PRMLゼミ

1.2　確率論

anmitsu48

1.2節のイントロ

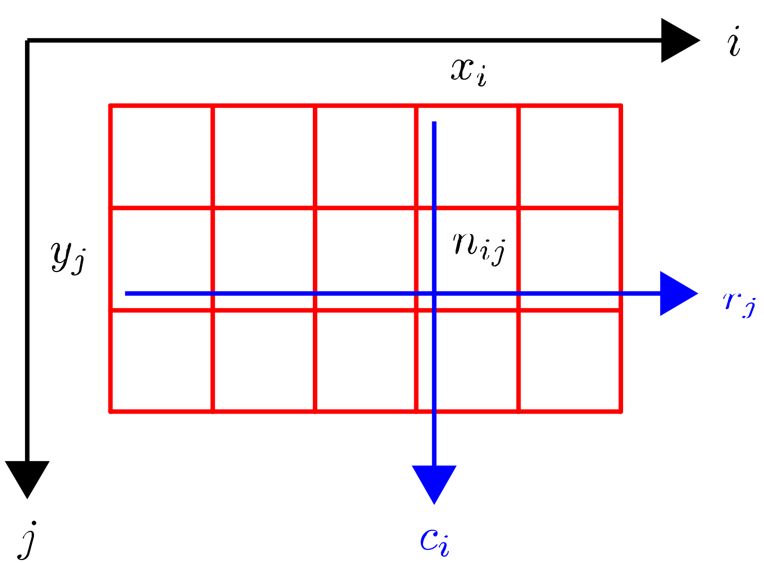
同時確率と周辺確率

- 1回の試行で確率変数 X, Y の両方について
  サンプルをとる。この試行を N 回行ったとする。
- X が x_i , Y が y_j をとる確率： $p(X = x_i, Y = y_j)$

同時確率

- X が x_i , Y が y_j となる試行が n_{ij} 個あったとすると、

$$p(X = x_i, Y = y_j) = \frac{n_{ij}}{N}$$



- 周辺確率（Yに関する周辺化）

$$p(X = x_i) = \sum_j p(X = x_i, Y = y_j)$$

同時確率と条件付き確率

- 変数 X が x_i の下で、変数 Y が y_j となる確率。（条件付き確率）

$$p(Y = y_j | X = x_i) = \underbrace{\frac{p(X = x_i, Y = y_j)}{\sum_j p(X = x_i, Y = y_j)}}$$

分母は X が x_i となる確率

- 条件付き確率の公式

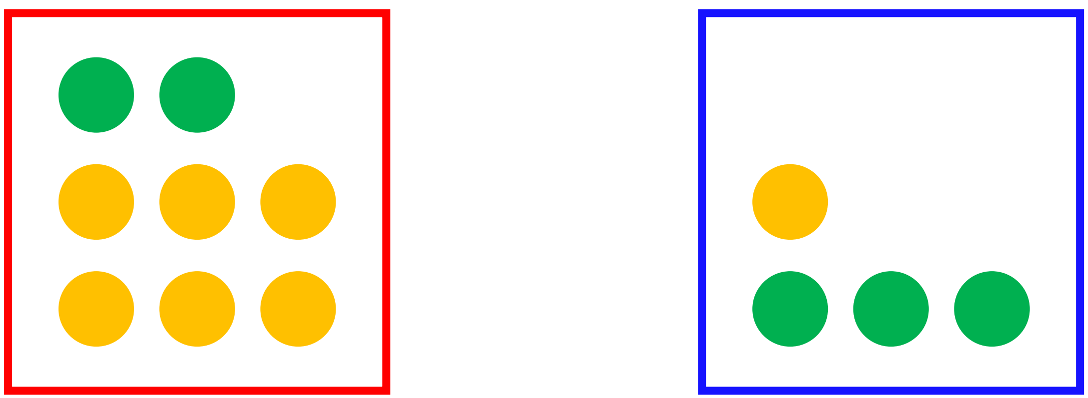
$$p(X, Y) = p(Y|X)p(X) = p(X|Y)p(Y)$$

$$p(Y|X) = \frac{p(X|Y)p(Y)}{p(X)}$$

ベイズの定理

1.2節のイントロで考える問題

- ２つの箱（赤・青）に、青りんごとオレンジが入っている。
- 箱を1つランダムに選び、その後、果物を1つランダムに選ぶ。どの果物かを記録したら元の箱に戻す。



- 赤色の箱を選ぶ確率:2/5, 青色の箱を選ぶ確率:3/5
- 箱の中の果物は全てを等確率で選択する。

箱とフルーツの問題の定式化 ①

- 選んだ箱が「赤」、「青」である確率

$$p(B=r)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}, \quad p(B=b)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

- 箱を選んだ後に、選んだフルーツが「青りんご」、「オレンジ」である確率

$$p(F=a|B=r)=\frac{1}{4}, \quad p(F=o|B=r)=\frac{3}{4}$$

$$p(F=a|B=b)=\frac{3}{4}, \quad p(F=o|B=b)=\frac{1}{4}$$

- 選んだフルーツが「青りんご」である確率
  - 選んだ箱が赤の場合と青の場合を足し合わせる。

$$p(F=a)=p(F=a|B=r)p(B=r)+p(F=a|B=b)p(B=b)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{11}{20}$$

箱とフルーツの問題の定式化 ②

- 「オレンジ」を選んだとき、それが「赤」色の箱から選ばれた確率
  - 「オレンジ」を選んだということを全体としたとき、
    それが「赤」、「青」のどちらであるかを考えることができる。

$$p(B=r|F=o) = \frac{p(F=o|B=r)p(B=r)}{p(F=o)} = \frac{3/4 \times 2/5}{9/20} = \frac{2}{3}$$

ベイズの定理

「ベイズの定理」を意識しなくても、
全体（オレンジ）と部分（オレンジかつ赤）を
意識すると、6/20を9/20で割ることは明らか。

- 選ばれたフルーツがわからないとき、どの箱が選ばれたかの確かさを表す確率を「（箱に関する）事前確率」という。
- 一方で、選ばれたフルーツがわかった後に、どの箱が選ばれたかの確かさを表す確率を「（箱に関する）事後確率」という。

事前確率 $p(B=r) = \frac{2}{5}$ ⇒ $p(B=r|F=o) = \frac{2}{3}$ 事後確率

確率変数と独立

- 確率変数 X, Y が独立
  - 同時確率が個々の変数の確率の積に分解できる。

$$p(X,Y) = p(X)p(Y)$$

- 条件付き確率と独立
  - 条件付き確率が条件付けている変数に依存しない。

$$p(Y|X) = p(Y)$$

※ 先ほどの箱とフルーツの例では $p(F=a) \neq p(F=a|B=r)$ となるため、
確率変数 F, B は独立ではない。

1.2.1節の紹介

- 1.2.1節　確率密度

確率密度関数

- 確率変数 x が連続で、その値が区間 (a,b) にある確率

$$p\left(x \in (a,b)\right) = \int_a^b \underline{p(x)}\,\mathrm{d}x$$

確率密度関数

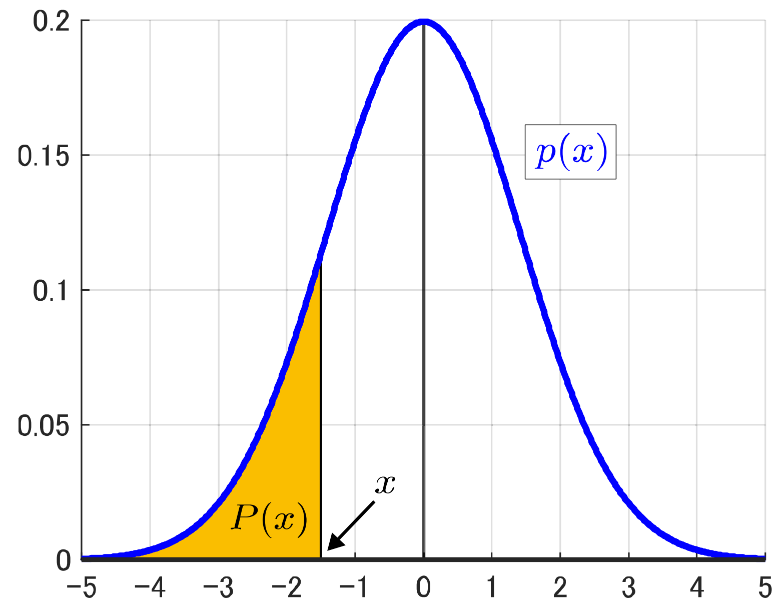
- 確率密度関数が満たす性質
  - ① 確率密度関数は非負
  - ② 全区間で積分すると1

$$p(x) \geq 0,\ \forall x \qquad \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

- 累積密度関数 $P(z)$:
  確率変数 x が z 以下となる確率

$$P(z) = \int_{-\infty}^{z} p(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P(x) = p(x)$$



確率密度関数の変数変換

※　x, y の確率密度関数を $p_x(x), p_y(y)$ とここでは表すことにする。

- x, y の間に $x = g(y)$ という関係があり、x の確率密度関数 $p_x(x)$ がわかっているとき、$p_y(y)$ がどのように表されるかを考える。
- x の世界の区間 $(x, x + \delta x)$ が、y の世界の区間 $(y, y + \delta y)$ に対応するとき、$p(x)\delta x \approx p(y)\delta y$ が成立する。

$$\Rightarrow \quad p_y(y) = p_x(x)\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right| = p_x(g(y))|g'(y)|$$

【cf. 2次元の場合】

- $(x, y) = \left(h_1(z, w), h_2(z, w)\right)$ のときは、ヤコビアンを使って変数変換をする。

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1(z,w)}{\partial z} & \dfrac{\partial h_1(z,w)}{\partial w} \\ \dfrac{\partial h_2(z,w)}{\partial z} & \dfrac{\partial h_2(z,w)}{\partial w} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} p_{z,w}(z,w) &= p_{x,y}(x,y) \\ &\quad \times |\det J(z,w)| \end{aligned}$$

確率密度関数に関するその他のコメント

- 多変数の場合も1変数と同様の式が成立する。

$$p(\boldsymbol{x}) \geq 0, \forall \boldsymbol{x} \qquad \int \underbrace{p(\boldsymbol{x})}_{\text{同時確率密度関数}} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1$$

- 周辺確率と条件付き確率の公式の連続版

$$p(x) = \int p(x, y)\,\mathrm{d}y \qquad p(x, y) = p(y|x)p(x) = p(x|y)p(y)$$

1.2.2節の紹介

- 1.2.2節　期待値と分散

期待値

- 離散分布（確率分布: $p(x)$）の場合

$$\mathbb{E}[f(x)] = \sum_x p(x) f(x)$$

- 連続分布（確率分布: $p(x)$）の場合

$$\mathbb{E}[f(x)] = \int p(x) f(x) \, \mathrm{d}x$$

- コンピュータなどで期待値の計算を行う場合
  - 真の確率分布 $p(x)$ から N 個のデータ点が得られているだけで、確率分布自体はわからない。
  - 期待値の計算は、得られたデータの平均値で近似する。

$$\mathbb{E}[f(x)] \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n)$$

分散と共分散

- $f(x)$ の分散（variance）の定義

$$\mathrm{var}[f(x)] = \mathbb{E}\left[(f(x) - \mathbb{E}[f(x)])^2\right] = \mathbb{E}\left[f(x)^2\right] - \mathbb{E}[f(x)]^2$$

⇓

$$\mathrm{var}[x] = \mathbb{E}\left[x^2\right] - \mathbb{E}[x]^2$$

- 2つの確率変数 x, y の共分散（covariance）の定義

$$\mathrm{cov}[x, y] = \mathbb{E}_{x,y}\left[(x - \mathbb{E}[x])(y - \mathbb{E}[y])\right] = \mathbb{E}_{x,y}[xy] - \mathbb{E}[x]\mathbb{E}[y]$$

  - 2つの確率変数がベクトルの場合

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}\left[(\boldsymbol{x} - \mathbb{E}[\boldsymbol{x}])(\boldsymbol{y} - \mathbb{E}[\boldsymbol{y}])^\top\right] \\ &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}\left[\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^\top\right] - \mathbb{E}[\boldsymbol{x}]\mathbb{E}[\boldsymbol{y}^\top]\end{aligned}$$

1.2.3節の紹介

- 1.2.3節　ベイズ確率

1.2.4節の紹介

- 1.2.4節　ガウス分布

1.2.5節の紹介

- 1.2.5節　曲線フィッティング再訪

1.2.6節の紹介

- 1.2.6節　ベイズ曲線フィッティング