

سوال ۱. به چند طریق میتوان یک مجموعه‌ی ۶ عضوی را به ۳ زیرمجموعه افزایش کرد؟

پاسخ. ۹۰ □

سوال ۲. به چند طریق میتوانیم اعداد ۱ تا ۶ را روی وجهه تاس بنویسیم به طوری که اعداد متولی یک یا مشترک داشته باشند؟

پاسخ. ۱۰ □

سوال ۳. ۱۲ زوج دور یک دایره نشسته اند به طوری که تمامی مردها در کنار یکدیگر هستند و هر فرد دقیقاً روی همسر خود قرار دارد. حداقل تعداد جایه‌جایی‌های افراد مجاور برای اینکه زوج‌ها کنار یکدیگر باشند.

پاسخ. ۶۶ □

سوال ۴. حداکثر تعداد زیرمجموعه‌های $\{1, 2, \dots, 10\}$ را به طوری که هیچکدام زیرمجموعه دیگری نباشند پیدا کنید. (۱۹۹۸)

پاسخ. ۲۵۲ = $\binom{10}{5}$ □

سوال ۵. ۴ جعبه با گنجایش ۳ و ۵ و ۷ و ۸ داریم. به چند طریق میتوانیم ۱۹ توب یکسان را درون این جعبه‌ها قرار دهیم؟

پاسخ. $34 = 1 - \binom{7}{3}$ □

سوال ۶. به چند طریق میتوان ۱۰ نفر را در ۸ اتاق متمایز تقسیم کرد به طوری که در هر اتاق دست کم یک نفر قرار گیرد؟

پاسخ. $30240000 = \binom{10}{2} \times 8! + \binom{10}{3} \times 8! \times \frac{1}{7}$ □

سوال ۷. در یک جدول ۳ در ۳ دو خانه را آبی و دو خانه را قرمز رنگ کرده‌ایم بطوریکه خانه‌های همنگ در یک سطر یا یک ستون نیستند. به چند طریق میتوان این رنگ‌آمیزی را انجام داد؟

پاسخ. $198 = 11 \times 18$ □

سوال ۸. به چند طریق میتوان اعداد ۰ تا ۹ را ردیفی نوشت بطوریکه اعداد فرد بصورت صعودی و اعداد زوج بصورت نزولی باشند؟

پاسخ. ۲۵۲ = $\binom{5}{5}$ □

سوال ۹. به چند طریق میتوان ۷ توب سفید و ۷ توب قرمز را داخل ۷ جعبه گذاشت بطوریکه در هر جعبه دقیقاً ۲ توب باشد.

پاسخ. $393 = 1 + \frac{7!}{3!3!2!} + \frac{7!}{5!} + \frac{7!}{2!2!2!}$ □

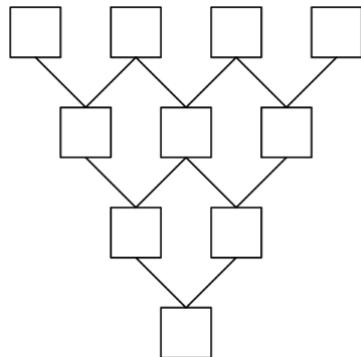
سوال ۱۰. چند جایگشت از اعداد یک تا ۵ وجود دارد بطوریکه k عدد اول دنباله مجموعه‌ی $k, 2, \dots, 1$ نباشد. ($k < 5$)

پاسخ. $f(n) = n! - f(n-1)/1! - f(n-2)/2! - \dots - f(1)/(n-1)! \quad f(5) = 71$

سوال ۱۱. ۶ کارت با ارقام ۱، ۱، ۱، ۴، ۴، ۳، ۵ داریم. به ترتیب سه کارت از آنها را میکشیم و به ترتیب کشیده شده با آنها یک عدد سه رقمی تشکیل میدهیم. احتمال بخش پذیر بودن این عدد بر ۳ چقدر است؟

پاسخ. $\square \frac{36}{780} = \frac{1}{20}$

سوال ۱۲. اعداد را داخل مربعها به گونه‌ای قرار داده‌ایم که هر خانه برابر تفاضل دو خانه بالای سرش است. حداکثر مقدار برای خانه پایینی چقدر است؟



پاسخ. $\square 4$

سوال ۱۳. ۳۰ توب در ۴ ظرف A, B, C, D پخش شده‌اند به طوری که جمع تعداد توب‌های A و B بیشتر از جمع تعداد توب‌های داخل C و D است. به چند طریق میتوان اینکار را انجام داد؟

پاسخ. $\square 2600 - 256 = 2344$

سوال ۱۴. A, B, C در یک تورنومنت بازی میکنند به طوری که ابتدا A و B با یکدیگر بازی میکنند و برنده با C بازی میکنند. در هر مرحله فردی که بیرون نشسته با برنده‌ی بازی، بازی میکند. اگر یک نفر دو بازی متوالی برنده شود قهرمان میشود. احتمال قهرمان شدن C را بدست آورید.

پاسخ. $\square p = \frac{2}{7}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}p) \implies p = \frac{2}{7}$

سوال ۱۵. اگر هر زیرمجموعه‌ی k تایی از مجموعه‌ی $S = \{1, 2, 3, \dots, 32\}$ سه عضو داشته باشد که به ترتیب یکدیگر را عاد میکنند، آنگاه k حداقل چند است؟

پاسخ. $\square 25$

سوال ۱۶. چند عدد ۵ رقمی با ارقام فرد داریم به طوری که حداقل یک جفت متوالی از ارقام حاصل جمع برابر با ۱۰ داشته باشند؟

پاسخ. $\square 1845 = 1280 - 5 \times 44 = 3125 - 5^5$

سوال ۱۷. در هر مرحله جای دوتا عدد مختلف از دنباله‌ی $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ را عوض میکنیم. بعد از دو مرحله به چند جایگشت متفاوت میتوانیم برسیم؟

پاسخ. $\square 176 = 105 + 70 + 1$

سوال ۱۸. ۳۱ نفر دور یک دایره نشسته‌اند. به چند طریق میتوان سه نفر انتخاب کرد به طوری که بین هر دو نفر انتخاب شده حداقل ۴ نفر باشند؟

پاسخ. $\square 1581 = 31 \times \binom{18}{3}$

سوال ۱۹. ۷ توب در یک ردیف داریم. به چند طریق میتوان این توب‌هارو با سه رنگ قرمز، آبی یا سیاه رنگ کنیم به طوری که دو سیاه متوالی نداشته باشیم؟

پاسخ. $\square a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}, a_7 = 1224$

سوال ۲۰. ۷ توب در یک ردیف را با به گونه‌ای رنگ کرده‌ایم که ۲ توب سفید، ۲ توب آبی و ۳ توب قرمز هستند. احتمال اینکه دو توب متوالی سفید یا دو توب متوالی آبی داشته باشیم چقدر است؟

$$\square \frac{1}{21} = \frac{10}{21}$$

سوال ۲۱. به چند طریق میتوان ۱۷ توب قرمز یکسان و ۱۰ توب سفید یکسان را در ۴ جعبه متفاوت قرار داد به طوری که در هر جعبه تعداد توب‌های قرمز از سفید بیشتر باشد؟

$$\square 5720 = 6 \cdot 13^6$$

سوال ۲۲. ۱۶ توب سفید و ۴ توب قرمز متفاوت را در ۴ جعبه متفاوت قرار میدهیم، به گونه‌ای که در هر جعبه ۵ توب باشد. احتمال اینکه در هر جعبه دقیقاً یک توب قرمز باشد چقدر است؟

$$\square \frac{5^4}{969} = \frac{125}{969}$$

سوال ۲۳. چند عدد ۱۰ رقمی متشکل از ۱, ۲, ۳ داریم به طوری که رقم اول و آخر یکسان باشند و هیچ دو رقم مجاوری یکسان نباشند.

$$\square 3(64 + 80 + 24 + 2) = 510$$

سوال ۲۴. به چند طریق میتوان دو زیرمجموعه‌ی متفاوت از $\{1, 2, \dots, 7\}$ انتخاب کرد به طوری که یکی شامل دیگری باشد؟

$$\square 3^7 - 2^7 = 2059$$

۲۰۰۱

سوال ۲۵. چند عدد پنج رقمی با ارقام فرد وجود دارد به طوریکه حداقل یک جفت رقم متوالی با جمع ۱۰ داشته باشد.

$$\square 3125 = 4^4 - 5 \cdot 5^5 = 1280 - 1845$$

سوال ۲۶. در هر مرحله جای دو تا از اعداد در جایگشت $\{1, 2, \dots, 7\}$ را جایشان را عوض می‌کنیم. بعد از دو مرحله به چند جایگشت متفاوت می‌توانیم برسیم؟

$$\square 105 + 70 + 1 = 176$$