



Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα  
Εργασία 9<sup>η</sup>:

Επίλυση Άσκησης 9 Κεφαλαίου 14

**Ονοματεπώνυμο:** Γεωργίου Ευαγγελία-Μερόπη, **AM:** ge19044

**Ονοματεπώνυμο:** Λεβής Γεώργιος, **AM:** ge19120

**Ονοματεπώνυμο:** Μήτσης Αντώνης, **AM:** ge1906

## Επίλυση

Στρατηγικές		Παίκτης 2			
		B1	B2	B3	B4
Παίκτης 1	A1	-3	6	-3	8
	A2	-3	2	-6	5
	A3	6	-7	-3	2

A) Θα παρουσιάσουμε την μέθοδο maximum-minimum στρατηγικής για την επίλυση του παραπάνω παιγνίου μηδενικού αθροίσματος.  
Ο Παίκτης 1 έχει 3 στρατηγικές, την A1, την A2 και την A3 και για κάθε μία από αυτές υπολογίζουμε το ελάχιστο (minimum) κόστος.

**Στρατηγική A1:** Ελάχιστο (minimum) κέρδος = -3

**Στρατηγική A2:** Ελάχιστο (minimum) κέρδος = -6

**Στρατηγική A3:** Ελάχιστο (minimum) κέρδος = -7

Συμβολίζουμε τώρα ως maximin την μεγαλύτερη (maximum) τιμή κέρδους από τις τρεις ελάχιστες (minimum) τιμές για τον Παίκτη 1 και ισούται με -3. Αντίστοιχα, για τον Παίκτη 2, για κάθε μία από τις 3 στρατηγικές του Παίκτη 1 υπολογίζουμε την μέγιστη ζημιά.

**Στρατηγική B1:** Μέγιστη (maximum) ζημιά= 6

**Στρατηγική B2:** Μέγιστη (maximum) ζημιά= 6

**Στρατηγική B3:** Μέγιστη (maximum) ζημιά= -3

**Στρατηγική B4:** Μέγιστη (maximum) ζημιά= 8

Συμβολίζουμε τώρα ως minimax την μικρότερη (minimum) τιμή της ζημιάς από τις τρεις μεγαλύτερες (maximum) για τον Παίκτη 2 και ισούται με -3. Οι παραπάνω υπολογισμοί παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Στρατηγικές		Παίκτης 2				min	maximin
		B1	B2	B3	B4		
Παίκτης 1	A1	-3	6	-3	8	-3	
	A2	-3	2	-6	5	-6	
	A3	6	-7	-3	2	-7	
max		6	6	-3	8	V=-3	
		minimax					

Παρατηρούμε πως η maximin τιμή για τον Παίκτη 1 είναι -3 και προκύπτει από την επιλογή της στρατηγικής A1 και η minimax τιμή για τον Παίκτη 2 είναι -3 και προκύπτει από την επιλογή της στρατηγικής B3.

Πιο συγκεκριμένα, ισχύει ότι  $\max_{i=1,2,3} \min_{j=1,2,3,4} (a_{ij}) = -3 = \min_{j=1,2,3,4} \max_{i=1,2,3} (a_{ij})$ , με αποτέλεσμα το παίγνιο να βρίσκεται σε ισορροπία. Δηλαδή, η τελική λύση του παίγνιου δίνεται από τις επιλογές (A1,B3) με τιμή παιγνίου  $V=-3$  μονάδες κέρδους, με νικητή τον Παίκτη 2, ο οποίος θα κερδίζει ουσιαστικά 3 μονάδες και τον Παίκτη 1 να πετυχαίνει την μικρότερη δυνατή ζημία, δηλαδή να χάνει 3 μονάδες. Αυτό, σημαίνει πως οι δύο παίκτες επέλεξαν την βέλτιστη για τα συμφέροντα τους στρατηγική, χωρίς όμως να έχουμε ένα δίκαιο παίγνιο καθώς  $V \neq 0$ .

Β) Θα παρουσιάσουμε την μέθοδο διαδοχικών απαλοιφών για την επίλυση του παραπάνω παιγνίου μηδενικού αθροίσματος.

Στρατηγικές		Παίκτης 2			
		B1	B2	B3	B4
Παίκτης 1	A1	-3	6	-3	8
	A2	-3	2	-6	5
	A3	6	-7	-3	2

Ο Παίκτης 2 εύκολα διαπιστώνει πως  $8 > 6$ ,  $5 > 2$ ,  $2 > -7$ , δηλαδή ότι τα στοιχεία της 4<sup>ης</sup> στήλης είναι όλα μεγαλύτερα από αυτά της 2<sup>ης</sup>, επομένως η στρατηγική B4 είναι υποδεέστερη από την στρατηγική B2 για οποιαδήποτε επιλογή του Παίκτη 1 και για αυτό μπορεί να την απαλείψει από το πίνακα και άρα προκύπτει:

Στρατηγικές		Παίκτης 2		
		B1	B2	B3
Παίκτης 1	A1	-3	6	-3
	A2	-3	2	-6
	A3	6	-7	-3

Στην συνέχεια, πάλι ο Παίκτης 2 διαπιστώνει πως  $-3 = -3$ ,  $-3 > -6$ ,  $6 > -3$ , δηλαδή ότι τα στοιχεία της 1<sup>ης</sup> στήλης είναι όλα μεγαλύτερα ή ίσα από αυτά της 3<sup>ης</sup>, επομένως η στρατηγική B1 είναι υποδεέστερη από την στρατηγική B3 για οποιαδήποτε επιλογή του Παίκτη 1 και για αυτό μπορεί να την απαλείψει από το πίνακα και άρα προκύπτει:

Στρατηγικές		Παίκτης 2	
		B2	B3
Παίκτης 1	A1	6	-3
	A2	2	-6
	A3	-7	-3

Τώρα, ο Παίκτης 1 με την σειρά του παρατηρεί πως  $2 < 6$  και  $-6 < -3$ , δηλαδή ότι τα στοιχεία της 2<sup>ης</sup> γραμμής είναι όλα μικρότερα από αυτά της 1<sup>ης</sup>, επομένως η στρατηγική A2 είναι υποδεέστερη από την στρατηγική A1 για οποιαδήποτε επιλογή του Παίκτη 2 και για αυτό μπορεί να την απαλείψει από το πίνακα και άρα προκύπτει:

Στρατηγικές		Παίκτης 2	
		B2	B3
Παίκτης 1	A1	6	-3
	A3	-7	-3

Στη συνέχεια και πάλι ο Παίκτης 1 διαπιστώνει πως  $-7 < 6$ ,  $-3 = -3$ , δηλαδή ότι τα στοιχεία της 2<sup>ης</sup> γραμμής είναι όλα μικρότερα ή ίσα από αυτά της 1<sup>ης</sup> επομένως η στρατηγική A3 είναι υποδεέστερη από την στρατηγική A1 για οποιαδήποτε επιλογή του Παίκτη 2 και για αυτό μπορεί να την απαλείψει από το πίνακα και άρα προκύπτει:

Στρατηγικές		Παίκτης 2	
		B2	B3
Παίκτης 1	A1	6	-3

Στο επόμενο και τελευταίο βήμα ο Παίκτης 2 παρατηρεί πως  $6 > -3$ , δηλαδή ότι το στοιχείο της 1<sup>ης</sup> στήλης είναι μεγαλύτερο από αυτό της 2<sup>ης</sup>, επομένως η στρατηγική B2 είναι υποδεέστερη από την στρατηγική B3 για οποιαδήποτε επιλογή του Παίκτη 1 και για αυτό μπορεί να την απαλείψει από το πίνακα και άρα προκύπτει:

Στρατηγικές		Παίκτης 2
		B3
Παίκτης 1	A1	-3

Ο παραπάνω πίνακας είναι το τελικός πίνακας που προκύπτει και περιέχει τον τελικό συνδυασμό στρατηγικών  $(A1, B3)$ , που είναι και το σημείο ισορροπίας και δίνει τιμή παιγνίου  $V=-3$ .