Y-Δ 変換と Δ-Y 変換

れいな（仮）

2020 年 8 月 2 日

1　Y-Δ 変換

図 1 の Y 接続回路と図 2 の Δ 接続回路の端子 A-B、B-C、端子 C-A の各端子間の合成インピーダンスがそれぞれ等しいとき、R_1, R_2, R_3 を R_a, R_b, R_c で表すことを考える。

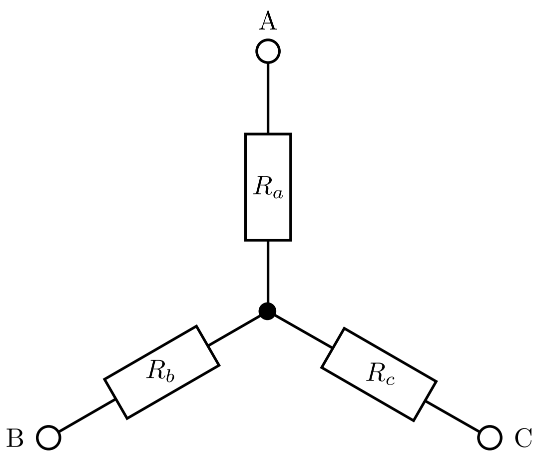

図 1　Y 接続回路

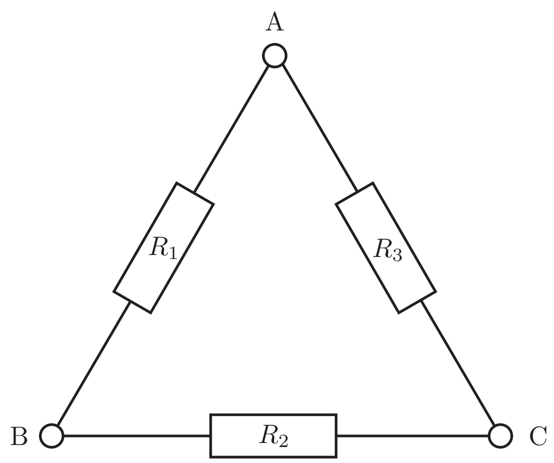

図 2　Δ 接続回路

Y-Δ 変換

$$R_1 = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}{R_c}, \quad R_2 = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}{R_a}, \quad R_3 = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}{R_b} \tag{1}$$

(1)：端子 A-D 間の合成抵抗を求める

図 1 と図 2 で B-C 間を短絡させて、図 3 や図 4 のようにする。Y 接続回路において、端子 A-D 間の抵抗 R_{AD} は

$$R_{\mathrm{AD}} = R_a + \frac{R_bR_c}{R_b + R_c} = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}{R_b + R_c} \tag{2}$$

である。一方、Δ 接続回路において、端子 A-D 間の抵抗 R_{AD} を求めると、

$$\frac{1}{R_{\mathrm{AD}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \tag{3}$$

となる。式 (2) と式 (3) が等しくなるように設定すれば良いので、

$$\frac{1}{R_{\mathrm{AD}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_b + R_c}{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a} \tag{4}$$

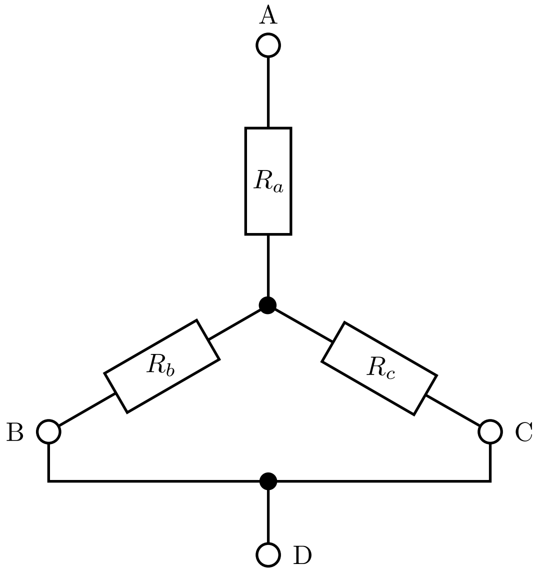

図 3　Y 接続回路 (2)

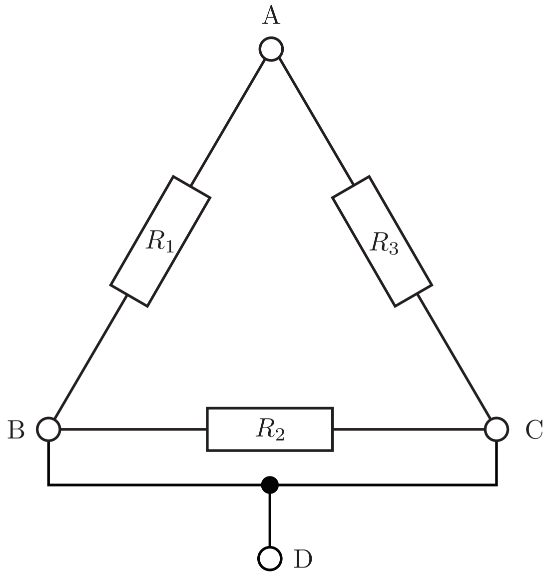

図 4　Δ 接続回路 (2)

が成立すれば良い。

同様に C-A 間を短絡させた場合を考えると、

$$\frac{1}{R_{\mathrm{BE}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_c + R_a}{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a} \tag{5}$$

が成立する。また、A-B 間を短絡させた場合を考えると、

$$\frac{1}{R_{\mathrm{CF}}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_a + R_b}{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a} \tag{6}$$

が成立する。

(2)：R_1, R_2, R_3 を求める

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_b + R_c}{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}$$
$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_c + R_a}{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}$$
$$\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_a + R_b}{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}$$

3 つの式の両辺をそれぞれ足して、両辺を 2 で割ると

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_a + R_b + R_c}{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a} \tag{7}$$

が得られる。この式を使うことで R_1, R_2, R_3 は式 (1) のようになることがわかる。

2 Δ-Y 変換

図 1 の Y 接続回路と図 2 の Δ 接続回路の端子 A-B、B-C、端子 C-A の各端子間の合成インピーダンスがそれぞれ等しいとき、今度は逆に R_a, R_b, R_c を R_1, R_2, R_3 で表すことを考える。

Δ-Y 変換

$$R_a = \frac{R_3R_1}{R_1+R_2+R_3}, \quad R_b = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3}, \quad R_c = \frac{R_2R_3}{R_1+R_2+R_3} \tag{8}$$

(1)：端子 A-B 間の合成抵抗を求める

Y 接続回路での端子 A-B 間の抵抗 R_{AB} は

$$R_{\mathrm{AB}} = R_a + R_b \tag{9}$$

である。一方、Δ 接続回路での端子 A-B 間の抵抗 R_{AB} は

$$\frac{1}{R_{\mathrm{AB}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2+R_3} = \frac{R_1+R_2+R_3}{R_1(R_2+R_3)} \tag{10}$$

となる。式 (9) と式 (10) が等しくなるように設定すれば良いので、

$$R_{\mathrm{AB}} = R_a + R_b = \frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3} \tag{11}$$

が成立すれば良い。

同様に B-C 間について考えると、

$$R_{\mathrm{BC}} = R_b + R_c = \frac{R_2(R_3+R_1)}{R_1+R_2+R_3} \tag{12}$$

が成立する。また、C-A 間を短絡させた場合を考えると、

$$R_{\mathrm{CA}} = R_c + R_a = \frac{R_3(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3} \tag{13}$$

が成立する。

(2)：R_a, R_b, R_c を求める

$$\begin{aligned} R_a + R_b &= \frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3} \\ R_b + R_c &= \frac{R_2(R_3+R_1)}{R_1+R_2+R_3} \\ R_c + R_a &= \frac{R_3(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3} \end{aligned}$$

3 つの式の両辺をそれぞれ足して、両辺を 2 で割ると

$$R_a + R_b + R_c = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_1+R_2+R_3} \tag{14}$$

が得られる。この式を使うことで R_a, R_b, R_c は式 (8) のようになることがわかる。