک ϕ تعریف شده بود. پس یکریختی است. حال هر CoCone از تعدادی از این مثلث‌ها تشکیل شده. بدیهی است که متناظر هر CoCone هم مجموعه‌ی تناظر یافته‌ی مثلث‌هایش است. پس داریم:

$$\mathbf{CoCone}(F \circ X, Z) \cong \mathbf{CoCone}(X, UZ)$$

(ب) ابتدا نشان میدهیم الحاق چپ، هم‌حد را حفظ میکند:

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbb{D}}(F(\varinjlim_{i \in I} X_i), Z) &\cong Hom_{\mathbb{C}}(\varinjlim_{i \in I} X_i, UZ) \\ &\cong \varinjlim_{i \in I} Hom_{\mathbb{C}}(X_i, UZ) \\ &\cong \varinjlim_{i \in I} Hom_{\mathbb{D}}(FX_i, Z) \\ &\cong Hom_{\mathbb{D}}(\varinjlim_{i \in I} FX_i, Z) \end{aligned}$$

که طبق یوندا داریم:

$$F(\varinjlim_{i \in I} X_i) = \varinjlim_{i \in I} FX_i$$

که تعریف هم‌حد دیاگرام $F \circ X : I \to \mathbb{D}$ است.

پرسش ۴. تعریف کنید $\mathbf{2} : \bullet \rightleftarrows \bullet$. کتگوری پیش‌بافه‌های $\mathbf{2}$ را به صورت $\hat{\mathbf{2}} = \mathbf{Set}^{\mathbf{2}^{op}}$ تعریف می‌کنیم.

(آ) یک توصیف دقیق از $\hat{\mathbf{2}}$ ارائه دهید. (ب) ثابت کنید $\hat{\mathbf{2}}$ یک توپوس است.

(پ) ثابت کنید $Sub(\hat{\mathbf{2}})$ یک جبر هیتینگ است.

پاسخ:

(آ) هر عضو از $\hat{\mathbf{2}}$ یک فانکتور از $\mathbf{2}$ به $\mathbf{Set}$ است. از آنجایی که دو عضو ابتدایی در $\mathbf{2}$ یکریخت هستند، پس به اشیای یکریختی نیز در $\mathbf{Set}$ میروند. و مورف‌های بین آنها نیز به یک همریختی و وارون آن میروند. از طرفی به هر مورف همریختی در $\mathbf{Set}$ میتوان یک فانکتور نسبت داد که $\mathbf{2}$ را به آن همریختی میبرد. پس هر فانکتور تنها با یک یکریختی در $\mathbf{Set}$ مشخص میشود. پس درواقع $\hat{\mathbf{2}}$ کتگوری تمام یکریختی‌های (توابع ۱-۱ و پوشا) داخل $\mathbf{Set}$ است. مورف‌های $\hat{\mathbf{2}}$ هم تمام تبدیلات طبیعی بین این فانکتورها هستند. هر تبدیل هم معادل یک جفت تابع بین اشیای یکریخت است که دیاگرام جابه‌جایی شود:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, leftrightarrow, "y"'] & X \arrow[d, leftrightarrow, "x"] \\
Y' \arrow[r, "g"'] & X'
\end{tikzcd}$$

که در آن x و y توابعی یک به یک پوشا هستند (وارون دارند) و با تعیین کردن f، تابع g به صورت یکتا مشخص میشود به طوری که دیاگرام بچرخد.

(ب)

(پ)

پرسش ۵. فرض کنید $\mathbb{C}$ یک کتگوری موضعاً کوچک و کامل، $\mathbb{X}$ یک کتگوری دل‌خواه و $U : \mathbb{C} \to \mathbb{X}$ یک فانکتور حافظ حد باشد. ثابت کنید گزاره‌های زیر هم‌ارز اند:

I. U دارای الحاق چپ است.

II. برای هر شیء $X \in \mathbb{X}$، فانکتور U در ویژگی زیر صدق می‌کند:

شرط مجموعهٔ جواب: مجموعه‌ای از اشیاء مانند $(S_i)_{i\in I}$ در $\mathbb{C}$ به قسمی وجود دارد که برای هر شیء $C \in \mathbb{C}$ و هر مورف $f : X \to UC$ وجود داشته باشد $i \in I$، $\varphi : X \to US_i$ و $\bar{f} : S_i \to C$ به صورتی که $f = U(\bar{f}) \circ \varphi$.

پاسخ: $(\mathbf{I} \to \mathbf{II})$ فرض کنید F الحاق چپ U باشد. اگر η یکه‌ی این الحاق باشد، آنگاه طبق خاصیت UMP یکه داریم برای هر $f : X \to UC$ بطوریکه $X \in \mathbb{X}$ و $C \in \mathbb{C}$، مورف یکتای $\bar{f} : FX \to C$ وجود دارد که دیاگرام زیر جابجایی شود. پس برای هر $X \in \mathbb{X}$، FX همان مجموعه جواب است.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[dr, "f"'] & UFX \arrow[d, "U\bar{f}"] & FX \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & UC & C \end{tikzcd}$$

$(\mathbf{II} \to \mathbf{I})$ حال اگر شرط مجموعه جواب برقرار باشد ابتدا یک لم ثابت میکنیم:

لم ۱. اگر $\mathbb{C}$ یک کتگوری موضعا کوچک و کامل باشد. آنگاه دو شرط زیر معادلند:

(آ) $\mathbb{C}$ شئ ابتدایی دارد.

(ب) مجموعه‌ی جواب داریم، به این معنی که $(D_i)_{i \in I}$ وجود دارد به طوریکه برای هر عضو دارد که برای هر عضو دلخواه $C \in \mathbb{C}$ یک $j \in I$ وجود دارد به طوریکه $D_j \to C$.

برای اثبات این لم دقت کنید که اگر شئ ابتدایی داشته باشیم آنگاه خود آن شئ، شرایط مجموعه‌ی جواب را دارد. پس فرض میکنیم شرط مجموعه جواب را داریم و نشان میدهیم که شئ ابتدایی وجود دارد. از آنجایی که کتگوری کامل است پس ضرب اعضای این مجموعه را داریم. قرار دهید:

$$W = \prod_{i \in I} D_i$$

حال همسان‌ساز همه‌ی مورفهای W به خودش را در نظر بگیرید. (این مورفها یک مجموعه هستند چون این کتگوری موضعا کوچک است.) فرض کنید این همسان‌ساز (E, e) باشد:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, tail, "e"] & W \arrow[r, bend left, "1_W"] \arrow[r, phantom, "\cdots"] & W \end{tikzcd}$$

مورف e مونیک است چرا که همسان‌ساز است. بدیهی است که از E به همه اشیا مورف است چرا که از W با مپهای تصویر در ضرب میتوان به اعضای مجموعه جواب رفت و از آنجا به شئ دلخواه. حال فرض کنید این مورف یکتا نباشد یعنی برای یک شئ دو مورف از E به آن وجود داشته باشد مانند f و g. همسان‌ساز این دو را در نظر بگیرید:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, tail, "m"] & E \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[d, tail, "e"] & X \\
& W \arrow[ul, "s"] &
\end{tikzcd}$$

m مونیک است و s یکی از مورفهای W به M است از آنجایی که از W به هر شئ میتوان رفت (تصویر به یکی از مولفه‌ها که به M مورف دارد).

پرسش ۶. فرض کنید $\mathbb{C}$ یک کتگوری کوچک باشد. برای $P \in \mathbf{Set}^{\mathbb{C}^{op}}$ ثابت کنید

$$\varinjlim_{j \in \int_{\mathbb{C}} P} yC_j \cong P$$

پاسخ:

پرسش ۷. فرض کنید $\mathbb{C} \;\underset{U}{\overset{F}{\underset{\perp}{\rightleftarrows}}}\; \mathbb{D}$ و تبدیلات طبیعی $\eta : UF \to 1_{\mathbb{C}}$ و $\epsilon : 1_{\mathbb{D}} \to FU$ به ترتیب یکّه و هم‌یکّهٔ الحاق $U \dashv F$ باشند. تعریف کنید $T = U \circ F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ و $\mu = U\epsilon_F : T^2 \to T$. نشان دهید (T, η, μ) یک موناد است.

پاسخ:

پرسش ۸. فانکتورهای $\Delta : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}^{\to}$ و $ev_i : \mathbf{Set}^{\to} \to \mathbf{Set}$ (به ازای $i \in \{0, 1\}$) را به قسمی تعریف کنید که برای A_0، A_1 و $f : A_0 \to A_1$ در $\mathbf{Set}$ داشته باشیم $\Delta(A_0) = 1_{A_0}$، $\Delta(f) = (f, f)$ و $ev_i(f) = A_i$. ثابت کنید:

(آ) $ev_0 \dashv \Delta \dashv ev_1$. (ب) ev_0 دارای الحاق راست و ev_1 دارای الحاق چپ است.

پاسخ:

پرسش ۹. کتگوری جبرهای فانکتور $X^2 + X + 1$ را مشخّص کنید. شیء ابتدایی این کتگوری چه ساختار دادهٔ استقرایی‌ای را تعریف می‌کند؟

پاسخ:
