

ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΕΥΑΓΓΕΛΙΑ ΜΕΡΟΠΗ
ΚΑΝΔΑΡΑΚΗ ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ
ΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ
ΜΗΤΣΗΣ ΑΝΤΩΝΙΟΣ

PROJECT 13:
ΑΓΡΟΤΙΚΟΣ ΣΥΝΕΤΑΙΡΙΣΜΟΣ

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
«ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ»
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ



ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2023, ΑΘΗΝΑ

EMAIL ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ:

georgiouebelina@gmail.com (ge19044)

ge19019@mail.ntua.gr (ge19019)

mitropoulosgeorgios@gmail.com (ge19055)

anmitsis@hotmail.com (ge19079)

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑΣ:

ΚΟΛΕΤΣΟΣ Ι.

Ερώτημα α)

Παραθέτουμε την μαθηματική μοντελοποίηση του δοσμένου προβλήματος. Έχουμε:

1. Μεταβλητές

x_1 : Τα στρέμματα που θα διατεθούν για καλλιέργεια καλαμποκιού

x_2 : Τα στρέμματα που θα διατεθούν για καλλιέργεια σιτηρών

x_3 : Τα μοσχάρια που θα αγοράσει ο συνεταιρισμός

y_1 : Οι ώρες ανειδίκευτων εργατών που θα χρειαστούν για την καλλιέργεια καλαμποκιού, σιταριού και την εκτροφή των μοσχαριών

y_2 : Οι ώρες έμπειρων εργατών που θα χρειαστούν για την καλλιέργεια καλαμποκιού, σιταριού και την εκτροφή των μοσχαριών

z_1 : Τα δεμάτια παραγόμενου καλαμποκιού που θα διατεθούν για κατανάλωση από τα μοσχάρια

z_2 : Τα δεμάτια καλαμποκιού που θα αγορασθούν για κατανάλωση από τα μοσχάρια

2. Αντικειμενική Συνάρτηση

$$\begin{aligned} \text{maximize}(\text{profit}) = & \\ & = 4 \cdot (120 \cdot x_1 - z_1) - 90 \cdot x_1 + \\ & + 5.10 \cdot 100 \cdot x_2 - 110 \cdot x_2 + \\ & + 850 \cdot x_3 - 160 \cdot x_3 - 4.25 \cdot z_2 - \\ & - 7 \cdot y_1 - 12 \cdot y_2 \end{aligned}$$

- Η πρώτη σειρά της αντικειμενικής συνάρτησης αφορά το καλαμπόκι. Για να βρούμε το κέρδος από το καλαμπόκι (χωρίς την πληρωμή των εργατών), ξεκινάμε πολλαπλασιάζοντας τα στρέμματα που θα διατεθούν για την καλλιέργειά του επί 120 για να βρούμε τα παραγόμενα δεμάτια καλαμποκιού. Από το νούμερο αυτό, αφαιρούμε τα δεμάτια καλαμποκιού που θα δοθούν για κατανάλωση από τα μοσχάρια και έπειτα πολλαπλασιάζουμε επί 4, για να βρούμε τον τζίρο του συνεταιρισμού από την πώληση καλαμποκιού. Έπειτα, αφαιρούμε το κόστος των σπόρων και των εξόδων καλλιέργειας κάθε στρέμματος (90€ επί τα στρέμματα καλαμποκιού) και, έτσι, βρίσκουμε το κέρδος από την πώληση καλαμποκιού πριν την πληρωμή των εργατών.
- Η δεύτερη σειρά της αντικειμενικής συνάρτησης αφορά το σιτάρι. Για να βρούμε το κέρδος από το σιτάρι, ξεκινάμε πολλαπλασιάζοντας τα στρέμματα που θα διατεθούν για καλλιέργεια σιτηρών επί 100 για να βρούμε τα παραγόμενα δεμάτια σιταριού και έπειτα πολλαπλασιάζουμε επί 5.10, για να βρούμε τον τζίρο του συνεταιρισμού από την πώλησή τους. Έπειτα, αφαιρούμε το κόστος των σπόρων και των εξόδων καλλιέργειας κάθε στρέμματος (110€ επί τα στρέμματα σιτηρών) και, έτσι, βρίσκουμε το κέρδος από την πώληση σιτηρών πριν την πληρωμή των εργατών.
- Η τρίτη σειρά της αντικειμενικής συνάρτησης αφορά τα μοσχάρια. Για να βρούμε το κέρδος από την εκτροφή τους, ξεκινάμε πολλαπλασιάζοντας το πλήθος τους επί την τιμή πώλησης μετά την πάχυνση (δηλαδή επί 850) για να βρούμε τον τζίρο του συνεταιρισμού από την πώλησή τους. Έπειτα, χρειάζεται να αφαιρέσουμε το κόστος αγοράς τους (160€

επί το πλήθος τους) καθώς επίσης και τα χρήματα που πλήρωσε ο συνεταιρισμός για αγορά δεματιών καλαμποκιού για την εκτροφή τους, με το κάθε δεμάτιο να κοστίζει 4.25€ στην ελεύθερη αγορά. Βρίσκουμε, έτσι, το κέρδος από την εκτροφή μοσχαριών πριν την πληρωμή των εργατών.

- Η τέταρτη σειρά της αντικειμενικής συνάρτησης αφορά την πληρωμή των εργατών. Η y_1 αντιπροσωπεύει το άθροισμα των ωρών που δούλεψαν οι ανειδίκευτοι εργάτες για την καλλιέργεια καλαμποκιού, σιτηρών και την εκτροφή των μοσχαριών. Πολλαπλασιάζουμε, λοιπόν, το άθροισμα αυτό επί την πληρωμή τους ανά ώρα (δηλαδή επί 7) και αφαιρούμε το γινόμενο από το συνολικό κέρδος. Ομοίως πράττουμε και για τους έμπειρους εργάτες, πολλαπλασιάζοντας την y_2 με τη δική τους πληρωμή ανά ώρα, η οποία αντιστοιχεί σε 12€ ανά ώρα.

3. Περιορισμοί

- Ο συνεταιρισμός έχει στη διάθεσή του 2,000 στρέμματα για γεωργία και κτηνοτροφία και το κάθε μοσχαράκι χρειάζεται μισό στρέμμα, οπότε:

$$x_1 + x_2 + 0.5 \cdot x_3 \leq 2,000$$

- Η αγορά μπορεί να απορροφήσει το πολύ 90,000 δεμάτια καλαμποκιού, δηλαδή:

$$120 \cdot x_1 - z_1 \leq 90,000$$

- Η αγορά μπορεί να απορροφήσει το πολύ 160,000 δεμάτια σιτηρών, δηλαδή:

$$100 \cdot x_2 \leq 160,000$$

- Ο συνεταιρισμός θέλει να εκθρέψει έως 2,500 μοσχαράκια, δηλαδή πρέπει:

$$x_3 \leq 2,500$$

- Τα δεμάτια παραγόμενου καλαμποκιού που θα διατεθούν για τα μοσχαράκια δεν μπορούν να είναι περισσότερα από τα παραγόμενα δεμάτια καλαμποκιού, επομένως:

$$z_1 \leq 120 \cdot x_1$$

- Η καλλιέργεια καλαμποκιού απαιτεί ακριβώς 10 εργατοώρες ανά στρέμμα. Η καλλιέργεια σιτηρών απαιτεί ακριβώς 8 εργατοώρες ανά στρέμμα, ενώ η εκτροφή των μοσχαριών απαιτεί ακριβώς 20 εργατοώρες για το καθένα. Οπότε, για το άθροισμα των εργατοωρών των ανειδίκευτων και των έμπειρων εργατών, θα πρέπει να ισχύει:

$$y_1 + y_2 = 10 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 20 \cdot x_3$$

- Η εκτροφή του κάθε μοσχαριού απαιτεί την κατανάλωση ακριβώς 80 δεματιών καλαμποκιού, είτε αυτά είναι παραγωγής του συνεταιρισμού είτε είναι αγορασμένα από την ελεύθερη αγορά, δηλαδή:

$$z_1 + z_2 = 80 \cdot x_3$$

- Κάθε ώρα ανειδίκευτου εργάτη απαιτεί συμπληρωματικά 0.2 ώρες επίβλεψη, ενώ κάθε ώρα ενός έμπειρου εργάτη απαιτεί 0.05 ώρες επίβλεψη. Οι συνολικές ώρες που διατίθενται για επίβλεψη είναι 2,200. Αυτά μας οδηγούν στην ακόλουθη ανίσωση:

$$0.2 \cdot y_1 + 0.05 \cdot y_2 \leq 2,200$$

- Ο συνεταιρισμός έλαβε επιδότηση 220,000€ για να χρηματοδοτήσει τις δραστηριότητές του. Συνεπώς, ο προϋπολογισμός του χρειάζεται να μην ξεπερνά την επιδότηση, δηλαδή:

$$90 \cdot x_1 + 110 \cdot x_2 + 160 \cdot x_3 + 4.25 \cdot z_2 + 7 \cdot y_1 + 12 \cdot y_2 \leq 220,000$$

- Θα μπορούσε να υποστηρίξει κανείς πως το x_3 μπορεί να είναι μόνο ακέραιος αριθμός, καθώς δεν γίνεται να αγοράσουμε μισό μοσχάκι. Ωστόσο, για να υποστηρίξουμε κάτι τέτοιο θα χρειαζόταν να μιλήσουμε με κάποιον εμπειρογνώμονα, ο οποίος μπορεί να μας έλεγε πως ένα μικρότερο σε μέγεθος ή μεγαλύτερο σε ηλικία μοσχάρι δεν θα πωληθεί στην ίδια τιμή με τα υπόλοιπα. Έτσι, λοιπόν, έχοντας αυτό κατά νου και γνωρίζοντας πως θα χρειαστεί να δώσουμε αναλύσεις ευαισθησίας και ορίων στα επόμενα ερωτήματα (πράγμα αδύνατο αν μία μεταβλητή μας είναι ακέραιος), κρίνουμε σκόπιμο να αναφέρουμε τον συγκεκριμένο περιορισμό παρά το γεγονός ότι δεν θα τον χρησιμοποιήσουμε.
- Καμία από τις μεταβλητές μας δεν έχει νόημα να πάρει αρνητικές τιμές, επομένως επιβάλλουμε περιορισμό μη – αρνητικότητας.

Παραθέτουμε την μοντελοποίηση στο Excel και τη λύση που μας έδωσε ο Solver στις σελίδες 5 και 6 του παρόντος.

ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΕΥΑΓΓΕΛΙΑ ΜΕΡΟΠΗ
 ΚΑΝΔΑΡΑΚΗ
 ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ
 ΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΣ
 ΓΕΩΡΓΙΟΣ
 ΜΗΤΣΗΣ ΑΝΤΩΝΙΟΣ

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Κατανομή στρεμμάτων γης		Μοσχάρια (σε μονάδες)
Καλαμπόκι	Σιτηρά	
x1	x2	x3
0,00	1325,30	0

Εργατοώρες	
Ανειδίκευτοι εργάτες	Έμπειροι εργάτες
y1	y2
10602,41	0,00

Δεμάτια καλαμπόκι για κατανάλωση από μοσχάρια	
Παραγόμενο	Αγορασμένο
z1	z2
0,00	0,00

ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Έξοδα καλλιέργειας ανά στρέμμα (σε ευρώ)		Τιμή μοσχαριού (σε ευρώ)	Κόστος εργατών ανά ώρα (σε ευρώ)	
Καλαμπόκι	Σιτηρά		Ανειδίκευτος	Έμπειρος
90,00	110,00	160,00	7,00	12,00

Εργατοώρες ανά στρέμμα		Εργατοώρες ανά μοσχάρι	Δεμάτια καλαμποκιού ανά μοσχάρι
Καλαμπόκι	Σιτηρά		
10,00	8,00	20,00	80,00

Κόστος αγοράς καλαμποκιού για τροφή (σε ευρώ ανά δεμάτιο)	Παραγωγικές δυνατότητες ανά στρέμμα		
	Καλαμπόκι (σε δεμάτια)	Σιτηρά (σε δεμάτια)	Μοσχάρια (σε μονάδες)
4,25	120,00	100,00	2,00

Επίβλεψη ανά εργατοώρα (σε ώρες)	
Ανειδίκευτος	Έμπειρος
0,2	0,05

Τιμές πώλησης (σε ευρώ)		
Καλαμπόκι (ανά δεμάτιο)	Σιτηρά (ανά δεμάτιο)	Μοσχάρι (ανά μονάδα)
4,00	5,10	850,00

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ			
Διαθέσιμα στρέμματα	1325,30	<=	2000,00
Ζήτηση καλαμποκιού (σε δεμάτια)	0,00	<=	90000,00
Ζήτηση σιτηρών (σε δεμάτια)	132530,12	<=	160000,00
Περιορισμός μοσχαριών	0,00	<=	2500,00
Παραγόμενο καλαμπόκι για τροφή (σε δεμάτια)	0,00	<=	0,00
Εργατοώρες ανά στρέμμα καλαμποκιού, σιτηρών και ανά μοσχάρι	10602,41	=	10602,41
Δεμάτια καλαμπόκι για τροφή μοσχαριών	0,00	=	0,00
Συνολικές ώρες επίβλεψης	2120,48	<=	2200,00
Περιορισμός χρημάτων (σε ευρώ)	220000,00	<=	220000,00
Περιορισμός μη - αρνητικότητας			

Συνολικό κέρδος (σε ευρώ)
455903,61

Ερώτημα β)

Οι αναφορές απάντησης, ευαισθησίας και ορίων, οι οποίες προέκυψαν κατά την επίλυση του προβλήματός μας με χρήση του Solver του Excel, παρατίθενται στις σελίδες 7, 8 και 9 (αντίστοιχα) του παρόντος.

Microsoft Excel 16.0 Answer Report**Worksheet: Project_13_Agricultural_Cooperative_OR_2022_Georgiou_Kandaraki_Mitropoulos_Mitsis.xlsx Solution****Report Created: 7/1/2023 1:59:31 πμ****Result: Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.****Solver Engine**

Engine: Simplex LP

Solution Time: 0,062 Seconds.

Iterations: 6 Subproblems: 0

Solver Options

Max Time Unlimited, Iterations Unlimited, Precision 0,000001, Use Automatic Scaling

Max Subproblems Unlimited, Max Integer Sols Unlimited, Integer Tolerance 1%, Assume

NonNegative

Objective Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$C\$68	Συνολικό κέρδος (σε ευρώ)	0,00	455903,61

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
\$B\$11	x1	0,00	0,00	Contin
\$C\$11	x2	0,00	1325,30	Contin
\$D\$11	x3	0	0	Contin
\$B\$17	γ1	0,00	10602,41	Contin
\$C\$17	γ2	0,00	0,00	Contin
\$E\$17	z1	0,00	0,00	Contin
\$F\$17	z2	0,00	0,00	Contin

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$D\$54	Διαθέσιμα στρέμματα	1325,30	\$D\$54<=\$F\$54	Not Binding	674,6987952
\$D\$55	Ζήτηση καλαμποκιού (σε δεμάτια)	0,00	\$D\$55<=\$F\$55	Not Binding	90000
\$D\$56	Ζήτηση σιτηρών (σε δεμάτια)	132530,12	\$D\$56<=\$F\$56	Not Binding	27469,87952
\$D\$57	Περιορισμός μοσχαριών	0,00	\$D\$57<=\$F\$57	Not Binding	2500
\$D\$58	Παραγόμενο καλαμπόκι για τροφή (σε δεμάτια)	0,00	\$D\$58<=\$F\$58	Binding	0
\$D\$59	Εργατοώρες ανά στρέμμα καλαμποκιού, σιτηρών και ανά μοσχάρι	10602,41	\$D\$59=\$F\$59	Binding	0
\$D\$60	Δεμάτια καλαμπόκι για τροφή μοσχαριών	0,00	\$D\$60=\$F\$60	Binding	0
\$D\$61	Συνολικές ώρες επίβλεψης	2120,48	\$D\$61<=\$F\$61	Not Binding	79,51807229
\$D\$62	Περιορισμός χρημάτων (σε ευρώ)	220000,00	\$D\$62<=\$F\$62	Binding	0

Microsoft Excel 16.0 Sensitivity Report

Worksheet: Project_13_Agricultural_Cooperative_OR_2022_Georgiou_Kandaraki_Mitropoulos_Mitsis.xlsx Solution
Report Created: 7/1/2023 1:59:31 πμ

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$11	x1	0	0	390	11,56626506	1E+30
\$C\$11	x2	1325,301205	0	400	1E+30	12
\$D\$11	x3	0	0	690	399,3975904	1E+30
\$B\$17	y1	10602,40964	0	-7	5,052631579	12,37864078
\$C\$17	y2	0	-	-12	15,36144578	1E+30
\$E\$17	z1	0	-4,99246988	-4	4,99246988	1E+30
\$F\$17	z2	0	-	-4,25	13,95331325	1E+30

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$D\$54	Διαθέσιμα στρέμματα	1325,301205	0	2000	1E+30	674,6987952
\$D\$55	Ζήτηση καλαμποκιού (σε δεμάτια)	0	0	90000	1E+30	90000
\$D\$56	Ζήτηση σιτηρών (σε δεμάτια)	132530,1205	0	160000	1E+30	27469,87952
\$D\$57	Περιορισμός μοσχαριών	0	0	2500	1E+30	2500
\$D\$58	Παραγόμενο καλαμπόκι για τροφή (σε δεμάτια)	0	0,096385542	0	0	20842,10526
\$D\$59	Εργατώρες ανά στρέμμα καλαμπόκι, σιτηρών και ανά μοσχάρι	10602,40964	-21,5060241	0	600	6514,285714
\$D\$60	Δεμάτια καλαμπόκι για τροφή μοσχαριών	0	0,896084337	0	0	5739,130435
\$D\$61	Συνολικές ώρες επίβλεψης	2120,481928	0	2200	1E+30	79,51807229
\$D\$62	Περιορισμός χρημάτων (σε ευρώ)	220000	2,072289157	220000	8250	220000

Microsoft Excel 16.0 Limits Report**Worksheet: Project_13_Agricultural_Cooperative_OR_2022_Georgiou_Kandaraki_Mitropoulos_Mitsis.xlsx****Solution****Report Created: 7/1/2023 1:59:32 πμ**

Cell	Objective Name	Value
\$C\$68	Συνολικό κέρδος (σε ευρώ)	455903,61

Cell	Variable Name	Value
\$B\$11	x1	0,00
\$C\$11	x2	1325,30
\$D\$11	x3	0
\$B\$17	y1	10602,41
\$C\$17	y2	0,00
\$E\$17	z1	0,00
\$F\$17	z2	0,00

Lower Limit	Objective Result
0,00	455903,61
1325,30	455903,61
0	455903,6145
10602,41	455903,61
0,00	455903,61
0,00	455903,61
0,00	455903,61

Upper Limit	Objective Result
0,00	455903,61
1325,30	455903,61
0	455903,6145
10602,41	455903,61
0,00	455903,61
0,00	455903,61
0,00	455903,61

Ερώτηση γ)

Το πλάνο για την καλλιέργεια καλαμποκιού, σιτηρών και την εκτροφή μοσχαριών που μεγιστοποιεί την απόδοση του συνεταιρισμού είναι το να αφιερώσει 1325.30 στρέμματα για την καλλιέργεια σιτηρών και να μην ασχοληθεί καθόλου με τις άλλες δύο δραστηριότητες, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά ανειδίκευτους εργάτες, οι οποίοι θα εργαστούν συνολικά για 10,602.41 ώρες. Το προαναφερθέν εξαντλεί πλήρως την επιδότηση που λαμβάνει ο συνεταιρισμός (λόγω των εξόδων για την αγορά και την καλλιέργεια των σπόρων και την πληρωμή των εργατών) και του επιφέρει τελικά καθαρό κέρδος ύψους 455,903.61€.

Ερώτημα δ)

Μεταφερόμαστε στην Αναφορά Ευαισθησίας (Sensitivity Report) και στην περιοχή με τίτλο Variable Cells. Το κάθε στρέμμα καλαμποκιού προσφέρει κέρδος 390€ (Objective Coefficient) στον αγροτικό συνεταιρισμό (χωρίς την πληρωμή των εργατών) και η βέλτιστη λύση μας υποδεικνύει ότι δεν τον συμφέρει να πουλήσει καλαμπόκι στην αγορά. Ωστόσο, αν για διάφορους λόγους το κέρδος των 390€ από το κάθε στρέμμα καλαμποκιού αυξηθεί κατά το πολύ 11.56€ ή δεχθεί «άπειρη» μείωση (φράγμα μείωσης $1E + 30$), με τα υπόλοιπα δεδομένα να παραμένουν σταθερά, τότε η βέλτιστη λύση θα εξακολουθήσει να δείχνει πως δεν συμφέρει τον αγροτικό συνεταιρισμό να πουλήσει καλαμπόκι στην αγορά. Δηλαδή, αν το κέρδος για κάθε στρέμμα καλαμποκιού που θα πουληθεί (χωρίς την πληρωμή των εργατών) μεταβληθεί αλλά παραμείνει μέσα στο διάστημα $[390€, 401.56€]$, η λύση να μην καλλιεργηθεί καθόλου καλαμπόκι δεν επηρεάζεται. Για να αποφασίσει, λοιπόν, ο αγροτικός συνεταιρισμός να αρχίσει να πουλάει καλαμπόκι στην αγορά πρέπει το κέρδος ανά στρέμμα να αυξηθεί κατά τουλάχιστον 11.57€, δηλαδή η τιμή του ενός δεματίου καλαμποκιού στην αγορά να αυξηθεί κατά τουλάχιστον $\frac{11.57}{120} \cong 0.10€$, δεδομένου ότι όλοι οι υπόλοιποι συντελεστές παραμένουν ίδιοι.

Ερώτημα ε)

Συνεχίζουμε στην Αναφορά Ευαισθησίας (Sensitivity Report) και συγκεκριμένα στην περιοχή με τίτλο Constraints. Εδώ παρατηρούμε πως ο περιορισμός για τις Συνολικές ώρες επίβλεψης δεν είναι δεσμευτικός (not binding), αφού από τις 2200 ώρες ετησίως που διαθέτουμε χρησιμοποιούμε μόνο τις περίπου 2120.48 ώρες. Επομένως, υπάρχει κάποιο περιθώριο αύξησης ή μείωσης του δεξιού μέλους του περιορισμού των 2200 ωρών, χωρίς καμία επίδραση ούτε στην βέλτιστη λύση ούτε στην αντικειμενική συνάρτηση. Συγκεκριμένα, η σκιώδης τιμή (Shadow Price) θα είναι υποχρεωτικά μηδέν και αυτό δεν θα αλλάξει, όσο μεγάλη και αν είναι η αύξηση (φράγμα αύξησης $1E + 30$, δηλαδή πρακτικά άπειρο) και για μείωση μέχρι περίπου 79.52 ώρες. Οπότε, στην δική μας περίπτωση η αξία μιας επιπλέον διαθέσιμης ώρας επίβλεψης είναι 0€.

Ερώτημα στ)

Γνωρίζουμε ότι το ύψος της επιδότησης που έλαβε ο συνεταιρισμός αποτελούσε δεσμευτικό περιορισμό στην λύση του βασικού μας προβλήματος, επομένως είμαστε βέβαιοι πως το δάνειο θα αλλάξει την βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής μας συνάρτησης. Λύνουμε, λοιπόν, εκ νέου το πρόβλημά μας, παίρνοντας σαν δεδομένο ότι ο προϋπολογισμός του συνεταιρισμού ανέρχεται στα 250,000€ και βρίσκουμε πως το νέο βέλτιστο πλάνο προτείνει την καλλιέργεια 1474.16 στρεμμάτων σιτηρών και επιφέρει καθαρό κέρδος ύψους 501,823.71€. Οι νέοι περιορισμοί και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που μας έσωσε ο Solver βρίσκονται στο τέλος του ερωτήματος. Παρατηρούμε πως παίρνοντας το δάνειο, ο συνεταιρισμός μπορεί να είναι κατά $501,823.71 - 455,903.61 = 45,920.10$ € πιο κερδοφόρος. Χρειάζεται, όμως, να αποπληρώσει το δάνειο. Στη χειρότερη περίπτωση, ο συνεταιρισμός δανείστηκε με επιτόκιο, a , το οποίο αναπρίει όλο το επιπλέον κέρδος του, δηλαδή ισχύει ότι:

$$30,000 \cdot (1 + a) = 45,920.10$$

$$1 + a \cong 1.53$$

$$a \cong 0.53$$

Συνεπώς, απαντάμε ότι συμφέρει τον συνεταιρισμό να πάρει το δάνειο των 30,000€, εάν μπορεί να εξασφαλίσει ότι το ετήσιο επιτόκιο του δανείου δεν θα είναι μεγαλύτερο του 53%.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ			
Διαθέσιμα στρέμματα	1474,16	<=	2000,00
Ζήτηση καλαμποκιού (σε δεμάτια)	0,00	<=	90000,00
Ζήτηση σιτηρών (σε δεμάτια)	147416,41	<=	160000,00
Περιορισμός μοσχαριών	0,00	<=	2500,00
Παραγόμενο καλαμπόκι για τροφή (σε δεμάτια)	0,00	<=	0,00
Εργατοώρες ανά στρέμμα καλαμποκιού, σιτηρών και ανά μοσχάρι	11793,31	=	11793,31
Δεμάτια καλαμπόκι για τροφή μοσχαριών	0,00	=	0,00
Συνολικές ώρες επίβλεψης	2200,00	<=	2200,00
Περιορισμός χρημάτων (σε ευρώ)	250000,00	<=	250000,00
Περιορισμός μη - αρνητικότητας			

Συνολικό κέρδος (σε ευρώ)
501823,71

Ερώτημα ζ)

Από τα προηγούμενα ερωτήματα, έχουμε δει πως ο συνεταιρισμός δεν χρησιμοποιεί όλα τα στρέμματα που έχει στη διάθεσή του. Ακόμα και στο ερώτημα στ), στο οποίο ο συνεταιρισμός έχει άλλα 30,000€ για τον προϋπολογισμό του, τα χρήματα τελειώνουν προτού καλυφθεί όλη η διαθέσιμη καλλιεργήσιμη γη. Απαντάμε, λοιπόν, πως η πρόταση του κτηματία δεν θα έπρεπε να γίνει δεκτή, καθώς ο συνεταιρισμός δεν διαθέτει το απαραίτητο κεφάλαιο ώστε να αξιοποιήσει τα ενοικιαζόμενα στρέμματα.

Ερώτημα η)

Μεταφερόμαστε στο Sensitivity Report (Αναφορά Ευαισθησίας) και στην περιοχή με τίτλο Variable Cells. Βρήκαμε ότι ο τελικός συντελεστής (Objective Coefficient) για την μεταβλητή x_2 είναι 400. Αυτό σημαίνει ότι (χωρίς να συνυπολογίζουμε την πληρωμή των εργατών) κάθε στρέμμα σιτηρών επιφέρει 400€ κέρδος στον συνεταιρισμό, αφού αφαιρεθεί το κόστος των σπόρων και τα άλλα έξοδα καλλιέργειας. Για αυτά τα δεδομένα, η βέλτιστη λύση πραγματοποιείται κάνοντας χρήση περίπου των 1325,30 (Final Value) από τα συνολικά στρέμματα που διαθέτουμε για την καλλιέργεια σιτηρών. Από την στήλη που υποδεικνύει την ελάχιστη δυνατή μείωση (Allowable Decrease) των συντελεστών, παρατηρούμε ότι η βέλτιστη λύση παραμένει ίδια αν ο συντελεστής της x_2 μειωθεί έως και 12 μονάδες, δηλαδή αν το κόστος των σπόρων και των άλλων εξόδων καλλιέργειας αυξηθεί μέχρι και 12€. Απαντάμε, λοιπόν, πως προκειμένου να αλλάξει ο συνεταιρισμός την απόφασή του για την ποσότητα στρεμμάτων που εκχωρεί στην καλλιέργεια, το κόστος των σπόρων και των άλλων εξόδων καλλιέργειας σιταριού πρέπει να αυξηθεί κατά τουλάχιστον 12€, δεδομένου ότι όλα τα υπόλοιπα δεδομένα παραμένουν ίδια. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο συνεταιρισμός θα έπρεπε να πάρει ακριβώς την ίδια απόφαση αν το κόστος των σπόρων και των εξόδων καλλιέργειας σιταριού παρέμενε ίδιο, άλλα το κέρδος από κάθε στρέμμα μειωνόταν κατά 12€ (είτε λόγω κακής σοδειάς που έδωσε λιγότερα δεμάτια είτε λόγω πτώσης της τιμής του ενός δεματίου σιταριού στην αγορά).

Ερώτημα θ)

1^η προσέγγιση (δισαισθητικά)

Θα εξετάσουμε το καθαρό κέρδος που παράγει ένα στρέμμα ντομάτες σε σχέση με το καθαρό κέρδος που παράγει ένα στρέμμα σιτάρι (αφού γνωρίζουμε ότι δεν συμφέρει να φυτέψουμε καλαμπόκι ή να αναθρέψουμε μοσχάρια). Θα μπορούσε κανείς να φανταστεί ότι εξετάζουμε αν συμφέρει στο «πρώτο στρέμμα» του συνεταιρισμού να φυτεύουν ντομάτες ή σιτάρι, για αυτό δεν θα μας απασχολήσουμε περιορισμοί που αρχίζουν να γίνονται δεσμευτικοί (binding) όταν έχουμε μεγάλες ποσότητες (όπως λ.χ. ο περιορισμός της ζήτησης στην αγορά ή των διαθέσιμων ωρών για επίβλεψη των εργατών). Αν βρούμε πως το καθαρό κέρδος ανά στρέμμα για τις ντομάτες είναι μεγαλύτερο, σημαίνει πως συμφέρει να φυτευτεί κάποια ποσότητα από αυτές (για να μάθουμε πόσες ακριβώς θα έπρεπε να λύσουμε εκ νέου το πρόβλημα) και άρα είναι μια συμφέρουσα εναλλακτική καλλιέργεια. Αφού ο περιορισμός των διαθέσιμων ωρών επίβλεψης

δεν θα ληφθεί υπόψιν, δεν έχουμε κανέναν λόγο να επιλέξουμε έμπειρους εργάτες για την καλλιέργεια του ενός στρέμματος, αφού οι ανειδίκευτοι κοστίζουν λιγότερο. Θεωρούμε, λοιπόν, ότι όλες οι απαιτούμενες ώρες εργασίας καλύπτονται από ανειδίκευτους. Με αυτά κατά νου, έχουμε:

- **Σιτάρι**

Τα έξοδα καλλιέργειας του «πρώτου στρέμματος» σιταριού είναι 110€ ετησίως, ενώ απαιτούνται 8 ώρες εργασίας και παράγονται 100 δεμάτια, τα οποία πωλούνται προς 5.10€ το δεμάτιο. Επομένως, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά ανειδίκευτους εργάτες, το καθαρό κέρδος του «πρώτου στρέμματος» σιτηρών είναι:

$$5.10 \cdot 100 - 110 - 7 \cdot 8 = 344\text{€}$$

- **Ντομάτα**

Τα έξοδα καλλιέργειας του «πρώτου στρέμματος» ντομάτας είναι 70€ ετησίως, ενώ απαιτούνται 15 ώρες εργασίας και παράγονται 45 τελάρα, τα οποία πωλούνται προς 12€ το τελάρο. Επομένως, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά ανειδίκευτους εργάτες, το καθαρό κέρδος του «πρώτου στρέμματος» ντομάτας είναι:

$$12 \cdot 45 - 70 - 7 \cdot 15 = 365\text{€}$$

Αφού το καθαρό κέρδος του «πρώτου στρέμματος» ντομάτας είναι μεγαλύτερο από εκείνο του «πρώτου στρέμματος» σιτηρών, απαντάμε ότι οι ντομάτες είναι μία συμφέρουσα εναλλακτική καλλιέργεια.

2^η προσέγγιση (μέσω σκιωδών τιμών)

Κοιτώντας την αναφορά απάντησης (Answer Report), εύκολα μπορούμε να καταλάβουμε πως αυτό που εμποδίζει τον συνεταιρισμό από το να φυτέψει περισσότερο σιτάρι (το οποίο φαίνεται να είναι η πιο κερδοφόρα δραστηριότητα) είναι η έλλειψη οικονομικού κεφαλαίου. Για να δούμε αν οι ντομάτες είναι μια συμφέρουσα εναλλακτική, στρεφόμαστε στην αναφορά ευαισθησίας (Sensitivity Report) και συγκεκριμένα στη σκιώδη τιμή (Shadow Price) του περιορισμού χρημάτων. Βλέπουμε πως η σκιώδης τιμή του περιορισμού είναι 2.07€, δηλαδή κάθε ευρώ που δεν επενδύει σε καλαμπόκι ο συνεταιρισμός οδηγεί σε μείωση του καθαρού κέρδους του κατά 2.07€. Το παραπάνω επεκτείνεται ανάλογα για οποιοδήποτε μέρος της χρηματοδότησης, αφού η μέγιστη επιτρεπόμενη μείωση (allowable decrease) είναι ίση με το ποσό της χρηματοδότησης (δηλαδή αν αποφασίσει να μην επενδύσει λ.χ. 100€ το καθαρό κέρδος θα μειωθεί κατά $2.07 \cdot 100 = 207\text{€}$). Ας υποθέσουμε, αυθαίρετα, ότι ο συνεταιρισμός αποφασίζει να μην επενδύσει ποσό ίσο με αυτό που χρειάζεται για την καλλιέργεια ενός στρέμματος καλαμποκιού (μαζί με την πληρωμή των εργατών), δηλαδή έστω ότι αποφασίζει να μην επενδύσει σε καλαμπόκι $110 + 7 \cdot 8 = 166\text{€}$. Αυτό θα οδηγήσει σε μείωση του καθαρού κέρδους κατά $2.07 \cdot 166 = 343.62\text{€}$. Έστω τώρα ότι επενδύει αυτά τα 166€ στην καλλιέργεια ντομάτας. Είναι προφανές πως θα έχει αρκετά στρέμματα για να το κάνει αυτό και υποθέτουμε προς στιγμήν πως οι ώρες επίβλεψης φτάνουν για να καλλιεργήσουν ανειδίκευτοι εργάτες τα νέα στρέμματα ντομάτας. Τότε, με την ντομάτα να κοστίζει 70€ και να χρειάζεται 15 εργατοώρες

ανά στρέμμα, θεωρώντας x_4 της μεταβλητή που εκφράζει τα στρέμματα ντομάτας, τα 166€ επαρκούν για καλλιέργεια:

$$(70 + 7 \cdot 15) \cdot x_4 = 166$$

$$x_4 \cong 0.95$$

δηλαδή για περίπου 0.95 στρέμματα ντομάτας. Παρατηρούμε πως η υπόθεσή μας για χρήση ανειδίκευτων εργατών ήταν σωστή, αφού τα 0.95 στρέμματα θα χρειαστούν λιγότερες από 15 εργατοώρες, ενώ από την αναφορά απάντησης (Answer Report) μπορούμε να δούμε πως στον συνεταιρισμό περισσεύουν λίγο λιγότερες από 80, χωρίς καν να λάβουμε υπόψιν τις επιπλέον ώρες επίβλεψης από την μικρότερη καλλιέργεια καλαμποκιού. Με το κάθε στρέμμα να παράγει 45 τελάρα ντομάτας και το κάθε τελάρο να πωλείται για 12€ στην αγορά, η καλλιέργεια ντομάτας οδηγεί σε καθαρό κέρδος ύψους:

$$(12 \cdot 45 - 70 - 7 \cdot 15) \cdot 0.95 = 346.75\text{€}$$

Το παραπάνω είναι κατά 3.13€ υψηλότερο από το ποσό που έχασε ο συνεταιρισμός επειδή δεν καλλιεργήσε καλαμπόκι. Είναι, λοιπόν, προφανές πως οι ντομάτες είναι μια συμφέρουσα εναλλακτική.

Ερώτημα ι)

Εάν ο συνεταιρισμός αποφασίσει να βάλει λίπασμα σε όλη την καλλιεργήσιμη γη, θα ξεκινήσει με 20,000€ λιγότερα (γεγονός που ξέρουμε ότι θα επηρεάσει αρνητικά την αντικειμενική συνάρτηση, αφού ο προϋπολογισμός αποτελούσε δεσμευτικό περιορισμό), θα έχει όμως βελτιωμένες αποδόσεις στις δραστηριότητες γεωργίας (το οποίο προφανώς θα την επηρεάσει θετικά). Λύνουμε εκ νέου το πρόβλημα θεωρώντας ότι ο συνεταιρισμός αποφάσισε να βάλει λίπασμα. Τα νέα δεδομένα, οι νέοι περιορισμοί και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που μας έσωσε ο Solver βρίσκονται στο τέλος του ερωτήματος. Βρίσκουμε ότι το καθαρό κέρδος που προκύπτει είναι ίσο με 543,368.42€, ποσό κατά 87,464.81€ μεγαλύτερο από τη βέλτιστη λύση χωρίς το λίπασμα. Επομένως, απαντάμε ότι είναι προς συμφέρον του συνεταιρισμού να βάλει λίπασμα στην καλλιεργήσιμη γη.

Παραγωγικές δυνατότητες ανά στρέμμα		
Καλαμπόκι (σε δεμάτια)	Σιτηρά (σε δεμάτια)	Μοσχάρια (σε μονάδες)
150,00	120,00	2,00

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ			
Διαθέσιμα στρέμματα	1226,32	<=	2000,00
Ζήτηση καλαμποκιού (σε δεμάτια)	89210,53	<=	90000,00
Ζήτηση σιτηρών (σε δεμάτια)	75789,47	<=	160000,00
Περιορισμός μοσχαριών	0,00	<=	2500,00
Παραγόμενο καλαμπόκι για τροφή (σε δεμάτια)	0,00	<=	89210,53
Εργατώρες ανά στρέμμα καλαμποκιού, σιτηρών και ανά μοσχάρι	11000,00	=	11000,00
Δεμάτια καλαμπόκι για τροφή μοσχαριών	0,00	=	0,00
Συνολικές ώρες επίβλεψης	2200,00	<=	2200,00
Περιορισμός χρημάτων (σε ευρώ)	200000,00	<=	200000,00
Περιορισμός μη - αρνητικότητας			

Συνολικό κέρδος (σε ευρώ)
543368,42

Ερώτημα κ)

Οι έμπειροι εργάτες πληρώνονται υψηλότερα από τους ανειδίκευτους, έχουν όμως το πλεονέκτημα πως χρειάζονται λιγότερη ώρα επίβλεψης από τους τελευταίους. Ωστόσο, στη βέλτιστη λύση που βρήκαμε, οι συνολικές ώρες επίβλεψης δεν αποτελούν δεσμευτικό (binding) περιορισμό και άρα δεν υπάρχει κανένας λόγος για τον συνεταιρισμό να πληρώσει παραπάνω για να τις μειώσει, αφού αυτό δεν θα βοηθήσει καμία άλλη ροή εσόδων. Απαντάμε, λοιπόν, πως για να συμφέρει τον συνεταιρισμό να έχει στο εργατικό δυναμικό του έμπειρους εργάτες, εκείνοι θα πρέπει να αμείβονται το ίδιο ή λιγότερο από τους ανειδίκευτους.