

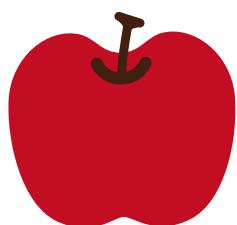
$$ma = F$$

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

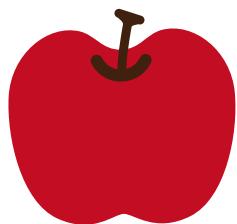


高校物理を振り返る(力学編)

anmitsu48



universal gravitation



まえがき

私は諸事情により、高校物理について振り返ることになった。その際、山本義隆先生が書かれた『新・物理入門』や、インターネットで見つけられる「高校物理の備忘録」(<https://physnotes.jp>)、浪人時代のハイパー東大理類コース⁽¹⁾のテキスト、浪人時の物理の先生、杉山忠男先生の板書を元に作成したノートを見た。私が（浪人時代であるにも関わらず）受験勉強をほったらかして作ったノート。理論だけがただ書かれているノート。ただテクニックを習得するのではなく、物理学の本質を理解するのが重要であるという考え方の下で（実際は受験勉強からの逃避が主な目的であったが）作成して、物理の受験勉強をした気になつたあの頃を思い出した。そんなノートを大学で習つたことも取り入れながら、TeXでRe-writeしている。

そのRe-writeを始めてもう3年が経つが、未だに完成していない。それに自分でも完成形が見えていない。いつ終わりになるのかもわからず、ただ自分の気の向くままに書き続けている。このTeXノートの全体の流れは、私が作成したノートに基づいている。一応、私が高校生、浪人生だった2015年度、2016年度の時点の「物理基礎」の部分の内容を取り上げたあと、「物理」の内容を取り上げている。ただし、剛体に関する記述は一番後ろに持つていった。これは、大学の力学の教科書では、剛体に関する話が一番最後に記されていることを真似したためである。

私の高校時代の物理の教員、佐藤先生は必要なところで微分や積分を用いて授業を行っていた。浪人時代の杉山先生の授業も、高校物理では「微積物理」と呼ばれる方法で授業をしていた。高校2年生の時の物理基礎の授業の担当教員は、佐藤先生ではなかった。その先生は、頑張って微分や積分を避けようとしていて、私は、イマイチ教科書の内容、受験に役立つテクニックを完璧に理解できなかつた⁽²⁾。「微積物理」だから高校物理の力学を理解できたのかどうかはわからない。ただ、高校3年生の時の佐藤先生の授業は私に大きな影響を、プラスの影響を与えて、私の物理の理解を促進させた。

本TeXノートについて

このTeXノートは、高校物理の内容を記している。ただ、教科書にのっていることは記さない。微分積分や簡単な行列の演算を利用することで、高校物理、特に「力学」の本質を記す。教科書や参考書、問題集にのっているうわべだけのことは記さないように努めた。そのため、微分積分や行列、微分方程式などを適宜利用した高校物理の教科書では出てこないような議論を開く。基本的には、高校物理で扱う内容であれば、高校数学で習う微分積分の内容で十分である。一方で、行列については高校数学で一切扱わない。そこで、付録編に行列の基礎知識を説明するsectionを設けた（付録A・173ページ～）。私は、高校数学で行列を扱っている時の、高校数学の教科書を見たことがないので、当時のレベルまで理系の高校生が行列を扱えたか知らない。そのため、行列の説明については基礎の基礎から記した。また、Taylor展開や常微分方程式など本TeXノート内の議論で必要な数学のテーマについても適宜記した。

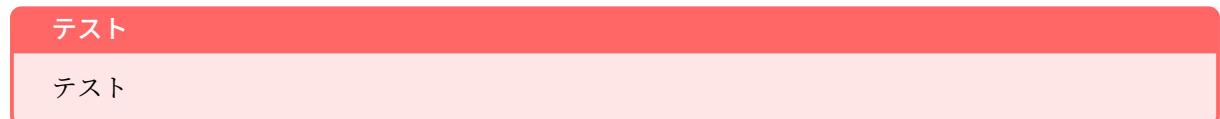
このTeXノートに、私は「高校物理を振り返る」というタイトルをつけた。これは扱う物理現象は高校物理の教科書や大学入試に出てくる内容だからである。しかし、TeXノートの流れは、高校物理の教科書のレベルを遥かに逸脱する。そのようなTeXノートを作成することを通して、高校レベルの力学を自分なりに再構成することができた。東京大学の同じ学部の人は、同期のメンバーとゼミを開き、自らの興味のある分野をさらに追求していた。このTeXノートはそのような行為とは対極の位置にあるといえよう。しかし、自分なりに力学の内容を再構成することは、非常に面白いことであるように、段々思うようになった。

(1)私は2016年度に河合塾に在籍していたが、その時は「ハイパー東大理類コース」という呼び方だった。どうやら、今は違う呼び方らしい。

(2)私は公立高校の出身である。私の卒業した高校では、数2の微分積分は2学期の後半から扱った。そのため、物理基礎の授業でも、物理の先生が微分積分を使うことはなかった。

カラー boxについて

本 T_EX ノートではいくつかの枠が出てくる。特に、2020 年 7 月の改訂以降では 2 つの枠を新たに用意した。



赤枠は物理の内容に関する重要事項を表し、青枠は数学の内容に関する重要事項を表している。色分けしているがどちらも重要である。

最後に、この T_EX ノートについて何かありましたら、kouta.nagata.0920@gmail.com まで連絡をお願いいたします。

anmitsu48
2021 年 4 月 18 日

目 次

第Ⅰ部 力学編	1
第1章 力学の基礎	3
1.1 運動の表し方	3
1.1.1 速度と加速度	3
1.1.2 座標系	5
1.1.3 等加速度運動の公式	6
1.1.4 相対運動	6
1.1.5 微分方程式の基礎 — 変数分離法 —	7
1.2 Newton の 3 つの法則	9
1.2.1 質点の導入	9
1.2.2 Newton の 3 つの法則	9
1.2.3 慣性の法則の裏の意味	10
1.3 運動方程式を解く (1) — 放物運動と空気抵抗を受ける運動 —	11
1.3.1 運動方程式の解き方	11
1.3.2 放物運動 (斜方投射)	11
1.3.3 空気抵抗を受ける落体の運動	12
1.3.4 モンキーハンティングと相対運動	13
1.4 運動方程式を解く (2) — 糸の張力と束縛条件 —	16
1.4.1 糸の質量を無視するという記述の意味	16
1.4.2 演習問題	17
1.4.3 演習問題 (続き)：相対運動の視点の導入	19
1.5 摩擦力を受ける運動	20
1.5.1 摩擦力とは何か？	20
1.5.2 摩擦力と垂直抗力	21
1.5.3 運動方程式を解く (3) — 摩擦力の影響 —	22
1.6 座標系の設定と問題の難易度	26
1.6.1 摩擦力の復習	26
1.6.2 正攻法の確認	27
1.6.3 水平方向と鉛直方向を 2 つの軸とする座標系の導入	27
1.7 浮力	30
1.7.1 水圧	30
1.7.2 浮力	30
第2章 仕事とエネルギー	31
2.1 仕事と運動エネルギー	31
2.1.1 仕事の定義	31
2.1.2 「エネルギーの原理」の導出	34
2.1.3 仕事率	35

2.2	仕事と位置エネルギー	36
2.2.1	重力のした仕事	36
2.2.2	保存力	37
2.2.3	仕事と移動経路	38
2.2.4	位置エネルギー	40
2.2.5	保存力と位置エネルギー（発展）	41
2.3	エネルギー保存則	42
2.3.1	力学的エネルギー保存則	42
2.3.2	非保存力と力学的エネルギー	43
第3章 運動量保存則と2体問題		47
3.1	運動量保存則	47
3.1.1	力積と運動量の変化	47
3.1.2	運動量保存則	48
3.1.3	反発係数	49
3.1.4	色々な衝突について考える	51
3.2	演習問題	53
3.2.1	斜面との衝突（1）	53
3.2.2	斜面との衝突（2）	55
3.2.3	演習問題（運動量保存則を使って問題を解く）	57
3.3	重心運動と相対運動	60
3.3.1	重心運動方程式	60
3.3.2	2体系の相対運動方程式	61
3.3.3	重心運動と相対運動に分離する	62
3.4	重心系で捉える2物体の運動	64
3.4.1	重心系で見たときの2物体の全運動量	64
3.4.2	2物体の衝突とエネルギー変化	64
3.4.3	2物体の衝突と重心系	65
3.4.4	相対運動エネルギーと重心系	65
3.4.5	演習問題（重心系での議論）	66
第4章 円運動と慣性力		69
4.1	速度・加速度の極座標表示	69
4.1.1	極座標の導入	69
4.1.2	座標変換	70
4.1.3	速度・加速度の極座標表示	72
4.2	円運動	74
4.2.1	円運動の速度と加速度	74
4.2.2	円運動の演習問題（1）	76
4.2.3	円運動の演習問題（1）の補足	80
4.3	慣性力	82
4.3.1	互いに並進運動している2つの座標系	83
4.3.2	回転座標系での運動方程式	84
4.3.3	遠心力とコリオリ力	87
4.4	慣性力を用いた解析	90
4.4.1	固定されていない斜面上の物体の運動	90
4.4.2	斜面上を物体が移動する際に斜面が移動する距離を求める	91

4.4.3 慣性力を用いて再度考える	92
4.4.4 円運動の演習問題 (2)	93
第 5 章 単振動	97
5.1 ばねに繋がれた物体の運動方程式	97
5.1.1 単振動の基本的なパラメータ	97
5.1.2 ばねに繋がれた物体の運動方程式の導出	98
5.2 質点の位置が三角関数で表される理由	100
5.2.1 エネルギー保存則の導出	100
5.2.2 エネルギー保存則を橢円の方程式と見る	101
5.2.3 エネルギー保存則の式を積分する	102
5.3 単振動の具体例（基礎）	103
5.3.1 鉛直ばね振り子	103
5.3.2 鉛直ばね振り子：演習問題	105
5.3.3 単振り子	107
5.3.4 非慣性系でみた振り子の運動	109
5.3.5 浮力による単振動	110
5.4 単振動の具体例（応用）	111
5.4.1 関数の時間平均	111
5.4.2 ばねでつながれた 2 物体の運動 (1)	113
5.4.3 ばねでつながれた 2 物体の運動 (2)	117
5.4.4 連成振動	120
5.4.5 連成振動（演習問題）	125
5.5 ポテンシャル曲線と運動	128
5.5.1 ポテンシャル曲線と安定なつりあい	128
5.5.2 安定なつり合いと不安定なつり合いの具体例	130
5.6 減衰振動と強制振動	133
5.6.1 減衰振動	133
5.6.2 減衰振動の解を数値的に求める	133
5.6.3 強制振動	134
5.6.4 強制振動の挙動と特別解	136
第 6 章 万有引力	139
6.1 角運動量保存則	139
6.1.1 ベクトルの外積	139
6.1.2 ベクトルのモーメントと角運動量	141
6.1.3 角運動量保存則	142
6.2 万有引力の性質	143
6.2.1 万有引力とは	143
6.2.2 万有引力の位置エネルギー	144
6.2.3 万有引力の位置エネルギーを含むエネルギー保存則	147
6.2.4 万有引力定数 G と重力加速度の大きさ g の関係	148
6.2.5 第一宇宙速度と第二宇宙速度	150
6.3 Kepler の法則と惑星の運動	152
6.3.1 Kepler の法則とは？	152
6.3.2 面積速度保存則	153
6.3.3 万有引力とケプラーの法則（演習）	155

6.3.4 逆2乗則から橢円軌道をとる理由を考える	158
6.4 大きさのある物体の間の万有引力	162
第7章 剛体の力学	165
7.1 剛体とその重心	165
7.1.1 剛体とは何か	165
7.1.2 一様な剛体(一様な円盤)の重心	167
7.1.3 剛体の重心運動	167
7.2 剛体の回転運動	168
7.2.1 力のモーメント	169
7.2.2 剛体の回転運動方程式	170
第II部 付録編	171
付録A 発展的な数学の話	173
A.1 行列に関する基本事項	173
A.1.1 行列とは何か	173
A.1.2 一次変換と行列	174
A.1.3 一次変換の行列表示	174
A.1.4 行列の積	176
A.1.5 逆行列	176
A.1.6 行列と連立一次方程式	177
A.2 テイラー展開	179
A.2.1 ロルの定理	179
A.2.2 平均値の定理	180
A.2.3 テイラーの定理	180
A.2.4 テイラー展開	181
A.2.5 指数関数と三角関数のテイラー展開	181
A.2.6 三角関数の近似	182
A.2.7 テイラー展開による一次近似	183
付録B 高校物理のための微分方程式論	185
B.1 微分方程式とは何か?—自然法則と微分方程式—	185
B.2 1階の微分方程式—変数分離型—	186
B.2.1 変数分離型の微分方程式の解法	186
B.2.2 変数分離型の微分方程式の具体例	187
B.2.3 ロジスティック曲線	189
B.3 1階の線形微分方程式	189
B.3.1 式変形により簡単な場合に帰着させる	189
B.3.2 定数変化法	190
B.4 定数係数2階線形微分方程式	192
B.4.1 オイラーの公式	192
B.4.2 定数係数2階線形微分方程式の解	193
B.4.3 特性方程式の利用	193
B.5 減衰振動と強制振動(再考)	193

付 錄 C 近似的に物理現象を把握する	195
C.1 Euler 法	195
C.2 Runge-Kutta 法	196
C.3 振り子の運動を数値的に解析する	196
C.3.1 Euler 法による解析	197
C.3.2 4 次の Runge-Kutta 法 (1/6 公式) による解析	198
付 錄 D 参考文献	201

第I部

力学編

第 1 章 力学の基礎

第 1 章では、力学の基礎となる運動方程式の取り扱いを考える。運動方程式自体は $ma = \mathbf{F}$ というシンプルな形をしている。しかし、運動方程式から運動状態を正確に把握することは簡単ではない。この章では速度、加速度の定義から初めて、放物運動、束縛条件、摩擦力のある系と徐々に難しい問題に突入する。後半では座標系の設定の仕方で問題の難易度が変わる例を紹介し、天下り的に問題集で導入されている手法が非常に有益であることを確認する。

1.1 運動の表し方

1.1.1 速度と加速度

力学の式を利用するためには、まず、物体の運動を記述する方法を知る必要がある。物体の運動を表すのに必要な要素に、物体の位置 (position) がある。位置は x, y, z の 3 つの成分を使ってかけるが、それらは時間的に変化するため、時刻 (time) t という変数も必要となる。位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ と時刻 t だけで運動は記述できるが、運動を観測する際は変位、速度 (velocity)、加速度 (acceleration) にも注目する。そして、重要であるが一番意識されない座標系にも注目する必要がある。座標系の設定については 1.7 節でも触れるが、問題に合わせて適切に設定することが重要である。

時刻 t で位置ベクトル $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ にある物体が非常に短い時間 Δt の間に $\mathbf{r}(t + \Delta t) = (x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t))$ に動いたとする。

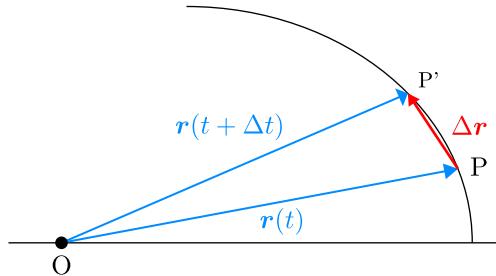


図 1.1

この時、物体の変位を

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \quad (1.1)$$

と定義する。単位時間あたりの平均の変位はこれを Δt で割ることで求めることができる。

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \quad (1.2)$$

この量を「平均の速度」という。高校物理の教科書には「瞬間の速度」という考え方も登場する。これは式 (1.2) で時間間隔 Δt を 0 に近づけた時の極限である。 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限は位置 $\mathbf{r}(t)$ の t での微分になる。これから出てくる速度は基本的に平均の速度ではなく、瞬間の速度である。

速度

物体の運動が $\mathbf{r}(t)$ という時間 t の関数で記述されるとき、

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \quad (1.3)$$

を物体の速度 (velocity) という。また、速度ベクトルの大きさ

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| \quad (1.4)$$

を物体の速さ という。

平均の速度と瞬間の速度の違いについては、図 1.2 を用いて理解することができる。

- 平均の速度は、以下の図の 2 点 $(t, x(t))$ と $(t + \Delta t, x(t + \Delta t))$ を結ぶ直線の傾き
- 瞬間の速度は、点 $(t, x(t))$ における接線の傾き

Δt を 0 に近づけていくと、2 点 $(t, x(t))$ と $(t + \Delta t, x(t + \Delta t))$ を結ぶ直線の傾きは、点 $(t, x(t))$ における接線の傾きに近づいて、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限で両者は重なる。

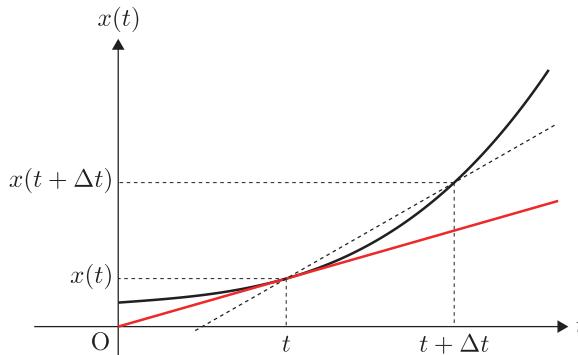


図 1.2 平均的な傾きと接線の傾き

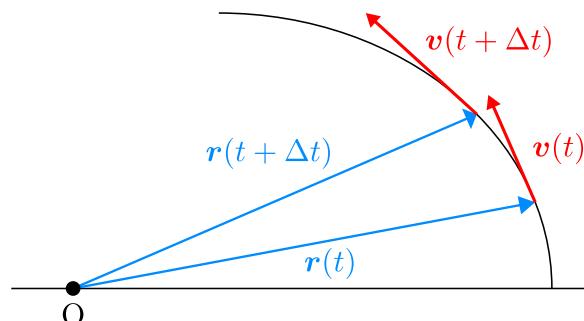


図 1.3

物体の運動を記述する際は速度だけでは不十分で、速度の微分が必要になる。これは図 1.3 のように、時間とともに速度 (ベクトル) の向きと大きさが変化するからである。単位時間あたりの平均の速度変化

$$\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \quad (1.5)$$

を「平均の加速度」という。そして、この時間間隔 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限として瞬間の加速度を定義する。

加速度

物体の速度が $\mathbf{v}(t)$ という時間 t の関数で記述されるとき、

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \quad (1.6)$$

を物体の加速度 (acceleration) という。

1.1.2 座標系

物体の運動を考える際に非常に重要になってくるのが、「どのように座標系を設定するか」である。3次元空間上の点Pの位置は原点Oを始点とするベクトル r を用いて表すことができる。このベクトルを位置ベクトルという。物理、数学ではこのベクトルの成分をどう表現するかで問題の解きやすさが大きく変わる。一番シンプルな方法は図1.4のように、 x, y, z の3つの軸を設定して問題を解くことである。この他にも図1.5のように極座標系を設定する方法もある。

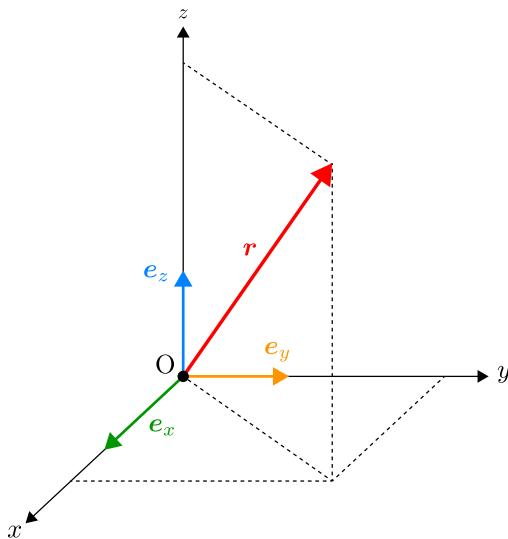


図 1.4 xyz 直交座標系

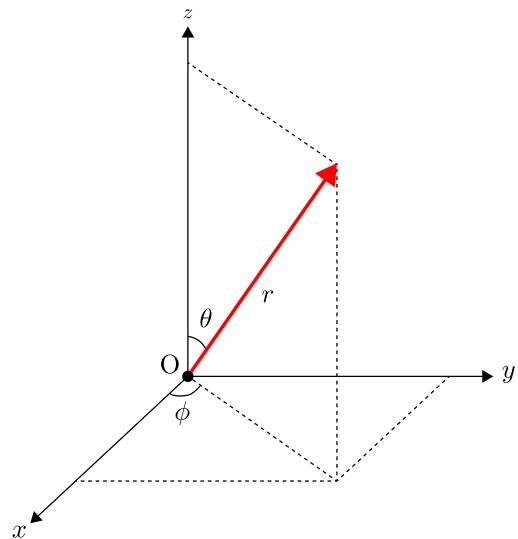


図 1.5 3次元極座標系

図1.4のように xyz 直交座標系を設定した時、ベクトル r で表される位置を

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \quad (1.7)$$

と書き表すことができる。この時の x, y, z のことを x 座標、 y 座標、 z 座標という。3つの軸の正の方向に向かう大きさ1のベクトルを e_x, e_y, e_z と書くことにすると、

$$\mathbf{e}_x = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_y = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_z = (0, 0, 1) \quad (1.8)$$

となり、これを使うと、

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (1.9)$$

と位置を表現することができる。ここで一つ考えないといけない点がある。それは e_x, e_y, e_z の向きをどのように定めるかという点である。この後の1.3節では放物運動では左右方向に x 軸、上下方向に y 軸とする。そして、正の向きを x 軸は右向き、 y 軸は上向きとする。でも、空気抵抗を受けながら落下する運動を解析する際は y 軸の正の方向は下向きとする。1章の最後には斜面上に座標系を設定する場合も紹介するが、その時は斜面に沿って斜め向きに x 軸を定める。座標系の設定については問題を解きやすいように適切に定めるのが良く、今後様々な設定の方法が出てくるが、それはそう設定すると楽に議論できることが知られているからである。天下り的かもしれないが、最初はそうするものだと思って読み進めるのが良い。1.7節では座標系の取り方で問題の難易度が大きく変わることを紹介する。

1.1.3 等加速度運動の公式

運動の解析の基礎は1次元での運動を把握することである。1次元の場合、速度 v は $v = \frac{dx}{dt}$ と書き表すことができる。加速度はこれをさらに時間 t で微分して $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ と表せる。

$$\begin{aligned}\Delta v &= v(t) - v(0) = \int_0^t \frac{dv(t')}{dt'} dt' = \int_0^t a(t') dt' \\ \therefore v(t) &= v(0) + \int_0^t a(t') dt'\end{aligned}\tag{1.10}$$

同様に考えると、次の式も成立する。

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t') dt'\tag{1.11}$$

したがって、 $a(t) = a = \text{const.}$ ならば、教科書で必ず見かける「等加速度運動の式」が導ける。 $a_t = a$ のとき、式 (1.10) は

$$v(t) = v(0) + at\tag{1.12}$$

となる。これを使うと $x(t)$ は

$$x(t) = x(0) + \int_0^t (v(0) + at') dt' = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2\tag{1.13}$$

となる。 $x(0) = x_0$ としている。式 (1.12) と式 (1.13) から t を消去すると、

$$\{v(t)\}^2 - \{v(0)\}^2 = 2a\{x(t) - x(0)\}\tag{1.14}$$

という関係式が得られる。ここではこんな変形で式 (1.14) を導いて見よう。式 (1.11) の両辺に a をかけて整理すると、

$$a\{x(t) - x(0)\} = \int_0^t a \cdot v(t') dt'$$

となる。 $a = \frac{dv(t)}{dt}$ であることと $\frac{d}{dt}(v^2) = 2v \frac{dv}{dt}$ であることから、

$$a\{x(t) - x(0)\} = \int_0^t \left[\frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{2} \{v(t')\}^2 \right) \right] dt' = \frac{1}{2} (\{v(t)\}^2 - \{v(0)\}^2)$$

となる。この式変形はエネルギー保存則の導出でよく使われる。

等加速度運動の式

$$v(t) = v(0) + at\tag{1.12}$$

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2\tag{1.13}$$

$$\{v(t)\}^2 - \{v(0)\}^2 = 2a\{x(t) - x(0)\}\tag{1.14}$$

1.1.4 相対運動

電車にのっていると、上りの電車と下りの電車がすれ違うとき、上りの電車からみたとき、下りの電車が横を通過するスピードはとても速いように感じられる。これは、動いている観測者から見たときの運動(相対運動)を検討することで理解できる。

観測者を A、観測する対象を B と記すことにしよう。A の位置 \mathbf{r}_A 、B の位置 \mathbf{r}_B に対して、速度や加速度がそれぞれ考えられる。A の速度 \mathbf{v}_A 、B の速度 \mathbf{v}_B は、

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt}, \quad \mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt}$$

であり、A の加速度 \mathbf{a}_A 、B の加速度 \mathbf{a}_B は、

$$\mathbf{a}_A = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt}, \quad \mathbf{a}_B = \frac{d\mathbf{v}_B}{dt}$$

である。このとき、動いている A からみた物体の B の位置(相対位置)は、 $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ で与えられる。これを \mathbf{r}_{AB} と書くことにする。そして、この \mathbf{r}_{AB} の時間微分を相対速度として定義し、もう一度時間微分したものを相対加速度と定義する。つまり、

$$\mathbf{v}_{AB} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A \quad (1.15)$$

$$\mathbf{a}_{AB} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A \quad (1.16)$$

である。

さて、電車にのっていると、すれ違う電車の速度が早く感じるのは、相対速度の効果による。今、自分がのっている電車 A が 80km/h で進んでいるとして、80km/h で反対からくる電車 B とすれ違ったとする。電車 A と電車 B がすれ違う瞬間の運動を 1 次元的な運動とみなし、電車 A が進む方向を正の方向とするとき、電車 A の速度は 80km/h で、電車 B の速度は -80km/h となるので、(A から B をみたときの) 相対速度 v_{AB} は、 $-80 - 80 = -160\text{km/h}$ となる。つまり、電車 A にのっている人からは、電車 B が 160km/h の速さですれ違っているように見えるのである。だから、すれ違う電車の速度は早く感じるのである。

1.1.5 微分方程式の基礎 — 变数分離法 —

微分方程式に関する基本的な概念を把握するために理解するべきことはたくさんある。その全てを記そうとすると何百ページも必要になるので、ここでは高校物理で特に重要な定数分離法についてのみ紹介する。付録編では第 5 章で出てくる減衰振動・強制振動と関連のある 2 階の微分方程式について記している。

高校数学では「微分方程式」という概念は発展学習で少し出てくる程度である。でも、高校数学の知識だけで解が求められる微分方程式がある。それは「微分すると $f(t)$ になる関数はどんな関数か?」という問題である。式で表すと次のようになる。

$$\frac{dx}{dt} = f(t) \quad (1.17)$$

このようにある関数とその導関数の関係式として記述される方程式のことを微分方程式 (differential equation) という。方程式と名前がついているので、解があるが、微分方程式の場合は関係式を満たす関数が解である。式 (1.17) の形の微分方程式は、 $f(t)$ の原始関数を $F(t)$ とすれば、

$$x(t) = \int f(t) dt = F(t) + C \quad (C \text{ は任意定数}) \quad (1.18)$$

と一般解を求めることができる。

では、本節の本題である变数分離法を紹介する。次のように、微分の値が x だけの関数 $f(x)$ と y だけの関数 $g(y)$ の積の形で書かれている次のタイプの微分方程式は、变数分離型の微分方程式といわれる。

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (1.19)$$

このような微分方程式の解法は次のようになる。

- この微分方程式を $g(y)$ でわり、 x について積分すると、

$$\int \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx \quad (1.20)$$

と書ける。左辺は数学3で登場する置換積分の形なので、

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx \quad (1.21)$$

となる。

- 式(1.21)の両辺を適当にいじってできるだけ簡単な形にする。

形式的には、式(1.19)を $\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$ と変形してインテグラルをつけた結果と同じである。

例 1.1 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = -2xy$ の一般解を求める。

微分方程式を $\frac{dy}{y} = -2x dx$ と変形して \int をつけると、

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y} dy &= - \int 2x dx \\ \log |y| &= -x^2 + C \\ y &= \pm e^C e^{-x^2} = C' e^{-x^2} \end{aligned}$$

となる。ゆえに 一般解は $y = C e^{-x^2}$ である。 □

1.2 Newton の 3 つの法則

1.2.1 質点の導入

物理の議論では、問題を解くうえで重要な性質だけを抽出して議論していく。特に力学では、物体の形状や大きさを無視してある 1 つの点に代表させ、その点に必要な情報を持たせる。このとき、物体が持つ質量をその 1 つの点に代表させる。そのため、この代表点のことを質点という。物体の特徴をいくつかの点に代表させることは、テレビで出てくる kinect による運動動作解析の研究の方がイメージを持てるかもしれない。(図 1.6)

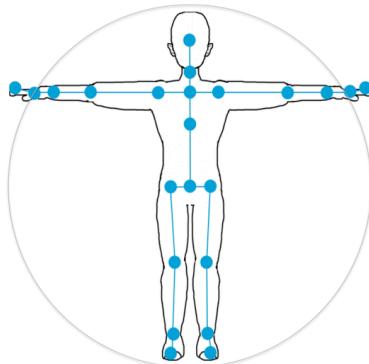


図 1.6 kinect による動作解析のイメージ (<http://www.grcn-behavioranalysis.com> より)

質点で議論すること自体が一種の近似となる。実際の物体は大きさを持つが、質点は「点」なので大きさを持たない。質点に全情報を集約させるかどうかはどのような運動を議論するかによる。高校物理では物体が回転したり変形したりすることは考えないため、質点として考えることに問題はない。運動の動作は腕の曲げ伸ばし、足の屈曲といった回転と変形を伴うので、図 1.6 のように複数の点を用いて記述するのが適切である。

さて、「点」として考えることができる状況はどのようなものか？このような状況は 2 つある。

- 電子や陽子など元々大きさが非常に小さい物体の運動を考える時。⁽¹⁾
- 物体の大きさが物体の運動領域に比べて十分小さい時。

古典力学では特に後者の場合を議論の対象にする。第 6 章では天体の運動について紹介するが、これは太陽系という非常に広い空間では半径 6371 km の地球も点にしか見えないため、質点として取り扱うことでの古典力学の議論が利用できる。この他にも、第 7 章では剛体の運動を紹介するが、ここでは物体を質点の集合体とみなして簡単ではあるが物体の回転について議論する。第 7 章でも記すが、物体の重心の並進運動は、その物体の全質量と等しい質量を持つ質点の運動と等価であることが示される。このようなことから、質点の運動を解析することは非常に重要である。

1.2.2 Newton の 3 つの法則

高校物理で扱う力学は「古典力学」と呼ばれる。古典力学はアイザック・ニュートンによって発見された 3 つの基本原理がベースにある。3 つの基本原理は、物理現象を考える際に、常に出発点にとるべき基本法則であり、この法則が成立することを認めないと先に進めない原理である。今のところ、この 3 つの基本原理に反する現象が見つかっていないことから、この 3 つの基本原理の正当性は保証されている。

⁽¹⁾電子や陽子などの運動を考える時は量子力学を利用するのが適切である。このスケールになると粒子性だけでなく、波動性も考慮する必要があることが知られている。

3つの基本原理は慣性の法則、運動方程式、作用・反作用の法則であり、それぞれ Newton の第一法則、第二法則、第三法則と呼ばれる。

(1) 慣性の法則

全ての質点は、それに力が加えられず運動状態が変化させられない限り、静止または等速直線運動を続ける（この性質のことを慣性という）。言い換えると、物体の運動状態（速度や向き）を変えるには力を加えなければならない。

(2) 運動方程式

$p = mv$ により定義される運動量の時間変化は、加えられた力の方向にそって起こる。この時、

$$\frac{dp}{dt} = F \quad (1.22)$$

の関係がある。特に m が一定の場合、

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} = ma = F \quad (1.23)$$

となる。この $ma = F$ は運動方程式と呼ばれている。

(3) 作用・反作用の法則

2つの物体 A,B について、A が B に力を働くと、B から A に、

(1) 同じ作用線上、(2) 大きさが等しい、(3) 向きが反対

の力が働く。

1.2.3 慣性の法則の裏の意味

慣性の法則の主張を再度記す。

全ての質点は、それに力が加えられず運動状態が変化させられない限り、静止または等速直線運動を続ける。言い換えると、物体の運動状態（速度や向き）を変えるには力を加えなければならない。

でも、この主張は運動方程式において、力 F が $\mathbf{0}$ のときは、加速度が $\mathbf{0}$ となることを考えると、自明のことのように思える。では、そうなのに「慣性の法則」があるのはなぜか。加速度はどのような座標系で見ているかによって値が変わる（このことは、第4章の慣性力などと関係がある）。座標系によっては、力 F が $\mathbf{0}$ なのに、加速度が $\mathbf{0}$ とならない場合がある。慣性の法則は、この宇宙には必ず「力 F が $\mathbf{0}$ のときは、加速度が $\mathbf{0}$ となる」座標系が存在することを慣性の法則は主張しているのである。

1.3 運動方程式を解く (1) — 放物運動と空気抵抗を受ける運動 —

1.3.1 運動方程式の解き方

物体の運動を解析する際は運動方程式を立てることから始まる。大学受験では微分方程式を解くことによる解析が範囲外であるため、いきなり「エネルギー保存則」や「運動量保存則」を立式する手法が参考書にのっているが、この保存則は第2章以降で紹介するが、運動方程式から得ることができる。基本的な物体の運動の解析方法は以下のようになる。

運動方程式の解き方

- (1) 物体に働く力を把握する。
- (2) 運動方程式 $ma = \mathbf{F}$ を立てる。これは位置 \mathbf{r} に関する微分方程式である。
- (3) 系の特徴をもとに制約条件（束縛条件）を立式して、これをもとに運動方程式を解きやすくする。あるいは、エネルギー保存則や運動量保存則の式に変形する。
- (4) 実際に運動方程式を解く。あるいは各種保存則を利用して所望の量を得る。

1.3.2 放物運動 (斜方投射)

ここでは、非常に簡単に解析できる運動の一例である放物運動を運動方程式を解くことで解析しよう。原点 $O(0, 0)$ に小物体をおき、時刻 $t = 0$ に x 軸と角 θ をなす方向に初速 $\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$ を加える。このあと、小物体がどのような運動をするか考える。ただし、小物体には y 軸負方向に重力が働く以外には何の力も働くないとし、空気抵抗は無視できるとする。また、重力加速度の大きさを g とする。

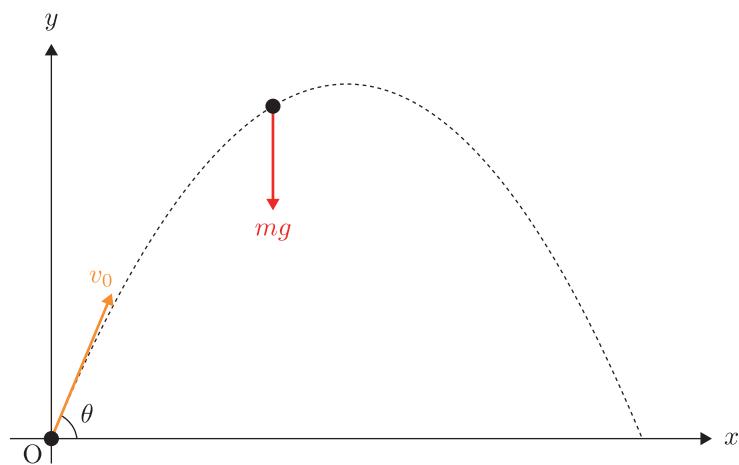


図 1.7 放物運動 (斜方投射) のイメージ

x 方向、 y 方向についてそれぞれ以下の運動方程式が成立する。

$$ma_x = 0 \quad (1.24a)$$

$$ma_y = -mg \quad (1.24b)$$

これより、 $a_x = 0$, $a_y = -g$ なので、時刻 t における速度 $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ は

$$v_x = v_0 \cos \theta \quad (1.25a)$$

$$v_y = v_0 \sin \theta - gt \quad (1.25b)$$

となる。また、時刻 t における位置 $\mathbf{r} = (x, y)$ は

$$x = (v_0 \cos \theta)t \quad (1.26a)$$

$$y = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.26b)$$

と書ける。上の2つの式から t を消去すると、

$$\begin{aligned} y &= (\tan \theta)x - \frac{g}{2(v_0 \cos \theta)^2}x^2 \\ &= -\frac{g}{2(v_0 \cos \theta)^2} \left(x - \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} \right)^2 + \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g} \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$= -\frac{g}{2(v_0 \cos \theta)^2} \left(x - \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g} \right)^2 + \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g} \quad (1.28)$$

と小物体の描く軌道の方程式が得られて、放物線を描くことがわかる。

これより、 y 座標の最大値は $y_{\max} = \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g}$ である。この時の時刻 t は、 $t = \frac{x}{v_0 \cos \theta} = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$ で、

$$v_y = v_0 \sin \theta - g \cdot \frac{v_0 \sin \theta}{g} = 0$$

である。つまり、放物線軌道の頂点では y 方向の速度 $v_y = 0$ である。これは、 $y(t)$ が極大となるためには $\dot{y} = v_y = 0$ を満たすことが必要であるという数学的な要請もしっかり満たしている。

1.3.3 空気抵抗を受ける落体の運動

空気抵抗を受ける運動を、数学的に解析するのは、高校物理の範囲外である。その理由の1つに解析の際に微分方程式を解かなければならぬことがあげられる。現在の数学3では、発展課題として微分方程式が取り上げられている。微分方程式についての数学的な厳密さについての議論は放っておいて、ただこうすれば良いという方法にのっとって解くだけなら、高校で習う数学のレベルでもできる。では、実際に空気抵抗を受ける落体の運動を考える。今回は空気抵抗の大きさが速度に比例する場合⁽²⁾を考える。

$t = 0$ の時、原点から静かに質量 m の球を放したとしよう。鉛直下向きを正として y 軸をとる。位置 y における速度を v として、運動方程式を立てると、以下のようになる。

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv \quad (1.29)$$

後は、型通りの変形(変数分離法)をする。

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= g - \frac{k}{m}v = -\frac{k}{m} \left(v - \frac{mg}{k} \right) \\ \int \frac{dv}{\frac{mg}{k} - v} &= \int \frac{k}{m} dt \\ -\log \left| \frac{mg}{k} - v \right| &= -\frac{k}{m}t + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

(2)速度に比例する抵抗を粘性抵抗といふ。速度の2乗に比例する抵抗を慣性抵抗といふ。速度の2乗、3乗、…、 n 乗に比例する場合は、関数の形が変わるだけで微分方程式の解き方は基本的に同じである。

$t = 0$ の時、 $v = 0$ であり、徐々に加速していくことから、 $v < \frac{mg}{k}$ の時のみを考える。すると、定数 $A > 0$ を用いて、

$$\frac{mg}{k} - v = A \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)$$

と書ける。初期条件 ($t = 0$ の時、 $v = 0$) より、 $A = \frac{mg}{k}$ と決まるから、

$$v = \frac{mg}{k} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) \right\} \quad (1.30)$$

と $v(t)$ を求めることができる。 $y(t)$ については、これを積分することで求まる。 $y(0) = 0$ なので、以下のようになる。

$$y(t) = \int_0^t v(t) dt = \frac{mg}{k} t + \frac{(mg/k)^2}{g} \left\{ \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) - 1 \right\}$$

一方、加速度 $a = dv/dt$ は式 (1.30) を t で微分することで、

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = g \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) \quad (1.31)$$

となることがわかる。これより加速度 $a(t)$ は時間とともに減少して 0 に近づくことがわかる。

さて、 $t \rightarrow \infty$ の極限を考えると、 $a \rightarrow 0$ 、 $v \rightarrow \frac{mg}{k}$ である。 $t \rightarrow \infty$ の時、 $a \rightarrow 0$ となるので、運動方程式 (1.29) は力のつり合いの式となる。このことは十分時間がたつと、重力と空気抵抗がつり合うことを表している。この $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = mg/k$ のことを終端速度という。速度 $v(t)$ と時間 t の関係を図示すると図 1.8 のようになる。

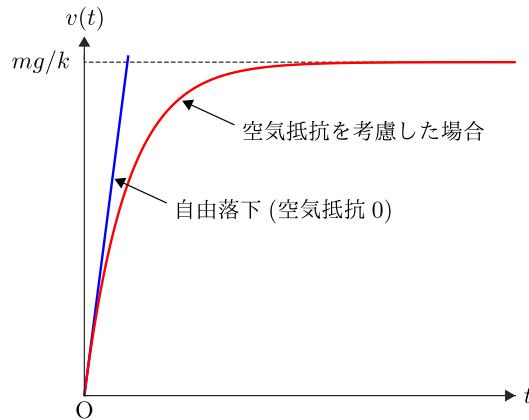


図 1.8 空気抵抗を受ける落体の運動 — $v(t)$ と t の関係 —

1.3.4 モンキーハンティングと相対運動

この subsection ではモンキーハンティングという有名な題材を扱う。この問題は入試問題で出題されたときは「簡単な問題」と分類されるのだろう。ここでは、2 つの小球が衝突する条件や衝突するまでの時間を相対運動の視点から考察する⁽³⁾。

(3) この問題は相対運動の考えを使わなくても普通に解くことができる。このノートでは基本的な解法はもちろんのこと、やや高度な解法も記することで、各種方法の優位性や物理的な意味を考えいくことを目指している。そのような目的に合う問題をチョイスしているつもりであり、この問題もその 1 つである。

問題 1

図1.9のように水平方向に x 軸、鉛直方向に y 軸をとる。時刻 $t = 0$ に原点 O から小球Pを速さ v_0 で x 軸から $(0 <) \theta (< \pi/2)$ の角度に投げ出す。これと同時に点 (a, b) から小球Qを自由落下させる。運動は xy 平面内で起こるものとし、重力加速度の大きさを g とする。

- (1) 時刻 t におけるPとQの y 座標 y_P, y_Q を求めよ。
- (2) Pを投げ出す角度 θ がある値の時、 v_0 の値によらずPとQは衝突する。その時の $\tan \theta$ の値を求めよ。
- (3) x 軸の上側 ($y \geq 0$) で衝突が起こるために必要な v_0 に対する条件を求めよ。ただし、解答に θ を用いてはならない。
- (4) 小球Pが投げ出されてから衝突するまでの時間を求めよ。ただし、解答に θ を用いてはならない。

解答

- (1) 小球Pの運動は1.3.1節でも紹介した放物運動であるから、

$$y_P = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.32)$$

である。一方、小球Qの運動は初速度0で、 y 方向の加速度が $-g$ の落下運動なので、

$$y_Q = b - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.33)$$

となる。

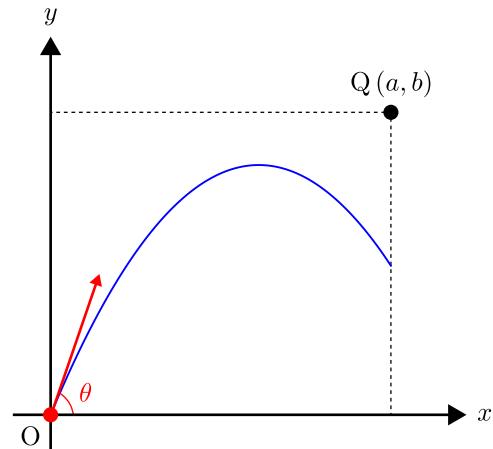


図 1.9

- (2) PとQが衝突するためには、衝突する時刻を $t = t_0$ とするとき、 $y_P(t_0) = y_Q(t_0)$ が成立する必要がある。

$$v_0 \sin \theta \cdot t = b \quad (1.34)$$

いま、 t_0 は小球Pの x 方向の運動から、 $t_0 = \frac{a}{v_0 \cos \theta}$ でなければならないから、上の条件式は

$$a \tan \theta = b \iff \tan \theta = \frac{b}{a} \quad (1.35)$$

が得られる。これが衝突するための θ に関する条件である。

- (3) 衝突する際の y 座標は式(1.33)に $t = t_0 = \frac{a}{v_0 \cos \theta}$ を代入して、

$$b - \frac{1}{2}g \left(\frac{a}{v_0 \cos \theta} \right)^2 = b - \frac{g}{2v_0^2} a^2 (1 + \tan^2 \theta)$$

とかける。衝突するときは θ は式(1.35)の条件を満足するので、 x 軸の上側で衝突が起こる条件は以下のようになる。

$$b - \frac{g}{2v_0^2} a^2 \left\{ 1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right\} \iff v_0 \geq \sqrt{\frac{g(a^2 + b^2)}{2b}} \quad (1.36)$$

- (4) $t_0 = \frac{a}{v_0 \cos \theta}$ から θ を消去する。 $\tan \theta = b/a$ と $0 < \theta < \pi/2$ より $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ となるから、

$$t_0 = \frac{a}{v_0 \cos \theta} = \frac{a}{v_0} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{v_0} \quad (1.37)$$

が求める答えである。

では、この問題を「小球 Q から見た小球 P の相対運動」の視点で考えてみることにしよう。小球 Q から見た小球 P の相対位置を $\mathbf{r}_{QP} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q$ は

$$\mathbf{r}_{QP} = \begin{pmatrix} (v_0 \cos \theta)t - a \\ (v_0 \sin \theta)t - b \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

となる。これを時間微分することで相対速度 $\mathbf{v}_{QP} = \mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q$ は

$$\mathbf{v}_{QP} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \\ v_0 \sin \theta \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

となる。よって、相対運動の視点で見ると、小球 P は等速度運動をして小球 Q に近づいていることがわかる。この相対運動の視点で再度 (2) と (4) の問題を解いてみよう。

- (2) 小球 P と小球 Q が衝突する際は両者の座標が一致するので相対座標は $\mathbf{0}$ となる。式 (1.38) より $\mathbf{0}$ となる時刻は 2 通りで記述できることより、

$$t = \frac{a}{v_0 \cos \theta} = \frac{b}{v_0 \sin \theta} \iff \tan \theta = \frac{b}{a}$$

- (4) $t = 0$ での相対距離は $\sqrt{a^2 + b^2}$ であり、この距離を相対速さ $v_0 = \sqrt{(v_0 \cos \theta)^2 + (v_0 \sin \theta)^2}$ で近づくから、衝突するまでの時間は以下のようになる。

$$t_0 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{v_0}$$

このように相対運動の視点を適宜利用すると、 t_0 を θ を含まざに表すことができている場合の (3) も簡単に解ける。ただ、この順で問題が並んでいれば相対運動を考えるのは難しいかもしれない。

1.4 運動方程式を解く(2) — 糸の張力と束縛条件 —

この section では、大学入試の問題文には必ず記載されているがほとんど意識しない「糸の質量を無視する」という記述の意味や束縛条件について考えていく。まず、1.4.1 では「糸の重さを無視する」という Phrase の役割を考える。その後、実際に糸が関わってくる問題を通して「糸の質量を無視する」という記述がどう関わってくるかを理解していく。合わせて、束縛条件や相対的な運動など入試問題で出てくるとぜひことにも踏み込んでいく。

1.4.1 糸の質量を無視するという記述の意味

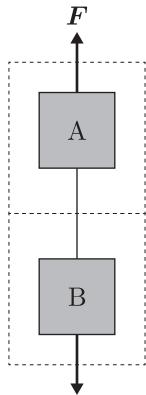


図 1.10

ここでは山本義隆先生の「物理入門」でも紹介されている図 1.10 のような系を考える。物体 A (質量 m_A) と物体 B (質量 m_B) を糸でつなぎ、A に大きさ F の力をかけて上に引き上げる。糸は一様な糸とし、糸全体の質量は M とする。この時、糸を上下に $x : (1-x)$ ($0 \leq x \leq 1$) に内分する点における糸の張力 $T(x)$ を求める。

内分点より上側の質量は $m_A + xM$ 、下側の質量は $m_B + (1-x)M$ である。2つの物体と糸は繋がれているので加速度は同一であるから、その加速度の大きさを a (上向きを正) とおくと、

$$(m_A + xM)a = F - (m_A + xM)g - T(x) \quad (1.40a)$$

$$(m_B + (1-x)M)a = T(x) - (m_B + (1-x)M)g \quad (1.40b)$$

$$\therefore (m_A + m_B + M)a = F - (m_A + m_B + M)g \implies a = \frac{F}{m_A + m_B + M} - g \quad (1.41)$$

よって、 $T(x)$ は以下のようになる。

$$T(x) = (m_B + (1-x)M)(a + g) = \frac{m_B + (1-x)M}{m_A + m_B + M} F \quad (1.42)$$

したがって、 $M \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\lim_{M \rightarrow 0} T(x) = \frac{m_B}{m_A + m_B} F$$

となり、 x に依存しない。つまり、糸の重さを無視できる時、糸のどの位置の張力も等しい。

1.4.2 演習問題

問題 2

図 1.11 に示すように、質量 M のおもり A と、質量 $3M$ のおもり B を糸 1 で結び、滑らかな滑車 P にかける。さらに、この滑車 P とおもり C を糸 2 で結び、天井から吊ってある滑らかな滑車 Q にかける。滑車と糸の重さは無視し、重力加速度の大きさを g とする。

(1) まず、おもり C の質量をある値にして、全体を静かに放した。すると、おもり C は静止し続けた。

(a) 糸 1 の張力とおもり A の加速度の大きさを求めよ。

(b) この時のおもり C の質量を求めよ。

(2) C の質量を $4M$ にして、全体を静かに放した。すると、A と B の質量の和が等しいにもかかわらず、C は動き始めた。

(a) おもり C の加速度の大きさと糸 1 の張力、天井にかかる力を求めよ。

(b) おもり A とおもり B は、はじめ、天井からの距離 h の同じ高さに、おもり C は、天井からの距離 d の高さにあったとする。この A と B の高さの差が l になる時、A と C の天井からの距離を求めよ。

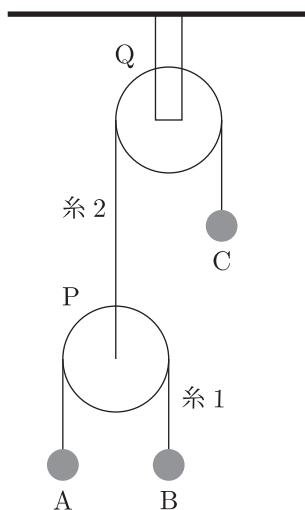


図 1.11

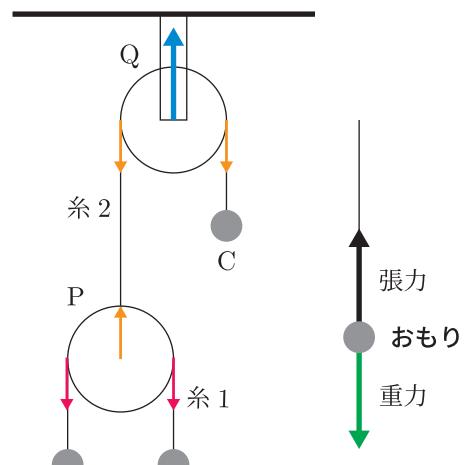


図 1.12

解答

(1)-(a) (1)-(b)

力学の問題を解く時は、力がどのように働いているかを図示することが大切である。今回の場合、図 1.12 のようになる。力を図示できたら各物体について運動方程式や力のつり合いの式を書くことができる。糸 1 に働く張力を T_1 、糸 2 に働く張力を T_2 とする。また、おもり A、おもり B の加速度をそれぞれ a , b とし、加速度の正の方向は A については鉛直上向き、B については鉛直下向きとする。さらに、おもり C の質量を M_c とする。すると、3 つのおもりについては以下の式が成立する。

$$Ma = T_1 - Mg \quad (1.43a)$$

$$3Mb = 3Mg - T_1 \quad (1.43b)$$

$$0 = T_2 - M_c g \quad (1.43c)$$

これだけでは今回求めたい a と T_1 を求めることはできない。これは5つの変数 a, b, T_1, T_2, M_c に対して、関係式が3つしかないからである。このような時は見逃している部分がある。今回の場合、見逃しているのは滑車Pである。おもりについて注意するけれど、滑車については見逃すことが多いので注意する必要がある。「滑車の質量を無視できる」ということは運動方程式の質量の部分が0になるので、滑車については力のつりあいの式を書くことができる。

$$0 = T_2 - 2T_1 \quad (1.44)$$

ここで関係式が1つ増えたが、まだ1つ足りないのでこの連立方程式を解くことはできない⁽⁴⁾。そこで、もう1つ式が必要である。そのもう1つの式が拘束条件や束縛条件というものである⁽⁵⁾。「束縛条件」は、系の特徴を表す式である。今回の場合、糸の全長が一定であることが「束縛条件」である。糸の全長が一定なので、

- Cが固定されていて動かないなら、Pも動かない。
- Pが動かないので、Aがx上昇すると、Bはx下降する。

そのため、AとBの加速度は同じである。式で書くと以下のようになる。

$$a = b \quad (1.45)$$

式(1.44)と式(1.45)の2つの式を利用すると、今回の場合、 b と T_2 を消去することができる。

$$Ma = T_1 - Mg$$

$$3Ma = 3Mg - T_1$$

$$0 = 2T_1 - M_c g$$

以上より、 $a = \frac{g}{2}, T_1 = \frac{3}{2}Mg, M_c = 3M$ と求められる。

(2)-(a)

おもりCは上下どちらの方向に動くか。今回は下向きに動くと仮定しよう。(1)と同様に滑車Pに働く力はつり合う。

$$0 = T_2 - 2T_1 \quad (1.44)$$

3つのおもりの運動方程式を立てる。それぞれの加速度を a, b, c とし、AとBについては正の方向を(1)と同じにする。Cについては、今、下向きに動くと仮定したので、鉛直下向きを正とする。すると、3つのおもりの運動方程式は、以下のようになる($T_2 = 2T_1$ であることを用いた)。

$$Ma = T_1 - Mg \quad (1.46a)$$

$$3Mb = 3Mg - T_1 \quad (1.46b)$$

$$4Mc = 4Mg - 2T_1 \quad (1.46c)$$

⁽⁴⁾厳密にいうなら「解が一意に定まらない」が正しい。このとき、連立方程式の解は無数に存在することが知られている。これ自体は数学的には問題ない。(大学の線形代数学の授業では、行列のrank落ちと関係があることを習う。)ただ、これは物理的に意味がない。加速度が任意であるなら、加速度がとてつもなく大きいということもありうる。しかし、そんなことは実際には起きないことは明らかだ。連立方程式の解が一意に定まった時の、その解に私たちには興味があるのである。

⁽⁵⁾私は「束縛条件」派なので、このTeXノートでは、「束縛条件」と統一する。

変数は a, b, c, T_1 と 4つあるのに、式は 3つなので束縛条件を考える必要がある。今回の場合、滑車も動くので少し厄介である。微小時間 Δt の間に、おもり C が下に ΔC 動くと、滑車 P は上に ΔC 動く。 Δt の間に、おもり A が ΔA 上昇し、おもり B が ΔB 下降したとする。おもり A の変位のうち、糸 1 の長さの変化による上昇量は、 $\Delta A - \Delta C$ である。また、おもり B の変位のうち、糸 2 の長さの変化による下降量は、 $\Delta B + \Delta C$ である。糸の全長は一定なので、この 2つの量は等しい。

$$\Delta A - \Delta C = \Delta B + \Delta C \quad (1.47)$$

これより、 a, b, c が満たす関係式は以下のようになる⁽⁶⁾。

$$a - c = b + c \iff 2c = a - b \quad (1.48)$$

式 (1.48) を式 (1.46c) に代入して両辺を 2で割ると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} Ma &= T_1 - Mg \\ 3Mb &= 3Mg - T_1 \\ M(a - b) &= 2Mg - T_1 \end{aligned}$$

これより、 a, b, c, T_1 は次のように求められる。

$$a = \frac{5}{7}g, \quad b = \frac{3}{7}g, \quad c = \frac{1}{7}g, \quad T_1 = \frac{12}{7}Mg$$

また、天井にかかる張力は滑車 Q の力のつり合いより $2T_2 = 4T_1 = \frac{48}{7}Mg$ である。

(2)-(b)

等加速度運動では、初期位置からの変位は、初速度が 0 のとき、加速度と時間の 2乗に比例する⁽⁷⁾ので、時間が固定されているときは、加速度に比例する。A の上昇量と B の下降量の和が l で、A と B の加速度の比が 5 : 3 なので、 l のうち、A の上昇量は $\frac{5}{8}l$ 、B の下降量は $\frac{3}{8}l$ である。また、B と C の加速度の比は

3 : 1 なので、C の下降量は $\frac{1}{8}l$ である。ゆえに、A の天井からの距離は $h - \frac{5}{8}l$ 、C の天井からの距離は

$d + \frac{1}{8}l$ である。 □

1.4.3 演習問題（続き）：相対運動の視点の導入

前の subsection で考えた **問題 2** の (2) では滑車 P も動くことにより問題が難しくなった。滑車 P が動かない状況だったら、問題は簡単である。「滑車 P が動かない」ようにすることはできないが、見方を変えることで滑車 P が止まっているように見えるようにすることはできる。この視点は 4 章で扱う慣性力と関係がある。

さて、滑車 P が止まっているように見えるのはどのようなときか？これは滑車 P と同じ加速度で動くときである。一番簡単なのは、滑車 P 上に観測者がいれば、観測者は滑車 P と同じ加速度で動く。ということで、滑車 P 上の観測者から見た小球の動きを考える。滑車 P 上の観測者から見た時は滑車 P から見たおもり A とおもり B の加速度は等しい。滑車 P から見たおもり A の加速度はおもり A と滑車 P の加速度の

⁽⁶⁾式 (1.47) の関係から加速度 a, b, c が満たさなければならない条件を考えるときは、ある時間 Δt の間の変位を考えればよい。

$$\Delta A = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \quad \Delta B = \frac{1}{2}b(\Delta t)^2 \quad \Delta C = \frac{1}{2}c(\Delta t)^2$$

この 3 式を、式 (1.47) に代入して整理すると、式 (1.48) の関係が得られる。

⁽⁷⁾1.1.3 「等加速度運動の公式」の式 (1.13) を参照。

正の向きを同一方向にとったので $a - c$ である。一方、滑車 P から見たおもり B の加速度はおもり B と滑車 P の加速度の正の向きが逆なので $b - (-c) = b + c$ である。この 2 つが等しいので

$$a - c = b + c \quad (1.48)$$

が成立する。このように相対運動の視点を適宜利用することで束縛条件は簡単に求められることがある。

1.5 摩擦力を受ける運動

この section の作成に初めてとりかかったのは 2018 年に平昌オリンピックが行われていた時である。冬のオリンピックの種目では、床面との摩擦や風の強さ、斜面の角度などの環境条件を選手は考慮して、少しでも記録を伸ばそうとしている。この section では摩擦力の取り扱いを考える。垂直抗力とは何か。摩擦力とは何か。摩擦力といえば、とりあえず μN として良いのか。

1.5.1 摩擦力とは何か？

地球上にある物体には「地球と物体の間に」重力が働く。それ以外にも様々な力が働く。物体が複数あると、その物体間に静電気力が働く。もし複数の物体がばねや糸でつながっていたら、ばねの弾性力や張力が働く。そして、普通、物体は床上に存在するので、床を押し、反作用で押し返される（作用・反作用）。

特に接触した 2 物体の間に働く摩擦力は、物質の素材や組成だけでなく温度や湿度などの様々な要因により定まる力であり、正確に取り扱うのは非常に困難である。摩擦力に関する理論は実験的な事実に基づく経験則から構成されている。

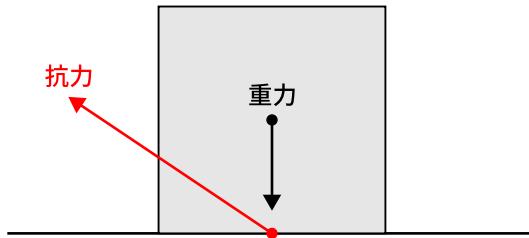


図 1.13 抗力とは？

2 つの物体が接触しているとき、互いに押し合う向きの力が働く。この力を抗力という。物体が床面の上にあると、床面から力（抗力）を受ける。その力の向きは、はっきりと「床面に対して垂直な方向」と決まっているわけではない。ただ、つりあいを保つように、神様が望むように決まる。床面から受ける抗力は、床面に垂直な方向の成分と床面に対して平行な方向の成分の 2 つに分解して考えることができる。それぞれを垂直抗力、摩擦力という。

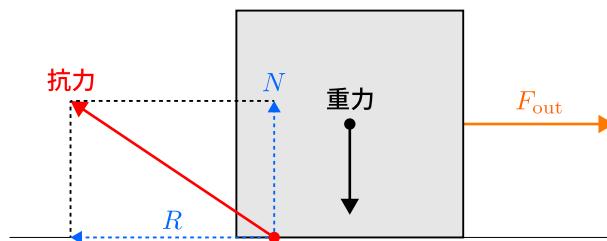


図 1.14 垂直抗力と摩擦力

N を垂直抗力、 R を摩擦力とすると、 N と R の関係は図 1.14 のようになる。さて、上のような物体を右側に動かそうとして、右向きに力 F_{out} を加える。紐をつけて引っ張るのだろうか。右向きの力が小さかっ

たら、物体は動かないことは経験的にわかる。動き出すのを妨げるよう摩擦力 R が働くからである。この静止している物体が動き出すのを妨げるよう働く摩擦力を**静止摩擦力**という。

物体が静止している状態から、 F_{out} を大きくしていったときの左右方向のつりあいの式⁽⁸⁾をかくと、

$$0 = F_{\text{out}} - R \quad (1.49)$$

となり、これより、 $R = F_{\text{out}}$ であることがわかる。この式から、 F_{out} が大きくなると、 R も大きくなる。でも、経験的に F_{out} が大きくなると、つりあいが崩れることもわかっている。 R には最大値があることがわかる。この静止摩擦力の最大値を**最大摩擦力**といい、ここでは R_{\max} と書くことにする。また、 $R = R_{\max}$ の時の外力を $F_{\text{out}} = F_0$ とする。すると、外力 F_{out} と摩擦力 R の関係は以下のようになる。

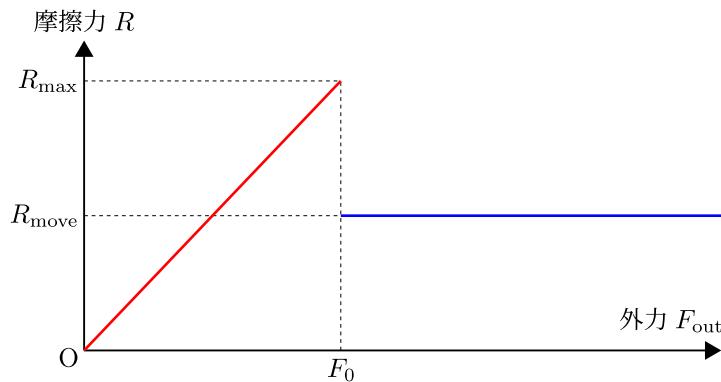


図 1.15 外力 F_{out} と摩擦力 R の関係

動いている物体にも摩擦力が働く。自動車を考えてみれば明らかだが、アクセルを踏み続けないと減速する。動いている物体に働く摩擦力は物体の動きを妨げる向きに働く。この摩擦力を**動摩擦力**という。動摩擦力は物体の速度や物体に働く外力に依らず一定であることが実験事実として確認されている。上の図 1.15において、外力が $F_{\text{out}} = F_0$ となると、物体は動き出しが、このときに物体に働く摩擦力は一定値 R_{move} となる。この R_{move} は最大摩擦力 R_{\max} より小さい。

1.5.2 摩擦力と垂直抗力

摩擦力 R と垂直抗力 N は、物体に働く抗力の垂直成分と床面に平行な成分の 2 つのだから、全く関係がないわけではない。特に、最大摩擦力 R_{\max} と垂直抗力 N を結びつけるパラメーター μ_0 と、動摩擦力 R_{move} と垂直抗力 N を結びつけるパラメーター μ' が重要である。実験事実として、最大摩擦力と動摩擦力が垂直抗力に比例することが知られている。

抗力と垂直抗力の関係

静止摩擦力や動摩擦力、垂直抗力をつなぐパラメーターを以下のように定める。

$$R_{\max} = \mu_0 N \quad (1.50)$$

$$R_{\text{move}} = \mu' N \quad (1.51)$$

このとき、 μ_0 を**静止摩擦係数**といい、 μ' を**動摩擦係数**という。

⁽⁸⁾力のつりあいの式は、加速度 $a = 0$ の時の運動方程式のことである。つまり、つりあいの式は運動方程式の特別な場合ということであり、別々のものとして考える必要はない。でも、私は、運動もしていないのに「運動方程式」と書くのは変な気がする。そのため、私は「つりあいの式」と書く。

式(1.50)については注意を要する。最大摩擦力 R_{\max} については垂直抗力 N と比例することが知られているが、静止摩擦力が最大摩擦力と等しくないときは垂直抗力とは比例しない。問題を解く際、静止摩擦力 $= \mu_0 N$ と書くと、間違になることはしっかり覚えておいてほしい。

1.5.3 運動方程式を解く(3) — 摩擦力の影響 —

摩擦力を理解するには問題を解くのが手っ取り早い。そこで、摩擦力も考慮しなければならない以下の問題を考えてみよう。

問題 3

図1.16に示すように、滑らかで水平な床に置かれた質量 M の台車の上に、質量 m の小物体が置かれている。台車の右端には質量の無視できる紐が取り付けられている。速度や加速度、力は全て図1.16の右向きを正とする。また、重力加速度は g とする。

(A) 最初に台車と小物体の間に摩擦がない場合を考える。台車の紐を水平右向きにひき、台車に F_0 の力を加えた。台車の床に対する加速度を求めよ。

(B) 次に台車と小物体の間に摩擦がある場合を考える。台車と小物体の静止摩擦係数を μ_0 、動摩擦係数を μ_1 とする。

- (1) 台車の紐を水平方向右向きにひき、台車に F_1 の力を加えたところ、小物体は台車の上を滑ることなく、台車と一体となって動いた。この時、床に対する加速度を求めよ。
- (2) 台車を水平方向右向きに引っ張る力を F_2 まで増していったところ、小物体は台車上を滑り始めた。 μ_0 の値を求めよ。
- (3) F_2 に比べ十分大きい水平方向右向きの力 F_3 を台車に $t = 0$ から $t = t_0$ まで加えた。ただし、台車と小物体は時刻 $t = 0$ で静止していたとし、以下では速度や加速度は床に固定された座標で考えることにする。また台車は十分に長く、小物体が台車から落ちないものとする。
 - (3-1) 力 F_3 が台車に作用している間 ($0 \leq t \leq t_0$) の台車と小物体の加速度を求めよ。
 - (3-2) 力 F_3 が働くなくなる瞬間 $t = t_0$ における台車の速度 V_0 と小物体の速度 w_0 を求めよ。
 - (3-3) 力 F_3 が働くなくなった直後の台車の加速度を求めよ。
 - (3-4) $t = t_0$ からある時間が経過して $t = t_1$ になった時、台車は等速度運動を始めた。 t_1 を求めよ。 (V_0, w_0) を用いてよい。)
 - (3-5) $t \geq t_1$ における台車の一定速度 V_1 を求めよ。 (V_0, w_0) を用いてよい。)

解答

まず、各問題を解く前に物体に働く力を図示しよう。図1.17に台車と小物体の間に摩擦がある場合に物体に働く力を示した。ここではそれぞれの力がどのように働いているかを把握するために、矢印などがかぶらないように記した。重要なことは、垂直抗力 N_1 や摩擦力 R は2物体の間に働く力で、作用・反作用の法則により、両物体に等しい大きさで反対向きの力が働く点である。

図1.17では、小物体に右向きの摩擦力が働いている（台車には反作用として左向きに等しい力が働く）としているが、それはなぜか。摩擦力の向きの把握はとても悩ましいものである。基本的には「摩擦力は運動するのを妨げる向きに働く」という原則に従って考えれば良い。

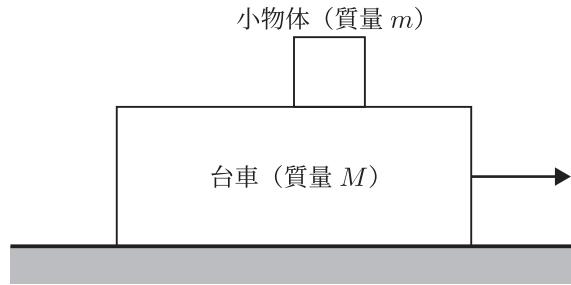


図 1.16

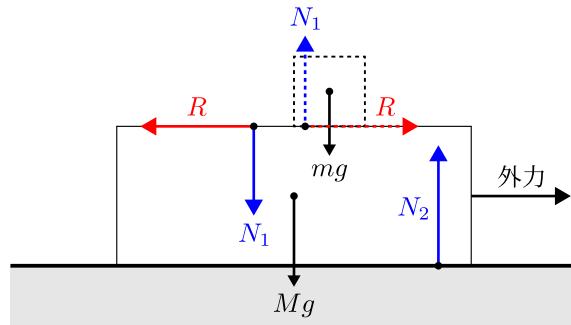


図 1.17

台車は右向きに引っ張っているのだから右向きに動く（と仮定する）。この時、台車に対して小物体は（相対的に）左に動くため、摩擦力は右向きに力が働く。これは仮定なのかもしれない。もし、この仮定（相対的に左に動くこと）がおかしいと判断できる根拠を見つけたなら、その時に修正すれば良い。要するに、動く物体の上にのっている物体に働く摩擦力の向きは相対運動を考えればよいということである。

(A)

小物体に力は働くないのは $R = 0$ に対応する。台車に働く左右方向の力は外力 F_0 だけなので、加速度 a_0 は運動方程式を立てることで以下のように求めることができる。

$$Ma_0 = F_0 \implies a_0 = \frac{F_0}{M}$$

(B)-(1)

(B)-(1)について、ある解答を記す。私はこの解答をあまりオススメしたくない。

「一体になって動いた」ということは、質量 $M + m$ の物体に力 F_1 を加えた場合と同じだから、求める加速度を a_1 とすると、

$$(M + m)a_1 = F_1 \implies a_1 = \frac{F_1}{M + m} \quad (1.52)$$

この解き方は非常に Simple な解き方である。実際、 $a_1 = \frac{F_1}{M + m}$ が答えである。参考書によつては、この解法が解答としてあげられているものもあるだろう。しかし、このような方法しか知らないと、(B) の(2)以降で苦戦するに違いない。なぜなら、台車と小物体のそれぞれについて運動方程式を立てて整理すると、式 (1.52) が得られるからである。

上のような解答しか知らない人に問いたい。(A) ではなぜ「質量 $M + m$ の物体に力 F_0 を加えた」と記さないのか。2つの物体に働いている摩擦力を気にしていないなら、「摩擦がある場合がある」と問題文に

記述する必要はないのではないか。

私は上の解答をオススメしない。結果的に「質量 $M + m$ の物体に力 F_1 を加えた」状況と等価であるということが重要である。2つの物体の間に摩擦力が働いているが、全体として見たときは前面に出てこないのである。では、台車と小物体の運動方程式を立てよう。一体になって動くということは、両者の加速度が等しい⁽⁹⁾ということである。加速度を a_1 とすると、運動方程式は以下のようになる。

$$\begin{cases} Ma_1 = F_1 - R \\ ma_1 = R \end{cases} \quad (1.53)$$

この2つの式より、 $a_1 = \frac{F_1}{M+m}$ である。

(2)

外力が F_2 の時、加速度を a_2 とすると⁽¹⁰⁾、 $R = \mu_0 N_1 = \mu_0 mg$ であるため、運動方程式は以下のようになる。

$$\begin{cases} Ma_2 = F_2 - \mu_0 mg \\ ma_2 = \mu_0 mg \end{cases} \quad (1.54)$$

この連立方程式より $\mu_0 = \frac{a_2}{g} = \frac{F_2}{(M+m)g}$ と求められる。

(3-1)

台車の加速度を a_3 、小物体の加速度を b_3 とする⁽¹¹⁾。ここでは物体が動いている際の運動方程式を立てるので、摩擦力は動摩擦力となる。

$$\begin{cases} Ma_3 = F_3 - \mu_1 mg \\ mb_3 = \mu_1 mg \end{cases} \quad (1.55)$$

これを解くと、 $a_3 = \frac{F_3 - \mu_1 mg}{M}$, $b_3 = \mu_1 g$ である。

(3-2)

初速0の等加速度運動をするから、速度は(加速度) $\times t_0$ で求められる。

$$V_0 = a_3 t_0 = \frac{F_3 - \mu_1 mg}{M} t_0, \quad w_0 = b_3 t_0 = \mu_1 g t_0$$

(3-3)

式(1.55)で $F_3 = 0$ とすれば良いので、求める加速度は、 $-\frac{\mu_1 mg}{M}$

(9) そうでなければ一体となって動くことはありえないことは明らかであろう。

(10) 小物体が滑り出すギリギリを考えるので、両者の加速度は同じとしてよい。また、滑り出すギリギリの瞬間を考えるから、摩擦力 R は静止摩擦力 $\mu_0 N_1$ に等しい。

(11) 「一体となって動く」というPhraseがないので、両者の加速度を同一とする必要はない。なお、(B)-(1)と(B)-(2)についても以下の2つの手順を踏むのが本来は適切かもしれない。

1. 台車の加速度を a_1 , a_2 、小物体の加速度を b_1 , b_2 として、それぞれの運動方程式を立てる。
2. 「一体となって動く」から $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ という束縛条件を課すことができる。

ただ、毎度毎度このように考えるのは時間の無駄かもしれない。何問も物理の難問を解くことで、上記の2つの操作を飛ばして、いきなり式(1.53)や式(1.54)を立てても良いとわかってしまう。本当はこの2つの操作の結果だということを知らずに、いきなり式(1.53)や式(1.54)のような式を立てることは、物理現象の理解を完璧にできているとはいえない。

(3-4)

$t = t_0$ 以降、台車は加速度 $-\frac{\mu_1 mg}{M}$ の運動をするので、台車の速度は減速していく。一方、小物体は $t = t_0$ 以降も一定の加速度 $\mu_1 g$ を持ち、速度は上昇していく。問題文にもあるように、 F_3 は十分に大きい値であるのだから、 $V_0 \gg w_0$ として良い。すると、 $t = t_0$ 以降、台車の速度と小物体の速度の差は徐々に小さくなっている、ある時等しくなる。

この時、台車上から小物体を見ると、小物体は静止したことになり、小物体に静止摩擦力が働くようになる。しかし、それを振り切り再び動き出すことを可能にする力は一切働いていないので、台車上で見て小物体が静止した時刻以降、小物体は台車上を動かない。そうすると、式(1.55)の $\mu_1 mg$ (動摩擦力) の効果もなくなるので、加速度は 0 となり等速度運動をする。そして、等速度運動をしている時、台車と小物体は一体になって運動する。

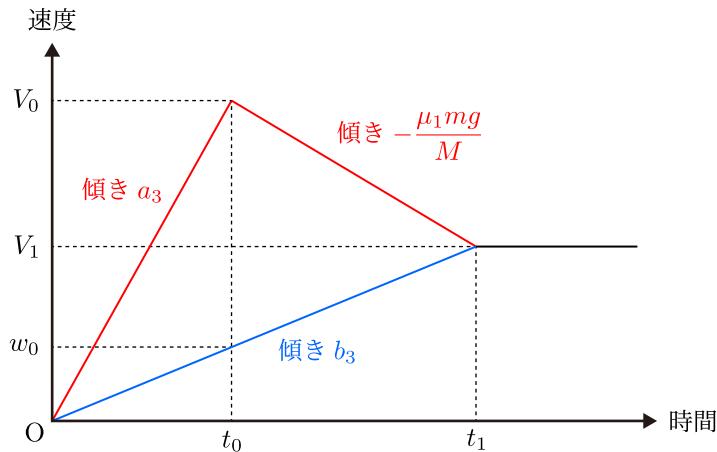


図 1.18

以上の議論をグラフでまとめると図 1.18 のようになり、以下の関係式が成立することがわかる。

$$V_0 - \frac{\mu_1 mg}{M}(t_1 - t_0) = w_0 + \mu_1 g(t_1 - t_0)$$

$$\therefore t_1 = t_0 + \frac{M(V_0 - w_0)}{\mu_1 g(M + m)}$$

(3-5)⁽¹²⁾

V_1 は小物体の $t = t_1$ の速度でもあることを利用する。 $w_0 = \mu_1 g t_0$ であることを利用して計算すると、 V_1 が求められる。

$$V_1 = \mu_1 g t_1 = \mu_1 g \left(t_0 + \frac{M(V_0 - w_0)}{\mu_1 g(M + m)} \right) = w_0 + \frac{M(V_0 - w_0)}{M + m} = \frac{MV_0 + mw_0}{M + m} \quad (1.56)$$

(12) この問題の解答である $V_1 = \frac{MV_0 + mw_0}{M + m}$ について、この系では摩擦力は内力であるため、3 章で紹介する運動量保存則を利用することで V_1 が簡単に求められる。前の (3-4) とこの問題を解く上で大切なことは、両物体の速度が図 1.18 のように変化することを正確に捉えることである。状況を正確に理解した上で、運動量保存則を使うのが最善だと思えば運動量保存則を利用すればよい。

1.6 座標系の設定と問題の難易度

このsectionでは、座標系の設定の仕方で、問題の解きやすさが変わることにふれる。座標系の設定方法には「慣性系」の利用もある。慣性系については第4章でふれる。ここでは、「斜面上の物体の運動」というシンプルなテーマに関する以下の問題を考える。この問題を基礎レベルの簡単な問題だと思うなら、それは座標系をうまく設定しているからである。

問題 4

図1.19に示すように、水平面に対して角度 θ だけ傾いた粗い斜面上に、質量 m の物体がある。斜面と物体との間の静止摩擦係数を μ 、動摩擦係数を μ' とし、また重力加速度の大きさを g として、以下の問い合わせよ。ただし、物体の大きさや空気の影響は無視できるものとする。

- (1) 物体が静止しているとき、物体に働く3つの力について、それらの名称、大きさ、および向きを答えよ。
- (2) 角度 θ をゆっくり大きくすると、 $\theta = \theta_0$ のとき物体が斜面に沿って滑り出した。静止摩擦係数 μ を θ_0 で表せ。
- (3) 物体の加速度の大きさを求めよ。
- (4) 時刻 t における物体の速さを求めよ。
- (5) 時刻0から t までの間に、物体がすべり落ちた鉛直距離(高さの差)を求めよ。

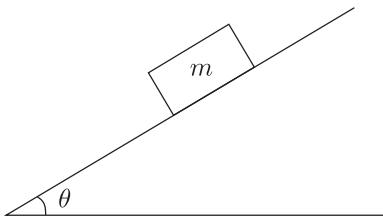


図 1.19

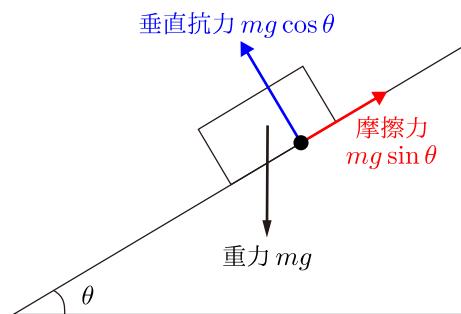


図 1.20

1.6.1 摩擦力の復習

- (1) 答えは図1.20のようになる。

この問題を解く際は、斜面に沿った方向の摩擦力が $\mu mg \cos \theta$ とならないことに注意する必要がある。なぜなら、垂直抗力を N 、摩擦力を R とすると、運動方程式(つりあいの式)が

$$(斜面に垂直な方向) \quad 0 = N - mg \cos \theta \quad (1.57a)$$

$$(斜面に沿った方向) \quad 0 = R - mg \sin \theta \quad (1.57b)$$

となるからである。もし、この説明に納得がいかないのなら、その人は摩擦力について正しく理解できていない⁽¹³⁾。

(2) θ を大きくしていき、物体が滑り出す直前において、摩擦力 R が μN となる。よって、

$$mg \sin \theta_0 = \mu mg \cos \theta_0$$

が成立する。これより、 $\mu = \tan \theta_0$ である。

1.6.2 正攻法の確認

もし、この問題が問題集で取り上げられたら、(3) 以降の問題の解説はどうなるか。ここで、問題集に書かれていそうな解説を記す。

(3) 斜面下向きの加速度を a とすると、運動方程式は、

$$ma = mg \sin \theta - \mu' mg \cos \theta$$

となるから、 $a = g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)$ である。静止摩擦力を振り切って下向きに動くことは明らかなので、

$$mg \sin \theta > \mu mg \cos \theta > \mu' mg \cos \theta$$

という関係が成立する。よって、今求めた a は正の値である。

(答え) $g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)$

(4) 等加速度運動の公式を使うと、求める速さを v とすると、

$$v = at = g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)t$$

(5) 斜面上を滑りおりた距離を x とすると、求める鉛直距離は $x \sin \theta$ とかける。等加速度運動の公式を使うと、求める高さの差 h は、

$$h = \frac{1}{2}at^2 \sin \theta = \frac{1}{2}g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)t^2 \sin \theta = \frac{1}{2}g \sin \theta (\sin \theta - \mu' \cos \theta)t^2$$

(3) の解答に記した不等式は、

- 動摩擦係数 μ' が静止摩擦係数 μ より小さい。
- 斜面上を滑りだしたので、斜面下向きの力 $mg \sin \theta$ が静止摩擦力の最大値 $\mu N = \mu mg \cos \theta$ より大きい。

の 2 つのポイントに基づく。

1.6.3 水平方向と鉛直方向を 2 つの軸とする座標系の導入

前のページで書いた正攻法は、以下の図 1.21 の黒矢印のように座標系を導入して解いている。なぜ、赤線で書いたような座標系を導入しないのか。答えは、赤線の座標系で計算するのは面倒だからである。

(13) 静止摩擦力は、物体の運動を妨げようとして働く。物体は運動しようとするのだから、動きたい方向に力が働いている。摩擦力はその力とつりあうことで運動を妨げる。そのため、静止摩擦力は μN (N は垂直抗力) ではない。では、 μN は何か。動きたい方向に働く力が強いと静止摩擦力を振り切って動き出す。動き出すか動き出さないかの境目における摩擦力の大きさ、すなわち、静止摩擦力の最大値が μN である。

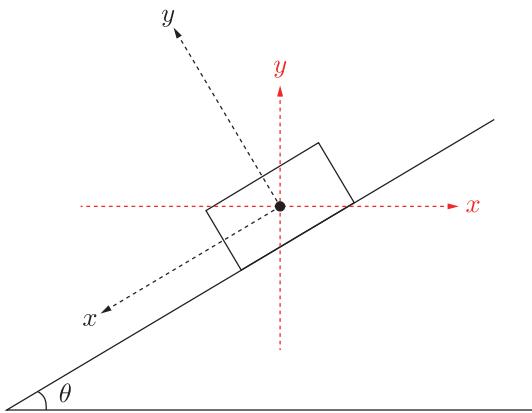


図 1.21 2つの座標系

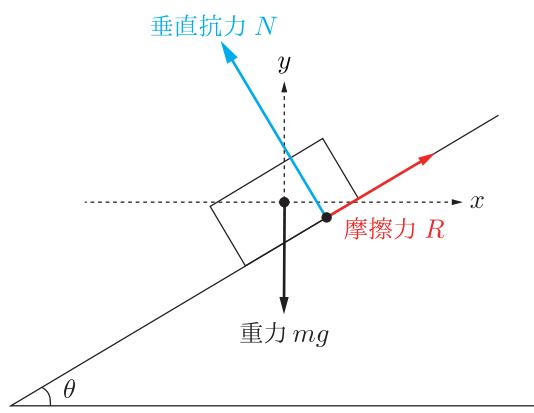


図 1.22 物体に働く力

では、定期試験や入試で絶対に使いたくない方法で(3)~(5)を解こう。垂直抗力 N と摩擦力 R の大きさが未知であるとする。図 1.22 の x, y 方向の運動方程式は、

$$ma_x = m \frac{d^2x}{dt^2} = R \cos \theta - N \sin \theta \quad (1.58a)$$

$$ma_y = m \frac{d^2y}{dt^2} = R \sin \theta + N \cos \theta - mg \quad (1.58b)$$

となる。この式の変数は x, y, R, N (x, y の代わりに a_x, a_y でも良い) の 4 つなのに、式が 2 つなので解を求めるることはできない。そのため、束縛条件（拘束条件）を導入する必要がある。今回は、式が 2 つ足りないので、2 つの束縛条件を導入したい。

- 摩擦力と垂直抗力の大きさ R と N は以下の式を満たす。

$$R = \mu' N \quad (1.59)$$

- 最初の物体の位置を原点とするように 2 軸をとると、物体の位置は

$$y = (\tan \theta)x \quad (1.60)$$

という拘束を受ける。この条件で斜面上を運動するということを表現する。

解答

(3) 式 (1.60) より、 $a_y = a_x \tan \theta$ なので、式 (1.59) と式 (1.60) を式 (1.58a) と式 (1.58b) に代入すると、

$$ma_x = N(\mu' \cos \theta - \sin \theta) \quad (1.61a)$$

$$ma_x \tan \theta = N(\mu' \sin \theta - \cos \theta) - mg \quad (1.61b)$$

となる。変数が a_x と N だけになったので、この連立方程式は解ける。式 (1.61b) を $\tan \theta$ で割ると、

$$N(\mu' \cos \theta - \sin \theta) = N \left(\mu' \frac{\sin \theta}{\tan \theta} + \frac{\cos \theta}{\tan \theta} \right) - \frac{mg}{\tan \theta} = N \left(\mu' \cos \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \right) - \frac{mg}{\tan \theta}$$

となるので、この式を整理すると、

$$\frac{N}{\sin \theta} = \frac{mg}{\tan \theta} = mg \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

となり、 $N = mg \cos \theta$ であることがわかる。式 (1.61a) と $N = mg \cos \theta$ より、

$$ma_x = mg(\mu' \cos \theta - \sin \theta) \cos \theta$$

となることと、 $a_y = a_x \tan \theta$ より、 $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{|a_x|}{\cos \theta}$ となることより、

$$a = \frac{|a_x|}{\cos \theta} = g|\mu' \cos \theta - \sin \theta| = g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)$$

である。なお、絶対値記号を外す時は、次の関係式が成立することを利用した。

$$mg \sin \theta > \mu mg \cos \theta > \mu' mg \cos \theta \quad (1.62)$$

- (4) 式 (1.60) より $v_y = v_x \tan \theta$ である。今、 a_x, a_y は定数で、初速度が $\mathbf{0}$ であることから、等加速度運動の公式を使えば、

$$v_x = a_x t, \quad v_y = a_y t$$

である。すると、 $v = \|v\| = \sqrt{(a_x t)^2 + (a_y t)^2} = t \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = at$ となる。よって、面倒な方法で求めた場合も、(3) で求めた a に t をかければ速さが求められる。

$$v = g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)t$$

- (5) $a_y = a_x \tan \theta$ より、

$$a_y = g(\mu' \cos \theta - \sin \theta) \sin \theta$$

である。よって、 y 方向の変位は、等加速度運動の公式より、

$$\Delta y = y(t=0) + \frac{1}{2}a_y t^2 = y(t=0) + \frac{1}{2}gt^2(\mu' \cos \theta - \sin \theta) \sin \theta$$

である。(初速度が $\mathbf{0}$ であることを利用した。) 今回求めるのは、高さの差なので、第 2 項の絶対値を求めるべく、求める高さの差 h は

$$h = \frac{1}{2}gt^2(\sin \theta - \mu' \cos \theta) \sin \theta$$

である。

(3) から (5) について 2 通りの座標系で解いたがどちらが楽だっただろうか。当然最初のやり方の方が楽だろう。でも、なぜ、最初の方法を使うのかという説明は少なかったのではないか。全部の問題を後に書いた方法で解いてもかまわない。しかし、計算量が多くなったり、束縛条件を考えなければならず、とても面倒である。そのようなことを避ける見方が、今回の場合、斜面に沿って座標系を設定することである。学校や予備校、参考書で知らず知らずのうちにベストな方法が何の説明もなく教えられている。その理由も知っているのが一番良いが、大学入試などで高得点をとりたいなら、そんなことは一旦頭の端に置いておいて、「天下り」的な方法を利用するのが一番良いだろう。この section を通して、そのことを私は伝えたい。

1.7 浮力

1章の最後に、高校物理の力学ではあまり重要視されない浮力について扱う。高校物理の教科書では一応数ページにわたって記されているので、このTEXノートでも浮力に関する基本的なことを記す。

物体の面が及ぼしている単位面積 (1 m^2)あたりの力を圧力 (pressure) という。面積が S の面に、力 F を垂直に及ぼすとき、圧力 p は

$$p = \frac{F}{S} \quad (1.63)$$

である。高校物理では圧力は熱力学分野で多々出てくるが、単位面積あたりの力という意味は変わらない。

1.7.1 水圧

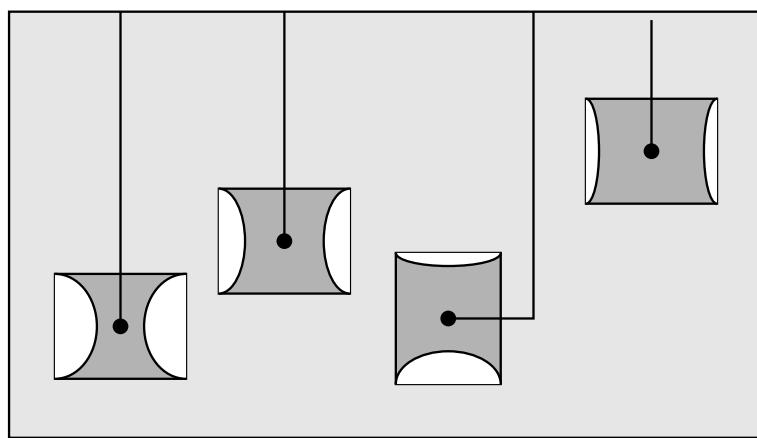


図 1.23

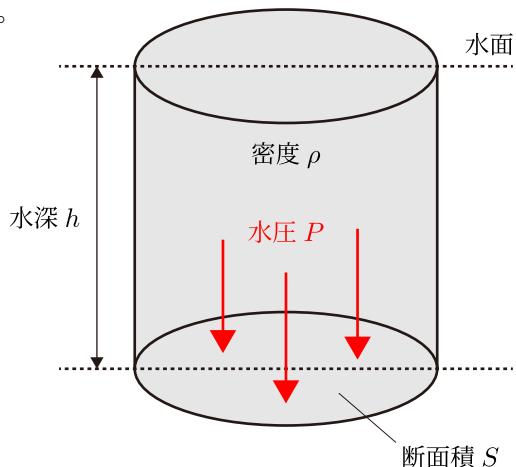
中学校の理科の教科書に、図 1.23 のように、筒の両端に薄いゴム膜を張って水中に入れた時の、ゴム膜のへこみ具合を調べる実験が記されていたことを覚えているだろうか。ゴム膜がへこむのは、筒の回りにある水がゴム膜を押しているからである。このように水が物体を押す際の圧力が水圧である。

図 1.23 のような実験からわかることとしては、教科書に以下の 2 点が必ず載っている。

- 同じ深さでは、水圧はどの方向にも同じ大きさである。
- 深くなるほど水圧は大きい。

1つ目は、横向きになっている筒の左右のゴム膜のへこみ具合が同一であることからわかる。2つ目は、図 1.23 の右から 2 つ目のようゴム膜が上下になるように沈めると、上下のゴム膜でへこみ具合が異なることからわかる。このことは深いところほど、その地点より上に多くの水があることによる。

高さ h の円筒



1.7.2 浮力

図 1.24

第 2 章 仕事とエネルギー

私が持っている電子辞書に入っている国語辞典で「仕事」と調べると、「体や頭を使って働くこと。」という意味がでてくる。力学において、「仕事」という言葉がこのような言葉で使われることはない。同様に、「エネルギー」と調べると、「仕事などをするのに必要な心身の元気。精力。」とでてくる。しかし、「エネルギー」の 2 つ目の意味として、こう書かれている。

(物理学において) 物体が持っている、仕事をする能力の量

この Chapter では、(物理学の)「仕事」と「エネルギー」の関係を見ていく。最初に「運動エネルギーの変化と仕事の関係⁽¹⁾」を紹介する。その後、「力学的エネルギー保存則」や「位置エネルギー (Potential)」、「保存力」について見ていく。

物理基礎の教科書では、力学分野の「仕事とエネルギー」の項目で、バネの弾性エネルギーについて扱っているが、この TeX ノートでは、それは扱わない。(第 5 章の「単振動」の部分で扱う)

2.1 仕事と運動エネルギー

2.1.1 仕事の定義

「仕事」とは何かを定義する。私が高校 2 年生の時に使った物理基礎の教科書(数研出版)に書かれている仕事の定義を見てみる。それは最も単純な場合における仕事の定義である。

仕事の定義 (1)

一直線上で物体に一定の大きさの力 F [N] をはたらかせて、その力の向きに x [m] 動かす時、

$$W = Fx \quad (2.1)$$

をその力のした仕事 (work) という。

しかし、いつでも力の向きと動かす方向が平行であるとは限らない。図 2.1 のように、右に x 動かすために斜め右上方向に一定の力 F を加えてもよい。このような場合は、力を 2 方向に分解して考えれば良い。力の上方向成分 $F \sin \theta$ が小さければ、物体は床面から離れない。ここでは、力の上方向成分はあまり大きくなく、物体が床面から離れないものとする。すると、力の右方向成分 $F \cos \theta$ が物体の運動に影響してくる。

この時、加えた力のした仕事を考えるが、この状況は式 (2.1) の F の代わりに $F \cos \theta$ を使ったものと同じである。そのため、加えた力のした仕事は、

$$W = (F \cos \theta)x = Fx \cos \theta$$

となる。 $\theta = 0$ の場合は上記の「仕事の定義 (1)」と同じである。したがって、力の大きさが一定でかつ一直線上を動かす時の仕事は次のように定義すれば良い。

⁽¹⁾私は、この関係のことを「エネルギーの原理」ということを、高校 3 年の時に佐藤先生から習ったのだが、この名称を使う参考書や問題集をあまり見ない。しかし、インターネットで「エネルギーの原理」と検索すると、必ず「運動エネルギーの変化と仕事の関係」と教科書で紹介されている式がでてくる。私は、この TeX ノートでは「エネルギーの原理」と呼ぶことにする。

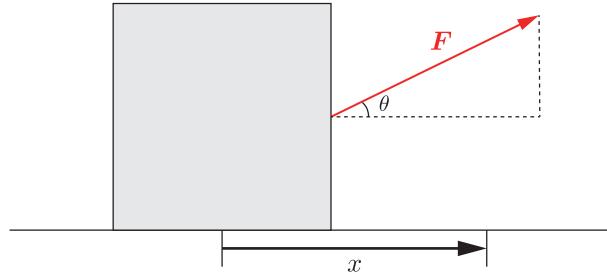


図 2.1 仕事の定義

仕事の定義 (2)

一直線上で物体に一定の大きさの力 F [N] をはたらかせて、その力の向きに x [m] 動かす時、力の向きと移動の向きのなす角を θ とすると、

$$W = Fx \cos \theta \quad (2.2)$$

をその力のした**仕事 (work)** という。

式 (2.2) から以下のことことがすぐにわかる。

- $\theta = \frac{\pi}{2}$ の時、 $\cos \theta = 0$ となる。つまり、**移動する向きと垂直に働く力は物体に対して仕事をしない。**
- $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ の時、 $\cos \theta < 0$ となる。つまり、**仕事には正の仕事と負の仕事がある。**

私たちが物を引っ張る時、引っ張る力を測定してみると、どんな結果になるだろうか。引っ張っている間ずっと一定ということはないだろう。ある値の周りを振動しているかもしれない。これまででは、加える力が一定の時を考えたが、今度は加える力が位置によって変化する場合を考える。つまり、力 F が位置の関数 $F(r)$ でかける時を考える。まずは一次元の場合を考える。

今、力 $F(x)$ が $F(x) = x + 0.5x^3$ と位置の関数で表されるとする。このとき、 $x = 0$ の位置から $x = 0.5$ の位置まで動かす時の仕事を考えよう。

$x = 0$ から $x = 0.5$ までの区間を非常に細かく N 個に分割する。各区間を $I_n = \{x | x_{n-1} \leq x \leq x_n\}$ とし、各分割の幅を $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ とする。各微小区間 I_n において $F(x)$ の変化が十分小さい場合は、この微小区間 I_n では力 F は一定であるとみなすことができる。そのため、この微小区間 I_n において力 F のした仕事は、近似的に $F(x_n)\Delta x_n$ とかける。よって、これを全ての微小区間について足し合わせればよい。

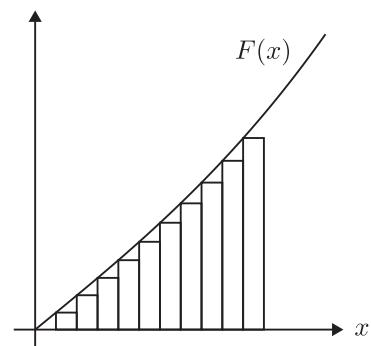


図 2.2

$$W(x = 0 \rightarrow x = 0.5) = \sum_{\text{全微小区間}} F(x_n) \Delta x_n \quad (2.3)$$

各 Δx_n ができるだけ小さくなればなるほど正確なので、 $\max\{\Delta x_n | n = 1, 2, \dots, N\} \rightarrow 0$ の極限を考える⁽²⁾。ここで、 $F(x_n)\Delta x_n$ という量は、上図のように長方形をとったときの、長方形の面積に等しい。そ

⁽²⁾ Δx_n のうち、一番最大のものが 0 になれば、それより小さいものは当然 0 になる。イメージとしては、任意の Δx_n に対して、

$$0 \leq \Delta x_n \leq \max\{\Delta x_n | n = 1, 2, \dots, N\}$$

が成立するので、はさみうちの原理より、各 Δx_n は 0 になると考えればよい。

のため、 $\max\{\Delta x_n \mid n = 1, 2, \dots, n\} \rightarrow 0$ の極限をとると、

$$W(x=0 \rightarrow x=0.5) = \int_0^{0.5} F(x) dx \quad (2.4)$$

となる。この積分で表された量が、 $x=0$ の位置から、 $x=0.5$ の位置まで動かす時の仕事である。上の式に $F(x) = x + 0.5x^3$ を代入すると、

$$W = \int_0^{0.5} \left(x + \frac{1}{2}x^3 \right) dx = \frac{17}{128}$$

と求められる。この話を拡張すると、「仕事」の定義として、次のようにかける。

仕事の定義 (3)

一直線上で物体に力 $F(x)$ をはたらかせて、位置 x_1 から x_2 まで動かす時に物体がされた仕事（力 $F(x)$ のした仕事）は以下のように表される。

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (2.5)$$

$F(x)$ が x によらず一定のとき、式 (2.5) は式 (2.1) と同じである。したがって、この式は「仕事の定義 (1)」の内容も含む一般的な定義といえよう。しかし、式 (2.5) は 2 次元以上で考えるときには使えない。

今度は、一直線上ではなく、図 2.3 のような曲線 C 上を動かすことを考える。力が $F(r)$ と位置 r の関数でかけるとき、一次元の場合と同様に区間をたくさんの微小区間に区切る。すると、この微小区間では、曲線も直線に近似できて、式 (2.2) が使える。ここで、式 (2.2) に少し手を加える。

図 2.1 で、右向きに x 動かすということを表すように、下側に矢印が書かれている。この矢印を大きさ x のベクトル x と見ると、 $W = Fx \cos \theta$ というのは、力のベクトル F と x の内積となる。そのため、式 (2.2) は次のように書き換えてよい。

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} \quad (2.6)$$

この内積を使うと、上の曲線 C 上を動かす場合は、曲線を微小区間に分割し、各微小区間を微小ベクトルと見れば、各微小区間で力 $\mathbf{F}(r_i)$ と微小ベクトル Δr_i の内積をとり、足し合わせれば良い。

$$W = \sum_{\text{全微小区間}} \mathbf{F}(r_i) \cdot \Delta r_i \quad (2.7)$$

1 次元の場合と同様に考えると、これも積分の形でかけそうである。実際、大学で習う線積分⁽³⁾を用いると、積分の形でかける。その結果は次のようになる。

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.8)$$

線積分が登場してきて難しい感じがするが、重要なのは、1 次元だろうが、2 次元だろうが、**微小区間に分けて微小仕事を計算し、全区間分足し合わせれば、仕事が求められる**ということである。2 次元の場合、1 次元と表記法が変わっただけで、本質的な部分は何も変わっていない。

⁽³⁾私が作成する高校物理の TeX ノートの「力学」編では、1 次元の場合や、視点をうまく変えることで 1 次元に帰着できる場合を中心に考える。この線積分は、ただこういう風に書くのかと思いつながら、読み流してくれれば良い。

2.1.2 「エネルギーの原理」の導出

2.1.2節では教科書で「運動エネルギーと仕事の関係」と呼ばれている関係式を導出する。まず1次元の場合を考える。1次元の系における運動方程式は以下のようになる。

$$m \frac{dv}{dt} = F(x) \quad (2.9)$$

仕事との関係を求めるために、仕事の式を作ることを考えよう。式(2.9)の両辺を x で積分する。

$$\int_{x_1}^{x_2} m \frac{dv}{dt} dx = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

左辺の積分変数を x から t に変える。 $dx = \frac{dx}{dt} dt = v dt$ より、次のように変数変換することができる。

$$\int_{t_1}^{t_2} mv \frac{dv}{dt} dt = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

ここで、 $\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dv}(v^2) \cdot \frac{dv}{dt} = 2v \frac{dv}{dt}$ の関係を使うと、以下のようになる。

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) dt = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (2.11)$$

この式(2.11)を導く過程で現れた $\frac{1}{2} mv^2$ という量は仕事と同じ次元 (dimension)⁽⁴⁾をもつ値で、これを運動エネルギー (Kinetic Energy) という。第3章で紹介する運動量 $p = mv$ を用いると、運動エネルギーは $p^2/2m$ とかける⁽⁵⁾。

運動エネルギーとエネルギーの原理（1次元の場合）

- 物体が持つ運動エネルギー (Kinetic Energy)

$$K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad (2.12)$$

- エネルギーの原理：運動エネルギーの変化は、物体に働く力 $F(x)$ がした仕事に等しい。

$$\frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (2.11)$$

続けて、2次元や3次元の場合を考える。2次元や3次元の場合の運動方程式は以下のようになる。

$$m \frac{dv}{dt} = \mathbf{F}(r) \quad (2.13)$$

1次元の場合は単に x で積分することは、2次元や3次元の場合は以下のようになる。

$$\int_{t_1}^{t_2} mv \cdot \frac{dv}{dt} dt = \int_C \mathbf{F}(r) \cdot dr \quad (2.14)$$

(4) 全ての物理量は単位をもつ。例えば、距離や変位はメートル (m) という単位をもつ。質量はキログラム (kg) という単位をもつ。速さの単位としては、m/s が使われるが、これは単位や次元という解釈の下では、「メートル」で表される量を「秒 (Second)」で表される量で割ったものだという意味がある。力はニュートン (N) という単位で表される。その一方で、運動方程式を見ると、質量 (kg) × 加速度 (m/s²) でも力と同じ次元を表せることがわかる。すると、仕事の単位は「仕事 = 力 × 距離」なので、(N · m)、つまり、(kg · m²/s²) である。 $(m^2/s^2) = (m/s)^2$ と見れば、運動エネルギーと仕事が同じ次元をもつことがわかる。

(5) この表記方法は、速度を介さない表記をするとき、高校物理では「原子」分野で役立つ。私が高校3年生の時の駿台の東大実戦の物理で、「原子」分野ではないが、運動エネルギーを $p^2/2m$ で表さなければならない問題がでた。

左辺については次の関係式が利用できる。

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v_x^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v_y^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v_z^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 \right)\end{aligned}$$

これを使って1次元の場合と同様に式変形をすると、

$$\frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_2\|^2 - \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_1\|^2 = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (2.15)$$

が得られる。この式が2次元や3次元の場合のエネルギーの原理を表す式である。

2.1.3 仕事率

次に仕事率について考える。改めて式(2.10)を示す。

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) dt = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (2.10)$$

左辺は t について積分していて、右辺は x について積分している。右辺も t についての積分に直して統一感のある感じにしてみよう。右辺を置換積分して、 $dx/dt = v$ を使って整理する。

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} F(t)v(t) dt \quad (2.16)$$

左辺と右辺を見比べよう。積分区間が同じ t_1 から t_2 でかつ、積分変数はどちらも t である。その上、定積分の値は等しい。ならば、積分される関数も同じで、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = F(t)v(t)$$

が成立するのではないか⁽⁶⁾。実際、両者は等しい。式(2.16)の $v(t)$ や $F(t)$ は具体的な関数と指定されてなく、任意の関数だからである。それに、積分区間も0から3というように具体的ではなく、 t_1 から t_2 と任意だからである⁽⁷⁾。被積分関数がどんな関数でも、積分区間がどんな区間でも、式(2.16)が成立するためには、両者が等しくなければ困る。

しかし、今回の場合、こんなに面倒な方法をとらなくても良い。運動方程式

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

⁽⁶⁾積分される関数も同じとすぐに決めつけるのは注意が必要である。

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = \int_0^{2\pi} \cos x dx = 0$$

である。積分区間も積分変数も同じで、定積分も同じである。しかし、 $0 \leq x \leq 2\pi$ を満たす全ての x において $\sin x = \cos x$ は成立しない。そのため、一般的には $\sin x \neq \cos x$ である。こういう風に簡単に反例を示すことができる。

⁽⁷⁾上の(注)で使った \sin と \cos について、今度は積分区間が $0 \leq x \leq \pi$ の場合を考える。

$$2 = \int_0^\pi \sin x dx \neq \int_0^\pi \cos x dx = 0$$

であるので、同じ \sin と \cos でも積分区間が変わると、定積分の値は等しくない。定積分の区間を変えても、式(2.16)が成立するには、 $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = F(t)v(t)$ と関数が完全に一致しなければならないというのは、この例からもよくわかるだろう。

の両辺に v をかけて、 $\frac{d}{dt}(v^2) = 2v\frac{dv}{dt}$ の関係を使えば、次の式が得られる。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (2.17)$$

この式は、運動エネルギーの時間変化率、すなわち外力がした単位時間あたりの仕事が外力 F と物体の速度 v の積で表されることを表す。この $F \cdot v$ を仕事率という。なお、2次元や3次元の場合は式(2.17)に対応する式は次のようになる。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2\right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (2.18)$$

2.2 仕事と位置エネルギー

2.2.1 重力のした仕事

平昌オリンピックで羽生結弦が男子フィギュアスケートで2連覇し、国民栄誉賞の授与が決まった。冬のオリンピックで日本人が活躍したのはフィギュアスケートだけではない。平野歩夢の銀メダル、原大智の銅メダル。そして、高梨沙羅の銅メダル。

さて、平野歩夢の男子ハーフパイプ、原大智の男子モーグル、高梨沙羅の女子スキージャンプのスタート地点はどれも高い所にある。高いところから滑り始め勢いをつけている。スキージャンプの中継を見た人は、Gate Factor という言葉を聞いたかもしれない。スタートの位置が定められた基準より低くなると、得点がプラスになるというものだ。加点される理由は、飛び立つ瞬間までに勢いがつかなくて不利になるからである。

より高いところから滑り始めれば、より勢いがつく。これを仕事やエネルギーという観点から考える。そこで図2.4のようなモデルでスキージャンプを考える。スタート地点の座標を $P(0, h_P)$ 、飛び立つ地点の座標を $Q(s, h_Q)$ とする。空気抵抗や物体と斜面の摩擦は無視する。

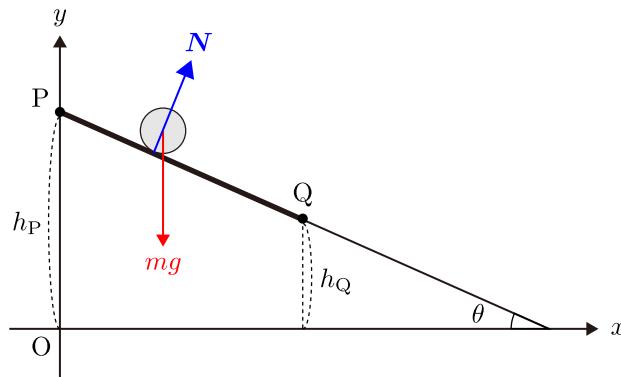


図 2.4

点P、点Qにおける運動エネルギーを K_P, K_Q とおくと、エネルギーの原理より以下の式が成立する。

$$\begin{aligned} K_Q - K_P &= \int_{P \rightarrow Q \text{ (斜面上)}} (\mathbf{N} + \mathbf{mg}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \underbrace{\int_{P \rightarrow Q \text{ (斜面上)}} \mathbf{N} \cdot d\mathbf{r}}_{\text{垂直抗力のした仕事}} + \underbrace{\int_{P \rightarrow Q \text{ (斜面上)}} \mathbf{mg} \cdot d\mathbf{r}}_{\text{重力のした仕事}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

ただ、今回の場合、斜面上を移動し、かつ垂直抗力と重力は斜面上のどの位置でも一定なので、線積分は式(2.2)と等価である。垂直抗力 N は進行方向に対して垂直なので仕事をしない。重力のした仕事について

ては、図 2.4 より重力と斜面のなす角度が $\pi/2 - \theta$ であることから、

$$K_Q - K_P = mg \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \frac{h_P - h_Q}{\sin \theta} = mg \sin \theta \cdot \frac{h_P - h_Q}{\sin \theta} = mg(h_P - h_Q) \quad (2.20)$$

となる。この式で添字が同じものどうしをまとめると以下のようになる。

$$K_P + mgh_P = K_Q + mgh_Q \quad (2.21)$$

ここからは式 (2.21) の意味を考えよう。点 P において速度が 0 なら、 $K_P = 0$ であるから、

$$K_Q = mg(h_P - h_Q)$$

となり、点 Q における運動エネルギー K_Q は点 P と点 Q の高さの差 $h_P - h_Q$ に比例することがわかる。そのため、高いところから滑ると点 Q における運動エネルギー、つまり点 Q における速さが大きくなる。式 (2.21) において運動エネルギー K_P, K_Q と高さ h_P, h_Q の取り方は任意である。式 (2.21) には添字がついていて、斜面上の特定の 2 点間の関係のように見えるが、実際は「斜面上の任意の点で $K + mgh$ が等しい」ということを表している。この関係式は**力学的エネルギー保存則**と呼ばれる。

さて、「 mgh という量と運動エネルギーの和が一定」という式が成立するということは、 mgh はエネルギーに変換できる量か、エネルギーであり、単位は**ジュール (J)** である。

2.2.2 保存力

この mgh と関連して**保存力**について本 subsection では取り上げる。

保存力

質点の運動に際して、力 \mathbf{F} のする仕事が始点と終点の位置のみで決まり、途中の経路によらないとき、この力を**保存力 (conservative force)** という。

一般に、仕事 W は移動経路に依存する。保存力は移動経路に依存しない特別な力である。仕事が移動経路に依存することについては、次の subsection で簡単な例を用いて説明する。本 subsection では重力がする仕事をについて考える。

2.2.1 でも取り扱った重力の仕事をについて考える。 xy 平面上の y 軸の負の方向に重力が働いているとする。点 A(0, a) から点 B(0, -a) まで質量 m の質点を移動させる際の重力がした仕事を計算する。図 2.5 に示した 3 つの経路 C₁, C₂, C₃ を通って移動する際の重力がした仕事 W_1, W_2, W_3 を求める。

(1) 経路 C₁ : y 軸上を移動する

重力の方向に距離 $2a$ だけ移動する。

$$\therefore W_1 = mg \cdot (2a) = 2mga \quad (2.22)$$

(2) 経路 C₂ : まず y 軸と角度 φ をなす直線にそって、 y 座標が $-a$ となる点まで移動する。

その後、 x 軸と平行に点 B まで移動する。

x 軸と平行な直線上を移動する際は移動方向と重力の向きが垂直であるため、重力がした仕事は 0 である。一方で y 軸と角度 φ をなす直線にそって移動する際に重力がした仕事については、移動方向と重力の向きの間の角度は φ で、この直線上を移動した距離は $2a/\cos \varphi$ である。

$$\therefore W_2 = mg \cdot \frac{2a}{\cos \varphi} \cdot \cos \varphi = 2mga \quad (2.23)$$

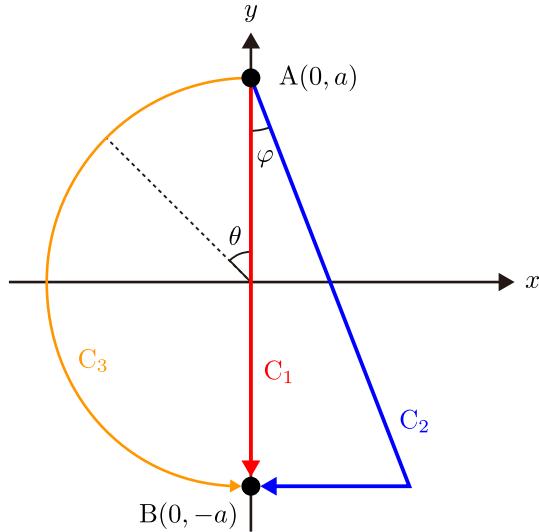


図 2.5

(3) 経路 C_2 : 半径 a の円弧上を移動する

図 2.5 のように θ をとる。このような場合は式 (2.8) のような線積分を考える必要がある。ただ、以下のような置換積分を考えるだけで良いことが知られている⁽⁸⁾。円弧上の位置は $\mathbf{r} = (-a \sin \theta, a \cos \theta)$ である。そのため、

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = \begin{pmatrix} -a \cos \theta \\ -a \sin \theta \end{pmatrix}$$

となり、

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \cos \theta \\ -a \sin \theta \end{pmatrix} = mga \sin \theta$$

と書けることを使うと、線積分は以下のようになる。

$$\int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} d\theta = \int_0^\pi mga \sin \theta d\theta = 2mga \quad (2.24)$$

上記のように 3 つのどの経路に沿って移動しても、重力がした仕事は $2mga$ である。このような結果から重力は保存力であるように思われる。厳密にはベクトル解析を利用した議論が必要であり、本 T_{EX} ノートではこれ以上のことを見ることはしないが、重力は保存力である。

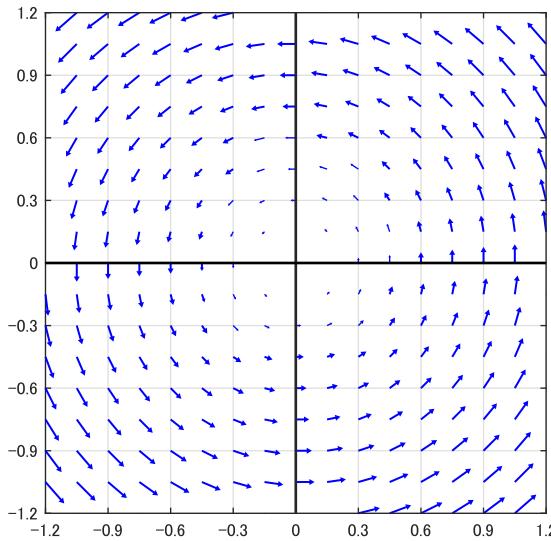
2.2.3 仕事と移動経路

重力の場合は、2.2.2 節で見たように 2 つの経路で重力のする仕事は等しい。しかし、一般には力のした仕事は移動経路により異なる。図 2.6 のように、2 次元平面上で $\mathbf{F} = (-ay, ax)$ (a は定数) という力が働く空間で、物体を原点 $O(0, 0)$ から点 $A(1, 1)$ に移動するときに、物体が受ける仕事を計算してみよう。

(1) 原点 $O(0, 0) \Rightarrow (1, 0) \Rightarrow A(1, 1)$

$$W_1 = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0)}^{(1,0)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{(1,0)}^{(1,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

⁽⁸⁾ 詳細は「ベクトル解析」の本を参照してほしい。

図 2.6 ベクトル場 $\mathbf{F} = (-ay, ax)$ ($a = 0.1$) の様子

- $(0, 0) \Rightarrow (1, 0)$ の過程では、 $d\mathbf{r} = (dx, 0)$ である (y 方向には動かない)。そのため、 \mathbf{F} の y 成分は仕事に関与しない。よって、

$$\int_{(0,0)}^{(1,0)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (-ay) dx$$

となるが、 x 軸上は $y = 0$ なので、この積分は 0 である。

- $(1, 0) \Rightarrow (1, 1)$ の過程では、 $d\mathbf{r} = (0, dy)$ である (x 方向には動かない)。そのため、 \mathbf{F} の x 成分は仕事に関与しない。よって、

$$\int_{(1,0)}^{(1,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (ax) dy$$

となる。このルートでは $x = 1$ なので、この積分は $\int_0^1 a dy = a$ である。

- ゆえに $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0)}^{(1,0)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{(1,0)}^{(1,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = a$ である。

(2) 原点 O(0, 0) \Rightarrow (0, 1) \Rightarrow A(1, 1)

上の (1) と同様に考えると以下のようになる。

$$W_2 = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \underbrace{\int_{(0,0)}^{(0,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{=0} + \underbrace{\int_{(0,1)}^{(1,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{=-a} = -a$$

(3) 直線 $y = x$ 上を動いて、点 O(0, 0) から点 A(1, 1) まで動く

この直線上の点はパラメーター t を用いて (t, t) とかけて、進行方向を表す方向ベクトルは $(1, 1)$ である。また、 \mathbf{F} はパラメータ t を用いて $\mathbf{F} = (-at, at)$ と書ける。そのため、直線 $y = x$ 上では \mathbf{F} と直線の方向ベクトルは垂直であり、力 \mathbf{F} のする仕事は 0 である。

2.2.4 位置エネルギー

位置エネルギー

物体がある点 A から基準点 O まで移動させる時、保存力がする仕事を点 O を基準とした点 A における物体の位置エネルギーと定義する。

この定義を数式で表すことを考える。保存力 \mathbf{F} がする仕事は式 (2.8) のように線積分を使って書くと

$$U = \int_A^O \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.25)$$

とかける。ただ、A から基準 O までの仕事とゴールが基準点であるよりは、基準点をスタートにした方がわかりやすいかもしれない。積分では始点と終点を入れかえると、積分結果の正負が入れかわるので、上の式は次のように書き換えられる。

$$U = - \int_O^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_O^A (-\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{r} \quad (2.26)$$

この式より、U は O から A まで、保存力 \mathbf{F} と大きさが等しく、向きが反対の力 $-\mathbf{F}$ のする仕事と見ることもできる。つまり、「O から A に至る経路の各点において保存力 \mathbf{F} とつり合うように働かせた力のする仕事」が位置エネルギー U なのである。

さて、定積分では始点と終点が同じとき、積分結果は 0 となる。そのため、式 (2.26) の A と O が一致する場合 $U = 0$ である。つまり、位置エネルギー $U(\mathbf{r})$ は基準点では 0 である。ただ、基準点の取り方については具体的に定まっていない。むしろ、具体的に決めていないというのが適切かもしれない。積分で位置エネルギーを定義したが、基準について定義していないのは、基準はどこにとっても問題ないからである。位置エネルギーの特徴の 1 つに基準点をどこにとっても良いことがある。線積分で定義しているので、基準を変えれば位置エネルギーも変わってしまう。しかし、定義には何の問題もない。

基準点として点 O をとる。2 点 A,B を考える。それぞれの点の位置エネルギーは

$$U(A) = \int_O^A (-\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{r}, \quad U(B) = \int_O^B (-\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{r} \quad (2.27)$$

である。基準点が点 B の場合の点 A での位置エネルギーを考える。この時の点 A での位置エネルギー $E(A)$ は位置エネルギーの定義より以下のように書ける。

$$E(A) = \int_B^A (-\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{r} \quad (2.28)$$

定積分の性質から、 $B \rightarrow A$ を $B \rightarrow O$ と $O \rightarrow A$ の 2 つに分けると、

$$\begin{aligned} E(A) &= \int_B^O (-\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{r} + \int_O^A (-\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_O^A (-\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{r} - \int_O^B (-\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= U(A) - U(B) \end{aligned} \quad (2.29)$$

この式から、基準点を点 O から点 B にずらすと位置エネルギーも変化するが、その変化量は（点 O が基準の場合の）点 B の位置エネルギーに相当する。つまり、基準点をずらすと、そのズレに対応して位置エネルギーは変化するのである。従って、基準点はどこにとっても問題はない。多くの場合、都合の良い⁽⁹⁾

(9) 問題を解くときに都合の良いように、あるいは、位置エネルギーを関数で表したときに都合の良いように、基準点を勝手に定められるということである。

位置を基準点とする。

重力は保存力である。そのため、**重力による位置エネルギー**を定義できる。重力はどの点でも $-mg$ であり、線積分は単純に $mg \times \Delta h$ (Δh はある位置 A と基準点 O の y 座標の差) となる。そのため、図 2.4において、重力による位置エネルギーの基準を原点 O にとれば、点 P や点 Q の位置エネルギーはそれぞれ mgh_P , mgh_Q と表せる。 mgh という量は原点⁽¹⁰⁾を位置エネルギーの基準とした時の直線 $y = h$ 上の点の位置エネルギーなのである。

2.2.5 保存力と位置エネルギー（発展）

2.2.5 節では保存力と位置エネルギーの関係など高校物理の枠を超えた内容について記す。まず、1 次元の場合に 2.2.4 節の内容を少し掘り下げていく。

位置エネルギーの定義式を線積分を使った難しそうな定義から 1 次元の場合に直すと以下のようになる。

$$U(x) = \int_0^x -F(x') dx' \quad (2.30)$$

ただし、 $F(x)$ は保存力で、基準を $x = 0$ とした。この式から逆に「微分積分学の基本定理」から

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (2.31)$$

と書けることがわかる。この式より、**位置エネルギーの増加する方向と、保存力の向きは反対である**ことがわかる。実際、重力の位置エネルギーについては、位置エネルギーが増大する方向は標高がより高くなる方向で、重力の向きは標高がより低くなる方向と逆向きである。図 2.7 に式 (2.31) のイメージとして、 $U(x)$ の曲線と保存力の向きの関係を示した。

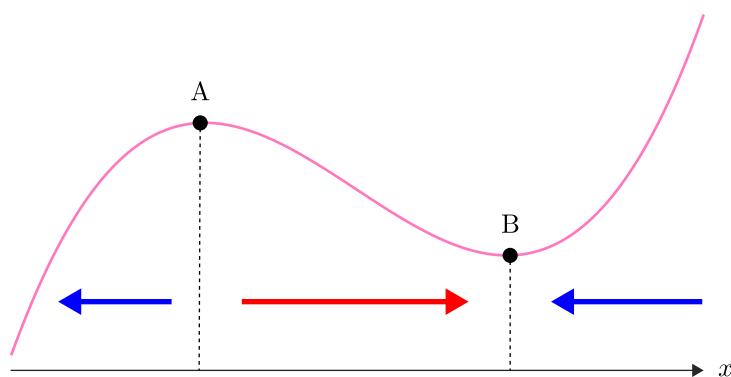


図 2.7 ポテンシャル曲線と保存力の向き

次に、力 \mathbf{F} が保存力であるための十分条件を考えよう。保存力は力 \mathbf{F} のする仕事が始点と終点の位置のみで決まり、途中の経路によらない力である。そこで、経路 C として始点と終点が同一であるような曲線（閉曲線）を考えよう。始点と終点が同一なので、閉曲線 C にそって移動させると、力 \mathbf{F} のする仕事は 0 となる⁽¹¹⁾。

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (2.32)$$

なお、閉曲線 C はどのような曲線であってもよい。ここまでのことまとめると、以下の式は真である。

$$\text{力 } \mathbf{F} \text{ が保存力} \implies \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (2.33)$$

(10) 原点でなくとも x 軸上の点ならどこを基準にしても、直線 $y = h$ 上の任意の点の位置エネルギーは mgh となる。

(11) 閉曲線にそって一周移動させるときの積分をインテグラル \int に丸をつけた \oint で表すことがある。このような積分は周回積分と呼ばれることがある。

式(2.33)の対偶命題も真なので、次の式も真である。

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq 0 \implies \text{力 } \mathbf{F} \text{ は保存力でない} \quad (2.34)$$

線積分 $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ が 0 であったとしても、力 \mathbf{F} は保存力ではないということには注意する必要がある。

さて、2.2.3節で考えた $\mathbf{F} = (-ay, ax)$ という力が働く空間を再度考えよう。この力は保存力であるかどうかを判定する。経路 C を原点を中心とする半径 k の円とする。つまり、経路 C 上の位置は $\mathbf{r} = (k \cos \theta, k \sin \theta)$ とかける。そのため、

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = \begin{pmatrix} -k \sin \theta \\ k \cos \theta \end{pmatrix}$$

となる。また、 $\mathbf{F} = (-ak \sin \theta, ak \cos \theta)$ なので、

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = \begin{pmatrix} -ak \sin \theta \\ ak \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -k \sin \theta \\ k \cos \theta \end{pmatrix} = ak^2$$

と書ける。よって、経路 C 上を移動する際に力 \mathbf{F} がする仕事は以下のようになる。

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \left(\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \right) d\theta = \int_0^{2\pi} ak^2 d\theta = 2\pi ak^2$$

これより、力 $\mathbf{F} = (-ay, ax)$ は保存力ではないことがわかる。

2.3 エネルギー保存則

2.3.1 力学的エネルギー保存則

まず、1次元の場合の力学的エネルギー保存則を考える。物体に保存力しか働くとき、「エネルギーの原理」の式（式(2.11)）は位置エネルギーを用いて変形できる。改めて、エネルギーの原理、「運動エネルギーの変化 = 外力のした仕事」という式を示す。

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (2.11)$$

保存力に対しては、式(2.30)のように位置エネルギーを導入できる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 &= \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = - \int_{x_2}^{x_1} F(x) dx \\ &= - \int_{x_2}^0 F(x) dx - \int_0^{x_1} F(x) dx \\ &= \int_0^{x_2} F(x) dx - \int_0^{x_1} F(x) dx \\ &= -U(x_2) + U(x_1) \end{aligned}$$

添字が同じものを揃えると、以下のようになる。

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_1^2 + U(x_1)}_{\text{状態 1 での力学的エネルギー}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_2^2 + U(x_2)}_{\text{状態 2 での力学的エネルギー}} \quad (2.35)$$

この式(2.35)は、2.2.1節に示した内容と同じで x_1 と x_2 、 v_1 と v_2 の任意性から、保存力しか物体に働くとき、運動エネルギー K と位置エネルギー U の和（力学的エネルギー）は常に一定であることを表す。

保存力以外の力が働くとき、外力 $F(x)$ は保存力 $F_{\text{con}}(x)$ と非保存力 $F_{\text{non-con}}(x)$ に分解することができる。

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} F_{\text{con}}(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} F_{\text{non-con}}(x) dx \quad (2.36)$$

$F_{\text{con}}(x)$ は保存力なので、 $F_{\text{con}}(x)$ に対応する位置エネルギーが定義できる。これを $U(x)$ とすると、

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = U(x_1) - U(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} F_{\text{non-con}}(x) dx$$

従って、添字が同じものを揃えると

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}mv_2^2 + U(x_2) \right)}_{\text{状態 2 での力学的エネルギー}} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}mv_1^2 + U(x_1) \right)}_{\text{状態 1 での力学的エネルギー}} = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} F_{\text{non-con}}(x) dx}_{\text{非保存力のした仕事}} \quad (2.37)$$

となり、力学的エネルギーの変化は非保存力のした仕事に等しいことがわかる。保存力しか働くときは $g(x) = 0$ であることをふまえると、この式 (2.37) が非保存力が働く場合も含めた一般的なエネルギー保存則である。

エネルギー保存則

- 運動エネルギー K と位置エネルギー U の和（力学的エネルギー）の変化量は、非保存力のした仕事に等しい。

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}mv_2^2 + U(x_2) \right)}_{\text{状態 2 での力学的エネルギー}} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}mv_1^2 + U(x_1) \right)}_{\text{状態 1 での力学的エネルギー}} = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} F_{\text{non-con}}(x) dx}_{\text{非保存力のした仕事}} \quad (2.37)$$

- 非保存力が働くない場合は、力学的エネルギーは運動の前後で一定に保たれる。
(力学的エネルギー保存則)

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = \text{const.} \quad (2.38)$$

なお、2次元や3次元の場合は上記の2つの式がベクトルや線積分を用いて表現されるだけで、意味は変わらない。

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}m\|\mathbf{v}_2\|^2 + U(\mathbf{r}_2) \right)}_{\text{状態 2 での力学的エネルギー}} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}m\|\mathbf{v}_1\|^2 + U(\mathbf{r}_1) \right)}_{\text{状態 1 での力学的エネルギー}} = \underbrace{\int_C \mathbf{F}_{\text{non-con}}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}_{\text{非保存力のした仕事}}$$

$$\frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2 + U = \text{const.}$$

2.3.2 非保存力と力学的エネルギー

非保存力が働くと力学的エネルギーは変化する。このことを問題演習を通して確認する。今回扱う問題は、河合塾シリーズの「名間の森」の34ページから35ページにのっている問題をアレンジ⁽¹²⁾したものである。

⁽¹²⁾原題は $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$ と具体的になっている。(A) の (1), (B) の (3) および (C) のような問題はない。この具体的な数値の時に (A) の (1), (B) の (3) の条件が満たされることが確かめられる。

問題 5

図2.8のように、質量 m の小球 P と質量 $3m$ の小物体 Q を糸で結び、Q を傾角 θ の斜面上の点 A におき、糸を斜面と平行にし、滑車にかけて P をつるす。斜面は点 A の上側では滑らかであるが、下側は粗く、Q との間の動摩擦係数は μ である。重力加速度を g とする。

(A) P に鉛直下向きの初速 v_0 を与えたところ、Q も v_0 で点 A から動き出した。

(1) θ の値がある値より大きいとき、P と Q はずっと同じ方向に運動せず、あるところで一旦静止し、反対方向に動き始める。このようになるのは、 θ がどのような条件を満たしている時か。ただし、P と Q が一旦停止するまでに、P が床面についたり、あるいは Q が斜面の頂上に到達することはないものとする。

(2) θ が(1)の条件を満たすとき、Q の達する最高点 B と点 A の距離 L を求めよ。

(エネルギー保存則を用いること)

(B) (A) の(1)の条件が満たされている時、Q が点 B まで到達した後、Q は再び斜面下方向へ滑り、斜面上の点 C で止まった。(この点 C は点 A より下側にある。)

(3) このような運動をするために、 μ と θ の間に成り立つ関係を求めよ。

(4) μ と θ が(A)の(1)の条件と(B)の(3)の条件を満たしている時、AC 間の距離 d を求めよ。

(エネルギー保存則を用いること)

(C) (A) の(2)と(B)の(4)の問題について、エネルギー保存則を使わないで L や d を求めよ。

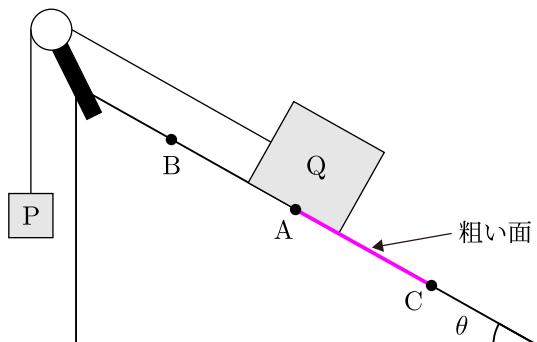


図 2.8 問題 5 で考える系の様子

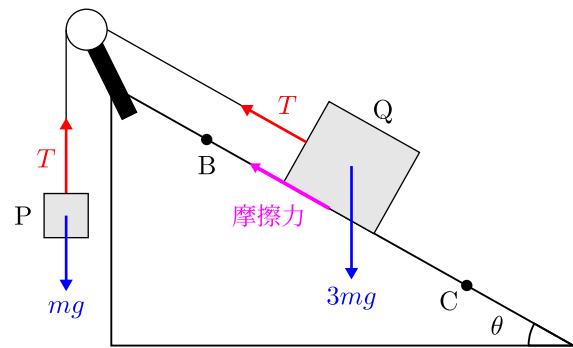


図 2.9 問題 5 で考える系で物体に働いている力

解答

(1) 運動の様子を把握するには、どのような力が働いているかを図示して運動方程式を立てればよい。両者は糸でつながっているので加速度の大きさは同じである。P の加速度を鉛直下向きを正として a とおくと、Q の加速度は斜面をのぼる向きを正として a である。よって、P と Q の運動方程式は

$$ma = mg - T \quad (2.39)$$

$$3ma = T - 3mg \sin \theta \quad (2.40)$$

である。これより、加速度 a は

$$a = \frac{1 - 3 \sin \theta}{4} g \quad (2.41)$$

である。P が下がり続けている間、P と Q の加速度は変わらない。そのため、 $a \geq 0$ なら、P は減速することがないので、P が床面につくか、Q が斜面の頂上に到達してしまう。よって、 $a < 0$ となる

ことが必要である。ゆえに、 θ の満たすべき条件は以下のようになる。

$$1 - 3 \sin \theta < 0 \iff \sin \theta > \frac{1}{3} \quad (2.42)$$

- (2) エネルギー保存則は、「運動エネルギーと位置エネルギーの和(力学的エネルギー)の変化量が、非保存力⁽¹³⁾がした仕事に等しい」というものである。そこで、運動エネルギーと位置エネルギーの変化量に着目する。わざわざ $t = 0$ のときの P と Q の高さを h_P, h_Q として式を立てる必要はない⁽¹⁴⁾。

- 運動エネルギーの変化量 : $-\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(3m)v_0^2 = -2mv_0^2$
- 位置エネルギーの変化量

P は L 下がり、Q は斜面上を L 上がるが、斜面上を L 上がるということは鉛直方向に $L \sin \theta$ 上がるということなので、変化量は $-mgL + (3m)gL \sin \theta$ である。

今回は、非保存力は仕事をしないので、エネルギー保存則は以下のようになる。

$$\underbrace{-2mv_0^2}_{\text{運動エネルギーの変化量}} + \underbrace{(-mgL + 3mgL \sin \theta)}_{\text{位置エネルギーの変化量}} = 0 \quad (2.43)$$

$$\therefore L = \frac{2v_0^2}{g(3 \sin \theta - 1)} \quad (2.44)$$

- (3) (1) と同様に運動方程式をたてて考える。A より下側を通過する時(斜面を下る時)は斜面上方向に摩擦力が働く。よって、P の加速度を鉛直上向きを正として b とおくと、Q の加速度は斜面を下る向きを正として b であるから、P と Q の運動方程式は以下のようになる。

$$mb = T - mg \quad (2.45)$$

$$3mb = 3mg \sin \theta - 3\mu mg \cos \theta - T \quad (2.46)$$

(13) 内力と外力の違いに注意。非保存力でも 2 物体間に働く内力なら問題ない。エネルギー保存則が運動方程式や「エネルギーの原理」から来ていることを考えるとわかる。

今回の場合、P の位置(高さ)を x_1 、Q の位置(斜面に沿って軸をとる)を x_2 (P と Q の $t = 0$ の時の位置を基準とする)とすると、P と Q の運動方程式は

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x_1}{dt^2} &= m \frac{dv_1}{dt} = mg - T \\ 3m \frac{d^2x_2}{dt^2} &= 3m \frac{dv_2}{dt} = T - 3mg \sin \theta \end{aligned}$$

であり、それぞれの両辺に $v_1 = \frac{dx_1}{dt}, v_2 = \frac{dx_2}{dt}$ をかけて整理すると、以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv_1^2 \right) &= \frac{d}{dt}(mgx_1) - Tv_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}(3m)v_2^2 \right) &= Tv_2 - \frac{d}{dt}(3mgx_2 \sin \theta) \end{aligned}$$

今回の場合、P と Q は糸でつながっているので $v_1 = v_2$ である。そのため、辺々加えると、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}(3m)v_2^2 \right) = \frac{d}{dt}(mgx_1 - 3mgx_2 \sin \theta)$$

となり、整理すると、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}(3m)v_2^2 - mgx_1 + 3mgx_2 \sin \theta \right) = 0$$

となる。この式から、張力は働くけれどもエネルギー保存則には関与しないことがわかる。

(14) 「変化量に着目すれば良い」のは、保存則の性質を考えれば当たり前である。P と Q の y 座標(位置エネルギーの基準点を原点とする xy 座標系)を h_P, h_Q とすると、力学的エネルギー保存則は、

$$\left(\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_P \right) + \left(\frac{1}{2}(3m)v_0^2 + (3m)gh_Q \right) = mg(h_P - L) + (3m)g(h_Q + L \sin \theta)$$

となるが、この式を整理すると、(2.43) のようになる。そのため、(2.43) のように変化量に着目すれば十分である。

これより、加速度 b は

$$b = \frac{3 \sin \theta - 3\mu \cos \theta - 1}{4} g \quad (2.47)$$

である。Q が下がり続けている間、P と Q の加速度は変わらない。そのため、 $b \geq 0$ なら Q は静止しない。よって、 $b < 0$ となることが必要である。

$$b < 0 \iff \boxed{\sin \theta - \mu \cos \theta < \frac{1}{3}} \quad (2.48)$$

この条件に加えて、(A) の (1) の条件 $\boxed{\sin \theta > \frac{1}{3}}$ も満たしている必要がある。

- (4) 張力は内力で非保存力のした仕事に関与しなかったが、摩擦力は非保存力のした仕事に関与する⁽¹⁵⁾。Q が点 A から点 B に移動して再び点 A を通過するまでは力学的エネルギーは保存される。そのため、Q が点 A にある状態(一番最初)と点 C にある状態を比べれば良い。

$$\underbrace{(mgd - 3mgd \sin \theta)}_{\text{位置エネルギーの変化量}} + \underbrace{\left\{ -\left(\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}(3m)v_0^2\right) \right\}}_{\text{運動エネルギーの変化量}} = \underbrace{-3\mu mgd \cos \theta}_{\text{動摩擦力のした仕事}} \quad (2.49)$$

$$\therefore d = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{1}{1 - 3(\sin \theta - \mu \cos \theta)} \quad (2.50)$$

- (C) 今回の場合、P と Q の運動は等加速度運動なので、**等加速度運動の式**のうち、「いつ静止したか」といった時間に関する情報は必要ないので、 $\{v(t)\}^2 - \{v(0)\}^2 = 2a\{x(t) - x(0)\}$ を使えばよい。

- まず、 L について考える。P は加速度の向きに L 動く。

$$0 - v_0^2 = 2 \cdot \frac{1 - 3 \sin \theta}{4} g \cdot L \implies L = \frac{2v_0^2}{g(3 \sin \theta - 1)}$$

- 次に、 d について、A を通過してから摩擦力が働いている区間について考える。

$$0 - v_0^2 = 2 \cdot \frac{3 \sin \theta - 3\mu \cos \theta - 1}{4} g \cdot d \implies d = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{1}{1 - 3(\sin \theta - \mu \cos \theta)}$$

⁽¹⁵⁾張力 T は、2 物体全体を考えたとき、つまり 2 つの運動方程式 (2.45) と (2.46) の両辺を加えたときには存在しない。大きな視点で見た時に内力は打ち消しあうのである。張力は厳密には内力ではないが、P と Q の間で互いに及ぼしあう相互作用的な力であり、内力と同等である。しかし、動摩擦力は、両者の間に働く力でなく、P と Q 以外の別物、斜面から働く力であり、外力なのでエネルギー保存則に関与する。

第3章 運動量保存則と2体問題

この章では、力学の問題を解くうえで必要な運動量保存則を紹介する。そして、運動量保存則と関連している2物体の衝突や反発係数を取り扱う。その後、2体問題や重心から見た2物体の運動について考える。

この章の後半で取り扱う「2体問題」について、私は現役時代全く理解していなかった。浪人時代、そして、大学生になった今は「重心系」という言葉を当たり前のように使っている。しかし、現役時代、そんな言葉は知らなかった。実際、多くの入試問題は重心系で考えなくても解けるし、重心系を使う場合は丁寧な誘導が付くだろう。そのため、重心系なんて知らないても良いのかもしれない。だが、知っているだけで有利なのである。本TEXノートでは2体問題や重心系といった高校物理の一般的なレベルを逸脱する内容も取り上げることで、入試問題だけではなく、物理の理解を深められるようにした。

3.1 運動量保存則

3.1.1 力積と運動量の変化

運動量

物体の運動の勢いを表す量として、運動量 \mathbf{p} を以下のように定義する。

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (3.1)$$

運動方程式とは、第1章で示した通り、運動量の時間変化 $d\mathbf{p}/dt$ が物体に加えられた外力 \mathbf{F} に等しいというものである。しかし、外力が加えられた時間が極めて短いとき、 \mathbf{F} がどのような関数で表されるか分析することができないので、 \mathbf{v} について分析することはできない。

このような場合は運動方程式の積分形が活躍する。運動方程式から「エネルギーの原理」を導き、エネルギー保存則を導いたように、積分形が活躍する。運動方程式の両辺を位置（一次元なら x ）で積分すると、「エネルギーの原理」が導ける。今回は運動方程式を t で積分する。

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} dt = \int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} d\mathbf{p} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt$$

$$\therefore \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt$$

力積と運動量の関係

物体の運動量 \mathbf{p} の変化は、その間に物体に与えられた力積に等しい。

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt}_{\text{力積}} \quad (3.2)$$

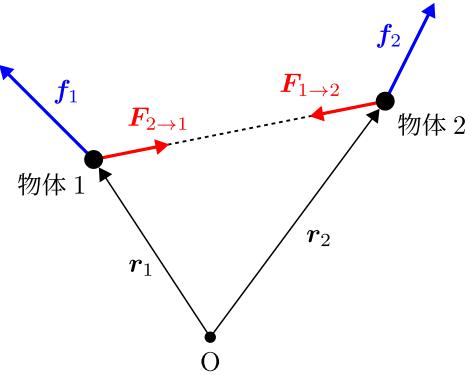


図 3.1

3.1.2 運動量保存則

複数の物体がある場合、それぞれの物体には様々な力が働く。ここでは最も簡単な場合である2体系を例にとりあげる。2つの物体に働く力には内力と外力の2種類がある。

内力とは2つの物体の間に働く力のことである。図3.1の物体1に働いている $F_{2\rightarrow 1}$ は物体2から物体1に働く内力を、物体2に働いている $F_{1\rightarrow 2}$ は物体1から物体2に働く内力を表す。Newtonの3つの法則の一つである**作用・反作用の法則**によると、物体1から物体2に力 \mathbf{F} (作用)が働くとき、物体2から物体1に力 $-\mathbf{F}$ (反作用)が働く。そのため、上の図では $F_{1\rightarrow 2} = -F_{2\rightarrow 1}$ という関係式が成り立つ。

一方、**外力**とは2つの物体を1つのまとまり(系)として見たとき、系の外から、つまり2つの物体以外から働く力のことである。図3.1では f_1 を物体1に働く外力のベクトル和(合力)、 f_2 を物体2に働く外力のベクトル和とした。2章の最後に記した問題5では、物体Pと物体Q、そして力を伝達する媒介的的な存在である糸をまとめて1つの系として見たのである。すると、地球と物体P、物体Qの間に働く力である重力や、斜面と物体Qの間に働く力である摩擦力は外力ということになる。ただ、重力は保存力で、摩擦力は非保存力という違いがある。

さて、物体1と物体2に一切の外力が働いていない場合を考える。このとき、2つの物体の運動方程式は以下のようになる(物体1の質量を m_1 、物体2の質量を m_2 とした)。

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{F}_{2\rightarrow 1} \quad (3.3)$$

$$m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{F}_{1\rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2\rightarrow 1} \quad (3.4)$$

よって、内力(相互作用)による力積を考えると、

$$m_1 \mathbf{v}'_1 - m_1 \mathbf{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{2\rightarrow 1} dt \quad (3.5)$$

$$m_2 \mathbf{v}'_2 - m_2 \mathbf{v}_2 = \int_{t_1}^{t_2} -\mathbf{F}_{2\rightarrow 1} dt \quad (3.6)$$

となる。積分の部分、つまり力積の部分を消去して整理すると、次の式が成り立つ。

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 \quad (3.7)$$

文字の任意性、すなわち、速度が具体的な値ではないということを考慮すると、式(3.7)は、任意の時刻において $m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$ 、つまり**2つの物体の運動量の和は保存する**ということを意味している。

運動量保存則

2つの物体（系）に一切外力が働くないとき（内力しか働くないとき）、2つの物体（系）の運動量の和は常に一定である。

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 \quad (3.7)$$

運動量保存則は、このTEXノートでいつか取り扱う「原子」分野編のコンプトン効果でX線光子と電子の衝突も問題でも使用される。運動量はNewton力学だけではなく、光子や電子といった微視的粒子の運動を表すのに使える極めて重要な物理量である。

さて、わざわざ力積を間に挟んで運動量保存則を導いたが、そんなことをする必要はない。式(3.3)と式(3.4)の辺々を加えると、

$$\frac{d}{dt}(m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

となっており、これは $m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$ の時間微分が $\mathbf{0}$ 、つまり、 $m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$ は時間によらず一定であることを示している。外力が働くなければ、2つの物体の運動量の和は保存する。

今度は物体1と物体2に外力が働いている場合を考える。

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} + \mathbf{f}_1 \quad (3.9)$$

$$m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} + \mathbf{f}_2 = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} + \mathbf{f}_2 \quad (3.10)$$

式(3.9)と式(3.10)の辺々を加えると、以下のようになる。

$$\frac{d}{dt}(m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \quad (3.11)$$

この式から運動量の和の変化は外力によって引き起こされることがわかる。また、外力が一切働くない、あるいは、外力が働いているがそれらのベクトル和が打ち消しあう時は、2体系の運動量は一定となることもわかる。

3.1.3 反発係数

2体問題の典型的な例に「2物体の衝突」がある。2物体の衝突では、極めて短い時間に極めて大きな衝撃力が働く2物体の運動状態が変化する。外力が存在しないなら、当然運動量保存則が成り立つが、外力が存在したとしても、衝突による衝撃力が外力より圧倒的に大きく、多くの衝突の場合、外力はないものとして扱える。

ここで1次元（直線上）での2物体の衝突を考える。2つの物体の質量を m_1, m_2 とし、それらの衝突前の速さを v_1, v_2 とする。衝突後の2つの物体の速さを v'_1, v'_2 とする。衝突の際は、外力はないものとして扱えるので、運動量保存則が成立する。

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (3.12)$$

衝突後の2物体の運動を把握するには、 v'_1 と v'_2 を明確にする必要がある。つまり、 v'_1 と v'_2 を変数とする方程式を解く必要がある。しかし、変数が2つなのに方程式が1つなので、これでは解くことができない。そこで、もう1つの式を立てる。それは衝突前後の一方の物体を基準にした他方の物体の速度（相対速度）に関する式である。

$$e = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} \quad (3.13)$$

ここで反発係数について少し考える。固い物体が床と衝突してはね返る時を考えよう。高いところから落として跳ね返っても元の位置に戻ることはない。なぜなら、衝突の際に速度ベクトルの大きさが小さくなるからである⁽¹⁾。この時、速度の基準は静止している床に対する速度（床に対する相対速度）である。式(3.13)に $-$ （マイナス）がついているのは（相対）速度の向きが変わることによる。相対速度の大きさは必ず小さくなるはずなので、反発係数 e は $0 \leq e \leq 1$ を満たす。

反発係数 e

2つの物体の衝突前の速さを v_1, v_2 、衝突後の2つの物体の速さを v'_1, v'_2 とすると、反発係数 e は相対速度を用いて次のように定義される。

$$e = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} \quad (3.13)$$

また、 e の値によって、衝突は以下の3つに分類される。

1. **弾性衝突:** $e = 1$ の衝突。衝突の前後における2物体の運動エネルギーの和は保存する。
2. **非弾性衝突:** $0 < e < 1$ の衝突。
3. **完全非弾性衝突:** $e = 0$ の衝突。衝突後、2物体は一体となって運動する。

$e = 1$ の時に、2物体の運動エネルギーの和が保存することについては、重心系を導入してから議論することとする。では、運動量保存則と反発係数の式から衝突後の速度を求める。

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (3.12)$$

$$e = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} \quad (3.13)$$

式(3.13)の反発係数 e の定義式を変形すると、

$$ev_1 - ev_2 = -v'_1 + v'_2 \quad (3.14)$$

となる。式(3.12)から式(3.14)に m_2 をかけたものを引くと、

$$(m_1 - em_2)v_1 + (1 + e)m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v'_1 \quad (3.15)$$

となる。また、式(3.12)に式(3.14)に m_2 をかけたものを足すと、

$$(1 + e)m_1 v_1 + (m_2 - em_1)v_2 = (m_1 + m_2)v'_2 \quad (3.16)$$

となる。ゆえに、衝突後の2物体の速度は以下のようになる。

$$v'_1 = \frac{(m_1 - em_2)v_1 + (1 + e)m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (3.17)$$

$$v'_2 = \frac{(1 + e)m_1 v_1 + (m_2 - em_1)v_2}{m_1 + m_2} \quad (3.18)$$

さて、式(3.17)と式(3.18)に具体的な値を代入してみよう。

$$(1) \text{ 完全非弾性衝突 : } e = 0 \quad v'_1 = v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

⁽¹⁾バスケットボールやスーパー ボールがよく弾むのはゴムの弾性力など別の要因による。

(2) 物体と床の衝突： $m_2 = \infty, v_2 = 0$

物体と床の衝突については、床は $m_2 = \infty, v_2 = 0$ の物体と見なすことで、上記の式を利用できる。式 (3.18) の両辺を m_2 でわると、次のようになる。

$$v'_1 = \frac{\{(m_1/m_2) - e\}v_1 + (1+e)v_2}{(m_1/m_2) + 1}$$

ここで、 $m_2 \rightarrow \infty, v_2 \rightarrow 0$ の極限をとると、 $v'_1 = -ev_1$ となることがわかる。床と物体が衝突すると、物体の速さは e 倍になることがわかる。

(3) 2 物体の質量が等しく、反発係数が 1 で、一方が静止している場合

この場合、 $m_1 = m_2 = m, e = 1, v_2 = 0$ であるから、

$$v'_1 = 0, \quad v'_2 = v_1$$

となる。この場合は衝突時に 2 物体の速度が入れ替わる。

3.1.4 色々な衝突について考える

(1) 質量 $m_1 = M$ の重い物体と質量 $m_2 = m$ の軽い物体が、それぞれ速度 $v_1 = V, v_2 = -v$ で弾性衝突

頑張って計算すると、衝突後の速度は次のようになる。

$$v'_1 = \frac{(M-m)V - 2mv}{M+m}, \quad v'_2 = \frac{2MV + (M-m)v}{M+m} \quad (3.19)$$

ここで $M \gg m$ の場合を考えると、 m に関する項は無視できるので

$$v'_1 \approx V, \quad v'_2 \approx 2V + v \quad (3.20)$$

と近似することができる。このことを利用すると、放課後 ManaBun チャンネルで取り上げられている実験⁽²⁾の結果を定量的に説明することができる。

質量 M の重い物体の上に質量 m の軽い物体をのせた状態で、2つの物体を同時に高さ h から自由落下させる。このとき、床に衝突する直前の 2 つの物体の速さは $v = \sqrt{2gh}$ である。質量 M の重い物体が床と弾性衝突した後、床から跳ね返った直後の重い物体の速さも $\sqrt{2gh}$ である。すると、その直後に速度 $\sqrt{2gh}$ の重い物体と速度 $-\sqrt{2gh}$ の軽い物体が弾性衝突することになる（図 3.2 の中央）。この弾性衝突による速度変化は式 (3.20) より、重い物体は速度 $\sqrt{2gh}$ のまま上昇し、軽い物体は速度 $2\sqrt{2gh} + \sqrt{2gh} = 3\sqrt{2gh}$ で上昇するようになる。速度 $3\sqrt{2gh}$ で上昇し始めた軽い物体の最高到達点は、等加速度直線運動の式やエネルギー保存則を用いて計算すると $9h$ となることがわかる。

(2) 質量 $m_1 = M$ の重い物体と質量 $m_2 = m$ の軽い物体が、それぞれ速度 $v_1 = V, v_2 = -v$ で非弾性衝突する。反発係数は e とする。

頑張って計算すると、衝突後の速度は次のようになる。

$$v'_1 = \frac{(M-em)V - (1+e)mv}{M+m}, \quad v'_2 = \frac{(1+e)MV - (m-eM)v}{M+m} \quad (3.21)$$

ここでも $M \gg m$ の場合を考えると、 m に関する項は無視できるので

$$v'_1 \approx V, \quad v'_2 \approx V + e(V + v) \quad (3.22)$$

⁽²⁾<https://youtu.be/E6NihAgIDMQ> (この URL は 2021 年 2 月 16 日現在で有効な URL である)

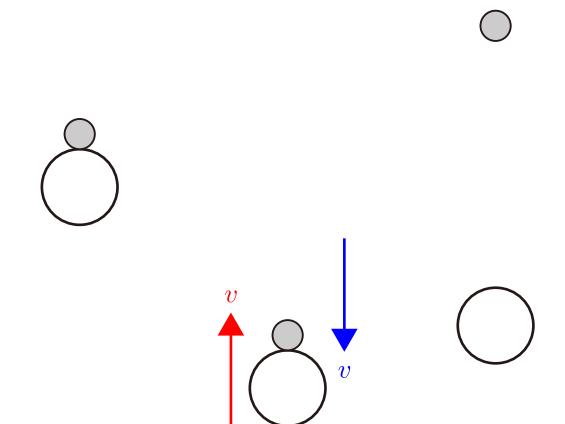


図 3.2

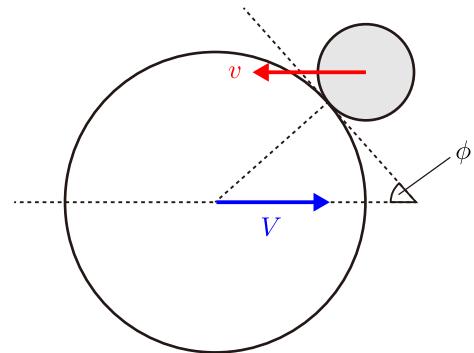


図 3.3 バットとボールが衝突する様子

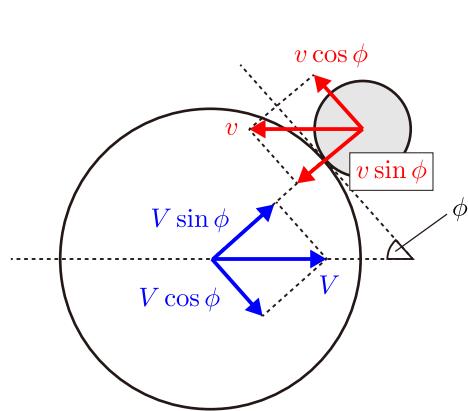


図 3.4 衝突直前のバットとボールの速度

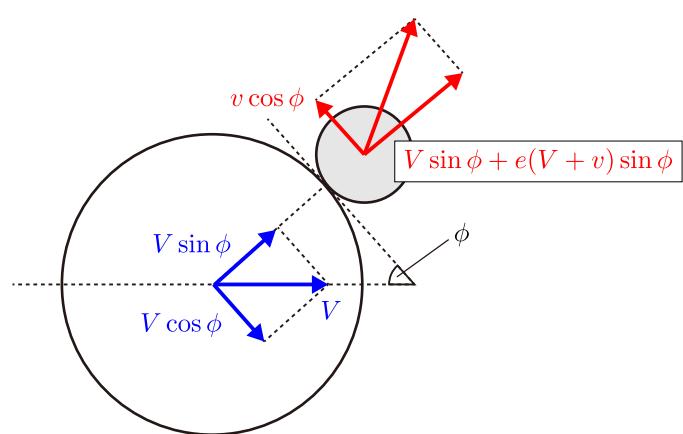


図 3.5 衝突直後のバットとボールの速度

と近似することができる。

今度は野球のバッティングでピッチャーの投げたボールをバットで打つ場合を考える。図 3.3 に衝突の様子を示した。ボールの速さを v 、バットのスイングの速さを V とし、反発係数を e とする。衝突時はボールとバットの速度ベクトルが x 軸と平行であるとする。ただ、バットの真正面から少し上にずれた点で衝突するとし、バットはボールに比べて十分重いと仮定する。

このような 2 次元的な衝突を考える際は、衝突面に平行、垂直な方向で考える。そして、衝突面に垂直な方向については反発係数の効果が働く。図 3.4 のように衝突面に垂直、平行な成分を考える。衝突の前後で衝突面に平行な成分は変わらないので、衝突後のバット、ボールの衝突面に平行な成分は

$$v_{\text{bat},\parallel} = V \cos \phi, \quad v_{\text{ball},\parallel} = v \cos \phi \quad (3.23)$$

である。一方で衝突面に垂直な成分は衝突によって速度が変化する。その際の速度変化は式 (3.22) に従う。

$$v_{\text{bat},\perp} = V \sin \phi, \quad v_{\text{ball},\perp} = V \sin \phi + e(V + v) \sin \phi \quad (3.24)$$

すると、衝突直後のボールの速度の x 成分 v_x と y 成分 v_y は以下のようになる。

$$v_x = v_{\text{ball},\perp} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) - v_{\text{ball},\parallel} \cos \phi = V \sin^2 \phi + e(V + v) \sin^2 \phi - v \cos^2 \phi \quad (3.25)$$

$$v_y = v_{\text{ball},\perp} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) + v_{\text{ball},\parallel} \sin \phi = (1 + e)(V + v) \sin \phi \cos \phi \quad (3.26)$$

これにバットとボールの衝突直前の速さと反発係数を代入することで飛距離を計算することができる。

3.2 演習問題

3.2 節では運動量が関連する演習問題を 3 つ取り上げる。3 つの演習問題を通して、運動量保存則の使い方、運動量保存則とエネルギー保存則の組み合わせ方などを理解してほしい。

3.2.1 斜面との衝突（1）

まず、斜面と物体の 2 次元的な衝突について考える。このような問題を扱う際は前の subsection で紹介したバットとボールの問題のように衝突する面に垂直な方向と平行な方向の 2 つに分けて考えればよい。

問題 6

水平面と角度 θ をなすなめらかな斜面と、この斜面との反発係数 e 、質量 m の小球がある。 g を重力加速度の大きさとして、以下の問いに答えよ。

- (1) 図 3.6 のように、時刻 $t = 0$ で小球を斜面から鉛直上方、高さ h にある点 P より、静かに落下させると、小球は初めのうちは弾み、やがて斜面を滑り出す。小球が滑り出すまでに失うエネルギーを求めよ。
- (2) 図 3.7 のように、斜面の下方から速さ v_0 、入射角 α で小球を時刻 $t = 0$ で斜面に衝突させる。小球と斜面の n 回目の衝突時刻を t_n としたとき、 $\frac{t_{n+2} - t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n}$ の値を求めよ。
- (3) 引き続き、(2) の状況設定を考える。小球が滑り出す時刻 t_∞ を求めよ。また、小球の速度の斜面方向の成分が 0 となる時刻 T を求めよ。
- (4) 引き続き、(2) の状況設定を考える。(3) で得られた結果から、小球が弾みながら上がった後、さらに滑り上がるためには満たす条件は

$$\tan \alpha > \boxed{}$$

と表すことができる。空欄に入る式を求めよ。

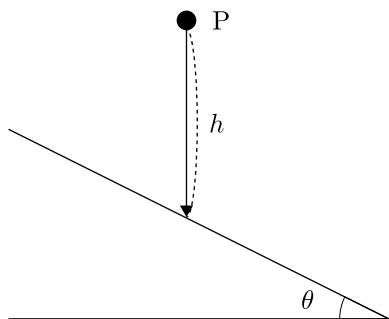


図 3.6

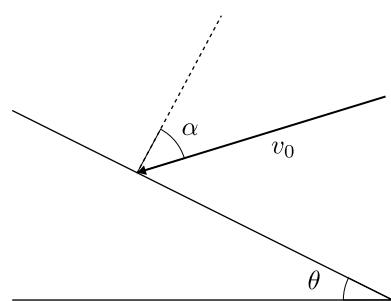


図 3.7

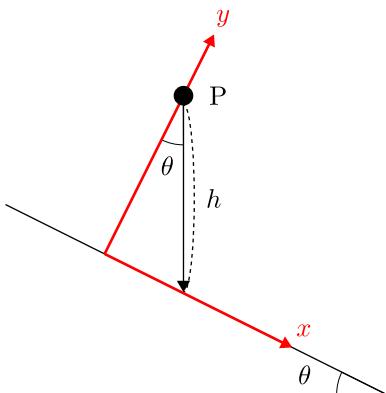


図 3.8

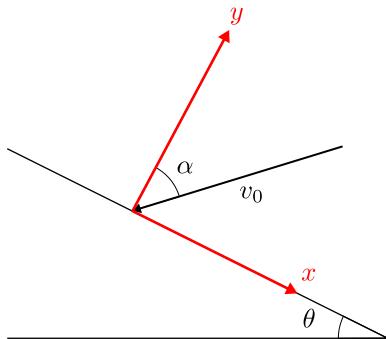


図 3.9

解答

斜面との衝突を考えるので、斜面に平行な方向と垂直な方向な方向をそれぞれ x, y 軸とする座標系を導入すると楽である。今回は図 3.8 や図 3.9 のように座標系を導入すればよい。ただし、図 3.8 や図 3.9 のように座標系を導入すると、重力加速度（ベクトル） \mathbf{g} の x 成分は $g \sin \theta$ で、 y 成分は $-g \cos \theta$ となることに注意する必要がある。

- (1) 「滑り出す」ということは、 y 方向の速度を持たないということである。つまり、 y 方向の運動エネルギーを持たないということである。 $t = 0$ における y 方向の位置エネルギーは $m(g \cos \theta)(h \cos \theta) = mgh \cos^2 \theta$ である⁽³⁾。 y 方向については P から落下する際、この $mgh \cos^2 \theta$ が徐々に運動エネルギーに変わるが、斜面と衝突するたびに、速さが e 倍になり運動エネルギーは e^2 倍に減少する。従って、小球が滑りだすまでに失われたエネルギーは $t = 0$ のときの y 方向の位置エネルギーに等しく、 $m(g \cos \theta)(h \cos \theta) = mgh \cos^2 \theta$ である。
- (2) 初速度は、図 3.9 のような座標系では $\mathbf{v} = (-v_0 \sin \alpha, -v_0 \cos \alpha)$ とかける。1回目の衝突後、速度の y 方向成分の大きさは e 倍になるから、 y 方向の速度は $ev_0 \cos \alpha$ となる。1回目の衝突後、 y 座標が最大になるまでに要する時間 Δt_1 は、

$$(ev_0 \cos \alpha) - (g \cos \theta) \Delta t_1 = 0 \implies \Delta t_1 = \frac{ev_0 \cos \alpha}{g \cos \theta}$$

である。このことを使うと、

$$t_2 - t_1 = 2\Delta t_1 = \frac{2ev_0 \cos \alpha}{g \cos \theta}$$

となる。同様に $t_3 - t_2, t_4 - t_3, \dots$ を求めようすると、放物運動の初速 (y 成分) が衝突のたびに e 倍になることから、 $t_{n+1} - t_n$ は n が 1 つ大きくなるにつれて e 倍になる。

$$\therefore \frac{t_{n+2} - t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n} = e$$

- (3) (2) で得られた関係式と $t_1 = 0$ となることを使って、 t_n を求める。

$$t_n = t_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2v_0 \cos \alpha}{g \cos \theta} e^k = \frac{2v_0 \cos \alpha}{g \cos \theta} \cdot \frac{e(1 - e^{n-1})}{1 - e}$$

⁽³⁾重力加速度の y 方向成分は $-g \cos \theta$ である。位置エネルギーの基準面を斜面（図 3.8）とすると、点 P の y 座標は図より $h \cos \theta$ である。よって、位置エネルギーは mgh ではなく、 $m(g \cos \theta)(h \cos \theta)$ である。

小球が滑り出すのは衝突後の速度の y 成分が 0 となる時である。 n 回目の衝突後的小球の速度の y 成分は $e^n v_0 \cos \alpha$ なので、 $n \rightarrow \infty$ のときに 0 となる。

$$\therefore t_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \frac{2v_0 \cos \alpha}{g \cos \theta} \cdot \frac{e}{1-e}$$

また、衝突の際、斜面と平行な方向の速度成分は変化しないので、 T は以下のようになる。

$$-v_0 \sin \alpha + (g \sin \theta)T = 0 \implies T = \frac{v_0 \sin \alpha}{g \sin \theta}$$

- (4) 衝突後的小球の速度の y 成分が 0 になったとき、小球の速度の x 成分が負であるときに限り、弾みながら上がった後に、さらに滑り上がる。重力加速度の x 成分は正なので、小球の速度の x 成分は単調増加する。そのため、 $t = t_\infty$ における小球の速度の x 方向成分が負でないと滑り上がることはない。そうなるには、 $t_\infty < T$ であればよい。よって、求める条件は以下のようになる⁽⁴⁾。

$$\frac{2v_0 \cos \alpha}{g \cos \theta} \cdot \frac{e}{1-e} < \frac{v_0 \sin \alpha}{g \sin \theta} \implies \tan \alpha > \frac{2e}{1-e} \tan \theta$$

3.2.2 斜面との衝突（2）

今度は斜面が滑らかではなく粗い場合を考える。物体が粗い面に衝突する場合は、物体と面の間に働く動摩擦力により、面に平行な速度成分が小さくなる。このことを問題を通して確認しよう。

問題 7

水平に対する傾きが θ の斜面上に、図 3.10 のように座標系をとる。原点 O から質量 m の物体を水平方向へ初速 v で投げ出したところ、物体は xy 面内で運動し、やがて斜面に落下し、はね返すことなく斜面を滑り降りた。重力加速度の大きさを g 、物体と斜面の間の動摩擦係数を μ として、以下の問い合わせよ。

- (1) 物体が原点 O で投げ出されてから、斜面に落下するまでの時間 t_0 を求めよ。
- (2) 斜面に落下する直前の物体の速度の x 成分 v_x と y 成分 v_y を求めよ。
- (3) 斜面に衝突後、物体が滑り出す速さを u 、衝突中の垂直抗力の大きさを N 、衝突時間を Δt とする。衝突の直前と直後の運動量の変化と力積の関係を x 方向と y 方向に分けて表せ。ただし、 Δt は十分に小さくて、衝突中の重力の力積は無視できるものとする。
- (4) (3) で得られた 2 つの式から u を求めよ。
- (5) この物体は斜面との衝突で、 I_0 より大きい運動量変化が起こると壊れてしまう。壊れることなく落下できる初速 v の最大値を求めよ。

解答

この問題ではあらかじめ座標系が斜面に平行な方向と垂直な方向にとられているので、それを有効活用すればよいが、前の問題と同様に、重力加速度（ベクトル） \mathbf{g} の x 成分は $g \sin \theta$ で、 y 成分は $-g \cos \theta$ となることに注意する必要がある。

⁽⁴⁾ θ と α はともに鋭角であることに注意して変形した。

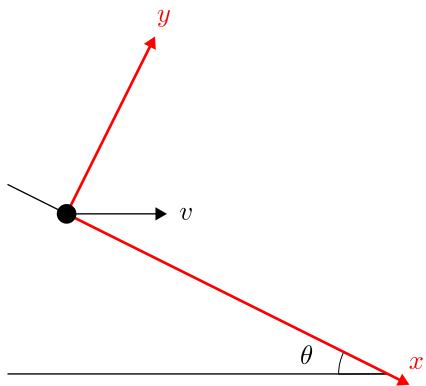


図 3.10

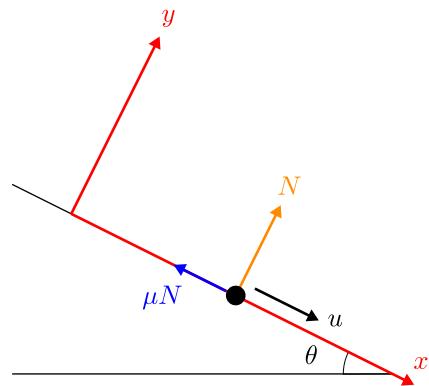


図 3.11

- (1) 図 3.10 のように座標系をとった場合、初速度の x 成分は $v \cos \theta$ 、 y 成分は $v \sin \theta$ となる。 y 座標が最大となる時刻は $t_0/2$ であることに注意すると、次の式が成立する⁽⁵⁾。

$$v \sin \theta - (g \cos \theta) \frac{t_0}{2} = 0 \implies t_0 = \frac{2v \sin \theta}{g \cos \theta} = \frac{2v}{g} \tan \theta$$

- (2) 等加速度運動の式を利用して計算すればよい。

$$\begin{aligned} v_x &= v \cos \theta + g \sin \theta \cdot \frac{2v \sin \theta}{g \cos \theta} = \frac{v(\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta)}{\cos \theta} = \frac{v(1 + \sin^2 \theta)}{\cos \theta} \\ v_y &= v \sin \theta - g \cos \theta \cdot \frac{2v \sin \theta}{g \cos \theta} = -v \sin \theta \end{aligned}$$

- (3) 「運動量変化 = 力積」の関係を x, y 方向で立てればよい。斜面を滑り降りる際は動摩擦力が図 3.11 のように働く。垂直抗力と動摩擦力は一定値であることに注意すると、「運動量変化 = 力積」は以下のようになる。

$$\begin{aligned} (\text{x 方向}) \quad mu - mv_x &= -\mu N \Delta t \\ (\text{y 方向}) \quad 0 - mv_y &= N \Delta t \end{aligned}$$

- (4) (3) で 2 つの式から $N \Delta t$ を消去して整理すると u が求められる。

$$mu - mv_x = -\mu(-mv_y) \implies u = v_x + \mu v_y = v \left(\frac{1 + \sin^2 \theta}{\cos \theta} - \mu \sin \theta \right)$$

- (5) 物体が受ける力積は x 方向に $-\mu N \Delta t$ 、 y 方向に $N \Delta t$ なので、その大きさは $\sqrt{1 + \mu^2} N \Delta t$ である。
(3) の y 方向に関する式と $v_y = -v \sin \theta$ より、力積の大きさは $\sqrt{1 + \mu^2} mv \sin \theta$ である。これが I_0 以下であればよい。

$$\sqrt{1 + \mu^2} mv \sin \theta \leq I_0 \implies v \leq \frac{I_0}{m \sqrt{1 + \mu^2} \sin \theta}$$

⁽⁵⁾図 3.10 のような座標系で見たときに放物運動をすることと、再び x 軸を通過する時刻を求める問題であることから、 $t_0/2$ たったときの y 方向の速度が 0 になるという式を立てた。 y 座標が 0 であることから、次のように立式して t_0 を求めてよい。

$$(v \sin \theta) t_0 - \frac{1}{2}(g \cos \theta) t_0^2 = 0$$

3.2.3 演習問題(運動量保存則を使って問題を解く)

3.2 節の最後に運動量保存則とエネルギー保存則を組み合わせて解く問題を取り上げる。

問題 8

図 3.12 に示すような断面をもつ質量 M の物体 S が滑らかな基準水平面上に静止している。ここで上面は底面から高さ h の水平面であり、右の曲面は滑らかなスロープである。さらに物体 S の上面に質量 $m (< M)$ の小球がはじめ静止して置かれている。また、物体 S のスロープから離れた位置には基準水平面上に垂直に固定された壁 P がある。空気抵抗は無視できるとし、重力加速度の大きさは g とする。以下、水平方向については、図 3.12 の左向きを正の向きとする。

- (1) 小球をスロープに沿って静かに落下させたら、物体 S も動き始めた。小球が S から離れた直後の物体 S と小球のそれぞれの速度 V_0, v_0 を求めよ。
- (2) 小球が壁と反発係数 e で衝突した場合、衝突直後の小球の物体 S に対する相対速度を e, m, M, g, h を用いて表せ。
- (3) 衝突後、小球が物体 S に追いつくためには、反発係数 e はどのような条件を満たす必要があるか答えよ。

以下では、反発係数 e が (3) の条件を満たしているとする。壁との衝突後小球は物体 S に追いつき、スロープ上を上昇し水平面からの高さ ℓ まで達して上昇がとまった。その時の物体の速さは V であった。

- (4) 小球の上昇がやんだ瞬間と小球が物体 S に追いつく直前では運動量と力学的エネルギーが保存する。この 2 つの時点での運動量と力学的エネルギーの保存の関係を式で表せ。
- (5) V と ℓ を求めよ。

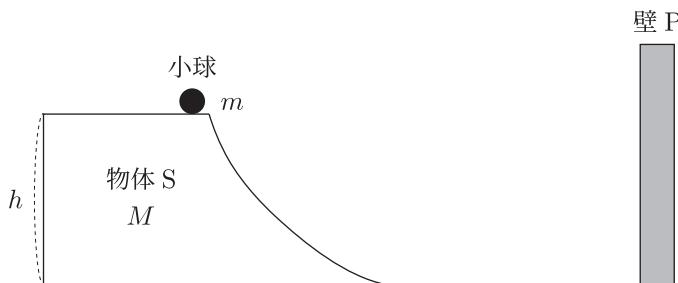


図 3.12

- (1) 小球がスロープを滑り降りている間、力学的エネルギーと運動量が保存することを使えば V_0, v_0 を求めることができる。

$$(力学的エネルギー保存則) \quad mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}MV_0^2 \quad (3.27)$$

$$(運動量保存則) \quad 0 = mv_0 + MV_0 \quad (3.28)$$

式 (3.28) より $V_0 = -(m/M)v_0$ なので、式 (3.27) より、

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}M\left(-\frac{m}{M}v_0\right)^2 \implies v_0^2 = 2gh \cdot \frac{M}{M+m}$$

となる。右向きが正であることに注意すると、 $V_0 > 0$, $v_0 < 0$ である。

$$\therefore V_0 = \sqrt{2gh \cdot \frac{m^2}{M(M+m)}}, \quad v_0 = -\sqrt{2gh \cdot \frac{M}{M+m}}$$

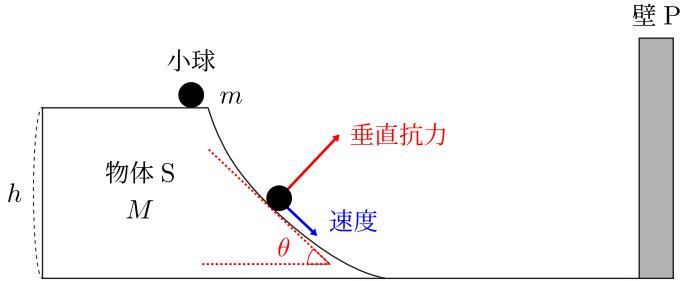


図 3.13

力学的エネルギーと運動量が保存する理由を考えよう。スロープ上の点における接線と水平方向のなす角を θ とする。小球が斜面から受ける垂直抗力の大きさを N 、物体 S が水平面から受ける垂直抗力 N_S とすると、次の 4 つの式が成立する。

$$ma_x = -N \sin \theta \quad (3.29)$$

$$ma_y = -mg + N \cos \theta \quad (3.30)$$

$$MA = N \sin \theta \quad (3.31)$$

$$0 = N_S - Mg - N \cos \theta \quad (3.32)$$

加速度が速度の微分であるので、式 (3.29) と式 (3.31) より、左右方向については次の式が成立する。

$$\frac{d}{dt}(mv_x + MV) = 0$$

これは左右方向の運動量保存則を表す式である。垂直抗力については、2 物体全体からなる系にとっては内力であるため、エネルギー保存則には影響を与えない。今回考える状況では空気抵抗や摩擦など非保存力も働いていないので、力学的エネルギー保存則も成立する。

- (2) 小球が S を離れてから壁で衝突するまでは、小球と物体 S の速度は一定。そのため、物体 S の速度は上で求めた V_0 に等しい。小球が壁 P で衝突した後の速度は $-ev_0$ である⁽⁶⁾。従って、相対速度は以下のようになる。

$$-ev_0 - V_0 = -ev_0 - \left(-\frac{m}{M}\right)v_0 = \left(e - \frac{m}{M}\right)\sqrt{2gh \cdot \frac{M}{M+m}}$$

- (3) 小球が物体 S に追いつくためには、小球が左方向に進む速さが物体 S が左方向に進む速さより速いことが必要である。これは (2) で求めた相対速度が正であることと等価。従って、 $e - m/M > 0$ が成立することが必要である。また、反発係数の性質から $e \leq 1$ である。以上より、求める e の範囲は

$$\frac{m}{M} < e \leq 1$$

である。

⁽⁶⁾ 正負の向きが通常と逆で左向きが正であることに注意。 $v_0 < 0$ ので $-ev_0 > 0$ となり、壁 P と衝突後は左に進むことも整合性がとれる。

- (4) 小球の上昇がやんだ瞬間、物体 S から見ると物体は静止して見える。そのため、小球の上昇がやんだ瞬間、小球と物体の速度は等しい。このことをもとに、力学的エネルギーと運動量が保存することを式に表す。

$$(力学的エネルギー保存則) \quad \frac{1}{2}m(-ev_0)^2 + \frac{1}{2}MV_0^2 = mgh + \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}MV^2 \quad (3.33)$$

$$(運動量保存則) \quad m(-ev_0) + MV_0 = mV + MV \quad (3.34)$$

- (5) 式 (3.34) と V_0 が $V_0 = -(m/M)v_0$ であることから、

$$V = \frac{m(-ev_0) + MV_0}{M+m} = -\frac{m}{M+m}v_0(1+e) = \frac{m}{M+m}(1+e)\sqrt{2gh \cdot \frac{M}{M+m}}$$

さらに、式 (3.33) と $V_0 = -(m/M)v_0$ より、

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}mv_0^2 \left(e^2 + \frac{m}{M} \right) - \frac{1}{2}(M+m) \left\{ -\frac{m}{M+m}v_0(1+e) \right\}^2 \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 \left\{ e^2 + \frac{m}{M} - \frac{m}{M+m}(1+e)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2}m \left(2gh \cdot \frac{M}{M+m} \right) \left\{ e^2 + \frac{m}{M} - \frac{m}{M+m}(1+e)^2 \right\} \\ \therefore \ell &= h \cdot \frac{M}{M+m} \left\{ \frac{M(M+m)e^2 + m(M+m) - mM(1+e)^2}{M+m} \right\} \\ &= h \cdot \frac{M}{M+m} \frac{M^2e^2 + m^2 - 2mMe}{M(M+m)} \\ &= \left(\frac{eM - m}{M+m} \right)^2 h \end{aligned}$$

3.3 重心運動と相対運動

このsectionでは複数の物体からなる系の性質を解析する方法を記す。その中でも、特に2つの物体からなる系の性質を調べる「2体問題」の基礎について記す。2体問題の解析手法は、太陽系の惑星の運動や惑星どうしの相互作用など天体の運動を理解する基礎にもなっている。大学入試問題を解く上ではマスターしなくとも大丈夫かもしれないが、理解しないのはとても損である。

3.3.1 重心運動方程式

2体問題を解く際は、重心運動と相対運動に分離して考える。 n 個の物体の重心の位置 \mathbf{r}_G とその速度 \mathbf{v}_G は以下のように定義される。

重心位置と重心速度

- 重心位置

$$\mathbf{r}_G = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}_k}{\sum_{k=1}^n m_k} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \cdots + m_n \mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \quad (3.35)$$

- 重心速度

$$\mathbf{v}_G = \frac{d\mathbf{r}_G}{dt} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k}{\sum_{k=1}^n m_k} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + m_n \mathbf{v}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \quad (3.36)$$

$M = \sum_{k=1}^n m_k = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ とすると、式(3.36)より

$$M \mathbf{v}_G = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + m_n \mathbf{v}_n \quad (3.37)$$

となり、 n 個の物体の全運動量が全質量と重心速度の積であることがわかる。

続けて、 n 個の物体の運動方程式の和を考える。個々の物体に働く外力を \mathbf{f}_k とすると、

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \mathbf{f}_k \quad (3.38)$$

となる。実際は、個々の物体に働く外力は、系の外から働く力と、他の物体との間に働く内力に分けられることに注意しなければならない。物体 i が物体 j から受ける内力を $\mathbf{F}_{j \rightarrow i}$ ($i = j$ のとき $\mathbf{F}_{j \rightarrow i} = \mathbf{0}$ とする) と書くことになると、式(3.38)は

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{j \rightarrow k} \right) \quad (3.39)$$

と書くのが厳密には正しい。ただ、 $\mathbf{F}_{i \rightarrow j} = -\mathbf{F}_{j \rightarrow i}$ (作用・反作用の法則) を考えると、式(3.39)の右辺第2項は $\mathbf{0}$ になるので、式(3.38)で十分である⁽⁷⁾。式(3.38)は式(3.37)を考慮すると

$$M \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \quad (3.40)$$

⁽⁷⁾つまり、 n 物体系の運動方程式で重要なのは、式(3.38)の \mathbf{f}_k は系の外から働く外力のことであり、物体間の内力は含まれないということである。

という式になり、 n 個の物体の重心の運動を考える時は、あたかも重心に全質量が集まり、また、 n 個の物体に働く外力の総和が、重心一点に集中していると考えた仮想的な状況を考えれば良いことがわかる。つまり、複雑なように見えるが、重心の運動を考える際は質量 M の物体のみの運動を考えるだけで十分なのである。

この性質は非常に有益な性質である。大きさを持つ物体を質点の集まりとみなしたとき、第 7 章で取り上げるような「各質点間の位置関係が変化しない」とみなせる状況下ならば、重心の運動を考えるだけで良いことと関係している。小球の運動を考える際に、質点でもないので、普通に運動方程式を立てて解いたのは、重心の運動を追いかけるだけなら、質点の運動と同等であるということを前提に考えていたからである。

ここからは $n = 2$ の時についてより深く考える⁽⁸⁾。ここで $n = 2$ の場合の重心の位置と速度を記す。

重心の位置と重心速度（2 物体）

$$\mathbf{r}_G = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{v}_G = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (3.42)$$

$M = m_1 + m_2$ とすると、 $M\mathbf{v}_G = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$ である。そのため、2 物体の場合、式 (3.38) は

$$M \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad (3.43)$$

となる。この式より、次の 2 つの性質がわかる。

- 2 物体に常に外力が働くない状況下では、 $t = 0$ の時に重心が静止していれば、2 物体の運動によらず、重心は不動。
- 重心が静止している、または、重心が等速運動をしている時、2 物体に働く外力の総和は $\mathbf{0}$ である。

3.3.2 2 体系の相対運動方程式

2 体系での 2 物体の運動方程式は以下のようになる。

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} \quad (3.44)$$

$$m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{f}_2 + \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} \quad (3.45)$$

$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ は 2 物体に働く外力で、 $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}, \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$ は 2 つの物体の間に働く相互作用を表す項である。この 2 式の和をとることで重心の運動方程式がかける。

$$\frac{d}{dt}(m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) = M \frac{d\mathbf{V}_G}{dt} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \quad (3.46)$$

ここで、2 物体の位置 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ に対して、 $\mathbf{r}_R = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ （相対位置）の時間変化を考えよう。つまり、物体 1 から見た物体 2 の相対運動を考えよう。

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_R = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_2 - \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_1 = \frac{1}{m_2} (\mathbf{f}_2 + \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}) - \frac{1}{m_1} (\mathbf{f}_1 + \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1})$$

(8) 入試でも $n = 2$ の時が重要であるのは確かだが、それ以上に $n = 2$ の場合は重要視される。その理由は、 $n = 1, 2$ のときだけは運動を数学的に解くことが可能だからである。 n が 3 以上の時は、特別な制約がない限り、数学的に解くのは不可能であることがポアンカレによって示されている。現在ではコンピュータの進歩により、 n が十分大きくて、制約をかけなければ、 n 個の物体の運動がどのようになるか推測できる。

作用・反作用の法則より、 $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$ が成立することを使うと、

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_R = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} + \frac{m_1 \mathbf{f}_2 - m_2 \mathbf{f}_1}{m_1 m_2} \quad (3.47)$$

となる。ここで、次のように μ を定める。

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \iff \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.48)$$

この μ は質量と同じ次元をもつ値で**換算質量**という。 μ を使うと、式 (3.47) は次のように書き直せる。

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}_R}{dt^2} = \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} + \frac{m_1 \mathbf{f}_2 - m_2 \mathbf{f}_1}{m_1 + m_2} \quad (3.49)$$

これより、相対運動では、重心運動と異なり、内力と外力の両方に依存することがわかる。

2体系の重心運動と相対運動

$$(重心運動) \quad M \frac{d^2 \mathbf{r}_G}{dt^2} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \quad (3.46)$$

$$(相対運動) \quad \mu \frac{d^2 \mathbf{r}_R}{dt^2} = \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} + \frac{m_1 \mathbf{f}_2 - m_2 \mathbf{f}_1}{m_1 + m_2} \quad (3.49)$$

3.3.3 重心運動と相対運動に分離する

2物体の位置 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ から重心座標 \mathbf{r}_G と相対座標 \mathbf{r}_R は以下のように定義される。

- （重心座標） $\mathbf{r}_G = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$
- （相対座標） $\mathbf{r}_R = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

逆に $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ を $\mathbf{r}_G, \mathbf{r}_R$ で表すことを考えよう。重心座標と相対座標の式を行列を用いて書くと、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_G \\ \mathbf{r}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{m_1 + m_2} & \frac{m_2}{m_1 + m_2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

となる。この 2×2 行列の行列式は 1 なので、逆行列が存在し、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \\ 1 & \frac{m_1}{m_1 + m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_G \\ \mathbf{r}_R \end{pmatrix}$$

と求められる。

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_G - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_R \quad (3.51)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_G + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_R \quad (3.52)$$

このように $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ を重心座標と相対座標で表すことができる。図形的に表すと、図 3.14 のようになる。重心は 2 点 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ を結ぶ線分を $m_2 : m_1$ に内分する点である。

式 (3.51) と式 (3.52) の両辺を時間 t で微分することで、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ を重心速度 \mathbf{v}_G と相対速度 \mathbf{v}_R を使って表すことができる。

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_G - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_R \quad (3.53)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_G + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_R \quad (3.54)$$

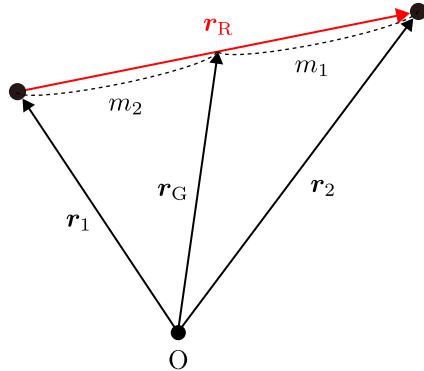


図 3.14 重心座標と相対座標の図形的関係

ここで、2 物体の運動エネルギーの和について考える。2 次元、3 次元では x, y, z の 3 方向の運動エネルギーの和が各物体が持つ運動エネルギーとなり、

$$K = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2}m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$$

とかかる。よって、2 物体の運動エネルギーの和は

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1) + \frac{1}{2}m_2(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2) \\ &= \frac{1}{2}m_1 \left(\mathbf{v}_G - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_R \right) \cdot \left(\mathbf{v}_G - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_R \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}m_2 \left(\mathbf{v}_G + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_R \right) \cdot \left(\mathbf{v}_G + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_R \right) \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \|\mathbf{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \|\mathbf{v}_R\|^2 \end{aligned} \quad (3.55)$$

とかけて、重心速度と相対速度で書けることがわかった。

運動エネルギーの分解

$$(重心運動エネルギー) \quad K_G = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \|\mathbf{v}_G\|^2 \quad (3.56)$$

$$(相対運動エネルギー) \quad K_R = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \|\mathbf{v}_R\|^2 = \frac{1}{2}\mu \|\mathbf{v}_R\|^2 \quad (3.57)$$

3.4 重心系で捉える2物体の運動

重心が常に静止している、あるいは等速度運動をしている場合、重心を原点とする相対座標で運動を解析すると、運動を把握しやすい場合がある。重心を原点とする座標系を**重心系**という。

3.4.1 重心系で見たときの2物体の全運動量

2物体（質量 m_1, m_2 ）の速度をそれぞれ v_1, v_2 とするとき、重心速度は次のように定義される。

$$\mathbf{v}_G = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (3.42)$$

この重心速度 \mathbf{v}_G を使って、重心系における2物体の速度 $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ は次のように定義される。

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_G, \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_G \quad (3.58)$$

式(3.42)と式(3.58)より、重心系で見たときの2物体の全運動量は

$$m_1 \mathbf{V}_1 + m_2 \mathbf{V}_2 = m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_G) + m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_G) = \mathbf{0} \quad (3.59)$$

となる。そのため、

$$\mathbf{V}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \mathbf{V}_1 \quad (3.60)$$

となり、 \mathbf{V}_1 と \mathbf{V}_2 は向きが反対のベクトルであることがわかる。よって、重心系で2物体の運動を見ると、同一直線上を互いに逆向きに運動することがわかる。

3.4.2 2物体の衝突とエネルギー変化

反発係数の式は、相対速度を使って書かれている。そのため、2物体の衝突の解析では、相対速度や相対運動エネルギーが役に立つと予想できる。式(3.13)で定義される反発係数は、2物体の衝突前の速度を v_1, v_2 、衝突後の2つの物体の速度を v'_1, v'_2 として、相対速度 $v_R = v_2 - v_1$, $v'_R = v'_2 - v'_1$ を用いると、次のようになる。

$$e = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} = -\frac{v'_R}{v_R} \quad (3.61)$$

衝突の際は、撃力が外力に比べて圧倒的に大きく、外力を無視できる。そのため、衝突の直前直後では2物体の運動量は一定で、重心速度は一定である。このような場合は重心系で衝突を考えると得をすることがある。上記の通り、重心系で見ると、2物体は重心に関して対称的な運動をするので、重心系で見た時、2物体が衝突するのは（重心系の）原点である。つまり、静止系からみると、2物体は重心で衝突する。

衝突時は外力が働くないとみなせるため、衝突の前後で重心速度 \mathbf{v}_G は一定である。式(3.55)より、運動エネルギーは、重心運動エネルギーと相対運動エネルギーの和でかける。

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \|\mathbf{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \|v_R\|^2 \quad (3.55)$$

そのため、衝突の前後で、重心運動エネルギーは変化しない。もし、衝突により、運動エネルギーが変化したなら、それは相対運動エネルギーの変化分に等しい⁽⁹⁾。

衝突による2物体の運動エネルギーの和の変化 ΔK は

$$\Delta K = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \{(v'_R)^2 - (v_R)^2\} = -\frac{1 - e^2}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_R^2 \quad (3.62)$$

となる。これより、 $e = 1$ （弾性衝突）の時、2物体の運動エネルギーの和は変化しないことがわかる。また、 $e = 0$ （完全非弾性衝突）の時は相対運動エネルギーの分が全部失われることがわかる。

⁽⁹⁾ 反発係数を、衝突の前後の相対速度の比率で定義したので、このことは明白なことである。

3.4.3 2 物体の衝突と重心系

3.1.3 「反発係数」の部分で、次の 2 つの式から v'_1 と v'_2 を求めた。これを重心系を利用して求めよう。

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (3.12)$$

$$e = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} \quad (3.13)$$

まず、衝突直前の重心速度を V_G として、衝突前の重心系での 2 物体の速度を V_1, V_2 とすると、

$$V_1 = v_1 - V_G, \quad V_2 = v_2 - V_G \quad (3.63)$$

である。反発係数の式の分子と分母を次のように変形すると、

$$e = -\frac{(v'_1 - V_G) - (v'_2 - V_G)}{(v_1 - V_G) - (v_2 - V_G)} = -\frac{V'_1 - V'_2}{V_1 - V_2} \quad (3.64)$$

となり、重心系で見たときも、衝突前後の相対速度の比は反発係数に等しいことがわかる。重心系では運動量の総和は一定で 0 であるため、

$$0 = m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 V'_1 + m_2 V'_2 \quad (3.65)$$

が成立する。式 (3.64) と式 (3.65) から V'_1 と V'_2 を求めよう。

式 (3.65) より、 $V_2 = -\frac{m_1}{m_2} V_1, V'_2 = -\frac{m_1}{m_2} V'_1$ が成立するので、

$$e = -\frac{V'_1 - (m_1/m_2)V'_1}{V_1 - (m_1/m_2)V_1} \implies V'_1 = -eV_1 \quad (3.66)$$

が成立する。同様に $V'_2 = -eV_2$ が成立する。重心系で考えると、衝突後の速度が $-e$ 倍になっているよう見えて、衝突後の 2 物体の速度を容易に求めることができる。

衝突後の物体 1 の速度 v'_1 は $V_1 = v_1 - V_G$ より、

$$\begin{aligned} v'_1 &= V'_1 + V_G = -eV_1 + V_G = (1 + e)V_G - ev_1 \\ &= (1 + e)\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - ev_1 \\ &= \frac{(m_1 - em_2)v_1 + (1 + e)m_2 v_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

と計算できる。同様に、 v'_2 も計算できて、以下のようになる。

$$v'_2 = (1 + e)V_G - ev_2 = \frac{(1 + e)m_1 v_1 + (m_2 - em_1)v_2}{m_1 + m_2}$$

3.4.4 相対運動エネルギーと重心系

2 物体の運動エネルギーの和 K は重心運動エネルギーと相対運動エネルギーの和で表される。

$$K = \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\|\mathbf{v}_G\|^2}_{\text{重心運動エネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\|\mathbf{v}_R\|^2}_{\text{相対運動エネルギー}} \quad (3.55)$$

今度は 2 物体の運動エネルギーの和 K と重心系の関係を見ていく。重心系における 2 物体の速度 $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ は重心速度 \mathbf{v}_G 次のように定義される。

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_G, \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_G \quad (3.58)$$

前述の通り、重心系で見たときの2物体の全運動量は**0**である。このことに注意して、2物体の運動エネルギーの和 K を変形する。

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2}m_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1) + \frac{1}{2}m_2(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2) \\
 &= \frac{1}{2}m_1\{(\mathbf{V}_1 + \mathbf{v}_G) \cdot (\mathbf{V}_1 + \mathbf{v}_G)\} + \frac{1}{2}m_2\{(\mathbf{V}_2 + \mathbf{v}_G) \cdot (\mathbf{V}_2 + \mathbf{v}_G)\} \\
 &= \frac{1}{2}m_1(\|\mathbf{V}_1\|^2 + 2\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{v}_G + \|\mathbf{v}_G\|^2) + \frac{1}{2}m_2(\|\mathbf{V}_2\|^2 + 2\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{v}_G + \|\mathbf{v}_G\|^2) \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\|\mathbf{v}_G\|^2}_{K_G} + \underbrace{\mathbf{v}_G \cdot (m_1\mathbf{V}_1 + m_2\mathbf{V}_2)}_0 + \frac{1}{2}m_1\|\mathbf{V}_1\|^2 + \frac{1}{2}m_2\|\mathbf{V}_2\|^2 \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\|\mathbf{v}_G\|^2}_{K_G} + \frac{1}{2}m_1\|\mathbf{V}_1\|^2 + \frac{1}{2}m_2\|\mathbf{V}_2\|^2
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

$K = K_G + K_R$ なので、式(3.67)の後ろの2項は K_R に等しい。したがって、重心運動エネルギーと相対運動エネルギーについては、以下のように書くこともできる。特に、相対運動エネルギーについては2通りの書き方があることがわかったので、状況に応じてうまく利用したい。

運動エネルギーの分解 (2)

$$(重心運動エネルギー) \quad K_G = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\|\mathbf{v}_G\|^2 \tag{3.56}$$

$$(相対運動エネルギー) \quad K_R = \frac{1}{2}m_1\|\mathbf{V}_1\|^2 + \frac{1}{2}m_2\|\mathbf{V}_2\|^2 \tag{3.68}$$

3.4.5 演習問題 (重心系での議論)

最後にシンプルな題材で、重心系を用いて問題を解く例を示す。この問題はとてもシンプルなもので、重心系を導入しなくても難なく解くことができる。

問題 9

図3.15に示すような鉛直な壁と摩擦のない水平な床について考える。今、床上に図3.15のように半径を無視できる2つの小球P、Qがあり、小球Pが小球Qよりも右側に置いてある。小球P、Qの質量はそれぞれ $m, 2m$ である。この状態で小球Pが左向きに一定の大きさ v_0 の速度で動き始めた。すると、静止している小球Qへ右側から小球Pが衝突した。2つの小球の衝突、および小球と壁の衝突が完全弾性衝突であるとする。2つの小球は常に同一直線上を動くものとする。

- (1) 1回目の衝突後の2つの小球の速度を求めよ。(右向きを正とする)
- (2) 1回目の衝突後、小球Pは右側へ、小球Qは左へ進んだ。小球Qは壁と衝突して反射され、小球Pを追い再衝突を起こした。2回目の衝突後の2つの小球の速度を求めよ。(右向きを正とする)

まず、問題集に載っているオーソドックスな解法を示す。単に運動量保存則と反発係数の式を連立させて解くだけである。

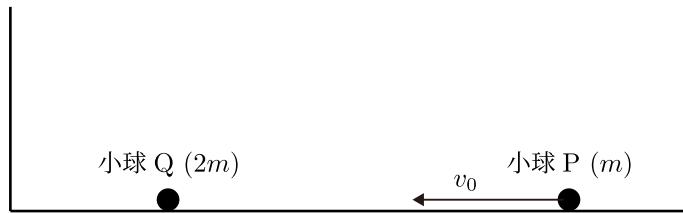


図 3.15

(1) 1度目の衝突後のPとQの速度をそれぞれ v_P , v_Q とする。

$$\begin{cases} m(-v_0) = mv_P + 2mv_Q & \text{(運動量保存則)} \\ 1 = -\frac{v_P - v_Q}{(-v_0)} & \text{(反発係数の式)} \end{cases}$$

これを解くと、衝突後のPの速度は $\frac{1}{3}v_0$ 、Qの速度は $-\frac{2}{3}v_0$ であることが求められる。

(2) 2度目の衝突の後のPとQの速度を v'_P , v'_Q とする。1回目の衝突後に小球Qと壁が衝突すると、小球Qの速度は $-v_Q = \frac{2}{3}v_0$ となる。

$$\begin{cases} mv_P + 2m(-v_Q) = mv'_P + 2mv'_Q & \text{(運動量保存則)} \\ 1 = -\frac{v'_P - v'_Q}{v_P - (-v_Q)} & \text{(反発係数の式)} \end{cases}$$

(1)の結果より、運動量保存則の左辺は $\frac{5}{3}mv_0$ で、 $v_P - (-v_Q) = -\frac{1}{3}v_0$ である。従って、次の連立方程式を解けばよい。

$$\begin{cases} \frac{5}{3}mv_0 = mv'_P + 2mv'_Q & \text{(運動量保存則)} \\ 1 = -\frac{v'_P - v'_Q}{-v_0/3} & \text{(反発係数の式)} \end{cases}$$

これを解くと、2回目の衝突後のPの速度は $\frac{7}{9}v_0$ 、Qの速度は $\frac{4}{9}v_0$ である。

重心系を導入して解く

今度は重心系を利用して解いてみよう。重心系では衝突後の速度は $-e$ 倍 (e : 小球と小球の間の反発係数) になるだけである。今回は小球と小球の間の反発係数は1であるので、ただ-1倍すればよい。

(1) 1度目の衝突の直前の重心速度 v_G は

$$v_G = \frac{m(-v_0) + 2m \cdot 0}{m + 2m} = -\frac{1}{3}v_0$$

である。衝突直前の重心系でのPとQの速度 V_P , V_Q は

$$\begin{cases} V_P = (-v_0) - \left(-\frac{1}{3}v_0\right) = -\frac{2}{3}v_0 \\ V_Q = 0 - \left(-\frac{1}{3}v_0\right) = \frac{1}{3}v_0 \end{cases}$$

と書ける。よって、 v_P , v_Q は以下のようになる。

$$v_P = V'_P + v_G = \frac{2}{3}v_0 + \left(-\frac{1}{3}v_0\right) = \frac{1}{3}v_0$$

$$v_Q = V'_Q + v_G = -\frac{1}{3}v_0 + \left(-\frac{1}{3}v_0\right) = -\frac{2}{3}v_0$$

(2) 2回目の衝突の直前の重心速度 v'_G は

$$v'_G = \frac{m(v_0/3) + 2m \cdot (2v_0/3)}{m + 2m} = \frac{5}{9}v_0$$

である。2回目の衝突直前の重心系での P と Q の速度 V''_P , V''_Q は

$$\begin{cases} V''_P = \frac{1}{3}v_0 - \frac{5}{9}v_0 = -\frac{2}{9}v_0 \\ V''_Q = \frac{2}{3}v_0 - \frac{5}{9}v_0 = \frac{1}{9}v_0 \end{cases}$$

と書ける。よって、 v'_P , v'_Q は以下のようになる。

$$v'_P = (-V''_P) + v'_G = \frac{2}{9}v_0 + \frac{5}{9}v_0 = \frac{7}{9}v_0$$

$$v'_Q = (-V''_Q) + v'_G = -\frac{1}{9}v_0 + \frac{5}{9}v_0 = \frac{4}{9}v_0$$

第4章 円運動と慣性力

これまで扱った2次元運動は、軌道が複雑な場合は、保存力だけが働いているという理想状態のみを考えた。その他に考えたのは、ただ運動方程式を立てて、加速度がどう記述できるか、どのような関係を満たすかだけを考えた。具体的に考えた軌道は放物線軌道ぐらいだろう。この章の前半では、軌道が円の場合についてみしていく。円の場合も高校レベルの数学で十分分析ができる。

後半では、「運動をどこから見るか」ということについて触れる。入試問題を含めて、物理ではいつも静止系から運動を観測するのが良いとは限らない。重心系については前の章で触れたが、今回は等速度運動する観測者や、加速度運動する観測者、回転運動する観測者から見た相対的な運動はどのようなものかを考える。

4.1 速度・加速度の極座標表示

4.1.1 極座標の導入

物体の運動を把握するときは、状況に応じて適切な座標系をとる必要がある。極座標はその1つである。以下の図4.1や図4.2のように、原点からの距離 r と角度を用いて位置を表す座標系を**極座標**という。

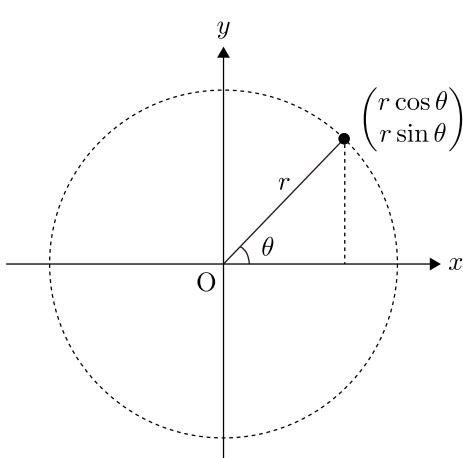


図 4.1 2次元極座標

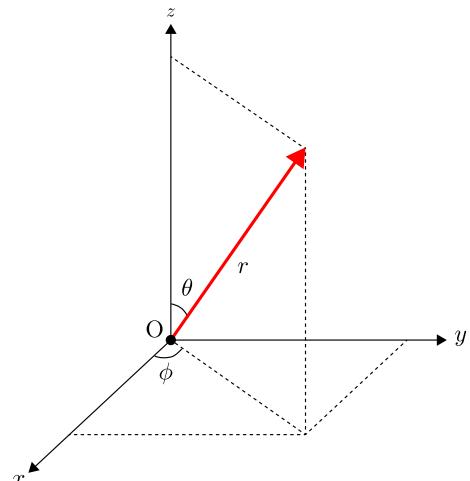


図 4.2 3次元極座標

2次元座標 (x, y) は、2つのパラメーター r （原点からの距離）と x 軸の正の方向とのなす角 θ を使って

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (4.1)$$

と書くことができる。

また、3次元座標 (x, y, z) は、3つのパラメーター r （原点からの距離）と θ, ϕ を使って

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (4.2)$$

と書くこともできる⁽¹⁾。

4.1.2 座標変換

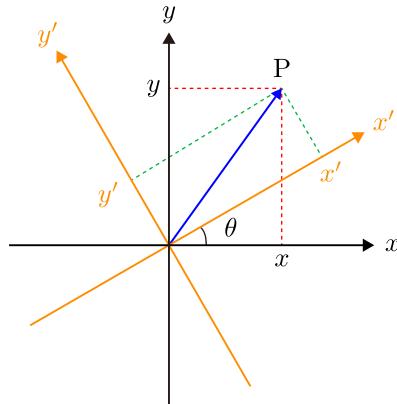


図 4.3 原点のまわりに座標系を θ 回転させる

この subsection では 2 次元平面における座標変換について考える。 xy 座標系を原点のまわりに反時計回りに θ 回転させた座標系を $x'y'$ 座標系とする（つまり、原点は不動である）。座標平面上に点 P をとる。座標系が変わっても点 P の位置は変わらない。しかし、点 P を表す数の組み合わせ、座標が変わる。これは、座標軸に対応する基本単位ベクトル（基底）が変わることによる。

普段当たり前のように使っている xy 座標系では、

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

という 2 つのベクトルを基底としている。この 2 つの基底⁽²⁾を使うと、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \quad (4.4)$$

と書いて、 \mathbf{e}_1 と \mathbf{e}_2 の係数の組み合わせを座標と呼ぶ。ここで座標系が変わると、すなわち \mathbf{e}_1 と \mathbf{e}_2 の向きが変わると、点 P 自身は変わらなくても、係数の組み合わせ（座標）が変わる。

⁽¹⁾ この TeX ノートでは 3 次元極座標を用いる機会は一切ないので、覚えなくても大丈夫だが、大学入試の数学の問題を解くときに役に立つかかもしれない。

⁽²⁾ 式 (4.3) のように基底（基本単位ベクトル）を設定すると、 \mathbf{e}_1 と \mathbf{e}_2 の内積は 0 で、この 2 つのベクトルは直交する。ただ、直交するように 2 つのベクトルを取るなら、

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

としてもよい。ただ、そうしないのは式 (4.3) のように基底をとるのが一番シンプルであるからである。2 つの直交する方向をそれぞれベクトル $(1, 0)$ と $(0, 1)$ とすれば一番楽である。

式(4.3)のように2次元平面の基底をとる。このとき、座標系を回転させることは基底を取り直すことと等価である⁽³⁾。座標系の回転により、基本単位ベクトル e_1 が e'_1 に、 e_2 が e'_2 に変わったとする。2つのベクトル e_1, e_2 を原点のまわりに反時計回りに θ 回転させると、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

となるから、2つの基底を

$$e'_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

とすればよい。新しい基底 e'_1 と e'_2 の下での点 P の座標を (x', y') とすると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x' e'_1 + y' e'_2 = x' \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

が成立する。この式(4.7)より (x', y') を求める。

式(4.7)の右辺の 2×2 行列の行列式は、

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \cos \theta \times \cos \theta - (-\sin \theta) \times \sin \theta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (4.8)$$

となる⁽⁴⁾ので、この 2×2 行列の逆行列を左からかけると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{\text{逆行列}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta + y \sin \theta \\ -x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

となり、新しい基底 e'_1 と e'_2 の下での点 P の座標が求められた。

原点のまわりに θ 回転させた座標系と元の座標系の対応

xy 座標系 O_1 を原点のまわりに（反時計回りに） θ 回転させたものを O_2 とする。ある点の座標が O_1 上で (x, y) と表され、 O_2 上で (x', y') と表されるとき、以下の関係式が成立する。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta + y \sin \theta \\ -x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

さて、図 4.3 の $x'y'$ 座標系を原点のまわりに $-\theta$ 回転させて、 x 軸と x' 軸、 y 軸と y' 軸が一致させる。このとき、 $x'y'$ 座標系と一緒に点 P も原点のまわりに $-\theta$ 回転させて、点 P^* に移動させる。点 P と点 P^* の位置関係は図 4.4 のようになる。 $\|\overrightarrow{OP}\| = \|\overrightarrow{OP^*}\|$ であり、 $\angle POP^* = \theta$ である。そのため、図 4.4において、点 (x', y') を原点のまわりに θ 回転させると、点 (x, y) に一致する。座標系とともに点を回転させたので、図 4.4において、 (x, y) と (x', y') の間には、次の式が成立する。

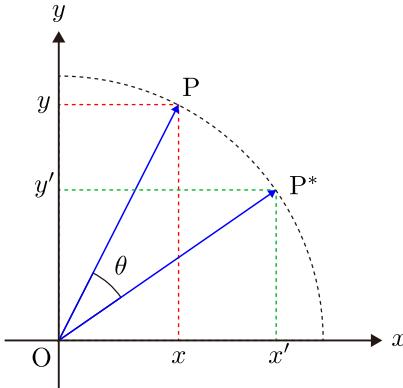
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta + y \sin \theta \\ -x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$$

⁽³⁾取り直した基底を $e'_1 = (1, 0), e'_2 = (0, 1)$ と設定すると回転前の基底との違いがわからない。基底の取り直しは基本単位ベクトルの向きの変更に対応するが、改めて $(1, 0), (0, 1)$ と取り直さないことで回転の前後での違いがわかるようにする。

⁽⁴⁾行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行列式 $\det A$ を

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

と表すことがある。この記法は、大学の線形代数学では一般的に使用される記法である。

図 4.4 座標系と連動させて点 P を $-\theta$ 回転させる

この式を変形すると次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

回転行列

xy 平面上の点 (x, y) に対して、

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

は、原点のまわりに点 (x, y) を θ 回転させて得られる点を表す。

4.1.3 速度・加速度の極座標表示

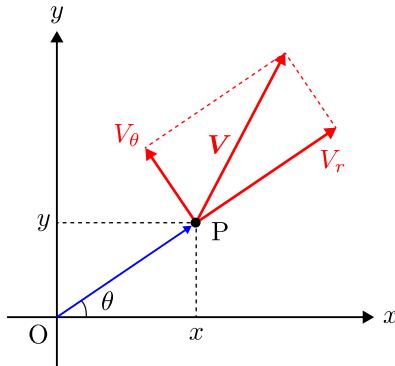


図 4.5 極座標系における速度ベクトル

この subsection では速度や加速度の極座標表示について考える。点 P の座標が $\mathbf{r} = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ であるとし、点 P における速度ベクトルを \mathbf{V} で表すとする。

極座標系では、図 4.5 のように \overrightarrow{OP} 方向(向心方向)成分 V_r と、これと垂直な方向で、原点 O の周りを反時計回りに 90° 回した方向(接線方向)の成分 V_θ を用いて \mathbf{V} を表す。それぞれの方向の単位ベクトルを e_r, e_θ とすると、これらは、 $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ を原点のまわりに反時計回りに θ 回転したベクトルである。そのため、速度の極座標表示は、元の xy 座標系を原点のまわりに反時計回りに θ 回転した座標系

における表示である。

したがって、極座標系では以下の 2 つを基底（基本単位ベクトル）とすればよい。

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

速度ベクトル \mathbf{V} は、 r と θ がともに時刻 t の関数であることに注意すると以下のようになる⁽⁵⁾。

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(r \cos \theta) \\ \frac{d}{dt}(r \sin \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \cdot \dot{\theta} \\ \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \cdot \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

\mathbf{e}_r と \mathbf{e}_θ を使って \mathbf{V} を表現したときの係数が V_r と V_θ であるから、式 (4.11) から \mathbf{e}_r と \mathbf{e}_θ を見つけ出せばよい。式 (4.11) は

$$\mathbf{V} = \dot{r} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + r\dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad (4.12)$$

と変形できるので、 \mathbf{V} の向心方向成分は $V_r = \dot{r}$ で、接線方向成分は $V_\theta = r\dot{\theta}$ である⁽⁶⁾。ここで、次のように角速度 ω を導入する。

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (4.13)$$

すると、速度の極座標表示は次のようにまとめられる。

速度の極座標表示

速度 \mathbf{V} を極座標系で表す。原点から遠ざかる方向（向心方向）の成分 V_r と、それに垂直な方向（接線方向）成分 V_θ は次のように表せる。

$$V_r = \dot{r} = \frac{dr}{dt} \quad (4.14)$$

$$V_\theta = r\dot{\theta} = r\omega \quad (4.15)$$

続けて、加速度の極座標表示を考える。これも速度ベクトルと同様に \mathbf{a} の x 成分と y 成分を時間 t で 2 回微分して \mathbf{e}_r と \mathbf{e}_θ を見つけねばよい。ただ、計算を楽にするために、 \mathbf{e}_r と \mathbf{e}_θ の時間微分を考える。

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \cdot \dot{\theta} \\ \cos \theta \cdot \dot{\theta} \end{pmatrix} = \omega \mathbf{e}_\theta \quad (4.16)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \cdot \dot{\theta} \\ -\sin \theta \cdot \dot{\theta} \end{pmatrix} = -\omega \mathbf{e}_r \quad (4.17)$$

(5) 変数 r の時間微分を r の上に 1 つ \cdot をつけて、 \dot{r} のように表すことがある。また、変数の時間に関して 2 階微分したもの \ddot{r} のように表す。

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}, \quad \ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2}$$

(6) 4.1.2 節の議論から xy 座標系で $\mathbf{V} = (V_x, V_y)$ と表されるとき、

$$\begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \cos \theta + V_y \sin \theta \\ -V_x \sin \theta + V_y \cos \theta \end{pmatrix}$$

となる。これに式 (4.11) で求めた $V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cos \theta)$ と $V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(r \sin \theta)$ の計算結果を代入すると、 \mathbf{V} の向心方向成分は V_r と接線方向成分は V_θ を計算することができる。

$$V_r = \dot{r}(\cos \theta)^2 - r \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\theta} + \dot{r}(\sin \theta)^2 + r \cos \theta \sin \theta \cdot \dot{\theta} = \dot{r}$$

$$V_\theta = -\dot{r} \cos \theta \sin \theta + r(\sin \theta)^2 \cdot \dot{\theta} + \dot{r} \sin \theta \cos \theta + r(\cos \theta)^2 \cdot \dot{\theta} = r\dot{\theta}$$

これを使えば、式(4.12)の時間微分は容易に計算することができる。

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}(\dot{r}) \right) \mathbf{e}_r + \dot{r} \frac{de_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \left(\frac{d}{dt}(\dot{\theta}) \right) \mathbf{e}_\theta + r \dot{\theta} \frac{de_\theta}{dt} \\ &= \ddot{r} \mathbf{e}_r + \dot{r} \omega \mathbf{e}_\theta + \dot{r} \omega \mathbf{e}_\theta + r \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \omega (-\omega) \mathbf{e}_r \\ &= (\ddot{r} - r \omega^2) \mathbf{e}_r + (2\dot{r} \omega + r \ddot{\theta}) \mathbf{e}_\theta\end{aligned}\quad (4.18)$$

よって、 \mathbf{a} の向心方向成分は a_r は $\ddot{r} - r \omega^2$ で、接線方向成分は a_θ は $2\dot{r} \omega + r \ddot{\theta}$ である。なお、 a_θ については次の関係式が成立する。

$$2\dot{r} \omega + r \ddot{\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt}(r^2 \omega)$$

以上のことから、角速度の極座標表示は次のようにまとめられる。

加速度の極座標表示

加速度 \mathbf{a} を極座標系で表す。原点から遠ざかる方向（向心方向）の成分 a_r と、それに垂直な方向（接線方向）成分 a_θ は次のように表せる。

$$a_r = \ddot{r} - r \omega^2 \quad (4.19)$$

$$a_\theta = 2\dot{r} \omega + r \ddot{\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt}(r^2 \omega) \quad (4.20)$$

4.2 円運動

このsectionでは円運動について取り扱う。円運動ではこれまでに取り扱った xy 座標系ではなく、極座標表示が利用される。極座標が有効な橿円運動については第6章の万有引力の部分で扱う。

4.2.1 円運動の速度と加速度

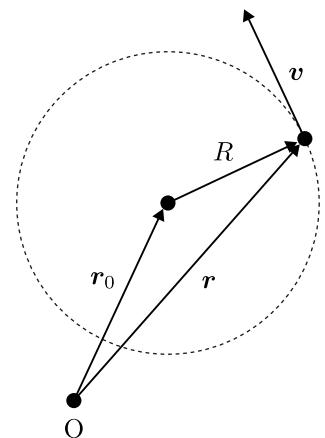


図 4.6

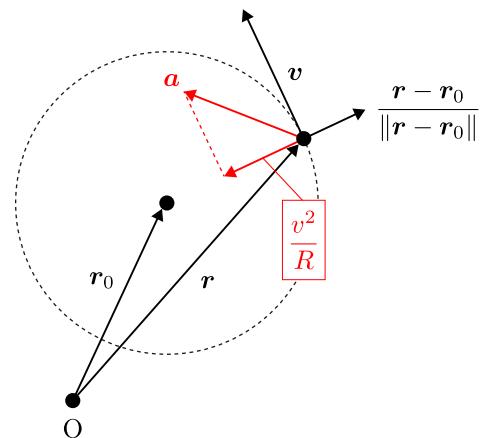


図 4.7

円運動の半径を $R = \text{const.}$ とする。円運動の中心の座標を \mathbf{r}_0 としたとき、円軌道上の点 \mathbf{r} は次の式を満たす。

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| = R \implies (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = R^2 \quad (4.21)$$

運動を解析するためには運動方程式を立てる必要があり、そのためには加速度を把握する必要がある。そこで、式(4.21)の両辺を時間微分する⁽⁷⁾。

$$\underbrace{\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\right)}_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \underbrace{\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\right)}_{\mathbf{v}} = 0$$

$$\therefore (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.22)$$

この式より、円運動のする質点について、円軌道の原点から質点に向けたベクトル $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ と速度ベクトル \mathbf{v} が直交して、 \mathbf{v} は接線方向成分のみを持つことがわかる。加速度が欲しいので、さらに時間微分する。

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\right) \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{a} &= 0 \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= -\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} &= -\frac{\|\mathbf{v}\|^2}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} = -\frac{v^2}{R} \end{aligned} \quad (4.23)$$

式(4.23)はどういう意味か？ベクトル $\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|}$ はベクトル $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ と同じ方向の単位ベクトルである。式(4.23)はこの単位ベクトルと \mathbf{a} の内積であり、 \mathbf{a} の $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ 方向、すなわち向心方向成分を表す。向心方向成分が負の符号がつくことは、 \mathbf{a} の向心方向成分は円運動の中心を向く方向であることを表している。

$$a_{\text{向心方向}} = -\frac{v^2}{R}, \quad (v \text{ は速度, } R \text{ は円運動の半径}) \quad (4.24)$$

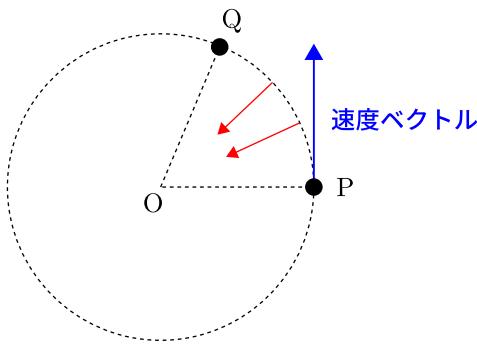


図 4.8

円運動の加速度 \mathbf{a} の向心方向成分にマイナスがついているが、もしマイナスがついていなくて、中心を向く方向の加速度成分を持たなければ、円軌道を描かない（図4.8参照）。

ここまで議論から \mathbf{a} の向心方向成分についてはわかったが、接線方向についてはわかっていない。ただ、円運動をしている物体の速度は接線方向成分しか持たないので、接線方向成分は単純に速度の時間微分である。

$$a_{\text{接線方向}} = \frac{dv}{dt} \quad (4.25)$$

⁽⁷⁾ $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ の時間微分は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \frac{da_1}{dt} b_1 + a_1 \frac{db_1}{dt} + \frac{da_2}{dt} b_2 + a_2 \frac{db_2}{dt} + \frac{da_3}{dt} b_3 + a_3 \frac{db_3}{dt} \\ &= \left(\frac{da_1}{dt} b_1 + \frac{da_2}{dt} b_2 + \frac{da_3}{dt} b_3 \right) + \left(a_1 \frac{db_1}{dt} + a_2 \frac{db_2}{dt} + a_3 \frac{db_3}{dt} \right) \\ &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} \end{aligned}$$

従って、ベクトルの内積の微分は通常の積の微分と同じように計算すれば良い。

この他、円運動における速度や加速度の表現については角速度 ω を利用した表示がある。それは、4.1.3節で求めた速度と加速度の極座標表示を円運動の場合に適用すればよい。円運動の特徴は極座標表示したとき、中心からの距離 r が一定であるということである。つまり、円運動では $\dot{r} = 0$ が成立する。

円運動における速度と加速度

- 円運動における速度 $V_r = 0, V_\theta = r\dot{\theta} = r\omega$ (4.26)

- 円運動における加速度 $a_r = -r\omega^2, a_\theta = r\ddot{\theta} = r\dot{\omega}$ (4.27)

また、円運動の速度は式 (4.26) より、 $v = r\omega$ とかけるので、円運動の加速度は以下のように表すことができる。

$$a_r = -\frac{v^2}{r}, \quad a_\theta = \frac{dv}{dt} \quad (4.28)$$

4.2.2 円運動の演習問題 (1)

この Subsection では、問題演習を通して、円運動について考える。扱う問題は『難問題の系統とその解き方 物理』(新装第2版) の例題 26 である(一部変更している箇所あり)。円運動の問題、特に速度が一定ではない円運動の問題ではエネルギー保存則が活躍する。

問題 10

長さ r の軽くて伸び縮みしない糸の上端を図 4.9 のように支点 O に固定し、下端に質量 m の小球を付ける。また、図 4.9 のように糸の鉛直下方に対してなすすみの角度 θ を設定する。なお、 θ の増大する向きは点 P から反時計回りに小球が回る向きとする。小球が鉛直面内を運動するとき、重力加速度の大きさを g として次の問い合わせよ。ただし、空気抵抗や浮力などは無視し、糸は切れないものとする。

- (1) 図 4.9 の最下点 P で静止していた小球に水平方向右向きの速さ v_0 を与えると、小球が振り子運動を始めた。このような運動をするとき、 v_0 のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) (1) の場合で θ が最大値をとる瞬間の糸の張力の大きさを求めよ。
- (3) 小球が Oを中心とする完全な円を描く運動をするとき、 v_0 のとりうる値の範囲を求めよ。
- (4) $v_0 = \sqrt{\frac{7}{2}gr}$ のとき、小球が円運動から離脱する位置と、その時の小球の速さを求めよ。
- (5) (4) の場合、小球が円運動から離脱すると糸はたるむ。そして、再び糸が張るまで小球は放物線運動を行う。円運動より離脱してから、再び糸が張るまでの時間を求めよ。さらに、糸が張る瞬間の小球の位置を求めよ。

運動状態を把握するために運動方程式を書く⁽⁸⁾。円軌道なので、極座標系を用いる。

$$m\frac{v^2}{r} = T - mg \cos \theta \quad (\text{向心方向}) \quad (4.29)$$

$$m\frac{dv}{dt} = -mg \sin \theta \quad (\text{接線方向}) \quad (4.30)$$

⁽⁸⁾向心方向については中心に向かう方向を正とし、接線方向は図 4.9において、 θ が増大する方向を正とすることが多い。本問題でも正の方向をこのようにとる。

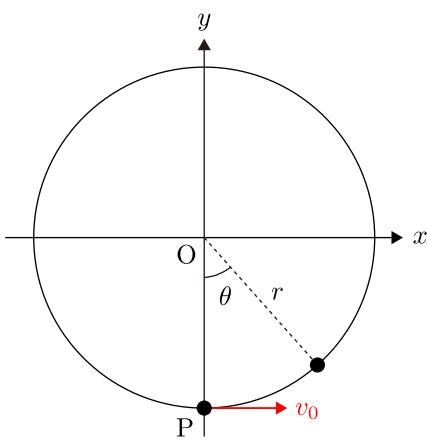


図 4.9

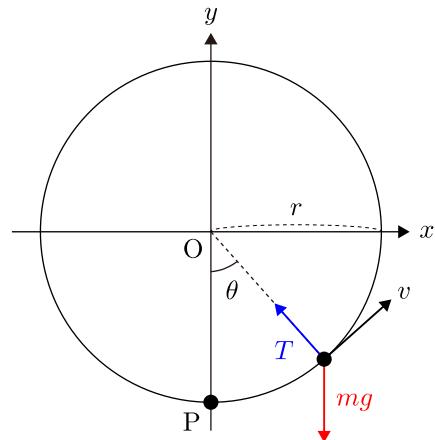


図 4.10

運動を解析するためにエネルギー保存則を導く。接線方向の式に $v = r \frac{d\theta}{dt}$ をかける。

$$mv \frac{dv}{dt} = -mgr \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = -mgr \cdot \left(\frac{d}{d\theta} (-\cos \theta) \right) \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt} (mgr \cos \theta)$$

エネルギー保存則

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 - mgr \cos \theta \right) = 0 \iff \frac{1}{2} mv^2 - mgr \cos \theta = \text{const.} \quad (4.31)$$

上記のエネルギー保存則では、重力による位置エネルギーが $-mgr \cos \theta$ となっている。これは図 4.9 の原点 O を基準とする位置エネルギーである⁽⁹⁾。

解答

(1) 振り子運動をするということは、 θ が 90° をこえないということである。これは $\cos \theta$ が 0 より大きいということと等価である。 θ が最大の時、つまり、最高点に到達した時、小球の速度は 0 になる。エネルギー保存則を使うと以下の式が成立する。

$$-mgr \cos \theta_{\max} = \frac{1}{2} mv_0^2 - mgr$$

これより $\cos \theta_{\max}$ を求めて、 $\cos \theta$ が 0 より大きいという条件を課すと v_0 に関する条件が求められる。

$$\cos \theta_{\max} = -\frac{v_0^2}{2gr} + 1 > 0 \implies v_0 < \sqrt{2gr}$$

(2) θ が最大のとき、小球の速度が 0 であることから、式 (4.29) から張力が求められる。

$$T = mg \cos \theta_{\max} = mg \left(1 - \frac{v_0^2}{2gr} \right)$$

(9) このような状況では最下点 P として考える場合もある。最下点 P を位置エネルギーの基準とする場合は位置エネルギーの項は $mgr(1 - \cos \theta)$ となり、エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2} mv^2 + mgr(1 - \cos \theta) = \text{const.} \quad (4.32)$$

となる。これは式 (4.31) の両辺に定数項 mgr を足したものであり、式 (4.31) と等価である。入試問題などでは問題文に応じて、ベストなエネルギー保存則を立てることが望ましい。

- (3) 小球が O を中心とする完全な円を描くとき、円運動中に糸がたるむことはない。よって、張力の最小値が 0 以上であればよい。エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgr \cos \theta = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgr \implies mv^2 = mv_0^2 - mgr(2 - 2 \cos \theta) \quad (4.33)$$

が成立する。これと式 (4.29) より張力を θ の関数として書くことができる。

$$T(\theta) = \frac{mv^2}{r} + mg \cos \theta = \frac{mv_0^2}{r} - mg(2 - 3 \cos \theta) \quad (4.34)$$

この $T(\theta)$ は v_0 によらず、 $\theta = \pi$ 、つまり小球が最高点 $(0, r)$ に到達した場合に最小となる。そのため、 $T(\pi) \geq 0$ であればよい。

$$T(\pi) = \frac{mv_0^2}{r} - 5mg \geq 0 \implies v_0 \geq \sqrt{5gr}$$

- (4) $v_0 = \sqrt{\frac{7}{2}gr}$ のとき、ある $\theta (< \pi)$ で張力が 0 となってしまう。この瞬間から糸がたるみ始めて円運動をしなくなる。式 (4.34) より、糸がたるみ始める瞬間 $\theta = \theta_b$ について、次の式が成立する。

$$0 = \frac{7}{2}mg - mg(2 - 3 \cos \theta_b)$$

これより $\cos \theta_b = -1/2$ で $\theta_b = 120^\circ$ である。すると、図 4.9 より円運動を離脱する位置は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r, \frac{r}{2}\right)$ である。また、このときの速度 v_b は、 $T = 0$ なので、式 (4.29) より

$$v_b = \sqrt{-gr \cos \theta_b} = \sqrt{\frac{1}{2}gr}$$

である。 \square

- (5) 「再び糸が張る」という条件をどう数式で記述するかが Key になる。糸が張るということは張力 T が 0 以上ということであるが、糸がたるんでいるときの小球の運動方程式に張力は出てこないので、張力に関する式は使えない。ここで、図 4.10 のように、 O を原点とする xy 座標系での位置に関する条件を考える。

- 小球の位置 (x, y) が領域 $x^2 + y^2 < r^2$ にあると、糸はたるんでしまう。
- 小球の位置 (x, y) が領域 $x^2 + y^2 > r^2$ にあることはない。(その領域にあるには、糸が切れるしかない)

よって、糸が張るのは、小球と原点の距離が r のとき、つまり、小球の位置 (x, y) が、 $x^2 + y^2 = r^2$ を満たす時である。

糸がたるんだ瞬間 ($\theta_b = 120^\circ$) の速度の x 成分 $v_{b,x}$ と y 成分 $v_{b,y}$ は図 4.11 より以下のようにかける。

$$v_{b,x} = -v_b \sin 30^\circ, \quad v_{b,y} = v_b \cos 30^\circ$$

糸がたるんだ瞬間を $t = 0$ とすると、小球には重力のみが働くので、

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cos 30^\circ - v_b \sin 30^\circ \cdot t \\ y(t) &= r \sin 30^\circ + v_b \cos 30^\circ \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

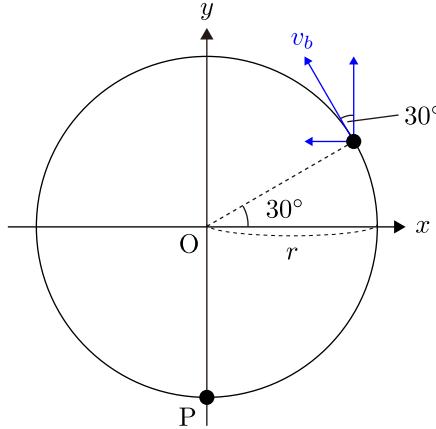


図 4.11

と書ける。これより $x^2 + y^2$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= (r \cos 30^\circ - v_b \sin 30^\circ \cdot t)^2 + \left(r \sin 30^\circ + v_b \cos 30^\circ \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \right)^2 \\
 &= r^2 \cos^2 30^\circ + v_b^2 t^2 \sin^2 30^\circ - 2rv_b \sin 30^\circ \cos 30^\circ \cdot t \\
 &\quad + r^2 \sin^2 30^\circ + v_b^2 t^2 \cos^2 30^\circ + \frac{1}{4}g^2 t^4 + 2rv_b \sin 30^\circ \cos 30^\circ \cdot t - gt^3 v_b \cos 30^\circ - gt^2 r \sin 30^\circ \\
 &= r^2 + v_b^2 t^2 + \frac{1}{4}g^2 t^4 - gt^3 v_b \cos 30^\circ - gt^2 r \sin 30^\circ
 \end{aligned}$$

この値が r^2 と等しくなる時刻 t について考える。 $v_b = \sqrt{\frac{1}{2}gr}$ を代入して整理する。

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}grt^2 + \frac{1}{4}g^2 t^4 - gt^3 \sqrt{\frac{1}{2}gr} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}grt^2 &= 0 \\
 \frac{1}{4}g^2 t^4 - \frac{\sqrt{6}gr}{4} gt^3 &= 0 \\
 \frac{1}{4}gt^3(gt - \sqrt{6}gr) &= 0
 \end{aligned}$$

以上より、小球の位置が $x^2 + y^2 = r^2$ を満たすのは、 $t = 0, \sqrt{\frac{6r}{g}}$ の時である。したがって、再び糸が張るまでに要する時間は $\sqrt{\frac{6r}{g}}$ である。このときの小球の位置は、

$$\begin{aligned}
 x\left(\sqrt{\frac{6r}{g}}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2}r - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}gr}\sqrt{\frac{6r}{g}} = 0 \\
 y\left(\sqrt{\frac{6r}{g}}\right) &= \frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{2}gr}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{6r}{g}} - \frac{1}{2}g \cdot \frac{6r}{g} = -r
 \end{aligned}$$

である。よって、再び糸が張るのは点 P (0, -r) である。

□

4.2.3 円運動の演習問題（1）の補足

前の問題10で考えた設定について、もう少し議論を深めていく。この節で記す議論は吉田弘幸先生の『はじめて学ぶ物理学[上]－学問としての高校物理』に記されている。

(3) の問題では「張力が正」という条件を考えた。このとき、速さが正という条件を考えなかった点について、議論を深めていく。張力に関する条件が重要なのは、速度を持っていても、糸がたるんでいては円軌道を描くことはないからである。ただ、本当は速さの最小値が0より大きい（運動エネルギーが0より大きい）ことと、張力の最小値が0以上であることの2つを考える必要がある。

式(4.33)と式(4.34)より、運動エネルギー K と張力 T は次のように θ の関数として表すことができる。

$$K = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgr(1 - \cos\theta) \quad (4.33)$$

$$T = \frac{mv_0^2}{r} - mg(2 - 3\cos\theta) \quad (4.34)$$

運動エネルギーや張力の符号を考えるが、その際、両者を統一的に議論するうえで役立つのが無次元化である。単位の異なるものを同じフィールドで考えることはできないので無次元化は極めて有効である。ここでは上の2つの式を次のように変形すればよい。なお、 K の方には2をかけることで振動中心を揃えた。

$$K' = \frac{2K}{mgr} = \frac{v_0^2}{gr} - 2 + 2\cos\theta \quad (4.35)$$

$$T' = \frac{T}{mg} = \frac{v_0^2}{gr} - 2 + 3\cos\theta \quad (4.36)$$

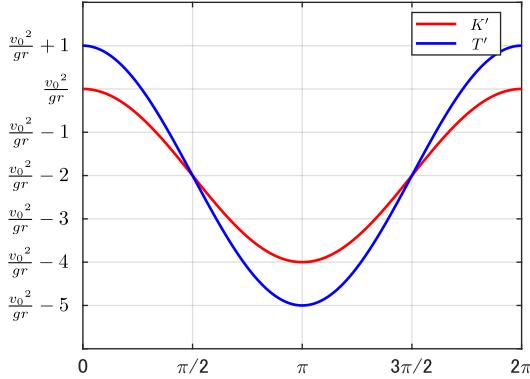


図 4.12 $K' = 2K/mgr$ と $T' = T/mg$ の θ 依存性

K' と T' を横軸を θ としてプロットすると図4.12のようになる。ここで重要なのは初速 v_0 によって、その後の運動がどう変わるかである。

- $v_0 \leq \sqrt{2gr}$ の場合

ある $\theta \leq \pi/2$ で K' が T' より先に0になる。つまり、張力より運動エネルギーが先に0になる。運動エネルギーは負になることはなく、張力は0にならないため、運動エネルギーが0になった瞬間に運動の方向を変える振り子運動が実現される。

- $\sqrt{2gr} < v_0 \leq \sqrt{5gr}$ の場合

ある $\pi/2 < \theta \leq \pi$ で T' が K' より先に0になる。つまり、張力が運動エネルギーより先に0になる。張力が負になると円運動は実現されない。張力が0になった瞬間も運動エネルギーは負にならないことから、張力が0になった瞬間から再び円 $x^2 + y^2 = r^2$ と交差するまでは放物運動をする。

- $v_0 > \sqrt{5gr}$ の場合

K' と T' は常に正であり、完全な円軌道が実現される。

続けて、吉田弘幸先生の『はじめて学ぶ物理学 [上] – 学問としての高校物理』に問題として記されている次の問題を考える。基本的には問題 10 の (5) と同じ方法であるが、一般の角度に対して計算する際は少し工夫をしないと、計算地獄に陥る上、答えが求められない可能性もある。

角度の基準を取り直して、図 4.13 のように糸がたるみ始めた位置の角度を φ とする。このとき、糸が再び張る位置の角度 ψ を求めよ。

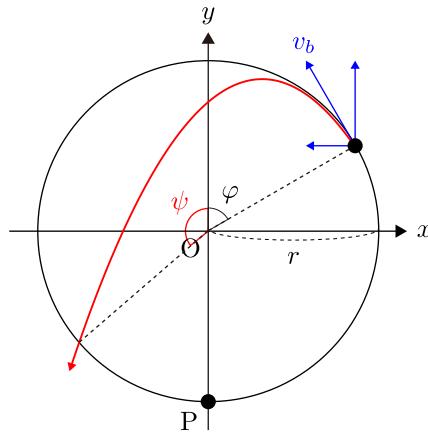


図 4.13

初速を v_0 としたとき、エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_b^2 + mgr(1 + \cos\varphi) \implies v_b = \sqrt{v_0^2 - 2gr(1 + \cos\varphi)} \quad (4.37)$$

が成立する。また、角度が φ のときの向心方向の運動方程式を考え、式 (4.37) の結果を代入すると、

$$m \frac{v_b^2}{r} = mg \cos\varphi \implies v_0^2 - gr(2 + 3\cos\varphi) = 0 \quad (4.38)$$

が成立する。式 (4.37) と式 (4.38) より、 v_b は v_0 を用いずに簡単に表すことができる。

$$v_b = \sqrt{v_0^2 - gr(2 + 3\cos\varphi) + gr\cos\varphi} = \sqrt{gr\cos\varphi} \quad (4.39)$$

図 4.13 をふまえると、糸がたるんだ瞬間を $t = 0$ としたとき、 $x(t), y(t)$ は以下のようになる。

$$x(t) = r \sin\varphi - v_b \cos\varphi \cdot t, \quad y(t) = r \cos\varphi + v_b \sin\varphi \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

これを使って、 $x^2 + y^2$ を計算すると

$$x^2 + y^2 = r^2 + v_b^2 t^2 + \frac{1}{4}g^2 t^4 - gt^3 v_b \sin\varphi - gt^2 r \cos\varphi$$

となる。これに $v_b = \sqrt{gr\cos\varphi}$ を代入して整理すると、再び糸が張るまでに要する時間は $4\sqrt{\frac{r\cos\varphi}{g}} \sin\varphi$

であることがわかる⁽¹⁰⁾。このときの小球の位置の x, y 座標は

$$(x, y) = \left(r \cos \left(\frac{\pi}{2} + 3\varphi \right), r \sin \left(\frac{\pi}{2} + 3\varphi \right) \right)$$

であり⁽¹¹⁾、 $\boxed{\psi = 3\varphi}$ である。

4.3 慣性力

朝の通勤ラッシュでは様々な理由で電車が急停車することがある。この時、前に倒れそうになり、隣にいる人にぶつかってしまうことは多々ある。また、電車がカーブに差し掛かった時は、電車が曲がる方向と反対側に体が傾くことがある。本節ではこのような現象を説明するキーワードである慣性力について説明する。そして、慣性力を利用して解けるいくつかの問題を紹介する。

ここで、非常に厄介な言葉、「慣性系」について定義しよう。慣性系について、『新・物理入門』ではこのように書かれている。

運動方程式 $ma = \mathbf{F}$ が成立する系、つまり物体に力を加えたときそれに比例した加速度の生じる座標系を慣性系と呼ぶ。

また、『理論物理への道標』と『はじめて学ぶ物理学 学問としての高校物理』では、次のように定義されている。

慣性の法則が成り立つ座標系を慣性系と呼ぶ。

慣性の法則は直感的には運動方程式と同じことしか主張していないように見える。しかし、その裏では座標系によって、加速度の見え方が変わるけれど、この宇宙には「力 \mathbf{F} が $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ の時に、加速度 \mathbf{a} が $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ となる」座標系が少なくとも 1 つは存在することを慣性の法則は主張しているということを記した。わかるようでわからないのが「慣性」という概念である。

⁽¹⁰⁾ 詳細な計算は以下のようになる。基本的には問題 10 の (5) と同じ方法である。

$$\begin{aligned} gr \cos \varphi \cdot t^2 + \frac{1}{4} g^2 t^4 - gt^3 \sqrt{gr \cos \varphi} \sin \varphi - gt^2 r \cos \varphi &= 0 \\ \frac{1}{4} g^2 t^4 - gt^3 \sqrt{gr \cos \varphi} \sin \varphi &= 0 \\ \frac{1}{4} gt^3(gt - 4\sqrt{gr \cos \varphi} \sin \varphi) &= 0 \end{aligned}$$

⁽¹¹⁾ 詳細な計算は以下のようになる。途中で三角関数の公式を利用した。

$$\begin{aligned} x &= r \sin \varphi - 4\sqrt{gr \cos \varphi} \cos \varphi \sqrt{\frac{r \cos \varphi}{g}} \sin \varphi = r \sin \varphi - 4r \sin \varphi \cos^2 \varphi \\ &= r \sin \varphi - 4r \sin \varphi (1 - \sin^2 \varphi) \\ &= r(4 \sin^3 \varphi - 3 \sin \varphi) = -r \sin 3\varphi = r \cos \left(\frac{\pi}{2} + 3\varphi \right) \\ y &= r \cos \varphi + 4\sqrt{gr \cos \varphi} \sin \varphi \sqrt{\frac{r \cos \varphi}{g}} \sin \varphi - \frac{1}{2} g \cdot \frac{16r \cos \varphi \sin^2 \varphi}{g} = r \cos \varphi + 4r \cos \varphi \sin^2 \varphi - 8r \cos \varphi \sin^2 \varphi \\ &= r \cos \varphi - 4r \cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi) \\ &= r(4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi) = r \cos 3\varphi = r \sin \left(\frac{\pi}{2} + 3\varphi \right) \end{aligned}$$

4.3.1 互いに並進運動している 2 つの座標系

物体の運動は、基準点に対する座標がどう変化したかを記述することで初めて把握できる。この際、基準点は運動の前後で不動でなければ、物体の運動を正確に把握することは困難である。そこで、私たちは通常、座標系として地面に固定した座標系で選ぶことが多い。

地上の物体の運動を考える際は、地球を不動と考えて、電車に座標系を固定することはあまりしない。それは、運動の記述が静止しているもの上に固定した静止座標系で考える方が圧倒的に楽だからである。ただ、時には電車など動いている物体に座標系を固定した方が楽な場合がある。この subsection では、電車などに座標系を固定した時は、物体の運動はどのように見えるのかを考える。

質量 m の 1 つの質点の運動を 2 つの座標系で観測する。この 2 つの座標系は互いに並進運動⁽¹²⁾している。ここで、簡単のため、一方の座標系は固定されているもので慣性系とする。固定されている方を S_0 とし、動いている方を S とする。 S は S_0 （静止系）に対して速度 $\mathbf{V}(t)$ で動いているとする。

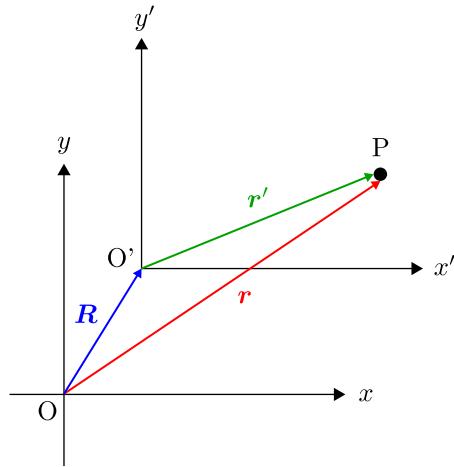


図 4.14 2 つの座標系で物体の位置を把握する

座標系 S_0 、 S で見た時の点 P の位置ベクトルは、それぞれ $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ 、 $\mathbf{r}' = \overrightarrow{O'P}$ と書ける。このとき、座標系 S_0 から見た、座標系 S の原点の位置ベクトルは $\mathbf{R} = \overrightarrow{OO'}$ と書ける。すると、図 4.14 より

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}' \quad (4.40)$$

が成り立つ。 S が S_0 に対して速度 $\mathbf{V}(t)$ で動いていることは \mathbf{R} の時間微分が \mathbf{V} であることに対応する。

式 (4.40) を時間 t で 2 回微分すると、

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \boldsymbol{\alpha} + \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} \quad (4.41)$$

となる。ただし、 $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\mathbf{V}} = d\mathbf{V}/dt$ である⁽¹³⁾。

点 P にある質点の運動方程式を考えよう。座標系が並進運動しているとき、座標軸の方向が変わらないので、座標系 S_0 と座標系 S のどちらで見ても、外力のベクトルは同じである⁽¹⁴⁾。座標系が変わると、普

⁽¹²⁾座標系の並進運動とは、 x, y, z 軸の方向が変わらず、ただ原点の位置が変化する運動のことをいう。

⁽¹³⁾ここまでは簡単な計算をしただけだが、このような計算ができたのは、「時間の流れは絶対的なもので観測者や座標系によらない」という絶対時間の概念を仮定しているからである。

⁽¹⁴⁾物体に働く力は、重力のようにどの位置でも一定のものや、距離に依存するもの（2 物体間の作用）、時間に依存するものなどがある。時間に依存するものについては、「絶対時間の仮定」より座標系 S_0 と S のどちらで見ても、力は同一である。距離に依存するものは、座標系が変わることで 2 物体の座標は変わるが、絶対的な距離自体は変わっていないので、距離に依存する力も座標系によらず同一に見える。

通、ベクトル（矢印）自体は変わらないが、その成分表示が変化する。しかし、並進運動で座標軸の方向が不变なら、ベクトルの成分表示も不变である。

(1) Galilei 変換 (ガリレイ変換)

\mathbf{V} が定ベクトルの時、 $\dot{\mathbf{V}} = \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ である。そのため、式 (4.41) は以下のように書き換えられる。

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} \quad (4.42)$$

そのため、座標系 S で観測している場合の運動方程式は、

$$m \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (4.43)$$

となる。この式は静止座標系 S_0 で観測している場合の運動方程式と同一である。

Galilei の相対性原理

Galilei 変換によって結ばれるあらゆる慣性系において物理法則は不变である。すなわち、互いに一様に並進運動している（一方が他方に対して等速度運動をしている）2つの慣性系では運動方程式は共通である。

この Galilei の相対性原理より、1つの慣性系と Galilei 変換で結ばれる無数に存在する座標系では物理法則は不变であるから、私たちは一番扱いやすい座標系を選択して議論するのが一番効率的であるといえる。そのベストな座標系が静止座標系である。

(2) 慣性力が生じる場合

\mathbf{V} が定ベクトルでない ($\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$) 時、式 (4.41) は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= m \left(\boldsymbol{\alpha} + \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} \right) = \mathbf{F} \\ \therefore m \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} &= \mathbf{F} - m\boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (4.44)$$

式 (4.44) は座標系 S で観測した時の運動方程式とみなせる。しかし、 $\mathbf{V} = \text{const.}$ の場合と異なり、右辺に $-m\boldsymbol{\alpha}$ の項がある。つまり、静止系に対し、加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ で動く座標系 S で運動を観測すると、 $-m\boldsymbol{\alpha}$ という仮想的な力が外力と一緒にかかっているように見える。この仮想的な力のことを慣性力という。マイナスがついていることからわかるように、慣性力は $\boldsymbol{\alpha}$ の向きと反対向きにかかっているように見える。

慣性力

静止系に対し、加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ で動く系の上の観測者から見ると、 $-m\boldsymbol{\alpha}$ という力（慣性力）が働いているように見える。

$$m \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\alpha} \quad (4.44)$$

駅で電車が止まろうとすると、進行方向の方に倒れそうになるのは、この慣性力を使うと説明できる。電車が止まろうとしているときは、（静止座標系から見た）電車の加速度は進行方向と反対向きなので、電車の中の乗客は、進行方向の向きに慣性力を受ける。

4.3.2 回転座標系での運動方程式

今度は慣性系に対して座標系が回転している場合について考える。4.3.2 節では物体の運動を原点のまわりに角速度 ω ($= \text{const.}$) で反時計回りに回転している回転座標系で見る。時刻 $t = 0$ のときは、元の慣性系

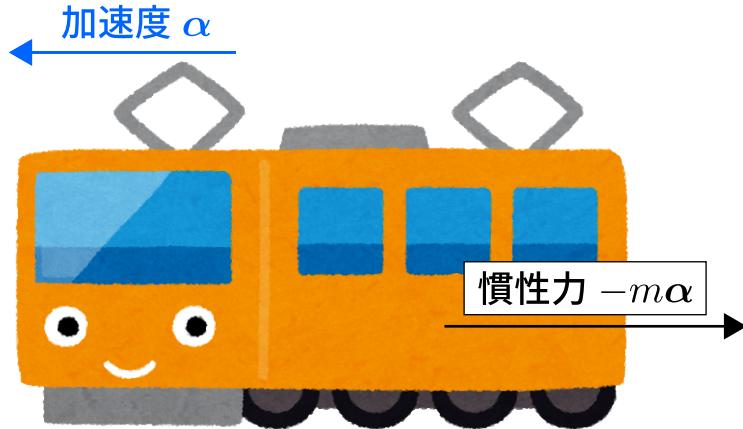


図 4.15 慣性力のイメージ。電車の画像はいらすとや (https://1.bp.blogspot.com/-9gJB5SjRmBE/W1GptxJkyuI/AAAAAAAABJpY/2MLa6mJQxKQctKpG1vTi1P9laduls3jMACLcBGAs/s800/train-character3_orange.png) よりダウンロードした。

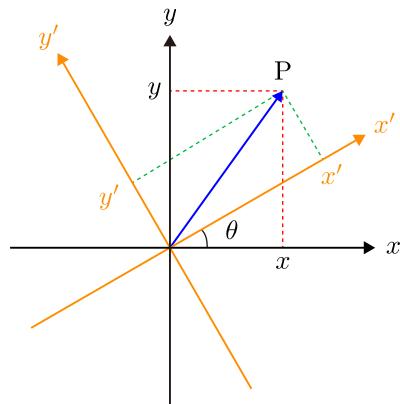


図 4.16 回転座標系のイメージ ($\theta = \omega t$)

と回転座標系が完全に一致しているとする。4.3.2 節では後述する $R(\cdot)$ を用いた議論を記す。このような議論を用いると、複雑な微分の計算を最小限に抑えることが可能である。ただ、慣れないと少々難しく感じるかもしれません、愚直に微分計算をした方が良いように思えてしまう。

4.1.2 節の式 (4.7) を適用すると、小物体を回転座標系で見たときの位置 (x', y') と静止系における位置 (x, y) の対応関係は以下のようになる。なお、 $R(\theta)$ はある点 \mathbf{r} を原点のまわりに反時計回りに θ 回転させる行列（演算子）を表す。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}}_{R(\omega t)} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \cos \omega t - y' \sin \omega t \\ x' \sin \omega t + y' \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

この式を時間 t で 1 回微分すると、以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{x}' \cos \omega t - \omega x' \sin \omega t - \dot{y}' \sin \omega t - \omega y' \cos \omega t \\ \dot{x}' \sin \omega t + \omega x' \cos \omega t + \dot{y}' \cos \omega t - \omega y' \sin \omega t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & -\cos \omega t \\ \cos \omega t & -\sin \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$= R(\omega t) \left(\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) + \dot{R}(\omega t) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

ここでは $R(\omega t)$ の各成分を t で微分したものを $\dot{R}(\omega t)$ と表した。計算するとわかるが、

$$\dot{R}(\omega t) = \omega R \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.48)$$

である。つまり、 $R(\omega t)$ を t で微分することは ω 倍して位相が $\pi/2$ 増やすことと等価である⁽¹⁵⁾。式 (4.45) と式 (4.47) を比較すると、行列とベクトルの積の微分についても、通常の積の微分の公式を適用できることがわかる。また、式 (4.46)、式 (4.47) の右辺第2項は

$$\begin{aligned} \dot{R}(\omega t) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \omega R \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \omega R(\omega t) R \left(\frac{\pi}{2} \right) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \omega R(\omega t) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \omega R(\omega t) \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.49)$$

と表すこともできる。 $R(\omega t + \pi/2) = R(\omega t)R(\pi/2)$ と分解できることは、反時計回りに $\omega t + \pi/2$ 回転させることを ωt の回転と $\pi/2$ の回転に分解できることから明らかである。

さて、もう一度時間 t で微分する。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} &= \omega R \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix} + R(\omega t) \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \end{pmatrix} + \omega^2 R(\omega t + \pi) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \omega R \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix} \\ &= R(\omega t) \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \end{pmatrix} + 2\omega R \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix} + \omega^2 R(\omega t + \pi) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.50)$$

ここで、 $R(\omega t + \pi) = -R(\omega t)$ であることは $R(\omega t)$ の各成分からすぐにわかる。 $R(\omega t + \pi/2)$ については式 (4.49) と同様の変形をすると、加速度ベクトルは次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} &= R(\omega t) \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \end{pmatrix} + 2\omega R(\omega t) \begin{pmatrix} -\dot{y}' \\ \dot{x}' \end{pmatrix} - \omega^2 R(\omega t) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= R(\omega t) \begin{pmatrix} \ddot{x}' - \omega^2 x' - 2\omega \dot{y}' \\ \ddot{y}' - \omega^2 y' + 2\omega \dot{x}' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}' - \omega^2 x' - 2\omega \dot{y}' \\ \ddot{y}' - \omega^2 y' + 2\omega \dot{x}' \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

式 (4.51) や式 (4.52) を利用して力ベクトル f を x' , y' を使って表すと以下のようなになる。

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = m \cdot R(\omega t) \begin{pmatrix} \ddot{x}' - \omega^2 x' - 2\omega \dot{y}' \\ \ddot{y}' - \omega^2 y' + 2\omega \dot{x}' \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

$$= m \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}' - \omega^2 x' - 2\omega \dot{y}' \\ \ddot{y}' - \omega^2 y' + 2\omega \dot{x}' \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

あとは f_x , f_y を変換することで、回転座標系における方程式を導くことができる。座標系が並進移動している時は座標軸の向きが変わらないので、外力ベクトルの成分表記は不变であった。しかし、回転座標系では、式 (4.9) のような変換を外力ベクトルも受ける。

$$\begin{pmatrix} f_x' \\ f_y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \cos \omega t + f_y \sin \omega t \\ -f_x \sin \omega t + f_y \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

⁽¹⁵⁾ このあたりの議論については、オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ と関連づけて議論するときっと面白いだろう。

式(4.53)～式(4.55)を使って、回転座標系における方程式を導こう。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_x' \\ f_y' \end{pmatrix} &= m \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}}_{R(-\omega t)} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}}_{R(\omega t)} \begin{pmatrix} \ddot{x}' - \omega^2 x' - 2\omega \dot{y}' \\ \ddot{y}' - \omega^2 y' + 2\omega \dot{x}' \end{pmatrix} \\ &= m \begin{pmatrix} \ddot{x}' - \omega^2 x' - 2\omega \dot{y}' \\ \ddot{y}' - \omega^2 y' + 2\omega \dot{x}' \end{pmatrix} \\ &= m \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \end{pmatrix} - m\omega^2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 2m\omega \begin{pmatrix} \dot{y}' \\ -\dot{x}' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

回転座標系から見たときの運動方程式

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_x' \\ f_y' \end{pmatrix}}_{\text{外力}} + \underbrace{m\omega^2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{\text{遠心力}} + \underbrace{2m\omega \begin{pmatrix} \dot{y}' \\ -\dot{x}' \end{pmatrix}}_{\text{コリオリカ}} \quad (4.56)$$

式(4.56)は、回転座標系から見たときの運動方程式である。回転座標系の場合、外力に加えて2つの成員が登場する。この2つの成員は回転座標系でみたときにのみ現れる仮想的な力である。右辺の第2項を**遠心力**、第3項を**コリオリカ**という。 $\mathbf{V}' = (\dot{x}', \dot{y}')$ に対して、 $(\dot{y}', -\dot{x}')$ は \mathbf{V}' に対して右向きのベクトルである⁽¹⁶⁾。式(4.56)やこのことから、遠心力とコリオリカについては以下のようにまとめることができる。

- **遠心力**：回転の中心から遠ざかる方向に働いているように見える
- **コリオリカ**：速度ベクトルに直交する方向（進行方向に対して右向き）に働いているように見える

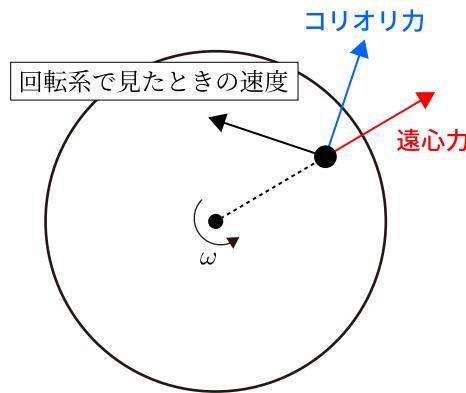


図 4.17 遠心力とコリオリカ

4.3.3 遠心力とコリオリカ

4.3.3節では遠心力やコリオリカの具体例を示す。ただ、遠心力やコリオリカは回転座標系で見たときにのみ見られる仮想的な力である。回転座標系上の観測者から運動を見たときには、この2つの力を導入しないと現象を解釈できないというだけで、実体を持たないことは注意する必要がある。

⁽¹⁶⁾一般に点 (a, b) を原点のまわりに -90° させると点 $(b, -a)$ となる。ここまで多々用いた $R(\theta)$ を使うと以下のように書ける。

$$R(-90^\circ) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

『新・物理入門』の「2-13 動く座標系」の section には遠心力に関する以下の記述がある。

座標系の回転によって純粹に数学的に生じたもの — 実体的起源をもたない見かけの力 — であることがわかる。

また、『はじめて学ぶ物理学』では遠心力について以下のように記されている。

遠心力は物体の回転ではなく、観測する座標系の回転によって現れる。物体の円運動を遠心力で説明することは概念的に本質的な誤りである。

まずは遠心力について考える。電車が発進、停止するときだけでなく、カーブを曲がろうとするとき、カーブの外側に引っ張られるように感じることがあるのは、電車にのっている観測者から見ると、遠心力が働いているからである。

これだけではつまらないでの、1998年の東大の入試問題で扱われている「無重力の宇宙空間で遠心力を利用して擬似的に重力を生み出す」というSF的な話を少し考えてみよう。

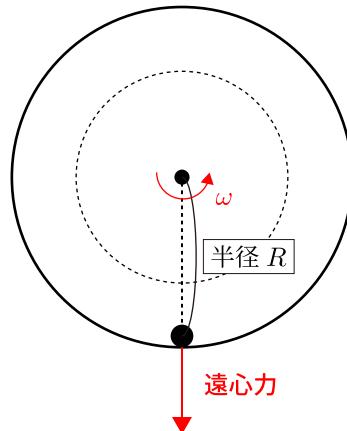


図 4.18 宇宙ステーションのモデル

宇宙ステーションでの様子を図 4.18 のような簡単なモデルで表す。実線は床を、点線が天井を表すものとする。宇宙空間では重力は働く。しかし、この宇宙ステーションが中心軸の回りに一定の角速度 ω で回転している場合、宇宙ステーション内の質量 m の物体には遠心力 $mR\omega^2$ が働く。擬似的に重力を生み出すアイデアは、この遠心力が地球上で感じる重力と等しくなるように R, ω を設計するというものである。重力加速度の大きさを g とすると、以下の関係式が成立するように設計すればよい。

$$mR\omega^2 = mg \implies \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \quad (4.57)$$

例えば、地球の自転と同じ加速度で回転させることを考えてみよう。地球の自転周期は、86164.098903691 秒であり、ここから求められる角速度は

$$\omega = \frac{2\pi}{86164.098903691} \approx 7.3 \times 10^{-5} / \text{s}$$

である。 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ を使って、式 (4.57) を満たす半径 R を求めると、 $R \approx 1.8 \times 10^6 \text{ km}$ となる。地球の半径は 6371 km よりも遥かに大きい宇宙ステーションを宇宙空間上に建設することができれば、擬似的に重力を発生させることも夢ではなくなる。しかし、そんなことは現実では不可能なのである。

今求めた R が大きすぎるというなら、回転角速度 ω を大きくすればよい。仮に頑張って $R = 10 \text{ m}$ の宇宙ステーションを建設できたとすると、 $\omega = 9.9 \times 10^{-1} / \text{s}$ とすれば、地球上と同一の重力を発生させるこ

とが理論的には可能である。ただ、この角速度の値はオーダーだけで比べると、地球の自転の 10000 倍であり、そんな速さで回転する空間上で普通に生活することは無理だろう。このようなことから、無重力の宇宙空間で遠心力をを利用して擬似的に重力を生み出すということは夢物語としかいえない。

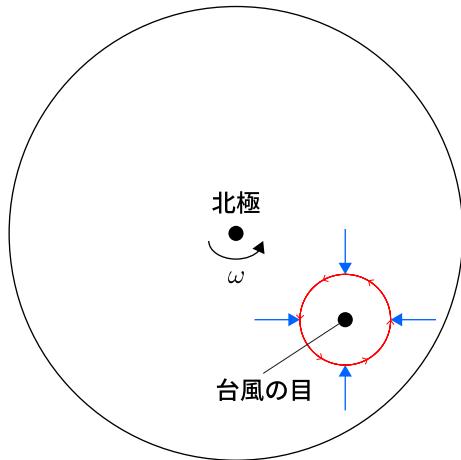


図 4.19 コリオリ力と台風の発生メカニズム

続けて、コリオリ力について考える。コリオリ力の具体例としては台風が渦を巻く現象が挙げられる。

北半球を上から見ると図 4.19 のようになる。ある気圧の低い 1 点に図 4.19 の青線のように空気が流れ込む場合を考える。地球が北極の回りに反時計回りに自転をしているため、地球上の物体にはコリオリ力が働く。このときのコリオリ力の向きは 4.3.2 節の最後に記した通り、進行方向に対して右向きであるため、赤線の方向を向く。空気はある 1 点（台風の目）に向けてあらゆる方向から流れ込むため、流れ込む空気にコリオリ力が働いて渦が生じる。

4.4 慣性力を用いた解析

4.4節では慣性力を用いて議論すると楽な問題を2つ取りあげる。最初に取り上げるのは、固定されていない斜面上での物体の運動である。この問題は束縛条件を考えれば慣性力を利用しなくとも解くことが可能である。しかし、これから見るよう慣性力を使うと圧倒的に楽である。次に取り上げるのは重心が（重力による）加速度を持って移動する場合である。このような場合、重心から見た運動は重心自身が加速度を持って運動するために、慣性力を用いた議論が可能である。

4.4.1 固定されていない斜面上の物体の運動

水平方向（左右方向）にのみ自由に動くことが可能な斜面上の物体の運動を考えよう。斜面が固定されていれば非常に簡単に解けるが、斜面が固定されていないと一気に難しくなる。図4.20のような状況を考えよう。xy座標を図4.20のようにx方向を右向きに、y方向を下向きにとる。

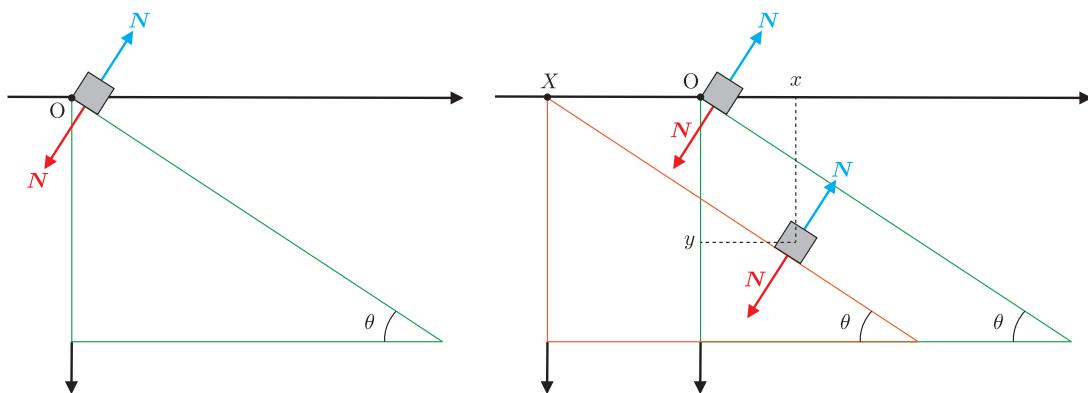


図 4.20

まず、慣性力を利用せずに問題を解く。 m, M をそれぞれ小物体と台の質量とし、 a_x, a_y を小物体のx方向、y方向の加速度、 A を台のx方向の加速度とする。運動方程式を立てると以下のようになる。

(運動方程式)

$$\begin{cases} ma_x = N \sin \theta \\ ma_y = mg - N \cos \theta \\ MA = -N \sin \theta \end{cases} \quad (4.58)$$

運動方程式(4.58)の N は小物体が台から受ける垂直抗力である。小物体が台から力を受けるということは、作用・反作用の法則より、台も小物体から力 N を受ける。式(4.58)には変数が a_x, a_y, A, N の4つなので、この連立方程式は解けない。そこで、束縛条件を考える。斜面も物体も動く場合は相対運動の視点を利用して、すなわち、どちらか一方の物体を固定して考えるのが良い。図4.20からもわかるが、斜面から見た物体の運動を考えると、

$$\tan \theta = \frac{y}{x - X} \iff y = (x - X) \tan \theta \quad (4.59)$$

が成立する。そのため、両辺を時間で2回微分することで、加速度に関する束縛条件が得られる。

$$a_y = (a_x - A) \tan \theta \quad (4.60)$$

式(4.58)の3つの式を、それぞれ a_x, a_y, A について解き、束縛条件(4.60)に代入する。

$$\begin{aligned} g - \frac{N}{m} \cos \theta &= \left(\frac{N}{m} \sin \theta + \frac{N}{M} \sin \theta \right) \tan \theta \\ \therefore g &= \frac{N}{m} \cos \theta + N \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \sin \theta \tan \theta = \dots = \frac{N}{m \cos \theta} \left(\frac{M + m \sin^2 \theta}{M} \right) \end{aligned}$$

ゆえに、垂直抗力 N は以下のようになる。

$$N = mg \cos \theta \cdot \frac{M}{M + m \sin^2 \theta} \quad (4.61)$$

すると、 a_x, a_y, A は、(4.58)を使って求められる。

$$a_x = \frac{N \sin \theta}{m} = g \sin \theta \cos \theta \cdot \frac{M}{M + m \sin^2 \theta} \quad (4.62)$$

$$a_y = g - \frac{N \cos \theta}{m} = g \left(1 - \cos^2 \theta \cdot \frac{M}{M + m \sin^2 \theta} \right) = \frac{(M + m) \sin^2 \theta}{M + m \sin^2 \theta} g \quad (4.63)$$

$$A = -\frac{N \sin \theta}{M} = -g \sin \theta \cos \theta \cdot \frac{m}{M + m \sin^2 \theta} \quad (4.64)$$

このように斜面も物体も動く場合に得られた解が妥当であるかを確認する一つの方法に、斜面が静止した場合を考えることがあげられる。ただ、ここでは斜面が静止したことと等価であるようにパラメータに具体的な値を与えるということを指す。斜面が固定されていて動かない時は $A = 0$ であることから、斜面が動かないことと式(4.64)において $M \rightarrow \infty$ は等価である。式(4.61)～式(4.63)において $M \rightarrow \infty$ の極限を考えると、以下のようなになる。

$$\lim_{M \rightarrow \infty} N = mg \cos \theta, \quad \lim_{M \rightarrow \infty} a_x = g \sin \theta \cos \theta, \quad \lim_{M \rightarrow \infty} a_y = g \sin^2 \theta \quad (4.65)$$

台が固定されているとき、垂直抗力 N が $mg \cos \theta$ となることは基本的な問題である。また、 a_x, a_y が上記のように書けることも少し考えるとすぐにわかる。このように $M \rightarrow \infty$ の極限をとった状況と比較することで検算的なことができる。

4.4.2 斜面上を物体が移動する際に斜面が移動する距離を求める

運動方程式を解いて加速度がわかったところで、図4.20の斜面の一番上から物体が斜面に沿って距離 L だけ滑り降りる間に斜面が移動する距離を求ることを考えよう。この L は斜面上の観測者から見た物体の移動距離であるから相対運動を考えればよい。

斜面上の観測者から見た物体の加速度の x 成分 a_x' は

$$a_x' = a_x - A = g \sin \theta \cos \theta \cdot \frac{M + m}{M + m \sin^2 \theta} \quad (4.66)$$

である。 y 成分は y 方向に斜面は動かないので式(4.63)と同一である。

$$a_y' = a_y = g \sin^2 \theta \cdot \frac{M + m}{M + m \sin^2 \theta} \quad (4.67)$$

よって、斜面上の観測者から見た（物体の）斜面方向の加速度は

$$a' = \sqrt{(a_x')^2 + (a_y')^2} = g \sin \theta \cdot \frac{M + m}{M + m \sin^2 \theta} \quad (4.68)$$

である。そのため、等加速度運動の公式から距離 L 移動するのに要する時間は

$$t_0 = \sqrt{\frac{2L}{a'}} = \sqrt{\frac{2L}{g \sin \theta} \cdot \frac{M + m \sin^2 \theta}{M + m}} \quad (4.69)$$

となる。このようにして物体が斜面に沿って移動する距離 L がわかれば、斜面の（水平方向の）加速度 A がわかっているので、斜面の移動する距離 d は以下のように求められる⁽¹⁷⁾。

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2}|A|t_0^2 = \frac{1}{2}g \sin \theta \cos \theta \cdot \frac{m}{M + m \sin^2 \theta} \cdot \frac{2L}{g \sin \theta} \cdot \frac{M + m \sin^2 \theta}{M + m} \\ &= \frac{m}{M + m} L \cos \theta \end{aligned} \quad (4.70)$$

4.4.3 慣性力を用いて再度考える

斜面が動くことが可能な問題では、斜面とそれに垂直な方向に取った座標系は並進運動をする。このような問題では見かけの力である慣性力を導入して議論した方が楽であることが知られている。

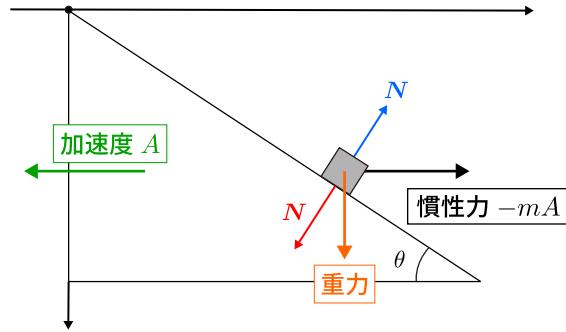


図 4.21 台上の観測者から見たとき小球に働くている力

台には赤線のように垂直抗力が働くため、静止系で物体の運動を観察したとき、台は左向きの加速度を持つ。そのため、台の上にいる観測者から運動をみると、垂直抗力や重力の他に、図 4.21 のように右向きに慣性力が働いているように見える。静止系から見た時の台の（水平方向の）加速度の大きさ $|A|$ は以下のようになる。

$$MA = -N \sin \theta \implies |A| = \frac{N \sin \theta}{M} \quad (4.71)$$

すると、斜面上の観測者から見た小物体の斜面に垂直な方向と平行な方向の運動方程式は、慣性力の効果も加わって以下のようになる。なお、 α を斜面を滑り降りる方向を正とする加速度とする。

$$\begin{cases} 0 = N + \underbrace{m|A| \sin \theta}_{\text{(斜面に垂直な方向)}} - mg \cos \theta & (\text{斜面に垂直な方向}) \\ m\alpha = mg \sin \theta + \underbrace{m|A| \cos \theta}_{\text{(斜面に平行な方向)}} & (\text{斜面に平行な方向}) \end{cases} \quad (4.72)$$

これに、 $|A|$ の値を代入することで、垂直抗力 N は容易に求められる。

$$N \left(1 + \frac{m \sin^2 \theta}{M} \right) = mg \cos \theta \implies N = mg \cos \theta \cdot \frac{M}{M + m \sin^2 \theta}$$

(17) このタイプの問題は $ma_x + MA = 0$ 、すなわち $\frac{d}{dt}(mv_x + MV) = 0$ であるため、 x 方向の運動量が保存されることと、初期時刻では斜面も物体も動かないことから重心が不動である。図 4.20 をもとに考えると、斜面と物体の x 方向の移動距離の総和が $L \cos \theta$ となる。重心が不動であることから、斜面と物体の移動距離を $\Delta X, \Delta x$ とすると、 $M\Delta X = m\Delta x$ となる。従って、

$$\Delta X = \frac{m}{M+m} L \cos \theta$$

と求めることができる。

このように N が簡単に求められると、 a_x, a_y も簡単に計算できる。そして、4.4.2 節で考えた問題も楽に解ける。式 (4.72) の α は以下のように求められる。

$$\alpha = g \sin \theta + |A| \cos \theta = g \sin \theta + \frac{N \sin \theta \cos \theta}{M} = \dots = g \sin \theta \cdot \frac{M + m}{M + m \sin^2 \theta}$$

4.4.4 円運動の演習問題 (2)

次に、もう 1 題円運動に関する問題を考えよう。題材は 2015 年の東大の物理の問題である。3.4 節では重心が常に静止、あるいは等速度運動をしている場合を考えていた。しかし、この問題では重心が加速度を持って移動しているため、重心系は非慣性系となり、重心系で議論する際は慣性力を考慮しないといけない。

問題 11

質量 m の小球 A、B が長さ l のひもの両端につながれている。図 4.22 のように水平な天井に小球 A、B を l だけ離して固定した。小球 B を固定した点を O とし、重力加速度の大きさを g とする。小球 A、B の大きさ、ひもの質量、および空気抵抗は無視できるものとする。

1 小球 B を固定したまま小球 A を静かに放した。

- (1) ひもと天井がなす角度を θ とする。小球 A の速さを θ を用いて表せ。ただし、 $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ とする。
- (2) 小球 A が最下点 ($\theta = 90^\circ$) に達したときのひもの張力の大きさを求めよ。
- (3) 小球 A が最下点 ($\theta = 90^\circ$) に達したときの小球 A の加速度の大きさと向きを求めよ。

2 小球 A が初めて最下点 ($\theta = 90^\circ$) に達したときに小球 B を静かに放した。この時刻を $t = 0$ とする。

- (1) 2 個の小球の重心を G とする。小球 B を放した後の重心 G の加速度の大きさを求めよ。
- (2) 時刻 $t = 0$ における、重心 G に対する小球 A,B の相対速度の大きさと向きを求めよ。
- (3) 時刻 $t = 0$ における、ひもの張力の大きさを求めよ。
- (4) 時刻 $t = 0$ における、小球 A,B の加速度の大きさと向きを求めよ。
- (5) 小球 B を放してから、初めて小球 A と小球 B の高さが等しくなる時間を求めよ。
- (6) 小球 B を放した後の時刻 t における小球 A の水平位置を求めよ、ただし、点 O を原点とし、右向きを正とする。

1

- (1) 位置エネルギーの基準を $\theta = 0$ の時の高さ、速さを v とし、エネルギー保存則の式を立てる。

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgl \sin \theta \implies v = \sqrt{2gl \sin \theta}$$

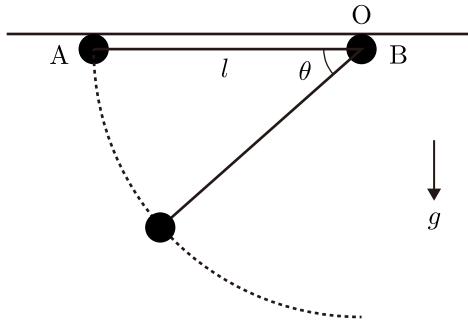


図 4.22

(2) 張力を T として、運動方程式（向心方向）を立てる⁽¹⁸⁾。

$$m \frac{v^2}{l} = T - mg \sin \theta$$

(1) より最下点では $v = \sqrt{2gl}$ なので、最下点での張力 T は以下のようになる。

$$T = m \frac{2gl}{l} + mg = 3mg$$

(3) $\theta = 90^\circ$ のとき、接線方向（水平方向）には一切力が働くかない（重力の接線方向が 0）。向心方向（鉛直方向）には大きさ $v^2/l = 2g$ の加速度が上向きに働く。

2

(1) 重心の加速度を a_G とすると、A と B の質量は等しいので、

$$a_G = \frac{\mathbf{a}_A + \mathbf{a}_B}{2} \quad (4.73)$$

が成立する。小球 B を放した瞬間、両物体に水平方向に力は働くないので、両物体の鉛直方向の運動方程式から加速度を求めて、式 (4.73) より重心 G の加速度を求めればよい。鉛直上向きを正、張力を T' とする⁽¹⁹⁾と、運動方程式は以下のようになる。

$$ma_A = T' - mg \quad (4.74)$$

$$ma_B = -T' - mg \quad (4.75)$$

これより、 $a_A + a_B = -2mg$ なので、重心 G の加速度 $a_G = -g$ である。つまり、小球 B を放した直後の重心 G には鉛直下向きに大きさ g の加速度が働く。

(2) 式 (4.73) と同様に、重心の速度を v_G とすると、

$$\mathbf{v}_G = \frac{\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B}{2} \quad (4.76)$$

である。 $t = 0$ のとき B は静止していたが、A は右向きに $\sqrt{2gl}$ の速度を持っていたので、 $t = 0$ における重心の速度は水平方向で、水平右向きを正とすると、

$$v_G = \frac{\sqrt{2gl}}{2} \quad (4.77)$$

⁽¹⁸⁾ 接線方向の運動方程式は $m \frac{dv}{dt} = mg \cos \theta$ である。両辺に $v = l \frac{d\theta}{dt}$ をかけて変形すると、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = \frac{d}{dt} (mgl \sin \theta) \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 - mgl \sin \theta \right) = 0$$

となり、これは $\frac{1}{2} mv^2 - mgl \sin \theta = \text{const.}$ というエネルギー保存則を与える。

⁽¹⁹⁾ この後の (3) で詳しく議論するが、B を放した瞬間の張力は上で求めた $3mg$ とは異なる。

である。よって、求める相対速度を v_a, v_b とすると、以下のようになる。

$$v_a = \sqrt{2gl} - v_G = \frac{1}{2}\sqrt{2gl}, \quad v_b = 0 - v_G = -\frac{1}{2}\sqrt{2gl}$$

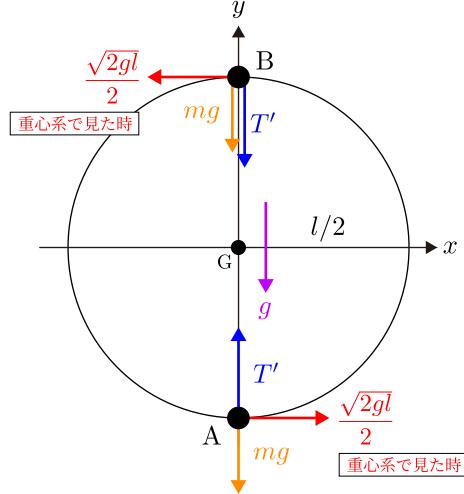


図 4.23

- (3) 重心系で見る前に静止系で見たときに働く力を図示する（図 4.23）。重心には下向きに大きさ g の加速度が働いているため、重心系で運動を観察した際は上向きに慣性力 mg が働く。そのため、重心系で見ることを考えた場合は、下向きの重力 mg と上向きの慣性力 mg が相殺される。すると、重心系で見たときは両物体には張力 T' だけが働いているように見える。

重心系で見たときは、重心 G に糸が固定されていて、糸の長さが $l/2$ 、初速度が右向きに大きさ $\sqrt{2gl}/2$ の状況で円運動を開始するように見える。よって、 $t = 0$ での重心系における中心方向の運動方程式は以下のようになる。

$$m \frac{(\sqrt{2gl}/2)^2}{l/2} = T' \implies T' = mg$$

- (4) $T' = mg$ であることがわかれば、図 4.23 より答えは明らかである。

A の加速度は 0、B の加速度は鉛直下向きに大きさ $2g$ である。

- (5) 小球 A と小球 B の位置を時間 t の関数として表すことを考える。

重力は常に下向きに大きさ mg で、慣性力は常に上向きに大きさ mg である⁽²⁰⁾。そのため、重心系で見ると、A と B には中心方向の張力しか働いていないように見える。重心系で見ると、接線方向に力が働いていないように見えるため、重心系で見たときの接線方向の方程式を考えると、 $\dot{v}_a(t) = \dot{v}_b(t) = 0$ となる。そのため、重心系では A と B が等速円運動をしているように見える。

よって、等速円運動の角速度を ω とすると、重心から見た A と B の座標は、

$$\overrightarrow{GA} = \left(\frac{l}{2} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right), \frac{l}{2} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right) = \left(\frac{l}{2} \sin \omega t, -\frac{l}{2} \cos \omega t \right) \quad (4.78)$$

$$\overrightarrow{GB} = \left(\frac{l}{2} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right), \frac{l}{2} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right) = \left(-\frac{l}{2} \sin \omega t, \frac{l}{2} \cos \omega t \right) \quad (4.79)$$

⁽²⁰⁾ 図 4.23 から、一般的な時刻 t での運動方程式は以下のようになる。

$$ma_A = T' + mg$$

$$ma_B = -T' + mg$$

張力の向きは重心に関して対称であることは任意の時刻で成立する。また、重力 \mathbf{g} は任意の時刻、位置で $\mathbf{g} = (0, -g)$ である。そのため、任意の時刻で重心加速度は $\mathbf{a}_G = \mathbf{g} = (0, -g)$ である。

となる。これらに \overrightarrow{OG} を足すことで、静止系での座標が求められる。そのため、重心 G から見た A と B の y 座標が同じになれば良い。その条件は、

$$-\frac{l}{2} \cos \omega t = \frac{l}{2} \cos \omega t \implies \cos \omega t = 0$$

である。円運動の速度は $v = r\omega$ (r は円運動の半径) なので、次の式が成立する。

$$\frac{1}{2} \sqrt{2gl} = \frac{l}{2} \omega \implies \omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

よって、 $\cos \omega t = \cos \left(\sqrt{\frac{2g}{l}} t \right) = 0$ が成立すればよい。これを満たす最小の t は、 $t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{2g}}$ である。

(6) 任意の時刻での重心加速度は $\mathbf{a}_G = (0, -g) = \text{const.}$ である。 $t = 0$ での重心速度は

$$\mathbf{v}_G(0) = \left(\frac{1}{2} \sqrt{2gl}, 0 \right)$$

なので、 \overrightarrow{OG} は以下のようになる。

$$\overrightarrow{OG} = \left(\frac{1}{2} \sqrt{2gl} \cdot t, -\frac{1}{2} gt^2 \right)$$

これに \overrightarrow{GA} を足すことで、点 A の時刻 t での位置が求められる。

$$\overrightarrow{OA} = \left(\frac{1}{2} \sqrt{2gl} \cdot t + \frac{l}{2} \sin \omega t, -\frac{1}{2} gt^2 - \frac{l}{2} \cos \omega t \right)$$

小球 A と小球 B の位置の時間変化を図示すると、図 4.24 のようになる。図 4.25 に 2 つの小球の位置の x 座標がどのように増加するかを示す。

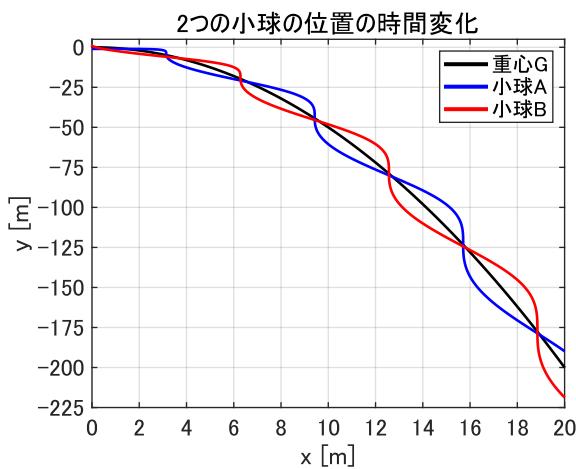


図 4.24

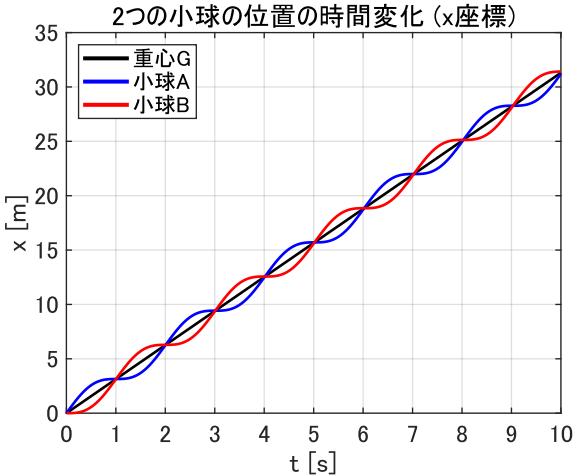


図 4.25

第 5 章 单振動

この世界ではたくさんの振動現象が起きている。この章では、振動現象の中で最も単純な振動である单振動について考える。单振動は最も単純であるが、極めて考察する価値が高い。その理由は主に2つある。1つ目は、複雑な振動は Fourier 級数展開や Fourier 変換という数学的技法により、理想化された単純な振動の重ね合わせでみなすことができるからである。2つ目は、ある点の近傍だけで考えた場合は单振動とみなすことができる場合が多いからである。この章では以下に記す单振動の基本的な内容とそれに関連する内容を見ていく。ほとんどで高校物理の教科書のレベルを逸脱するだろうが、本文や付録で丁寧に解説を記したので、読者の皆さんにはぜひついてきて欲しい。

1. 質点の位置 $x(t)$ が単純な \sin 関数であるとき、この質点がどのような運動方程式に従うかを考える。
2. 逆に、質点に働く力が位置 x のみに依存して $-kx$ と書ける時に、位置 x が三角関数で書けることを調べる。
3. 单振動の簡単な応用例として、鉛直につるしたばねにつながれた物体の運動と单振り子について考える。
4. 单振動の応用編として、「ばねでつながれた2物体の運動」や「連成振動」を取り扱う。
5. 安定な平衡点、平衡点周りの振動といった高校物理の教科書では絶対に出ないけど、入試ではまれに丁寧な誘導付きで出てくる話を考える。
6. 電磁気分野の「交流」で登場する減衰振動と強制振動の予習をする。

5.1 ばねに繋がれた物体の運動方程式



図 5.1 ばねにつながれた物体

ばねに物体をつなぎ、手でばねを伸ばして静かにはなすと、物体は往復運動を始める。この往復運動の軌跡は \sin 関数で書くことができる。さて、質点の位置が

$$x(t) = x_0 + A \sin(\omega t + \phi) \quad (5.1)$$

と書かれるとき、質点はどのような運動方程式に従うのか考える。式 (5.1) で位置変化が表される運動を**单振動**という。

5.1.1 单振動の基本的なパラメータ

位置 $x(t)$ が $x(t) = x_0 + A \sin(\omega t + \phi)$ と表されるとする。 $x(t)$ の時間変化のグラフは図 5.2 のようになる。このように書いたとき、パラメータ A, ω は $A > 0, \omega > 0$ の範囲だけ考えるものとする。

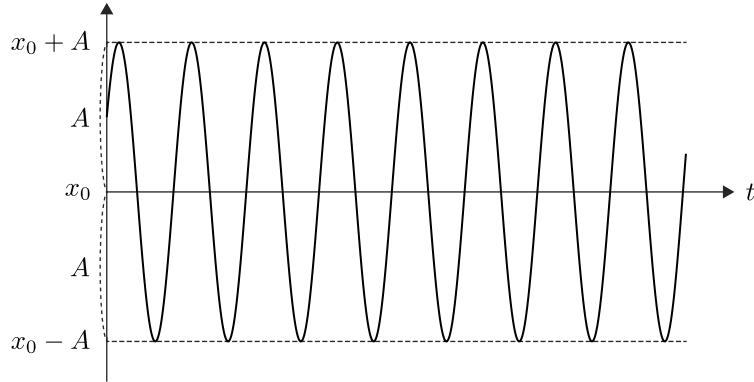


図 5.2

$x(t)$ に含まれる 4 つのパラメータのうち、 x_0 は $x(t)$ の範囲 $x_0 - A \leq x(t) \leq x_0 + A$ の中心の値であり、**振動の中心**という。 A は振動の中心からの変位の大きさの最大値を表すパラメータで**振幅 (amplitude)** という。 \sin の変数 $\omega t + \phi$ は数学の教科書にも書かれている通り**位相 (phase)** という。位相の項に出てくる ω は位相の変化速度を表すパラメータで**角周波数** という。また、 ϕ は $t = 0$ のときの位相であり**初期位相**と呼ばれる。

单振動のような周期的な運動では $x(t+T) = x(t)$ (t は任意) を満たす T が重要である。つまり、

$$x_0 + A \sin(\omega(t+T) + \delta) = x_0 + A \sin(\omega t + \delta) \quad (5.2)$$

を満たす T が重要である。特に、式 (5.2) を満たす最小の T を**振動の周期**という。 T は式 (5.2) より $\omega T = 2\pi$ を満たすので、周期 T は次の式で与えられる。

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5.3)$$

単位時間あたりの振動の回数 f も周期運動の解析では重要な値となる。1 回の振動に要する時間は T なので、 f は

$$fT = 1 \iff f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (5.4)$$

を満たす。この f のことを**振動数**という。なお、この式から角周波数 ω と振動数 f の間には

$$\omega = 2\pi f \quad (5.5)$$

の関係があることがわかる。

5.1.2 ばねに繋がれた物体の運動方程式の導出

一般的に、運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F \quad (5.6)$$

と書かれる。これまでには、右辺の F がわかっている時に、 x を求めるための式が運動方程式だと考えていた。つまり、**右辺から左辺の方向だけ**を考えていた。しかし、等式なので逆方向、**左辺から右辺の方向**を考えても、何も問題はない。言い換えると、 $x(t)$ がわかっているのなら、式 (5.6) の左辺に代入することで、時刻 t で物体に働く力 $F(t)$ がわかるということも、運動方程式は表しているのである。

$$\frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \phi) \quad (5.7)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) \quad (5.8)$$

よって、時刻 t で物体に働く力 $F(t)$ は以下のように書ける。

$$F(t) = -m\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) = -m\omega^2(x(t) - x_0) \quad (5.9)$$

式 (5.9) の位置の次元を持つ項 $x - x_0$ にかかる定数 $m\omega^2$ はばねに繋がれた物体の運動の場合は**ばね定数**とよばれ、よく k で表される。ばね定数 k 、質量 m 、角周波数 ω の 3 つは次の式で結びついている。

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.10)$$

これより、振動の周期 T は以下のようにまとめることができる。

ばねに繋がれた物体の振動周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (5.11)$$

さて、振動の中心 x_0 はどのような位置であるのか。図 5.1 のようなばねに繋がれた物体の運動の場合、振動中心 $x = x_0$ の点は物体に働く力が 0 となる点である。このような点はばねが全く伸び縮みしていない点である。

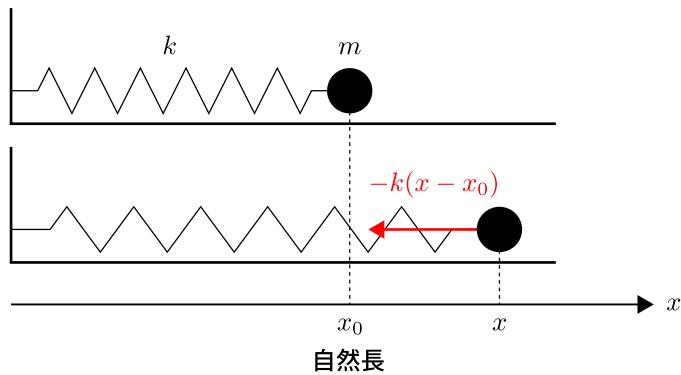


図 5.3

ここで図 5.3 のように座標系を導入する。 $x = x_0$ は物体に働く力が 0 になる平衡点である。位置 x が $x > x_0$ の領域にあるときは、ばねに繋がれた物体は平衡点 $x = x_0$ に戻ろうとして、左側に動こうとする。逆に、位置 x が $x < x_0$ の時、ばねに繋がれた物体は $x = x_0$ に戻ろうとして、右側に動こうとする。このことに対応して、物体に働くばねによる力の正負と $x - x_0$ の正負は式 (5.9) のように逆になっている。

ばねに繋がれた物体に働く力（復元力）

$x = x_0$ を自然長の位置（ばねが伸び縮みしていない位置）とする。図 5.3 のように x 軸を定めると、ばねに繋がれた物体に働く力は、ばね定数を k として、以下のように表される。

$$F = -k(x - x_0) = -m\omega^2(x - x_0) \quad (5.12)$$

5.2 質点の位置が三角関数で表される理由

今度は、物体に働く力が $-k(x - x_0)$ であることを既知として、位置 $x(t)$ が三角関数で表されることを考える。この section では 2 つの方法を示す。

- エネルギー保存則の式を v - x 平面における橙円の方程式と見て⁽¹⁾、導出する。
- エネルギー保存則の式を $x(t)$ に関する微分方程式とみて、微分方程式を解く。

5.2.1 エネルギー保存則の導出

質点の速度を v とすると、ばねに繋がれた物体の運動方程式は以下のように書ける。

$$m \frac{dv}{dt} = -k(x - x_0) \quad (5.13)$$

x_0 は定数なので、 $x - x_0$ の時間微分は v となる。よって、両辺に $v = \frac{dx}{dt}(x - x_0)$ をかけると、エネルギー保存則が導ける。左辺に v を、右辺に $\frac{d}{dt}(x - x_0)$ をかけるとうまく変形できる。

$$\begin{aligned} mv \frac{dv}{dt} &= -k(x - x_0) \frac{d}{dt}(x - x_0) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \right) \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \right) &= 0 \end{aligned}$$

エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = E = \text{const.} \quad (5.14)$$

式 (5.14) より、 $\frac{1}{2}k(x - x_0)^2$ という項は運動エネルギーと同じ次元の量である。バネ定数 k や自然長からの変位 $x - x_0$ などで記述されていることから、この量はばねが持つエネルギーを表すと考えられる。

ばねの弾性エネルギー

$x = x_0$ をばねの自然長の位置とする。ばねに働く復元力が $F = -k(x - x_0)$ と書けるとき、ばねが持つエネルギー（ばねの弾性エネルギー）は、

$$U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \quad (5.15)$$

と表される。この弾性エネルギーは、ばねが伸び縮みしている時に、自然長に戻ろうとする復元力からきている。

式 (5.14) を変形すると、

$$\frac{1}{2}mv^2 = E - \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \quad (5.16)$$

⁽¹⁾ v - x 平面で考えるかわりに、大学で習う物理学では運動量 $p = mv$ と位置 x を用いた p - x 平面を考えることが多い。これを相空間という。速度のかわりに運動量を用いるという考え方には、量子力学などでは当たり前の考え方である。

となる。運動エネルギーは任意の時間で非負であることから、 $x(t)$ は

$$E \geq \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \quad (5.17)$$

を満たす必要がある。 E は初期時刻 $t = 0$ における力学的エネルギーを表すので、ばねの弾性エネルギーが初期時刻での力学的エネルギーを超えない範囲と記すことができる。

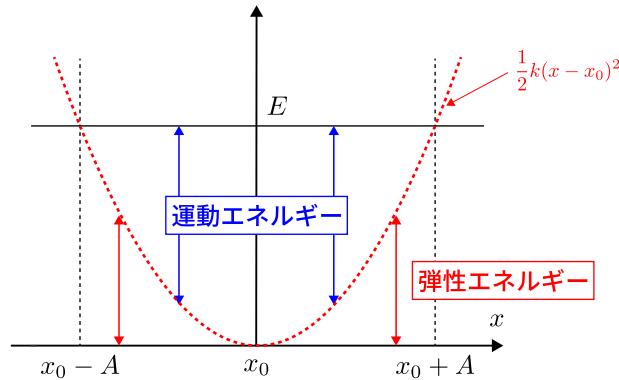


図 5.4

ばねの弾性エネルギー $U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$ は位置に依存して、その x での微分にマイナスをつけたものが、物体に働く力（弾性力）となる。

$$-\frac{dU(x)}{dx} = -k(x - x_0) = F(x) \quad (5.18)$$

そのため、弾性力は 2 章で記した保存力の一種であり、ばねの弾性エネルギーは位置エネルギーとして解釈できる。式 (5.18) と図 5.4 より、弾性力の働く向きは $U(x)$ のグラフの極小点（谷）に向かう方向であることがわかる。

5.2.2 エネルギー保存則を橙円の方程式と見る

5.2.1 節では、ばねの弾性エネルギーの式を導出し、弾性エネルギーのグラフからすぐにわかるることを紹介した。ここからはエネルギー保存則の式から单振動をする物体の位置が三角関数でかけることを示していく。式 (5.14) の右辺が 1 になるように、両辺を E で割って整理すると、

$$\frac{v^2}{\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}\right)^2} + \frac{(x - x_0)^2}{\left(\sqrt{\frac{2E}{k}}\right)^2} = 1 \quad (5.19)$$

となり、これは v - x 平面における橙円の方程式である。そのため、 v と x はパラメーター θ を用いると、次のようになる。

$$x - x_0 = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \theta \quad (5.20)$$

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} \cos \theta \quad (5.21)$$

ここで、 $v = \frac{dx}{dt}$ なので、式 (5.20) を時間 t で微分すると、以下のようになる。 $(\theta$ も時間に依存することに注意)

$$v = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (5.22)$$

式(5.21)と式(5.22)を比較することで、

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

となり、これを積分することで、 $\theta = \sqrt{\frac{k}{m}}t + \delta$ (δ は積分定数) となる。これを式(5.20)に代入すると、

$$x - x_0 = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \delta\right) \quad (5.23)$$

となる。よって、 $A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおくと、 $x = x_0 + A \sin(\omega t + \delta)$ となり、式(5.13)で表される運動方程式に従う質点の位置は三角関数で表されることがわかった。

ちなみに、相空間(v - x 平面)で单振動を見てみると、 v と x のパラメーター表示が式(5.20)や式(5.21)のように書けるので、図5.5のようになる。 v, x を成分に持つ点 (v, x) は図5.5の楕円上を反時計回りに動く。

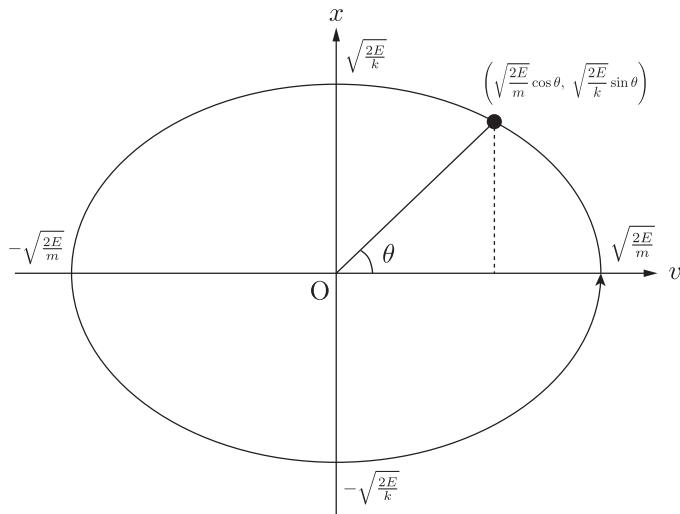


図5.5 相空間上で单振動を見る ($x_0 = 0$ の場合)

5.2.3 エネルギー保存則の式を積分する

$k = m\omega^2$ とおく。速度 v は位置 x の時間微分であるから、エネルギー保存則は次のように書くことができる。

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(x - x_0)^2 = E \quad (5.24)$$

$x - x_0$ の時間微分は $v = dx/dt$ に等しいことから、 $z = x - x_0$ が従う方程式は以下のようになる。

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2z^2 = E \quad (5.25)$$

この式(5.25)を変形すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 &= \frac{2E}{m} - \omega^2 z^2 \\ \therefore \frac{dz}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2 z^2} = \pm \omega \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - z^2} = \pm \omega \sqrt{\frac{2E}{k} - z^2} \end{aligned}$$

ここで $A^2 = \frac{2E}{k}$ とおくと、微分方程式は少し簡単になる。

$$\frac{dz}{dt} = \pm \omega \sqrt{A^2 - z^2}$$

- 変数分離

$$\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - z^2}} dz = \pm \omega \int dt$$

- 左辺を $z = A \sin \theta$ で置換して計算すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \int \frac{A \cos \theta}{|A \cos \theta|} d\theta &= \pm \omega \int dt \\ \int d\theta &= \pm \omega \int dt \\ \therefore \theta &= \pm \omega t + c \end{aligned}$$

そのため、 $z = A \sin(\pm \omega t + c)$ となる。ただ、これは、 A, c をうまくとることで、 $z = A \sin(\omega t + c)$ 、すなわち $x = x_0 + A \sin(\omega t + c)$ の形で統一できる。

5.3 単振動の具体例（基礎）

5.3.1 鉛直ばね振り子

5.3.1 節では、ばねを鉛直方向に取り付けて物体を吊るした場合を考える⁽²⁾。鉛直方向に x 軸（下向きを正）をとる。なお、O を自然長の位置、 x_0 をつりあいの位置とする（ここでは 5.1 節や 5.2 節と違い、 x_0 は自然長の位置ではない）。物体には、上方向に弾性力、下方向に重力が働く。すると、運動方程式は、

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + mg = -k \left(x - \frac{mg}{k} \right) \quad (5.26)$$

となる。釣り合いの位置 x_0 では $\ddot{x} = 0$ が成立するので、

$$x_0 = \frac{mg}{k}$$

であることがわかる。

5.1 節や 5.2 節に記したことから、運動方程式 (5.26) の解は

$$x(t) = \frac{mg}{k} + A \sin(\omega t + \delta) = x_0 + A \sin(\omega t + \delta) \quad (5.27)$$

である。ここで、 ω は $k = m\omega^2$ を満たす。また、パラメータ A, δ は初期位置 $x(0)$ や初速度 $\dot{x}(0)$ により決まる。

式 (5.27) より釣り合いの点を中心に単振動することがわかる。鉛直にばねが吊るされているときは、重力の影響を受けて、振動中心は少し下方にずれて、自然長の位置ではないことがわかる。

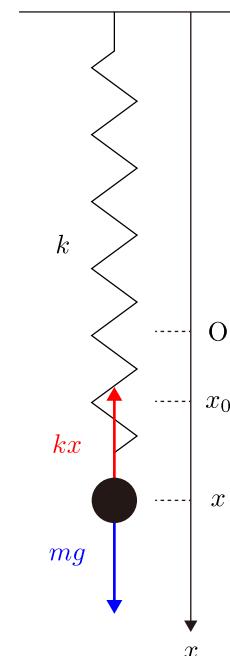


図 5.6 鉛直ばね振り子

(2) 「鉛直ばね振り子」の問題では、たいてい鉛直下向きを正として座標系をとることが多い。これは 1.7 節（26 ページ～）と同じで、鉛直上向きを正にしても良いが、下向きを正にした方が楽であることがわかっているためである。ここでも暗黙の前提として、鉛直ばね振り子の場合は、鉛直下向きを正の向きとする。

次に、この系でのエネルギー保存則を考える。運動方程式(5.26)の両辺に、 $v = \frac{dx}{dt}$ をかける。

$$\begin{aligned} mv \frac{dv}{dt} &= -kx \frac{dx}{dt} + mg \frac{dx}{dt} \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2}kx^2 \right) + \frac{d}{dt}(mgx) \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

鉛直ばね振り子のエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx = E (= \text{const.}) \quad (5.29)$$

この式より、ばねの弾性エネルギーは、自然長からの伸び縮みに依存するのであって、振動中心（釣り合いの位置）からの変位に依存するのではないことがわかる。このことが、ばねの弾性エネルギーの重要な性質である。

最後に「**单振動の位置エネルギー**」と呼ばれる量を考える。式(5.29)で表されるエネルギー保存則の式を変形しよう。 x について平方完成する。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k \left(x - \frac{mg}{k} \right)^2 &= E + \frac{(mg)^2}{2k} (= \text{const.}) \\ \therefore \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 &= E + \frac{1}{2}kx_0^2 (= \text{const.}) \end{aligned}$$

そのため、 $X = x - x_0$ と変数変換すると、以下のようなになる。

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kX^2 = \text{const.} \quad (5.30)$$

式(5.30)に出てくる $\frac{1}{2}kX^2$ は、ばねの弾性エネルギー $\frac{1}{2}kx^2$ によく似た形をしている。これも「ジュール(J)」の単位を持つ量である。この $\frac{1}{2}kX^2$ は「**单振動の位置エネルギー**」と言われる。

この单振動の位置エネルギーは、 $X = x - \frac{mg}{k}$ と、 X が重力の情報を含んでいるので、式(5.30)の関係式では、重力の位置エネルギーの効果が見えないようになっていると考えても良いだろう。「单振動の位置エネルギー」を利用するときは、 X が振動中心からの距離であることと、重力の位置エネルギーの項が見えないことに注意する必要がある。

5.3.2 鉛直ばね振り子：演習問題

5.3.2 節では鉛直ばね振り子に関する演習問題を取り上げて、ばねが絡んでくる系に関する問題の取り扱いを説明する。扱う問題は『難問題の系統とその解き方 物理』(新装第2版)の例題12である(一部変更している)。実際の問題では以下に記す問題の M が $2m$ となっていて、 L が $3l$ となっている。

問題 12

図5.7に示すように、鉛直方向に伸縮するばねの上端に質量 m の皿をつけたばねばかりが、床に固定されている。このばねばかりの皿に質量 M の物体をのせると、物体と皿は共に l だけ下がってつり合った。さらに、手で物体と皿をわずかに下げてから手を離すと、物体と皿は一体となって鉛直方向に沿って振動した。以下、重力加速度の大きさを g とし、ばねの質量、および空気の影響は無視できるものとする。

- (1) ばねばかりのばね定数を求めよ。
 - (2) 振動の周期を求めよ。
 - (3) 物体が皿から離れないようにするには、振動の振幅をある値以下にする必要がある。その値を求めよ。
- 次に、物体と皿をつり合いの位置から鉛直下方に $L(\geq l)$ だけ下げた後、静かに手を離すと、上昇の途中で物体は皿から離れた。
- (4) 物体が皿から離れる時の速さを求めよ。
 - (5) 皿から物体が離れた後、再び皿上に落下するまでの間、皿の振動の振幅はいくらか。

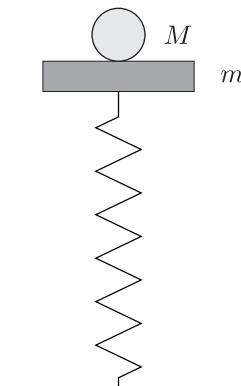


図 5.7

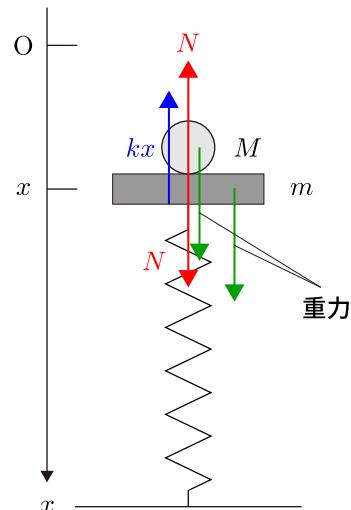


図 5.8

解答

図5.8のように鉛直下向きを正として x 軸をとる。なお、原点Oはばねの自然長の位置とする。働く力を図示すると、図5.8のようになり、運動方程式は以下のようになる。なお、ばね定数を k とする。

- 皿に物体がのっていない時

$$m\ddot{x} = mg - kx \quad (5.31)$$

- 皿に物体がのっている時

皿と物体の両方の運動方程式を立てる。皿と物体の間に働く垂直抗力を N とする。

$$m\ddot{x} = N + mg - kx \quad (5.32)$$

$$M\ddot{x} = Mg - N \quad (5.33)$$

- (1) 皿に物体がのっていないときのつり合いの位置を x_0 とする。すると、皿に物体がのっていない時とのっている時のそれぞれについて、力のつり合いの式を立てることができる。

$$0 = mg - kx_0$$

$$0 = N + mg - k(x_0 + l)$$

$$0 = Mg - N$$

この3つの式より、 $\boxed{k = \frac{Mg}{l}}$ と求められる。

- (2) 式(5.32)と式(5.33)より

$$\begin{aligned} (m+M)\ddot{x} &= -kx + (m+M)g = -k\left(x - \frac{(m+M)g}{k}\right) \\ \therefore \ddot{x} &= -\frac{k}{m+M}\left(x - \frac{(m+M)g}{k}\right) \end{aligned} \quad (5.34)$$

となる。よって、振動の周期は $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{M} \cdot \frac{l}{g}}}$ である。

- (3) 物体が皿から離れないためには、運動している間ずっと、両物体の間に垂直抗力 N が働くことが必要である。式(5.33)と式(5.34)より垂直抗力 N は

$$N = M(g - \ddot{x}) = Mg - M\left(-\frac{k}{M+m}x + g\right) = \frac{M}{m+M}\frac{Mg}{l}x \quad (5.35)$$

である。これより垂直抗力 N の最小となるのは、 x が最小となる時である。 $N \propto x$ なので、 x の最小値 x_{\min} が非負となればよい。振幅を a とすると、 $x_{\min} = x_0 + l - a$ なので⁽³⁾、 $a \leq x_0 + l$ となればよい。 $x_0 = \frac{mg}{k} = \frac{m}{M}l$ なので、 $\boxed{a \leq \left(1 + \frac{m}{M}\right)l}$ であればよい。

- (4) 皿から物体が離れるのは垂直抗力が0になった瞬間である。式(5.35)より $x = 0$ つまり、ばねが自然長となった時である。エネルギー保存則⁽⁴⁾を考えると、以下の式が成立する。 $x = 0$ での速度を v とした。また、皿から物体が離れるまでは質量 $m+M$ の物体の運動と考えればよい。

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = -(m+M)g(x_0 + l + L) + \frac{1}{2}k(x_0 + l + L)^2$$

⁽³⁾ l の定義に注意。この問題では皿に物体がのっていない時のつり合いの位置から l 下がった点に、皿に物体がのっている時のつり合いの位置がある。

⁽⁴⁾私は「单振動の位置エネルギー」を使うのはあまり好きではない。なぜなら、重力による位置エネルギーが見えないことをうっかり忘れてしまう危険性が高いからだ。それに加えて、答案に書くとき、何の式か説明するのが難しい。「单振動の位置エネルギー」と書くのは適切なのか不明である。以上の理由により、計算量はやや増えるかもしれないが、正攻法のエネルギー保存則を使うのが安全だと私は考える。

これを変形して、 $x_0 = \frac{m}{M}L$, $k = \frac{Mg}{l}$ を代入する。

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{-2g \left\{ \left(1 + \frac{m}{M}\right)l + L \right\} + \frac{Mg}{l} \frac{1}{m+M} \left(\left(1 + \frac{m}{M}\right)l + L \right)^2} \\ &= \dots \\ &= \sqrt{gl \left\{ \frac{M}{M+m} \frac{L^2}{l^2} - \left(1 + \frac{m}{M}\right) \right\}} \end{aligned}$$

- (5) 皿から物体が離れた瞬間、ばねばかりは(4)で求めた速さを持って上向きに動く。振動の振幅を A とすると、ばねばかりが最高点に到達した時、その位置は点 O から $A - x_0$ 上にある（皿から物体が離れた後の振動中心は $x = x_0$ であることに注意）。以下のエネルギー保存則が成立する。

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(A - x_0)^2 + mg(A - x_0)^2$$

これを $A - x_0$ に関する 2 次方程式と見ると、 $A - x_0$ は以下のようにになる。なお、この値は正である。

$$A - x_0 = -\frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{mv^2}{k}}$$

皿に物体がのっていない時のつり合いから $mg - kx_0 = 0$ であり、 v に(4)で求めた結果を代入すると、

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{mv^2}{k}} = \sqrt{\left(\frac{m}{M}\right)^2 l^2 + \frac{m}{M}l^2 \left\{ \frac{M}{M+m} \frac{L^2}{l^2} - \left(1 + \frac{m}{M}\right) \right\}} \\ &= l \sqrt{\frac{m}{M} \left(\frac{M}{M+m} \frac{L^2}{l^2} - 1 \right)} \end{aligned}$$

5.3.3 単振り子

5.3.3 節では振り子運動が振幅が小さいときは単振動と同等であることを記す。単振り子が単振動と同等であることを示すのに最も楽な方法は運動方程式からのアプローチである。ただ、本 T_EX ノートではそれだけでなく、エネルギー保存則からのアプローチも記す。

運動方程式からアプローチする

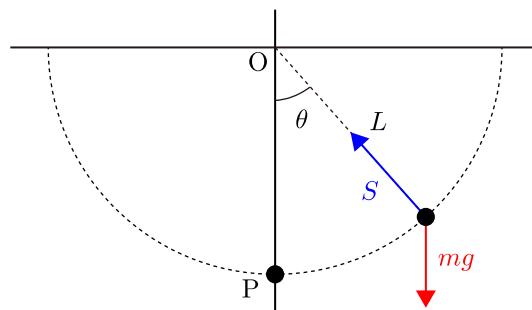


図 5.9 単振り子

4.2.2 「円運動の演習問題(1)」で扱った [問題 10] で、Oを中心とする完全な円を描く（円軌道上をぐるっと1周する）運動をするためには、最下点Pで小球に $\sqrt{5gL}$ 以上の速さを加える必要があることを求めた。

単振り子の問題では、最下点で加える速度が十分小さい場合を考える。そのため、単振り子の運動の解析のスタートは、円運動と同じであり、運動方程式は次のようになる⁽¹¹⁾。

⁽¹¹⁾ 周期で T を使うので張力は S とした。また、ここでの議論を楽にするため、接線方向の加速度は $L\ddot{\theta}$ と記した。

$$\begin{cases} m \frac{v^2}{L} = S - mg \cos \theta & (\text{向心方向}) \\ mL\ddot{\theta} = -mg \sin \theta & (\text{接線方向}) \end{cases} \quad (5.36)$$

$$(5.37)$$

θ が微小なら、 $\sin \theta \approx \theta$ と近似することができるので、式 (5.37) は、

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta \quad (5.38)$$

と変形することができる。これより、 $\omega^2 = \frac{g}{L}$ となる正の数 ω や最大振れ角 θ_0 、初期位相 δ を用いて、

$$\theta(t) = \theta_0 \sin \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t + \delta \right) \quad (5.39)$$

と振れ角が近似的に sin 関数で書けることがわかる。そのため、周期運動の周期は、

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (5.40)$$

である。この式より、単振り子の周期は振幅や質量に依存しないことがわかる。この性質を等時性という。

振り子運動

振り子運動は振れ幅が十分小さい場合は $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \delta)$ の形で運動を記述できる。

振り子運動の周期は、以下のように振幅や質量に依存しない値となる。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

エネルギー保存則からアプローチする

運動方程式からのアプローチが、単振り子の王道といえる。この他にも「エネルギー保存則」からもアプローチすることができる。

エネルギー保存則

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 - mgL \cos \theta \right) = 0 \iff \frac{1}{2}mv^2 - mgL \cos \theta = \text{const.} \quad (4.31)$$

式 (4.31) を変形して定数を c とすると、以下の式が得られる。

$$v^2 = 2gL \cos \theta + c \quad (5.41)$$

まず、定数 c を決定する。 $\theta = 0$ の時の速度（最下点で与える初速度）を v_0 と書くことになると、式 (5.41) より、

$$v_0^2 = 2gL + c \implies c = v_0^2 - 2gL$$

となる。これと $v = L \cdot d\theta/dt$ より、式 (5.41) は以下のようになる。

$$L^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = v_0^2 + 2gL(\cos \theta - 1) \quad (5.42)$$

ここで、 $|\theta|$ が十分小さい時を考えることから、 $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ と近似する⁽⁵⁾。すると、式(5.42)は、

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{L} \left(\frac{v_0^2}{gL} - \theta^2\right) \quad (5.43)$$

と変形できる。この微分方程式をどう解けば良いか。

結論をかくと⁽⁶⁾、 $\theta = \frac{v_0}{\sqrt{gL}} \sin \varphi$ とおけば良い。

$$\left(\frac{v_0}{\sqrt{gL}} \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{L} \cdot \frac{v_0^2}{gL} \cos^2 \varphi$$

$|\varphi|$ が十分小さく $\cos \varphi$ は non-0 なので、両辺を $\frac{v_0^2}{gL} \cos^2 \varphi$ で割ればよい。

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{L} \implies \varphi = \pm \sqrt{\frac{g}{L}} t + \delta$$

となる (δ は定数) から、 $\theta_0 = \frac{v_0}{\sqrt{gL}}$ とおくと、

$$\theta(t) = \theta_0 \sin \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t + \delta \right)$$

となる。「エネルギー保存則」からアプローチしても、振れ角は sin カーブとなることが確認できた。ただ、運動方程式から導く方法がはるかに楽である。

5.3.4 非慣性系でみた振り子の運動

振り子が図 5.10 のように電車の中にある場合を考える。この電車が左向きに加速度 α で動いている場合を考える。このとき、電車内の観測者から振り子の運動を見ると、慣性力 $m\alpha$ が右向きに働くているよう見える。電車の中の観測者から見た運動方程式は以下のようになる。

$$\begin{cases} m \frac{v^2}{L} = S - mg \cos \theta - m\alpha \sin \theta & (\text{向心方向}) \\ mL\ddot{\theta} = -mg \sin \theta + m\alpha \cos \theta & (\text{接線方向}) \end{cases} \quad (5.44)$$

(5.45)

⁽⁵⁾付録編の Taylor 展開の説明を参照せよ。 $\cos \theta$ の $\theta = 0$ のまわりの Taylor 展開は以下のようにかける。

$$\cos \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots$$

$\cos \theta \approx 1$ と近似すると θ 依存性がなくなってしまい、不適当である場合は θ に関する高次の項を導入することも必要である。ここでは $\cos \theta = 1 - \theta^2/2$ と θ の 2 次の項までを利用して近似する。

⁽⁶⁾式(5.43)で表される微分方程式も変数分離法で解くことが可能である。式(5.43)より、

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{g}{L}} \sqrt{\frac{v_0^2}{gL} - \theta^2}$$

となる（簡単のために \pm が $+$ の場合だけを考える）。変数分離法の王道ルートをいつも通り考えると、

$$\int \frac{1}{\sqrt{\frac{v_0^2}{gL} - \theta^2}} d\theta = \int \sqrt{\frac{g}{L}} dt$$

となる。このように変形すると、左辺の積分を計算するために $\theta = \frac{v_0}{\sqrt{gL}} \sin \varphi$ と置換したくなる。

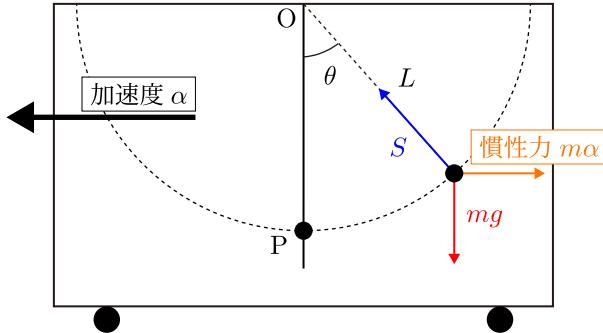


図 5.10

振り子のつり合いの位置 θ_0 は接線方向の加速度が 0 になるときであるため、

$$-mg \sin \theta_0 + m\alpha \cos \theta_0 = 0 \implies \tan \theta_0 = \frac{\alpha}{g} \quad (5.46)$$

が成立する。慣性力により、つり合いの位置が最下点ではなくなる。ここで、 $\theta = \theta_0 + \varphi$ (φ は微小) まで持ち上げてから静かに放したときの運動について考えてみよう。接線方向の運動方程式 (5.45) は以下のように書き直すことができる。

$$mL \frac{d^2}{dt^2}(\theta_0 + \varphi) = -mg \sin(\theta_0 + \varphi) + m\alpha \cos(\theta_0 + \varphi) \quad (5.47)$$

この式を三角関数の加法定理を用いて展開し、 φ が微小であることから、 $\sin \varphi \approx \varphi$ と近似する。式を整理する際は、式 (5.46) を利用する。

$$\begin{aligned} mL\ddot{\varphi} &= \underbrace{(-mg \sin \theta_0 + m\alpha \cos \theta_0)}_{\theta = \theta_0 \text{ でのつり合いより } 0} \cos \varphi - (mg \cos \theta_0 + m\alpha \sin \theta_0) \sin \varphi \\ &\approx -(mg \cos \theta_0 + m\alpha \sin \theta_0) \varphi \\ &= -(mg \cos \theta_0 + mg \tan \theta_0 \sin \theta_0) \varphi \\ &= -\frac{mg}{\cos \theta_0} \varphi \\ &= -mg \sqrt{1 + \tan^2 \theta_0} \cdot \varphi = -mg \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{g}\right)^2} \varphi \end{aligned} \quad (5.48)$$

したがって、 φ に関して、以下の式が成立する。

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{L} \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{g}\right)^2} \varphi \quad (5.49)$$

これより、つり合いの位置 $\theta = \theta_0$ を中心とする单振動をすることがわかる。しかし、角周波数は 5.3.3 節で考えた通常の振り子運動よりも大きくなる。

このような加速度運動をする電車の中での振り子の運動を考える際に、参考書や問題集を見ると、「見かけの重力」という考え方が出てくる。ここまで議論の結論として、計算処理の上では、5.3.3 節で考えた g を $g' = g\sqrt{1 + \tan^2 \theta_0}$ にすればよいということがわかる。この g' が見かけの重力である。そして、 $mg' = mg\sqrt{1 + \tan^2 \theta_0} = m\sqrt{g^2 + \alpha^2}$ は（下向きの）重力と（右向きの）慣性力の合力である。

見かけの重力を導入して、通常は $\theta = 0$ （最下点）としている基準点を $\theta = \theta_0$ に変更すれば、重力に相当する力の向きが斜めであることを除けば、通常の单振り子と同じになる。

5.3.5 浮力による单振動

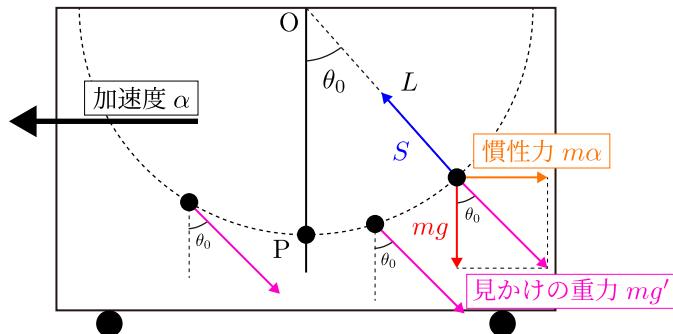


図 5.11

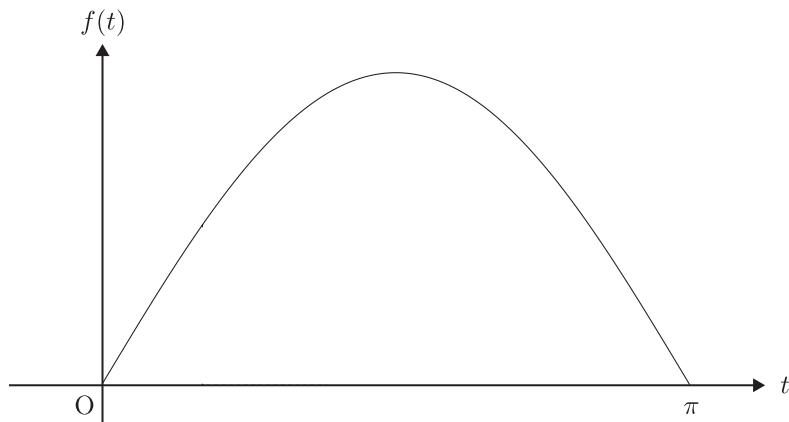
5.4 単振動の具体例(応用)

この section では、「ばねでつながれた 2 物体の運動」と「連成振子」の話ををする。2016 年の入試において、早稲田大学の基幹理工学部の入試では、「ばねでつながれた 2 物体の運動」が出た。しかし、現役時代の私は十分な対策をしていなかったために、全く歯が立たなかった。そして、東大でも「ゴム紐でつながれた 2 物体の運動」の話が出て、全く歯が立たず、その年の東大受験は不合格であった。確かに、「ばねでつながれた 2 物体の運動」と「連成振子」の話は難しい。しかし、1 回でも、その内容を自分なりに噛み砕けば、少しは問題を解けるだろう。

メインテーマは、「ばねでつながれた 2 物体の運動」と「連成振子」であるが、その前に時間的に変動する関数 $f(t)$ のある区間 $a \leq t \leq b$ における時間平均の求め方をまず考える。

5.4.1 関数の時間平均

関数の時間平均の求め方を、 $f(t) = \sin t$ の $0 \leq t \leq \pi$ を例に考えることにする。 $f(t) = \sin t$ のグラフは以下の通りである。なんとなく、時間平均は 0.5 であると予想しないだろうか。

図 5.12 $f(t) = \sin t$ のグラフ

でも、 $\sin t$ の平均はどう求めれば良いのか。私たちは、離散的な値の平均値の求め方は小学校で習う。 n 個のデータ a_1, a_2, \dots, a_n の平均 \bar{a} は、

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

である。

そこで、離散的な値の平均値の求め方を拡張する。 $0 \leq t \leq \pi$ からいくつかの値を取り出す。今回は、 $f\left(\frac{n\pi}{32}\right)$ ($n = 0, 1, 2, \dots, 32$) の計 33 個の値を取り出し、その平均を求めてみよう。プログラムを作成して Python で平均を求める。

$$\bar{a} = \frac{1}{33} \sum_{n=0}^{32} \sin\left(\frac{n\pi}{32}\right) \approx 0.6361388927695623$$

となる。この 0.6361388927695623 は、以下の棒グラフの高さの平均値である。

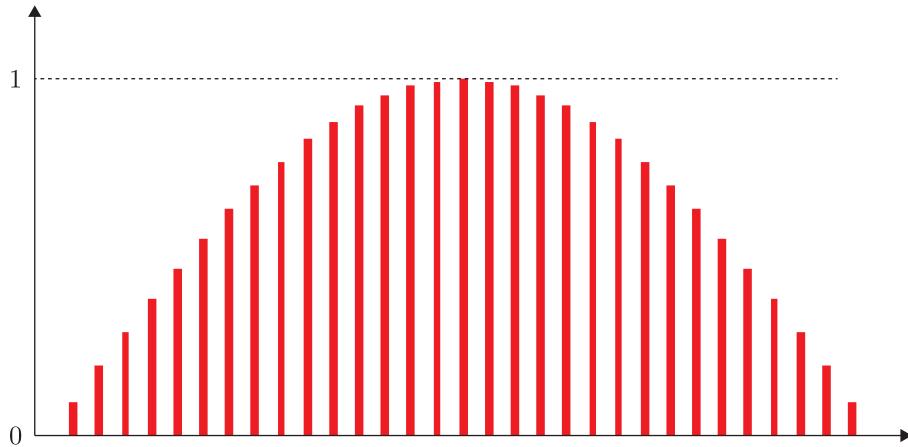


図 5.13 $f(n\pi/32)$ の値を棒グラフで表現する

$f(t) = \sin t$ という関数の時間平均を求めるために、 $f\left(\frac{n\pi}{32}\right)$ ($n = 0, 1, 2, \dots, 32$) の 33 個の代表的な値を利用して、近似値を求めた。33 個の値は選び方は等間隔である方が良い。代表値をとった場所がある箇所に集中していると、全体の傾向を把握できない。でも、33 個より、等間隔に 100 個、1000 個と取ったほうがより正確な値に近い値で評価できる。

この考えをもとに考える。区間 $0 \leq t \leq \pi$ を n 等分する。 $t_k = \frac{k\pi}{n}$ とする。データ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ を、 $a_k = f(t_k) = \sin(t_k)$ により定めると、

$$\bar{a} = \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \sum_{k=0}^n f(t_k) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\pi}$$

である。区分求積法の考え方より、 $n \rightarrow \infty$ の極限を考えると、

$$\bar{a} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx$$

となる。 $f(t) = \sin t$ の場合は、

$$\bar{a} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t dt = \frac{2}{\pi}$$

である⁽¹⁶⁾。

(16) プログラムを書いて Python で計算を実行させると、以下のようにになった。

n	$\sin t$ の平均
32	0.6361388927695623
100	0.6365684433587646
1000	0.6366192498143484
10000	0.6366197671326413

ちなみに、 $\frac{2}{\pi} \approx 0.6366197723675814$ である。 n が大きくなるほど、真の値 $\frac{2}{\pi}$ に近づくことがわかる。

上記の考え方を拡張すると、一般に、関数 $f(t)$ の時間平均を求める公式が得られる。

関数の時間平均

関数 $f(t)$ の $t_1 \leq t \leq t_2$ の平均は以下の式で求められる。

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \quad (5.50)$$

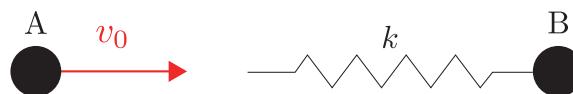
5.4.2 ばねでつながれた2物体の運動(1)

この subsection では、2016 年度「ハイパー物理 自習用テキスト」にのっている問題を通して、ばねでつながれた 2 物体の運動の解析を行う。そこで、第 3 章で紹介した 2 体問題の知識を利用する。

この subsection で考える状況

質量 m_1 の小球 A と質量 m_2 の小球 B とばね定数 k 、自然長 l の軽いばねがある。これらの 1 直線上の運動について考える。ただし、ばねの質量は無視して良い。

- 時刻 $t = 0$ に、静止している B のばねの先端に、A が速度 v_0 で衝突したとする。
- $t \geq 0$ の A、B の速度と位置を時間の関数として求めることを考える。
- 座標系を、 $t = 0$ での A、B の位置がそれぞれ $x_A = -l/2$ 、 $x_B = l/2$ となるように設定する。



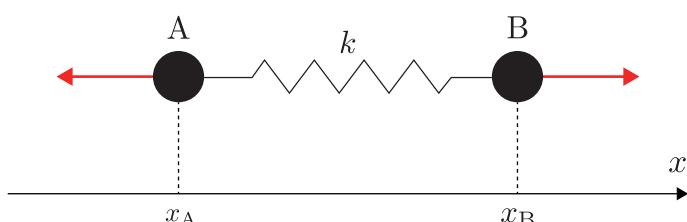
(1)：運動方程式の立式

運動の解析の第一歩は、物体にかかっている力を把握して、運動方程式を立てることである。その運動方程式、つまり微分方程式を見て、微分方程式が解けそうなら解く。解けなさそうなら、エネルギー保存則からアプローチするなど別の方法を検討すればよい。

ということで、A と B の運動方程式を立てる。2 つの物体がばねでつながっていないときの運動方程式は簡単に書ける。

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_A = 0 \\ m_2 \ddot{x}_B = 0 \end{cases} \quad (5.51)$$

2 つの物体がばねでつながっている時、つまり、A がばねの影響を受けるときは、以下のように力が働く。(以下の図は、ばねの長さが自然長より縮んでいる状態を表している。ばねが縮んでいるときは、元の長さに戻ろうとして、外向きに力が働く。)



ばねの長さが $x_B - x_A (< l)$ のとき、ばねに働く力の大きさは、 $k\{l - (x_B - x_A)\}$ である。ばねは縮んでいるので自然の長さに戻ろうと外向きに力が働く。よって、2つの物体がばねでつながっている時の、A と B の運動方程式は、

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_A = -k\{l - (x_B - x_A)\} & (5.52) \\ m_2 \ddot{x}_B = k\{l - (x_B - x_A)\} & (5.53) \end{cases}$$

である ($x_B - x_A (> l)$ の場合も同様の式になる)。さて、この運動方程式を解く上で厄介なのは、 x_A と x_B が混在しているところである。どうすれば良いか。

(2) : 重心座標の導入

上の2つの式をみると、両辺を足すと、右辺が 0 になることに気づく。そこで、両辺を足す。

$$m_1 \ddot{x}_A + m_2 \ddot{x}_B = 0$$

この式で、 $\ddot{x}_A = v_A$, $\ddot{x}_B = v_B$ であることを使うと、

$$\frac{d}{dt} (m_1 v_A + m_2 v_B) = 0 \quad (5.54)$$

となり、運動量保存則が導ける。この式を $m_1 + m_2$ で割ることで、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 v_A + m_2 v_B}{m_1 + m_2} \right) = \frac{dv_G}{dt} = 0 \quad (5.55)$$

と重心速度が一定であるという結果がすぐに導ける。

とりあえず、式 (5.54) を使おう。 $t = 0$ のとき、 $v_A = v_0$, $v_B = 0$ なので、運動量保存則が導ける。

$$m_1 v_A + m_2 v_B = m_1 v_0 \quad (5.56)$$

これより、ばねの影響を受けている時の重心速度は、

$$v_G = \frac{m_1 v_A + m_2 v_B}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 \quad (5.57)$$

となる。次に、式 (5.56) を時間 t で積分する。 $t = 0$ で $x_A = -l/2$, $x_B = l/2$ より、

$$\begin{aligned} m_1 \left\{ x_A - \left(-\frac{l}{2} \right) \right\} + m_2 \left(x_B - \frac{l}{2} \right) &= m_1 v_0 t \\ \therefore m_1 x_A + m_2 x_B &= m_1 v_0 t + \frac{l}{2} (m_2 - m_1) \end{aligned} \quad (5.58)$$

という関係式が導ける。これを $m_1 + m_2$ でわることで、重心座標が求められる。

$$x_G = \frac{m_1 x_A + m_2 x_B}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 t + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{l}{2} \quad (5.59)$$

(3) : 相対座標の導入

2つの運動方程式、式 (5.52) と式 (5.53) の右辺には、 $(x_B - x_A)$ というカタマリがある。そこで、2つの運動方程式を次のように変形する。

$$\begin{aligned} \ddot{x}_A &= -\frac{k}{m_1} \{l - (x_B - x_A)\} \\ \ddot{x}_B &= \frac{k}{m_2} \{l - (x_B - x_A)\} \end{aligned}$$

すると、

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}(x_B - x_A) &= \ddot{x}_B - \ddot{x}_A = \frac{k}{m_2}\{l - (x_B - x_A)\} + \frac{k}{m_1}\{l - (x_B - x_A)\} \\ &= -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\{(x_B - x_A) - l\}\end{aligned}\quad (5.60)$$

となる。鉛直ばね振り子の場合と同様に考えると、 $\omega = \sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}$ として⁽¹⁷⁾、

$$x_B - x_A = l + C \sin(\omega t + \delta) \quad (5.61)$$

と表せる。また、この式を微分すると、

$$v_B - v_A = C\omega \cos(\omega t + \delta) \quad (5.62)$$

である。式(5.61)と式(5.62)の未定係数 C, δ を、初期条件 $x_B - x_A = l, v_B - v_A = -v_0$ をもとに決定する。 $C > 0$ とすると、 $C = v_0/\omega, \delta = \pi$ となるので、

$$x_B - x_A = l - \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (5.63)$$

$$v_B - v_A = -v_0 \cos \omega t \quad (5.64)$$

である。

(4) : 重心座標と相対座標のドッキング

式(5.58)と式(5.63)を行列を使ってまとめると、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 v_0 t + \frac{l}{2}(m_2 - m_1) \\ l - \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

2×2 行列の \det は $m_1 + m_2 (\neq 0)$ なので、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} &= \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} 1 & -m_2 \\ 1 & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 v_0 t + \frac{l}{2}(m_2 - m_1) \\ l - \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} m_1 v_0 t + \frac{l}{2}(m_2 - m_1) - m_2 \left(l - \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t\right) \\ m_1 v_0 t + \frac{l}{2}(m_2 - m_1) + m_1 \left(l - \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t\right) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} m_1 v_0 t - \frac{l}{2}(m_1 + m_2) + m_2 \cdot \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \\ m_1 v_0 t + \frac{l}{2}(m_1 + m_2) - m_1 \cdot \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (5.66)$$

と x_A, x_B が求められる。これを時間 t で微分すると、

$$\begin{pmatrix} v_A \\ v_B \end{pmatrix} = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} m_1 v_0 + m_2 v_0 \cos \omega t \\ m_1 v_0 - m_1 v_0 \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (5.67)$$

(17)換算質量 μ の定義は、 $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ なので、 $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ と書くことができる。大学入試問題で、ばねにつながれた 2 物体の運動の振動を求めるときは、換算質量が登場することを覚えておくと検算などで役に立つ。

と速度 v_A, v_B も求められる。

(5) : 2 物体がばねから離れた後の運動の軌跡

今回の状況設定では、ばねと A、B は接着剤か何かでくっついていない。最初は、そのため物体 A がばねから全く力を受けなくなってしまうと、A と B は分離してしまう。

小球 A は、ばねとくっついているのではなく、一時的にばねを押しているので、ばねの力を受けているのである。ばねを押さなくなったら、ばねから力(復元力)を受けることはない。ここで、A に働く力 F_A は、式(5.63)を使うと、

$$F_A = -kl + k(x_B - x_A) = -k \cdot \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (5.68)$$

なので、 $t = \frac{\pi}{\omega}$ において、 $F_A = 0$ となる。この時、式(5.67)より、 $v_A(t = \frac{\pi}{\omega}) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0$ と速度を持つので、 $t = \frac{\pi}{\omega}$ でばねから力を受けなくなったあと、2つの小球 A と B は分離して、小球 A は $\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0$ の速度をもって、運動を続ける。分離した後、小球 A は力を受けないので等速度運動をする。

そのため、 $t \geq \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2) k}}$ における小球 A の速度 $v_A(t)$ は、

$$v_A(t) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \quad \left(t \geq \frac{\pi}{\omega} \right) \quad (5.69)$$

であり、位置 $x_A(t)$ は、式(5.66)より、

$$\begin{aligned} x_A(t) &= -\frac{l}{2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 \cdot \frac{\pi}{\omega} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \left(t - \frac{\pi}{\omega} \right) \\ &= -\frac{l}{2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_0 \cdot \frac{\pi}{\omega} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 t \end{aligned} \quad (5.70)$$

となる。

同様に、小球 B の運動の $t \geq \frac{\pi}{\omega}$ における運動について。 $v_B(t = \frac{\pi}{\omega}) = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0$ なので、

$$v_B(t) = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0 \quad \left(t \geq \frac{\pi}{\omega} \right) \quad (5.71)$$

であり、位置 $x_B(t)$ は、式(5.66)より、

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{l}{2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 \cdot \frac{\pi}{\omega} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0 \left(t - \frac{\pi}{\omega} \right) \\ &= \frac{l}{2} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 \cdot \frac{\pi}{\omega} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0 t \end{aligned} \quad (5.72)$$

となる。

(6) : 重心の運動の軌跡

最後に、重心の運動の軌跡を見てみよう。重心座標 $x_G(t)$ は、

$$x_G(t) = \frac{m_1 x_A(t) + m_2 x_B(t)}{m_1 + m_2}$$

と書ける。ばねとつながっている間も、つながっていない間も、式(5.51)と式(5.52)、式(5.53)より、

$$m_1 \ddot{x}_A + m_2 \ddot{x}_B = 0$$

が成立するので、「(2) : 重心座標の導入」の議論で書いた式(5.59)

$$x_G = \frac{m_1 x_A + m_2 x_B}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 t + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{l}{2} \quad (5.59)$$

は、ずっと成立する。

5.4.3 ばねでつながれた2物体の運動(2)

この subsection では、前の subsection で扱った状況設定についてもう少し掘り下げて調べていく。

(1) : 2つの物体の位置の可視化

まず、2つの物体の位置と速度の可視化を行い、物体の運動の軌跡を把握しよう。ここで、簡単化のために、各種パラメータを $m_1 = 2, m_2 = 1, k = 1, l = 1, v_0 = 1$ としよう。

すると、 ω は、 $\omega = \sqrt{1 \times \left(\frac{1}{2} + 1\right)} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ となる。よって、 $x_A(t)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} x_A(t) &= \begin{cases} \frac{1}{3} \left\{ 2t - \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{2}{\sqrt{6}} \sin \left(\frac{\sqrt{6}}{2} t \right) \right\} & \left(0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\sqrt{6}} \right) \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{6}} + \frac{1}{3} t & \left(t \geq \frac{2\pi}{\sqrt{6}} \right) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{3}t - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{9} \sin \left(\frac{\sqrt{6}}{2}t \right) & \left(0 \leq t \leq \frac{\sqrt{6}\pi}{3} \right) \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}\pi}{9} + \frac{1}{3}t & \left(t \geq \frac{\sqrt{6}\pi}{3} \right) \end{cases} \end{aligned}$$

同様に $x_B(t)$ を計算すると、

$$x_B(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}t + \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{6}}{9} \sin \left(\frac{\sqrt{6}}{2}t \right) & \left(0 \leq t \leq \frac{\sqrt{6}\pi}{3} \right) \\ \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{6}\pi}{9} + \frac{4}{3}t & \left(t \geq \frac{\sqrt{6}\pi}{3} \right) \end{cases}$$

となる。最後に、重心の位置 $x_G(t)$ の位置は、2物体がつながっているか、分離しているかに関係なく、式 (5.59) で表されるので、

$$x_G(t) = \frac{2}{3}t - \frac{1}{6}$$

である。今求めた $x_A(t), x_B(t), x_G(t)$ をグラフ化すると図 5.14 のようになる。

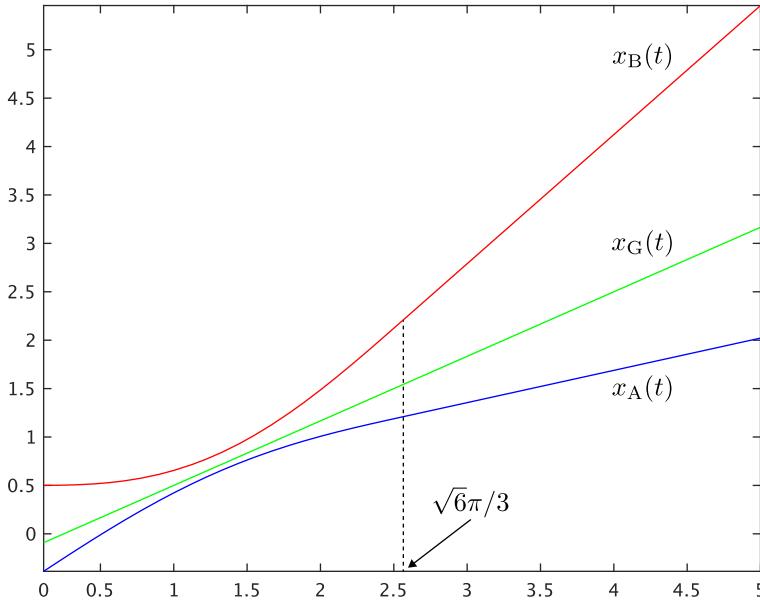
(2) : もし小球 A と小球 B が分離しなかったら?

今度は2つの小球がばねでつながっていて、小球 A はばねから離れないものとする。左側の小球 A にのみ初速度 v_0 を与えた時の運動を考えると、運動方程式は、前の subsection で立てた

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_A = -k \{l - (x_B - x_A)\} \\ m_2 \ddot{x}_B = k \{l - (x_B - x_A)\} \end{cases}$$

と同じであり、その解の形も同じになる。ただ、小球 A がばねから離れる事はないので、 $t \geq 0$ ですべて、式 (5.66) が成立する。

$$\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} m_1 v_0 t - \frac{l}{2} (m_1 + m_2) + m_2 \cdot \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \\ m_1 v_0 t + \frac{l}{2} (m_1 + m_2) - m_1 \cdot \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

図 5.14 $x_A(t)$, $x_B(t)$, $x_G(t)$ の時間軌跡

今度は、パラメータを $m_1 = m_2 = 1$, $k = 1$, $l = 1$, $v_0 = 1$ としよう。すると、 ω は $\omega = \sqrt{2}$ となるから、

$$\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\sqrt{2}t) \\ t + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}$$

となる。また、重心の位置 $x_G(t)$ は、式 (5.59) より、

$$x_G(t) = \frac{1}{2}t$$

となる。今求めた $x_A(t)$, $x_B(t)$, $x_G(t)$ をグラフ化すると図 5.15 のようになる。

今回の場合、重心から見たときの 2 物体の見え方が対称的になる。

$$\begin{aligned} x_A - x_G &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \sin(\sqrt{2}t) \\ x_B - x_G &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \sin(\sqrt{2}t) \end{aligned}$$

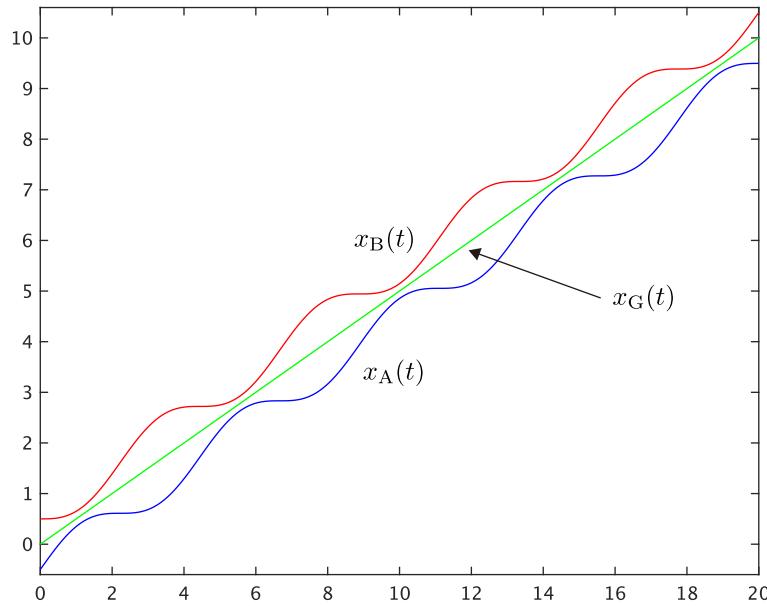
より、
 $\underbrace{x_A - x_G}_{\text{重心から見た A の位置}}$
 $= -(\underbrace{x_B - x_G}_{\text{重心から見た B の位置}})$ の関係が成立することがわかる。

一般の場合について考える。式 (5.59) と式 (5.66) より、重心から見た A, B の座標 (重心系における A, B の座標) を求めると、以下のようなになる。

$$x_A - x_G = -\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{l}{2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (5.73)$$

$$x_B - x_G = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (5.74)$$

この 2 式から、 $x_A - x_G = -\frac{m_2}{m_1}(x_B - x_G)$ の関係が成立することがわかる。

図 5.15 $x_A(t)$, $x_B(t)$, $x_G(t)$ の時間軌跡 (2)(3) : 弹性衝突との関係

話を元に戻す。前の subsection で考えた状況では $t = \frac{\pi}{\omega}$ における A と B の速度は、

$$v_A \left(t = \frac{\pi}{\omega} \right) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0, \quad v_B \left(t = \frac{\pi}{\omega} \right) = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0$$

である。この式を見て、私は思った。この答えは、運動量保存則と反発係数を連立させた次の式の計算結果と同じではないか？

$$\begin{cases} m_1 v_0 = m_1 v_A + m_2 v_B \\ 1 = -\frac{v_A - v_B}{v_0} \end{cases} \quad (5.75)$$

実際、この連立方程式をとくと、 $v_A = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0$, $v_B = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0$ という解が得られる。

式 (5.75) は、速度 v_0 で運動している物体 A が物体 B と衝突した後の、両物体の速度を求める問題で書く連立方程式である。ただし、物体 A と物体 B の間の反発係数が 1 の場合である。つまり、前の subsection で考えていた問題と、弾性衝突の問題は、結論は同じになる。

弾性衝突は、「衝突の前後で 2 物体の運動エネルギーの和が保存する衝突」のことである。そんな衝突は現実に起こりうるのか？衝突に伴い、エネルギーが熱という形で系の外に出てしまわないのか？弾性衝突が現実に起こりえないことだとしたら、どのように想像すれば良いのか？その答えを与えてくれるのが、前の subsection で考えていたモデルであると、私は考える。

ここからは私の考え方であって、絶対に正しいとは（私は）断言できない。弾性衝突の直前で、質点どうしの距離が十分近いときは、（この後で述べる）万有引力やクーロン力などの引力の効果を強く受ける。その効果はまるでばねに類似する効果といえよう。衝突をする直前と直後はばねでつながれた 2 物体のような振る舞いをするから、運動エネルギーの総和が減少しないのである。運動エネルギーの一部がばねの弾性エネルギー（に相当するエネルギー）という形で保持された後、2 物体に再分配されるのではないか？弾性衝突の直前、直後は実はばねでつながれた 2 物体のモデルと等価になっているのかもしれない、私は思った。

5.4.4 連成振動

次は、このような系における2物体の振動を考える。

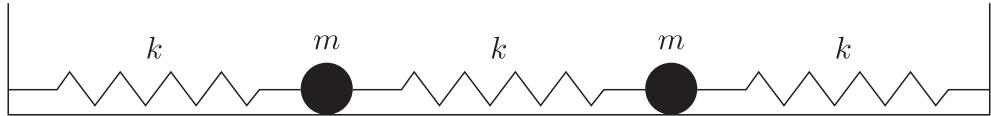


図 5.16 連成振動(1)

さて、このsubsectionのタイトルにある「連成振動」とは何か。「連成振動」は、2つ以上の振動子(ばねなど)が何かの機構で互いに影響を及ぼしながら行う振動のことである。連成振動は、分子や結晶の熱振動のモデルに応用することができる。原子を質点とみなし、分子や結晶を、数個あるいは無数の質点が互いに隣り合うもの同士で、影響を及ぼしながら、平衡点を中心に連成振動をしていると考える。図5.16のモデルが最も簡単なモデルであるが、それに少し手を加えた次の系をこのsubsectionで考えることにする。

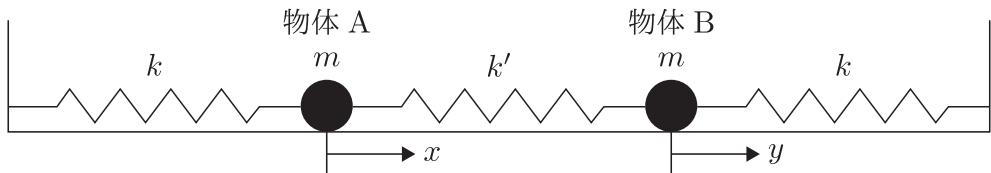


図 5.17 連成振動(2): この subsection で考えるモデル

今回の連成振動の変位の取り方はいつもと異なる。図5.17の左の物体をA、右の物体をBと呼ぶことにしよう。さて、今回はAとBの物体に一切力が働くないとき、つまり、3つのばねが全て自然長の長さの時のAとBの位置をそれぞれ0としている。 x, y はその位置、つまり、3つのばねの長さが自然長の時から、右方向にどれだけ動いたかを表すものとする。さらに、AとBの質量はともに m であるとする。

すると、AとBの運動方程式は以下のようになる⁽¹⁸⁾。

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx - k'(x - y) \\ m\ddot{y} = -ky + k'(x - y) \end{cases} \quad (5.76)$$

今回も、「ばねでつながれた2物体の運動」と同様に、 x と y が混在している。そこで、「ばねでつながれた2物体の運動」と同様に、両辺を足したり、引いたりすることを考える⁽¹⁹⁾。すると、

$$\begin{cases} m \frac{d^2}{dt^2}(x + y) = -k(x + y) \\ m \frac{d^2}{dt^2}(x - y) = -(k + 2k')(x - y) \end{cases} \quad (5.77)$$

となる。

これより、 $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$ として、

$$\begin{cases} x + y = A_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) \\ x - y = A_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) \end{cases} \quad (5.78)$$

(18) 真ん中のばねは、Aが右に x 動いたことで、 x 縮んだが、Bが右に y 動いたことで、 y 伸びている。そのため、結果として、 $x - y$ だけ縮んでいると見ることができる。 $x - y > 0$ なら、真ん中のばねは縮んでいるので、復元力は真ん中のばねが広がるように働く。そのため、Aには左向きに、Bには右向きに復元力が働く。 $x - y \leq 0$ なら、真ん中のばねは伸びているので、逆に、Aには右向きに、Bには左向きに復元力が働く。以上のことから、運動方程式は式(5.76)のようになる。

(19) この操作が、重心座標と相対座標の導入に近いといえる。

となる。この2式より、

$$x(t) = \frac{1}{2}\{A_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2)\}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\{A_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) - A_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2)\}$$

となるから、定数 A_1, A_2 をうまく取り直すことで、

$$\begin{cases} x(t) &= A_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) \\ y(t) &= A_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) - A_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) \end{cases} \quad (5.79)$$

とすることができる。

さて、次は具体的な数値を導入して、少し掘り下げる。 $x(0) = 2A, y(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$ という場合を考えよう(ただし、 $A > 0$ とする)。つまり、物体 A を平衡状態から右に $2A$ 動かしたあと、静かに(初速度を加えることなく)、2 物体を離した場合を考える。初期条件を式(5.79)に代入すると、

$$\begin{aligned} 2A &= A_1 \sin \delta_1 + A_2 \sin \delta_2 \\ 0 &= A_1 \sin \delta_1 - A_2 \sin \delta_2 \\ 0 &= \omega_1 A_1 \cos \delta_1 + \omega_2 A_2 \cos \delta_2 \\ 0 &= \omega_1 A_1 \cos \delta_1 - \omega_2 A_2 \cos \delta_2 \end{aligned}$$

となる。すると、この4つの式より、

$$\begin{aligned} 2A &= 2A_1 \sin \delta_1 \\ 2A &= 2A_2 \sin \delta_2 \\ 0 &= 2\omega_1 A_1 \cos \delta_1 \\ 0 &= 2\omega_2 A_2 \cos \delta_2 \end{aligned}$$

が得られる。

3つ目の式より、 $A_1 = 0$ あるいは $\delta_1 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ となるが、 $A_1 = 0$ なら、 $A = 0$ となってしまう。よって、 $\delta_1 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ である。同様にして、 $\delta_2 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ である。あとは、 δ_1, δ_2 を4通りの中から決定すれば良い。

(1) $\delta_1 = \delta_2 = \frac{\pi}{2}$ の時、または、 $\delta_1 = \delta_2 = \frac{3\pi}{2}$ の時は、 $A_1 = A_2$ である。

(2) $\delta_1 = \frac{\pi}{2}, \delta_2 = \frac{3\pi}{2}$ の時、または、 $\delta_1 = \frac{3\pi}{2}, \delta_2 = \frac{\pi}{2}$ の時は、 $A_1 = -A_2$ である。

(1) : $\delta_1 = \delta_2$ のとき

$\delta_1 = \delta_2 = \pi/2, 3\pi/2$ のどちらでも、 $x(t), y(t)$ は次の形で書ける。

$$x(t) = A(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \quad (5.80)$$

$$y(t) = A(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = -2A \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \quad (5.81)$$

(1-a) $k' = 4k$ の時

この時、 $\omega_2 = 3\omega_1$ となる。すると、

$$\begin{aligned}x(t) &= 2A \cos(\omega_1 t) \cos(2\omega_1 t) \\y(t) &= 2A \sin(\omega_1 t) \sin(2\omega_1 t)\end{aligned}$$

となる。簡単にするため、 $A = 1$, $\omega_1 = 1$ とすると、 $x(t)$ と $y(t)$ のグラフは図 5.18 のようになる。

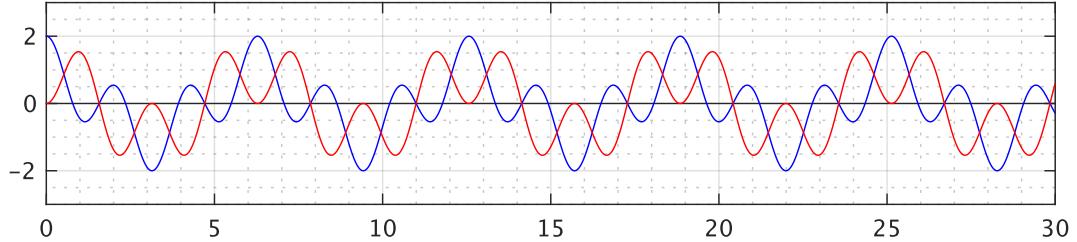


図 5.18 $k' = 4k$ の時のグラフ (1)：青色が $x(t)$ 、赤色が $y(t)$

(1-b) $k' = 0.0404k$ の時

この時、 $\omega_2 = 1.02\omega_1$ となる。すると、

$$\begin{aligned}x(t) &= 2A \cos(0.01\omega_1 t) \cos(1.01\omega_1 t) \\y(t) &= 2A \sin(0.01\omega_1 t) \sin(1.01\omega_1 t)\end{aligned}$$

となる。簡単にするため、 $A = 1$, $\omega_1 = 100$ とすると、 $x(t)$ と $y(t)$ のグラフは図 5.19 のようになる。

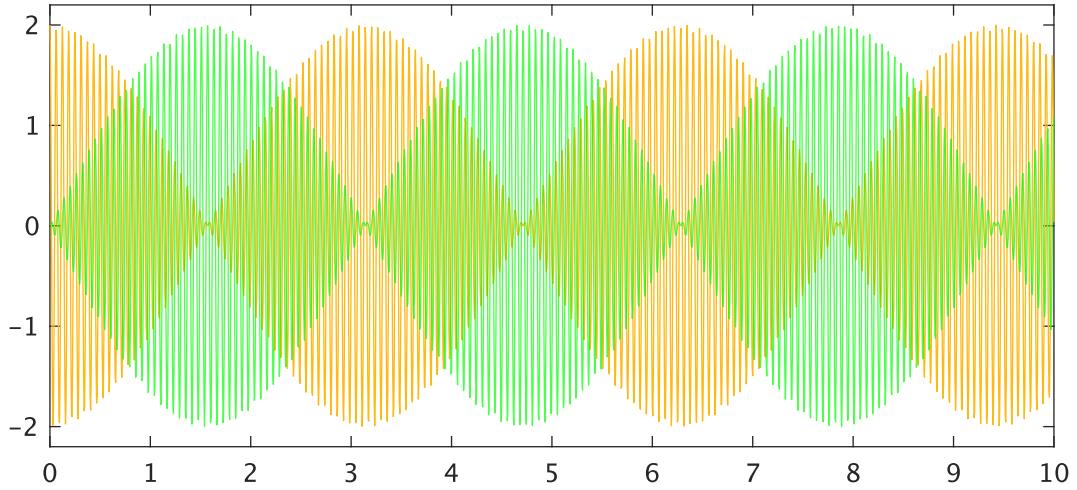
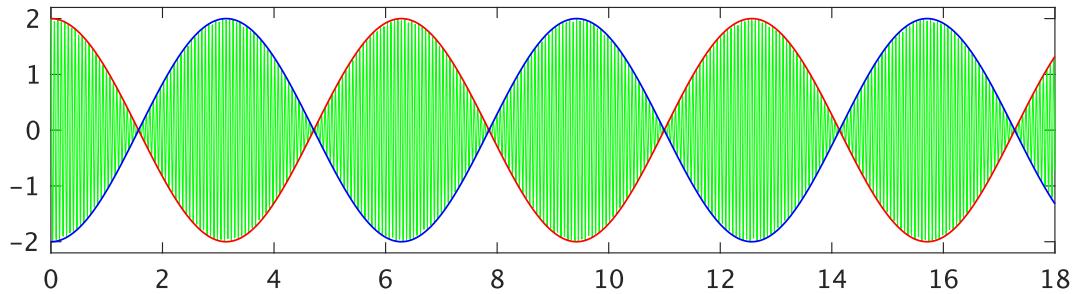
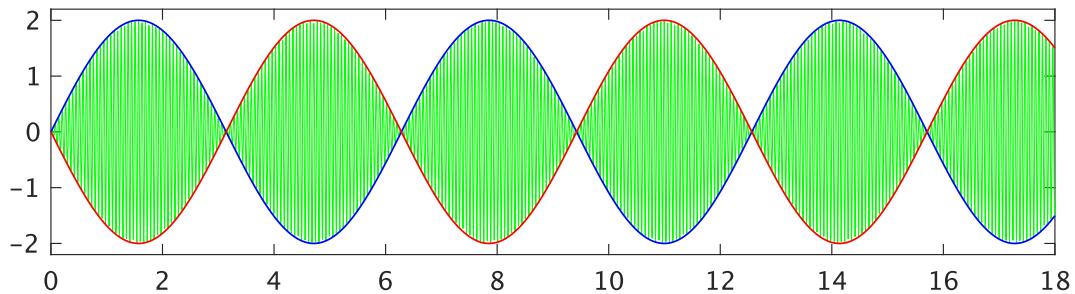


図 5.19 $k' = 0.0404k$ の時のグラフ (1)：黄色が $x(t)$ 、緑色が $y(t)$

$k' = 0.0404k$ の時の $x(t)$, $y(t)$ の挙動の特徴を図 5.19、図 5.20、図 5.21 をもとにまとめると、

- $|x(t)|$ が大きい時、 $|y(t)|$ は小さい。逆に、 $|y(t)|$ が大きい時、 $|x(t)|$ は小さい。
- $x(t)$, $y(t)$ の振幅の変化はとても緩やか。少しづつ増えたり、減ったりする。結果として、 $x(t)$ のグラフは、 $-2 \cos t$ のグラフと $2 \cos t$ のグラフの間に収まっている。また、 $y(t)$ のグラフは、 $-2 \sin t$ のグラフと $2 \sin t$ のグラフの中に収まっている。

この 2 つの事実を、物理的に説明しよう。まず、前者は、A と B の間で、ばねを媒介してエネルギーのやりとりが行われていることを、図 5.19 が表していると言え換えることができる。系全体では、力学的エ

図 5.20 $k' = 0.0404k$ の時のグラフ(2) ($x(t)$ のみ)図 5.21 $k' = 0.0404k$ の時のグラフ(3) ($y(t)$ のみ)

エネルギーは保存している。ここで、中央のばねの変位 $x - y$ の時間平均⁽²⁰⁾は、

$$\overline{x - y} = 2A \cdot \overline{\cos \omega_2 t} = 0$$

なので、平均的に、中央のばねは伸び縮みしていないとみなせる。すると、系が持つエネルギーは、「一番左のばねに蓄えられた弾性エネルギー」と「一番右のばねに蓄えられた弾性エネルギー」の和であるとみなせる。そのため、 $|x|$ が大きい時、 $|y|$ が小さいのは、左のばねの弾性エネルギーが大きくなり、右のばねの弾性エネルギーが小さくなることにうまく対応している。エネルギー保存則の観点から見ると、とても自然なことといえる。

後者は、 $x(t)$, $y(t)$ の式から説明できる。図 5.19、図 5.20、図 5.21 の場合、

$$x(t) = 2 \cos t \cos(101t)$$

であるが、 $\cos(101t)$ の方が、 $\cos t$ に比べて早く振動する。そのため、 $x(t)$ の振動は、事実上、 $\cos(101t)$ に依存し、 $\cos t$ は振幅の時間変化を示しているとみなせる。そのため、 $\cos(101t)$ にしたがって、 $x(t)$ は上下

⁽²⁰⁾ 周期的な運動をしている場合、運動の周期を T とすると、

$$\overline{\cos \omega t} = \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega t \, dt = 0 \quad (5.82)$$

となる。これは、 T ではなく、 n を自然数として、 nT としても同じである。ここで、時間平均を考える時間が、 $nT + \Delta T$ ($0 \leq \Delta T < T$) であったとする。すると、

$$\begin{aligned} \overline{\cos \omega t} &= \frac{1}{nT + \Delta T} \int_0^{nT + \Delta T} \cos \omega t \, dt \\ &= \frac{1}{nT + \Delta T} \left\{ n \underbrace{\int_0^T \cos \omega t \, dt}_{\text{波線部}} + \int_{nT}^{nT + \Delta T} \cos \omega t \, dt \right\} \end{aligned}$$

波線部の定積分は 0 であることと、 $\cos \omega t$ が周期的に振動する関数であることから、

$$\overline{\cos \omega t} = \frac{1}{nT + \Delta T} \int_0^{\Delta T} \cos \omega t \, dt$$

となり、 $nT + \Delta T$ が十分大きければ、 $\frac{1}{nT + \Delta T} \rightarrow 0$ となるので、 $\overline{\cos \omega t} = 0$ とみなせる。

するものの、 $\cos t$ に従って、振幅が時間変化するという結果になり、これを図示すると、図5.20や図5.21のようになる。

(2) : $\delta_1 \neq \delta_2$ のとき

次に、 $\delta_1 = \pi/2$, $\delta_2 = 3\pi/2$ のときはを考えよう。このときは、 $x(t)$, $y(t)$ は次の形で書ける。

$$\begin{aligned}x(t) &= A(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \\y(t) &= A(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)\end{aligned}$$

逆に、 $\delta_1 = 3\pi/2$, $\delta_2 = \pi/2$ のときは、

$$\begin{aligned}x(t) &= A(\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t) \\y(t) &= -A(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)\end{aligned}$$

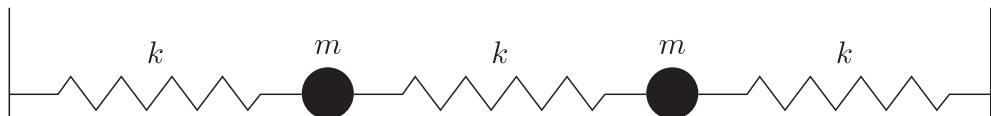
となる。 $\delta_1 \neq \delta_2$ のとき、 $t = 0$ を代入すると、 $x(0) = 0$ となり、初期条件に反する。そのため、今回考えている初期条件 $x(0) = 2A$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ の解ではない。

$k' = 0.0404k$ の時など、 $k' \ll k$ ならば、 ω_1 と ω_2 はとても近い値になる。2つの三角関数の角振動数がとても近い時、その重ね合わせの結果は、図5.20や図5.21のようになる。とても早く振動する項と、とてもゆっくり振動する項の積で表される関数のグラフは特徴的なものになる。この現象はうなりと言われる。

5.4.5 連成振動(演習問題)

この subsection では、名間の森の 108 ページの問題を取り扱う。名間の森とは違うアプローチで問題を解く。まあ、前の section と同じように解くだけだが。

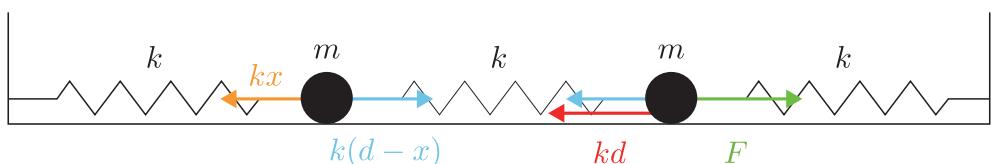
問題 13



質量 m の等しい 2 つの球 A と B(上図の左を A、右を B とする)がばね定数 k の 3 個の同じばねで直線状に結ばれて、摩擦のない水平面上に置かれている。ばねの両端は固定されていて、はじめ、どのばねも自然長 l になっている。

- (1) B に外力を加えて、右に d だけ静かに変位させる。この時、A は右にどれだけ変位するか。また、B に加えている外力の大きさはいくらか。
- (2) B を初めの位置に固定したまま、A に外力を加えて大きさ d の変位を与えてから、静かに放す。A の振動の周期を求めよ。また、A が初めの位置(変位 = 0)を通る時の速さを求めよ。
- (3) A と B の両方に外力を加えて、同じ向きに等しい大きさ d の変位を与えてから同時に放す。A の振動の周期を求めよ。
- (4) A と B の両方に外力を加えて、互いに逆向きに等しい大きさ d の変位を静かに与える。
 - (4-a) この時、外力がした仕事の和を求めよ。
 - (4-b) 次に、2 つの球を同時に静かに放す。A の振動の周期を求めよ。

(1)⁽²¹⁾



静かに右に動かすので、B を右に動かしている途中、またはその後も、A と B に働く力は常につり合う。B を右に d 動かした時に、A が右に x 動いたとする。また、B に加わっている力を F (右向きを正)とする。A と B に働く力は図のようになるから、B を右に動かした後の A と B の運動方程式(つりあいの式)は、以

⁽²¹⁾

「静かに」変位させる

物体を変位させるには、外力を働かせる必要がある。ここで、2.2.3 「位置エネルギー」の説明を思い出そう。

$$U = \int_0^A (-\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{r}$$

で位置エネルギーは求められる。位置エネルギーは、保存力 \mathbf{F} とつり合う力 $-\mathbf{F}$ を働かせて、基準点 O から A まで移動させるのに要する仕事で定義される。この時、O から A に至るまでの任意の点において、保存力 \mathbf{F} と常につり合うように外力を働かせるのである。このような移動方法を「静かに」移動させると呼ぶ。

下のようになる。

$$\begin{cases} 0 & = k(d-x) - kx \\ 0 & = F - kd - k(d-x) \end{cases} \quad (5.83)$$

これより、 $x = \frac{d}{2}, F = \frac{3}{2}kd$ と求められる。 \square

(2)

B が固定されている時は、物体 A にだけ注目すればよい。 x_1 を自然長からの変位とすると、A の運動方程式は、

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - kx_1 = -2kx_1 \quad (5.84)$$

となる。よって、振動の角周波数は $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ であり、振動周期 T_1 は、 $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$ である。 \square

エネルギー保存則を考える。 物体 A が x 変位した時のばねの弾性エネルギーは $\frac{1}{2}kx^2 \times 2 = kx^2$ なので、保存則は、

$$kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{const.}$$

となる。A が初めの位置を通る時、2つのばねは自然長になっているので、エネルギー保存則を考えると、求める速さを v_A とすると、

$$kd^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 \iff v_A = d\sqrt{\frac{2k}{m}} \quad (5.85)$$

となる。 \square

(3)

A と B の運動方程式をかく。ただし、 x_1, x_2 は自然長からの変位とする。

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2) = -2kx_1 + kx_2 \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 + k(x_1 - x_2) = kx_1 - 2kx_2 \end{cases} \quad (5.86)$$

これより、

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) = -k(x_1 + x_2) \quad m\frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) = -3k(x_1 - x_2)$$

となる。そのため、 $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ として、

$$x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) \quad x_1 - x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2)$$

となり、

$$x_1 = \frac{A_1}{2} \sin(\omega_1 t + \delta_1) + \frac{A_2}{2} \sin(\omega_2 t + \delta_2) \quad (5.87)$$

$$x_2 = \frac{A_1}{2} \sin(\omega_1 t + \delta_1) - \frac{A_2}{2} \sin(\omega_2 t + \delta_2) \quad (5.88)$$

と x_1, x_2 が求められる。また、

$$v_1 = \frac{d}{dt}x_1 = \omega_1 \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \delta_1) + \omega_2 \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \delta_2) \quad (5.89)$$

$$v_2 = \frac{d}{dt}x_2 = \omega_1 \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \delta_1) - \omega_2 \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \delta_2) \quad (5.90)$$

では、(3)の場合を考えよう。

$t = 0$ の時、 $x_1 = x_2 = d$ なので、式(5.87)から式(5.90)より、

$$\begin{aligned} d &= \frac{A_1}{2} \sin \delta_1 + \frac{A_2}{2} \sin \delta_2 & d &= \frac{A_1}{2} \sin \delta_1 - \frac{A_2}{2} \sin \delta_2 \\ 0 &= \omega_1 \frac{A_1}{2} \cos \delta_1 + \omega_2 \frac{A_2}{2} \cos \delta_2 & 0 &= \omega_1 \frac{A_1}{2} \cos \delta_1 - \omega_2 \frac{A_2}{2} \cos \delta_2 \end{aligned}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} 2d &= A_1 \sin \delta_1 & 0 &= A_2 \sin \delta_2 \\ 0 &= \omega_1 A_1 \cos \delta_1 & 0 &= \omega_2 A_2 \cos \delta_2 \end{aligned}$$

となる。この4つの式より、 $A_1 = 2d$, $A_2 = 0$, $\delta_1 = \pi/2$ となることがわかる。よって、

$$x_1 = x_2 = d \cos \omega_1 t$$

と導ける。ゆえに、Aの振動周期を T_1 とすると、 $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ である。 \square

(4)-(a)

Aを右に d 動かし、Bを左に d 動かしたとすると、一番左のばねと一番右のばねはは d 伸びて、真ん中のばねは $2d$ 縮んでいることになる。そのため、外力を加えて変位を加えることで、系全体は

$$\frac{1}{2}kd^2 \times 2 + \frac{1}{2}k(2d)^2 = 3kd^2$$

の弾性エネルギーを蓄える。よって、外力は系に対して合計で $3kd^2$ をした。 \square

(4)-(b)

前のページの式(5.87)から(5.90)に、今度は、 $t = 0$ のとき、 $x_1 = d$, $x_2 = -d$, $v_1 = v_2 = 0$ という条件を代入すれば良い。

$$\begin{aligned} d &= \frac{A_1}{2} \sin \delta_1 + \frac{A_2}{2} \sin \delta_2 & -d &= \frac{A_1}{2} \sin \delta_1 - \frac{A_2}{2} \sin \delta_2 \\ 0 &= \omega_1 \frac{A_1}{2} \cos \delta_1 + \omega_2 \frac{A_2}{2} \cos \delta_2 & 0 &= \omega_1 \frac{A_1}{2} \cos \delta_1 - \omega_2 \frac{A_2}{2} \cos \delta_2 \end{aligned}$$

これより、

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 \sin \delta_1 & 2d &= A_2 \sin \delta_2 \\ 0 &= \omega_1 A_1 \cos \delta_1 & 0 &= \omega_2 A_2 \cos \delta_2 \end{aligned}$$

となり、この4つの式から、 $A_1 = 0$, $A_2 = 2d$, $\delta_2 = \pi/2$ となることがわかる。よって、

$$x_1 = d \cos \omega_2 t \quad x_2 = -d \cos \omega_2 t$$

と導ける。ゆえに、Aの振動周期を T_2 とすると、 $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{3k}}$ である。 \square

5.5 ポテンシャル曲線と運動

5.5.1 ポテンシャル曲線と安定なつりあい

大学の物理では、「位置エネルギー」という言葉の代わりに「ポテンシャル」という言葉を使う。なぜなら、「位置エネルギー」の英語表記が「potential energy」であるからである。この subsection 以降、「ポテンシャル」という言葉が出てきたら、「位置エネルギー」のことだと思ってほしい。

さて、位置エネルギーは保存力と非常に強い関係を持つことを 2.2.4 「位置エネルギー」で確認した。以下、この subsection では、保存力のみが物体に働くとし、1 次元の場合を中心に考える。

位置エネルギーの基準点を $x = 0$ とすると、

$$U(x) = \int_0^x -F(x') dx' \quad (5.91)$$

とかけて、微分積分学の基本定理より、

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (5.92)$$

とかけることはすでにふれてある。さて、式 (5.92) より、次のことがわかる。

- $F(x) > 0 \iff \frac{dU(x)}{dx} < 0$
- $F(x) < 0 \iff \frac{dU(x)}{dx} > 0$
- $F(x) = 0 \iff \frac{dU(x)}{dx} = 0$

式を見れば、すぐにわかる事実であるが、これはとても重要なことである。なぜなら、保存力の場合、ポテンシャル曲線のカーブだけで、力の働く向きがわかるからである。上の対応関係より、「ポテンシャル曲線の接線の傾きの正負と、保存力の正負（向き）は反対である」ことがわかる。そして、「ポテンシャルが極大、または、極小となる点では保存力は 0、あるいは、複数の保存力が働いているなら、その総和が 0 の状態、つまり、つりあいの状態になる」ことがわかる。

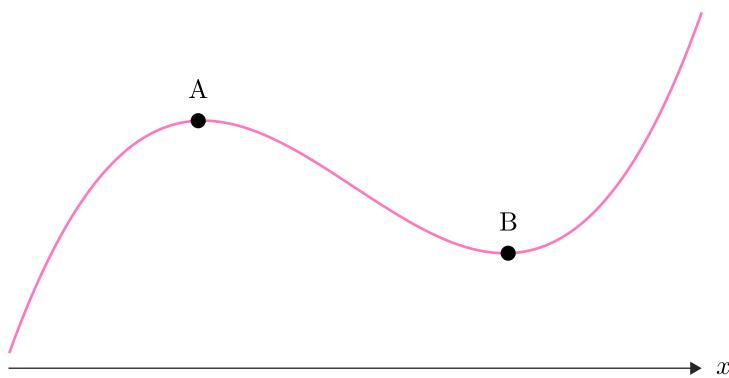


図 5.22 ポテンシャル曲線の例

図 5.22 のようなポテンシャル曲線に従うとき、A と B において $U(x)$ は極値をとる。そのため、A と B では、 $U'(x) = 0$ なので、物体に働いている保存力は $F(x) = 0$ である。そのため、A と B では、働いている保存力が 0 か、つりあいの状態にある。

ここで、「つりあいの位置」には2種類あることにふれる。

2種類のつり合い

- 安定なつりあい

つりあい点(平衡点)から少しずれた点に物体をおいた時、保存力により、その平衡点に戻ろうとする時、その平衡点は安定である。エネルギー的に見ると、安定な平衡点では、その近傍も含めて、位置エネルギーが最小で、これ以上小さくなることはできないので、安定となる。

- 不安定なつりあい

つりあい点(平衡点)から少しずれた点に物体をおいた時、保存力により、その平衡点に戻ろうとしない時、その平衡点は不安定である。

ポテンシャルカーブの接線の傾きと保存力の向きの関係より、各地点における保存力の向きは図5.23のようになる。

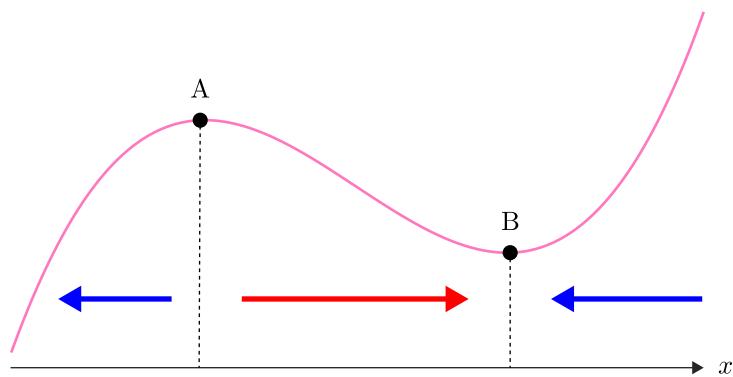


図 5.23 ポテンシャル曲線と保存力の向き

図5.23より、点Bは明らかに安定なつりあい点である。安定なつりあい点は極小点である。逆に、不安定なつりあい点は極大点である。ここで、Bにおける $U(x)$ の2階微分の傾きを考えると、数学3で習う曲線の凹凸の内容から、

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} > 0$$

である。そのため、安定なつりあい点は数学的には

$$\frac{dU(x)}{dx} = 0 \quad \frac{d^2U(x)}{dx^2} > 0 \quad (5.93)$$

の両方を満たす点である。

安定なつりあい点から少しずれた位置に物体をおく。保存力のみが働くときは、これまでに見た通り、つりあい点のまわりを振動運動する。この振動運動は単振動ではない。しかし、ある条件を課すと、近似的に単振動と見なせる場合がある。

安定なつりあい点を $x = x_0$ とする。Taylor展開を使うと、

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}U''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}U'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots$$

となる。ここで、 $|x - x_0|$ が十分小さい範囲内では、 $x - x_0$ の3次以上の項は無視できるので、

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}U''(x_0)(x - x_0)^2$$

となる。さらに、 $x = x_0$ はつりあい点なので、 $U'(x_0) = 0$ だから、

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2!} U''(x_0)(x - x_0)^2 \quad (5.94)$$

と近似できる。この式に式 (5.92) を適用させると、

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -U''(x_0)(x - x_0) \quad (5.95)$$

となる。 $x = x_0$ は安定なつりあい点なので、 $U''(x_0) > 0$ である。よって、 $|x - x_0|$ が十分小さい範囲内では、 $x = x_0$ のまわりに单振動するとみなすことができる。

5.5.2 安定なつり合いと不安定なつり合いの具体例

前の subsection で書いたことを具体例で確認する。『新・物理入門問題演習』の 53 ページの問題を題材に考えることにしよう。

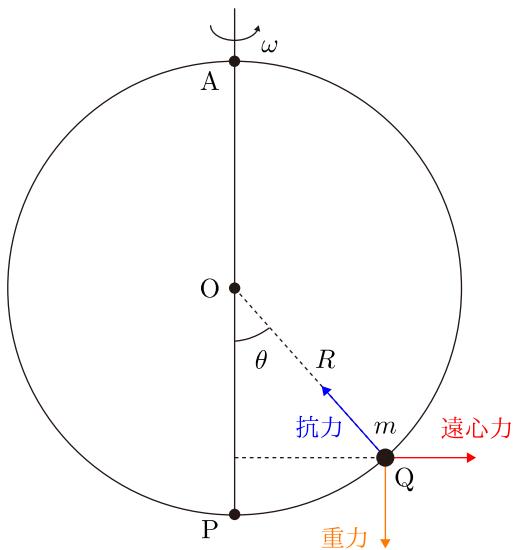


図 5.24 5.6.2 で考える系のイメージ図

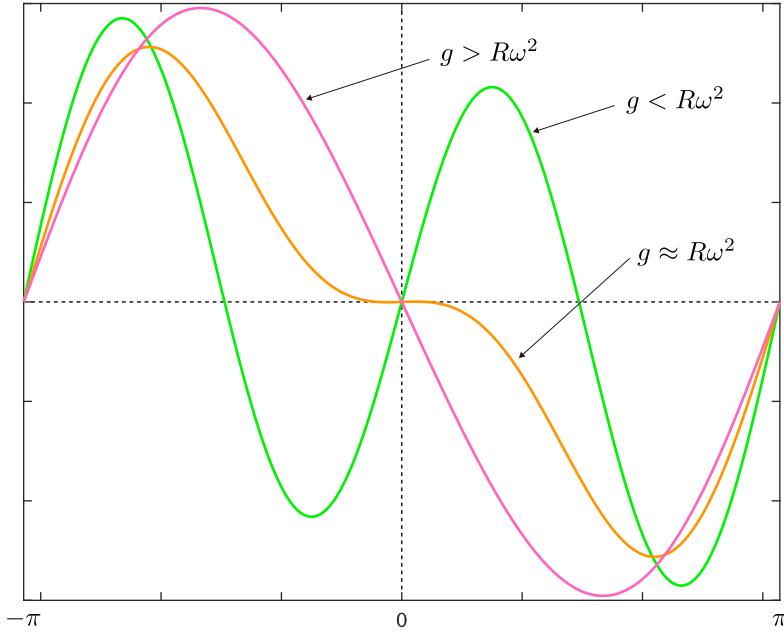
図 5.24 のように、半径 R の円形の針金に質量 m の小さな物体が通してある。針金上の点 A には、直径 PA に沿った方向に、この針金を回転させるための腕がついている。円形針金を下にし、腕を鉛直方向にとつて、これを回転軸として角速度 ω で針金を回転させる。

図のように θ をとったとき、点 Q にある小物体に働く力を考えよう。点 Q にある小物体に働く遠心力、針金からの抗力、重力の合力の針金の接線方向成分をもとに平衡点が安定な点であるかどうかを考えよう。

接線方向成分を $F(\theta)$ とすると、

$$F(\theta) = m(R \sin \theta) \omega^2 \cos \theta - mg \sin \theta = mR\omega^2 \sin \theta \left(\cos \theta - \frac{g}{R\omega^2} \right) \quad (5.96)$$

と書ける。 $F(\theta)$ のグラフを書くと図 5.25 のようになる⁽²²⁾。 g と $R\omega^2$ の大小により、グラフの形状が変わ

図 5.25 $F(\theta)$ のグラフ — g と $R\omega^2$ の関係 —

ることがわかる。

(22)式 (5.96) をもとに、 $F(\theta)$ を θ で微分すると、

$$\begin{aligned} F'(\theta) &= \frac{dF(\theta)}{d\theta} = mR\omega^2 \cos \theta \left(\cos \theta - \frac{g}{R\omega^2} \right) - mR\omega^2 \sin \theta \cdot \sin \theta \\ &= mR\omega^2 \left(2\cos^2 \theta - \frac{g}{R\omega^2} \cos \theta - 1 \right) \end{aligned} \quad (5.97)$$

となる。これより、 $F'(\theta) = 0$ となるのは、

$$\cos \theta = \frac{\frac{g}{R\omega^2} \pm \sqrt{\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)^2 + 8}}{4} \quad (5.98)$$

となる時である。式 (5.98) を満たす θ が存在する条件は、

$$-4 < \frac{g}{R\omega^2} - \sqrt{\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)^2 + 8}, \quad \frac{g}{R\omega^2} + \sqrt{\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)^2 + 8} < 4 \quad (5.99)$$

である (ここのかンマは and ではなく、or を表す)。

式 (5.99) の左側の条件について考える。左側の条件は、

$$\sqrt{\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)^2 + 8} < \frac{g}{R\omega^2} + 4$$

と書ける。この両辺はともに正なので、両辺を 2 乗しても良い。すると、

$$\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)^2 + 8 < \left(\frac{g}{R\omega^2}\right)^2 + 8 \left(\frac{g}{R\omega^2}\right) + 16 \iff 8 \left\{ \left(\frac{g}{R\omega^2}\right) + 1 \right\} > 0$$

となり、式 (5.99) の左側の条件は常に成立することがわかる。

一方、式 (5.99) の右側の条件は、

$$\sqrt{\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)^2 + 8} < 4 - \frac{g}{R\omega^2}$$

と書けるから、 $4 - \frac{g}{R\omega^2} > 2\sqrt{2}$ 、つまり、 $\frac{g}{R\omega^2} < 4 - 2\sqrt{2}$ が成立することが必要であり、これが成立する下では、

$$\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)^2 + 8 < \left(\frac{g}{R\omega^2}\right)^2 - 8 \left(\frac{g}{R\omega^2}\right) + 16 \iff 8 \left\{ \left(\frac{g}{R\omega^2}\right) - 1 \right\} < 0$$

となる。ゆえに、 $\frac{g}{R\omega^2} < 1$ 、つまり、 $g < R\omega^2$ の時に限り、式 (5.99) の右側の条件が成立する。

以上より、 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ の範囲に $F'(\theta) = 0$ となる θ がいくつあるかを考えると、 $g < R\omega^2$ の時は 4 つ、 $g > R\omega^2$ の時は 2 つであることがわかる。 g と $R\omega^2$ の大小というのは、 $F(\theta)$ のグラフの形状に影響することがわかる。

式(5.96)によると、 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ の範囲内では、 $\theta = 0, \pm\pi$ において、必ず $F(\theta) = 0$ となる。つまり、 $\theta = 0, \pm\pi$ はつり合い点である。また、 $g/R\omega^2 < 1$ であるときは、 $\cos \theta = g/R\omega^2$ を満たす θ が存在するので、このような θ もつり合い点となる。

ここで、 $\theta = 0$ の近傍のみを考えることにしよう。 $F(\theta)$ の 1 階微分は

$$F'(\theta) = mR\omega^2 \left(2\cos^2 \theta - \frac{g}{R\omega^2} \cos \theta - 1 \right)$$

となる。 $F(\theta)$ の $\theta = 0$ のまわりの Taylor 展開を考えると、

$$F(\theta) \approx F(0) + F'(0)\theta = mR\omega^2 \left(1 - \frac{g}{R\omega^2} \right) \theta \quad (5.100)$$

となる⁽²³⁾。よって、以下のことがいえる。

- $g > R\omega^2$ の時は、 $\theta = 0$ の微小近傍で单振動をすることがわかり、 $\theta = 0$ が安定なつり合い点である。
- $g \approx R\omega^2$ の時は、 $F(\theta) \approx 0$ なので、 $\theta = 0$ から少しづれた位置に物体があると、ずっとその位置にあり続ける。
- $g < R\omega^2$ の時は、 $\theta = 0$ は不安定なつり合い点である。なぜなら、 $\theta > 0$ の時は θ が増大する方向に、 $\theta < 0$ の時は θ が減少する方向に力が働くからである。

この subsection で考えた系は、回転速度によって、安定なつりあいか、不安定なつりあいかが変わる系であることがわかる。

⁽²³⁾式(5.100)は、式(5.96)で、 $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$ と近似することでも得られる。高校物理や大学受験では、このような近似から式(5.100)を得るだろうが、実際は Taylor 展開で θ の 1 次までの項を取り出したものといえる。

5.6 減衰振動と強制振動

5章の最後では、高校物理のレベルを超えて、振動現象の1つである「減衰振動」と「強制振動」にふれる。実は、高校物理の電磁気学の交流の話で登場する回路方程式は、強制振動の方程式と同じタイプである。そのため、減衰振動や強制振動についてふれておくことは、交流の話を勉強するときに(きっと)役に立つ。

減衰振動と強制振動については、高校物理および高校数学の範囲内では厳密に解析できないが、ここではコンピュータでの数値シミュレーションの結果を記すので、どのような時間変化をするかどうかだけでもつかんでほしい。数学的な解析については付録編の193ページに記す。

5.6.1 減衰振動

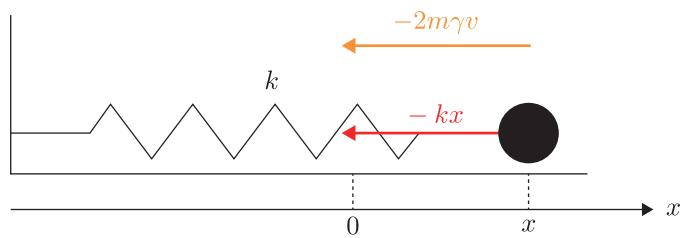


図 5.26 減衰振動

減衰振動で考える状況は、図5.26のように、单振動の系に速度に比例する抵抗が働いている状況である。物体に働く抵抗を数式化するのは容易ではない。ここでは、物体の速度に抵抗の大きさが比例する場合(粘性抵抗)を考える。この速度に比例する抵抗を導入することで空気抵抗などがある場合を考えることができる。1.3.3「空気抵抗を受ける落体の運動」で既に速度に比例する抵抗を扱った。ばねがついていなければ、高校数学の範囲内で処理できるが、残念なことにばねが付くと、そうはいかない。ここでは、厳密な解法は取り上げないで、解の時間的振る舞いの概略だけを取り上げる。

減衰振動の方程式

(運動方程式)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x - 2m\gamma v \quad (5.101)$$

$v = dx/dt$ を利用して、この式を変形すると、 $x(t)$ が満たす微分方程式は以下のようになる。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (5.102)$$

ここで、ばね定数を k ではなく $m\omega^2$ とおき、粘性抵抗の比例定数を $2m\gamma$ とおいたが、このようにしたのは、式(5.102)のように計算しやすい式を設定するためである。

5.6.2 減衰振動の解を数値的に求める

式(5.102)で表される微分方程式の解 $x(t)$ の挙動は、 γ^2 と ω^2 の大小関係によりよって3種類に分けられることが知られている。ここでは、 γ と ω が具体的な数値を代入して、挙動の概形を把握することにしよう。今回は、初期条件として、 $x(0) = 1, v(0) = 0$ の場合を考える。今回は以下の3パターンについて、コンピューターによるシミュレーションを行った。

(A) $\gamma = 2, \omega = 1$ のとき：過減衰

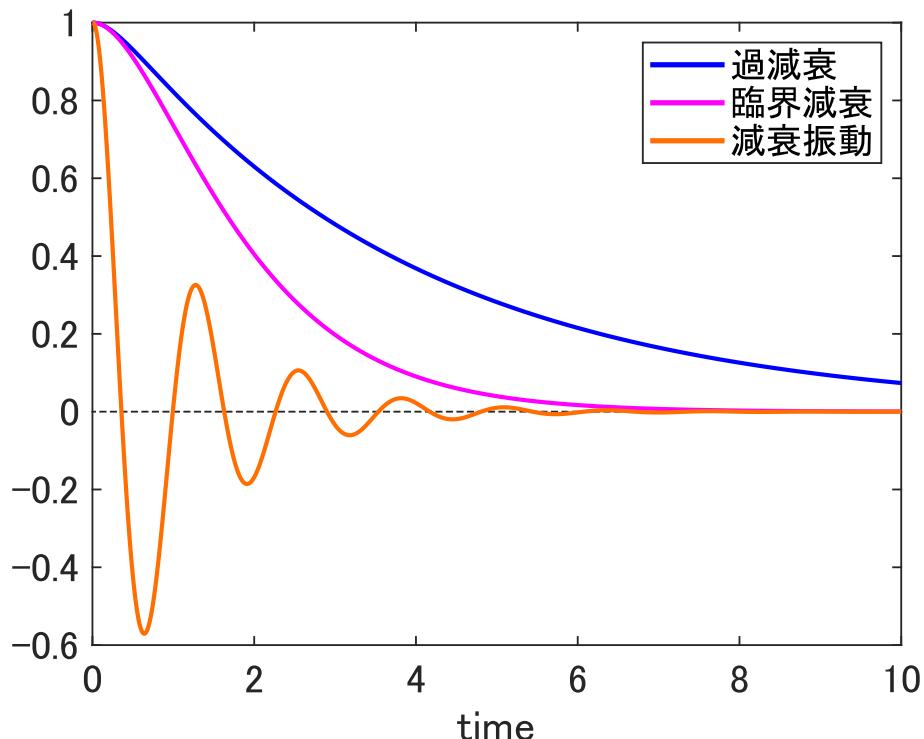
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + x = 0$$

(B) $\gamma = 1, \omega = 1$ のとき：臨界減衰

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 0$$

(C) $\gamma = 1, \omega = 5$ のとき：減衰振動

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 25x = 0$$

図 5.27 減衰振動における $x(t)$ の時間変化

$0 \leq t \leq 10$ の範囲でコンピュータで計算させた結果は以下の図 5.27 のようになる。(A) と (B) は単調に減衰して、(C) は振動しながら山が徐々に小さくなっていることがわかる。 γ^2 と ω^2 の大小関係と、 $x(t)$ の挙動の詳細については、付録編 B.4 「減衰振動と強制振動(再考)」(193 ページ) で記すことにする。重要なのは、(A)、(B)、(C) のどの場合においても、 $|x(t)|$ は t が大きくなると 0 に近づくことである。実際、式 (5.102) の形の微分方程式の解 $x(t)$ は、 t が十分大きくなると、0 に近づくことが知られている。

5.6.3 強制振動

次に、「強制振動」について考える。強制振動はその名の通り、外力により物体が強制的に振動させられる。強制振動と同じ形の方程式が、高校物理の電磁気学分野の「交流回路」のところで登場する。

強制振動は、減衰振動と同じ状況に、さらに、物体に $F(t) = F_0 \cos \omega_0 t$ の外力が働く場合である。言葉でいうのは簡単だが、数学的に処理するのはとても面倒である。なお、この subsection では、外力の角振動数 ω_0 は $\omega_0 \neq \omega$ を満たすものとする。また、 F_0 は定数とする。

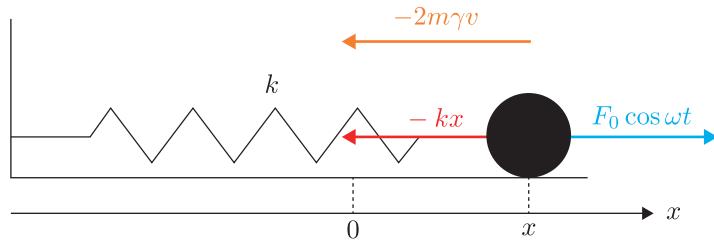


図 5.28 強制振動

強制振動を表現する微分方程式

(運動方程式)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x - 2m\gamma \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega_0 t \quad (5.103)$$

$f_0 = F_0/m$ で定義すると、以下のように整理できる。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f_0 \cos \omega_0 t \quad (5.104)$$

式 (5.104) で表される微分方程式の解 $x(t)$ の挙動についても、減衰振動と同様の方法で把握しよう。使う式はこの 2 つである。

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t$$

ただ、今回は微分方程式が、

$$a(t) + 2\gamma v(t) + \omega^2 x(t) = f_0 \cos \omega_0 t$$

なので、 $a(t) = -2\gamma v(t) - \omega^2 x(t) + f_0 \cos \omega_0 t$ となるから、 $v(t)$ の更新式が

$$v(t + \Delta t) = v(t) - \{2\gamma v(t) + \omega^2 x(t)\}\Delta t + f_0 \cos \omega_0 t \Delta t \quad (5.105)$$

となる。

強制振動における $x(t)$ の挙動を数値的に把握するための関係式

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t \quad (5.103)$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) - \{2\gamma v(t) + \omega^2 x(t)\}\Delta t + f_0 \cos \omega_0 t \Delta t \quad (5.108)$$

初期条件として、 $x(0) = 1, v(0) = 0$ としてコンピュータで計算させた。 $\Delta t = 0.01, f = 0.1, \omega_0 = 3$ として、以下の 2 パターンについて $x(t)$ の挙動を求めた。

(A) $\gamma = 1.5, \omega = 1$ のとき

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + x = 0.1 \cos 3t$$

(B) $\gamma = 1, \omega = 7$ のとき

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 49x = 0.1 \cos 3t$$

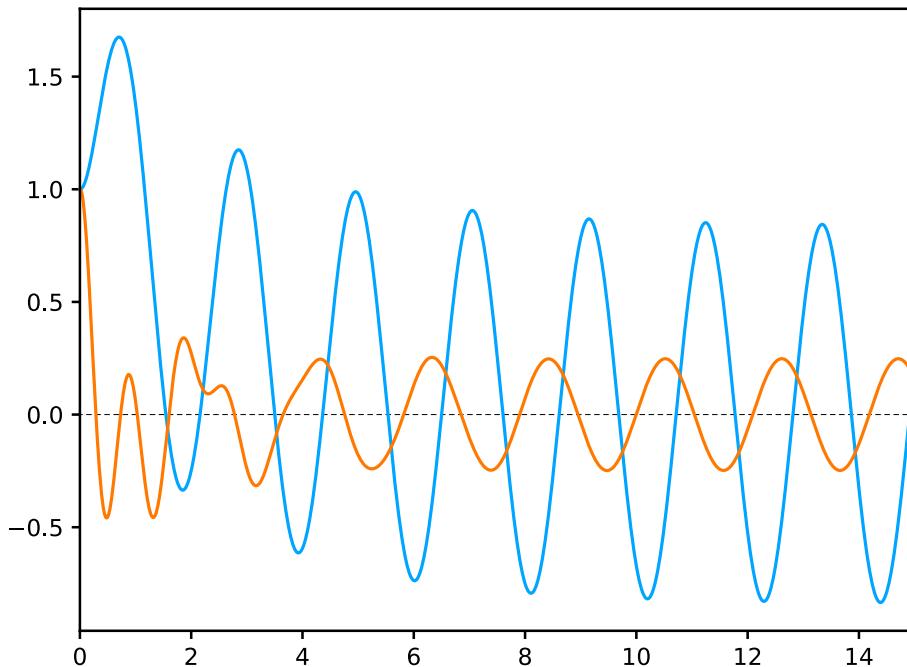


図 5.29 強制振動における $x(t)$ の時間変化

水色の曲線が (A) の場合に、オレンジ色の曲線が (B) の場合に対応する。水色の曲線は、山の高さが徐々に小さくなっていることがわかる。一方、オレンジの曲線は、最初は不規則な振動をしているが、 $t \geq 6$ では山の高さがほぼ一定の周期的な振動をしているように見える。

5.6.4 強制振動の挙動と特別解

数値計算の結果は図 5.29 のようになることがわかった。このことを数式を用いて説明することを考えてみよう。ここで、『新・物理入門問題演習』の交流の部分を読んでみると、式 (5.104) の右辺の形が $\cos \omega_0 t$ の定数倍なので、

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta)$$

というような内容が書かれている⁽²⁷⁾。でも、なぜ、これで良いのか。

減衰振動の式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (5.102)$$

⁽²⁷⁾私の高校時代の物理の先生も、 $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta)$ とおけば良いというようなことを言っていた。高校時代の物理の先生は、単に山本義隆先生の書かれたことをパクっているだけだが。

の解(一般解)を $x_1(t)$ とし、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f_0 \cos \omega_0 t$$

を満たす $x(t)$ のうち、容易にみつけられるもの(これを特解)を $x_2(t)$ としよう。

この時、 $x(t)$ として、 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ をとると、これも式(5.107)を満たす。なぜなら、

$$\begin{aligned} \text{式(5.96)の左辺} &= \frac{d^2}{dt^2}\{x_1(t) + x_2(t)\} + 2\gamma \frac{d}{dt}\{x_1(t) + x_2(t)\} + \omega^2\{x_1(t) + x_2(t)\} \\ &= \left\{ \frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx_1(t)}{dt} + \omega^2 x_1(t) \right\} + \left\{ \frac{d^2x_2(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx_2(t)}{dt} + \omega^2 x_2(t) \right\} \\ &= 0 + f_0 \cos \omega_0 t \\ &= f_0 \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

となるからである。すると、強制振動の解は、減衰振動の解に特解を足したものとなる。減衰振動の解は t が大きくなると減衰して、 $t \rightarrow \infty$ の極限で0に収束するものである。そのため、 t が十分大きくなると、特解の方が支配的になる。だから、強制振動では特解が重要であり、その特解が『新・物理入門問題演習』に記されている

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta)$$

なのである。

では、その容易に見つけられる $x_2(t)$ を見つけることにしよう。 $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta)$ を式(5.104)に代入すると、

$$\begin{aligned} -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \delta) - 2A\gamma\omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta) + A\omega^2 \cos(\omega_0 t + \delta) &= f_0 \cos \omega_0 t \\ \therefore A(\omega^2 - \omega_0^2) \cos(\omega_0 t + \delta) - 2A\gamma\omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta) &= f_0 \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

となる。両辺を \cos で統一するために、三角関数の合成をする。

$$\begin{cases} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_0)^2}} = \cos \phi \\ \frac{2\gamma\omega_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_0)^2}} = \sin \phi \end{cases} \quad (5.106)$$

とおくと、

$$A \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_0)^2} \cos(\omega_0 t + \delta + \phi) = f_0 \cos \omega_0 t$$

となる。これより、両辺の振幅と位相の部分を比較すると、 A と δ は、

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_0)^2}} \quad (5.107)$$

$$\delta = -\phi = -\arctan \left(\frac{2\gamma\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \quad (5.108)$$

と書ける⁽²⁸⁾。

⁽²⁸⁾ $\arctan x$ は次のように定義される。

$-\pi/2 < x < \pi/2$ の範囲内で、 $y = \tan x \iff x = \arctan y$

そのため、式(5.108)では、 ϕ は $\tan \phi = \frac{2\gamma\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$ を満たすので、 $\phi = \arctan \left(\frac{2\gamma\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \right)$ と書ける。

以上より、式(5.104)の解は、上の ϕ を使って、

$$x(t) = (\text{減衰項}) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_0)^2}} \cos(\omega_0 t - \phi) \quad (5.109)$$

と書ける。

t が十分大きくなり、「減衰項」が $\left| \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_0)^2}} \right|$ に比べて十分小さくなると、式(5.109)は、最初において $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta)$ の部分が支配的になる。「新・物理入門問題演習」を含め、高校物理の交流の部分では、この「定数項」を無視できるぐらい時間がたってからのことを考える。「減衰項」を無視できるような状態を**定常状態**という。

第 6 章 万有引力

長い単振動の話の後に扱うのは、万有引力の話である。この宇宙にある全ての物体は相互作用しあっている。それは、小さな原子・分子のレベルから、地球と太陽・月といった大きなレベルまで当てはまることがある。この section では、これまで扱った質点の話から離れて、惑星のレベルの話をすることにする。具体的には、Kepler が発見した 3 つの法則と「万有引力」の関係性について見ていく。そこで、現在の高校物理には登場しない「角運動量」をこの TEX ノートに登場させる。まず、その準備として、「ベクトルの外積」の話ををする。その後、高校物理では「剛体」の部分で登場する「力のモーメント」の話をしてから、「角運動量」に触れる。

この chapter の演習問題では、現在の高校物理では扱っていない中心力問題も考える。「中心力」という概念が高校物理では登場しないが、「角運動量」の話と一緒に登場させる。惑星の運動も中心力問題であるが、「ケプラー問題」などと別物として考えられている。前の chapter のメインテーマである「単振動」も中心に向かって力が働いているので、中心力として考えられるが、別物として扱われる。

6.1 角運動量保存則

6.1.1 ベクトルの外積

まずは、ベクトルの外積の話を。高校物理では直接外積の話は出てこないが、ベクトルの外積が関係している概念として、「力のモーメント」がある。あと、電磁気学の「ローレンツ力」のところで、ベクトルの外積が根底にある内容が登場する。しかし、高校数学で、ベクトルの外積は扱わないこともあり⁽¹⁾、高校物理でベクトルの外積は出てこない。この TEX ノートでは、ここでベクトルの外積を登場させる。

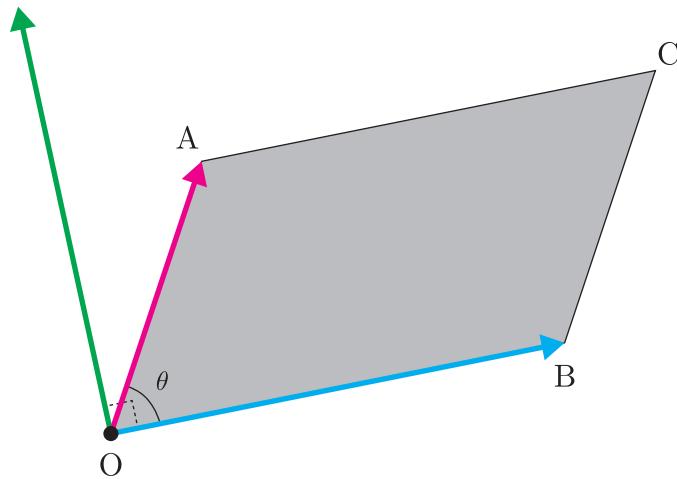


図 6.1 ベクトルの外積

⁽¹⁾新学習指導要領ではベクトルは数学 C の内容になってしまふ。高校 2 年生のうちにベクトルを習わなくなってしまうと、高校物理の内容はどうなってしまうのか。

図6.1の \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} をそれぞれ \mathbf{a} , \mathbf{b} と書くことにする。この時、ベクトルの外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を次の条件を満たすベクトルと定義する。



$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の定義

1. 向き: \mathbf{a} から \mathbf{b} の方向にネジを回したとき、ネジの進む方向。
2つのベクトル \mathbf{a} とベクトル \mathbf{b} の張る平面⁽²⁾に垂直なベクトル。
2. 大きさ: \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角を θ とし、 \mathbf{a} , \mathbf{b} の大きさを a , b とした時、 $ab \sin \theta$
すなわち、 \mathbf{a} と \mathbf{b} の張る平行四辺形の面積と $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の大きさ $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ は等しい。

ベクトルの外積は、内積と違って、2つのベクトルから新しいベクトルを作る。ここで、上のベクトルの定義より、ベクトルの外積に関する次の重要な性質がわかる。

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
 - \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角が $\theta = 0, \pi, -\pi$ のとき、つまり、 \mathbf{a} と \mathbf{b} が平行⁽³⁾である時、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$
- この2つの性質は、ベクトルの内積の時に成立する以下の性質と対応するが、微妙に内積と異なるので注意を要する⁽⁴⁾。
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
 - \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角が $\theta = \pi/2, -\pi/2$ のとき、つまり、 \mathbf{a} と \mathbf{b} が垂直である時、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$

次に、 \mathbf{a} と \mathbf{b} の外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の成分表示を記す。上の定義に対応する成分表示は以下のようになることが知られている。



$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の成分表示

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の成分表示は

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

この公式を認めると、内積と同様に分配法則が成立することが導かれる。つまり、

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (6.2)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \quad (6.3)$$

(2) 「2つのベクトル \mathbf{a} とベクトル \mathbf{b} の張る平面」とは、以下の集合に属する点の集まりである。

$\{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = c_1 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b}, \mathbf{r} \text{ は } 3 \text{ 次元ベクトル。} c_1, c_2 \text{ は任意の実数。}\}$

(3) ここでいう「 \mathbf{a} と \mathbf{b} が平行である」とは、ある実数 k を用いて、 $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ と書けることである。

(4) 大学の線形代数学では、内積の性質として、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ は存在しない。というのも、この性質はベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} が実ベクトルの時に限る。実ベクトルは全ての成分が実数のベクトルのことである。高校数学や高校物理で扱うベクトルは実ベクトルなので、内積計算が出てきたとき、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ の性質が成立すると考えて良い。

が導かれる。

この公式は認めることにして先に進む。次に、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の時間微分を考える。 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ とおくと、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の時間微分は、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(a_2 b_3 - a_3 b_2) \\ \frac{d}{dt}(a_3 b_1 - a_1 b_3) \\ \frac{d}{dt}(a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{pmatrix}$$

となる。 \mathbf{a} と \mathbf{b} の各成分が時間 t に依存する場合を考えよう。 x 成分は、

$$\frac{d}{dt}(a_2 b_3 - a_3 b_2) = \frac{da_2}{dt} \cdot b_3 + a_2 \cdot \frac{db_3}{dt} - \frac{da_3}{dt} \cdot b_2 + a_3 \cdot \frac{db_2}{dt}$$

と計算できる。同様に $\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ の y, z 成分も考えると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \begin{pmatrix} \frac{da_2}{dt} \cdot b_3 + a_2 \cdot \frac{db_3}{dt} - \frac{da_3}{dt} \cdot b_2 - a_3 \cdot \frac{db_2}{dt} \\ \frac{da_3}{dt} \cdot b_1 + a_3 \cdot \frac{db_1}{dt} - \frac{da_1}{dt} \cdot b_3 - a_1 \cdot \frac{db_3}{dt} \\ \frac{da_1}{dt} \cdot b_2 + a_1 \cdot \frac{db_2}{dt} - \frac{da_2}{dt} \cdot b_1 - a_2 \cdot \frac{db_1}{dt} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{da_2}{dt} \cdot b_3 - \frac{da_3}{dt} \cdot b_2 \\ \frac{da_3}{dt} \cdot b_1 - \frac{da_1}{dt} \cdot b_3 \\ \frac{da_1}{dt} \cdot b_2 - \frac{da_2}{dt} \cdot b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \cdot \frac{db_3}{dt} - a_3 \cdot \frac{db_2}{dt} \\ a_3 \cdot \frac{db_1}{dt} - a_1 \cdot \frac{db_3}{dt} \\ a_1 \cdot \frac{db_2}{dt} - a_2 \cdot \frac{db_1}{dt} \end{pmatrix} \\ &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} \end{aligned} \tag{6.4}$$

と計算できる。ただし、 $\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \left(\frac{da_1}{dt}, \frac{da_2}{dt}, \frac{da_3}{dt} \right)$ とする。

6.1.2 ベクトルのモーメントと角運動量

ベクトルの外積について、ベクトルのモーメントを定義し、それをもとに角運動量を定義する。空間のある点 P にベクトル \mathbf{A} が与えられたとき、ある特定の点 O を定め、「点 O のまわりのベクトル \mathbf{A} のモーメント」を

$$(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O) \times \mathbf{A} \tag{6.5}$$

と定義する。角運動量は、この \mathbf{A} が運動量ベクトル \mathbf{p} の時の「点 O のまわりの運動量ベクトル \mathbf{p} のモーメント」として定義される。

角運動量ベクトル \mathbf{L} は、位置ベクトル \mathbf{r} と運動量ベクトル \mathbf{p} を用いて、

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{6.6}$$

と書ける。 \mathbf{L} の大きさ $L = |\mathbf{L}|$ は、点 $P(r)$ にある質点の原点 O のまわりの回転運動の勢いを表す指標である。 \mathbf{L} の向きは回転軸の向きを表し、 \mathbf{L} に対して、右ネジの回転方向(反時計回り)が回転の向きを表す。

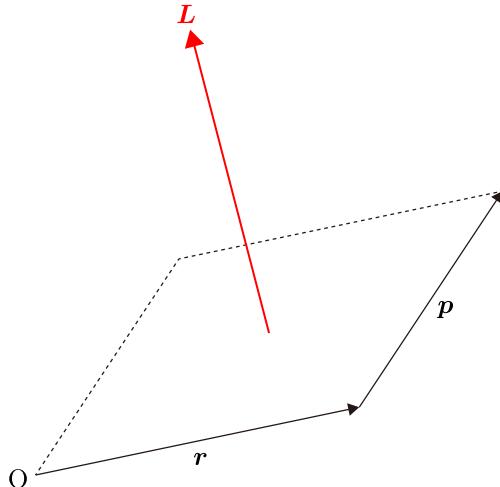


図 6.2 角運動量ベクトルと位置ベクトル、運動量ベクトルの関係

6.1.3 角運動量保存則

角運動量の時間微分を考えよう。運動量ベクトル \mathbf{p} が $\mathbf{p} = mv$ と書けることと、運動方程式 $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$ より、

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ &= \mathbf{v} \times (mv) + \mathbf{r} \times \mathbf{F}\end{aligned}$$

となる。

- 第1項：ベクトルの外積の性質から $\mathbf{0}$ である。
- 第2項： $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ は、点Oのまわりのベクトル \mathbf{F} のモーメントを表す式である。ここで、位置ベクトル \mathbf{r} と \mathbf{F} の外積 $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ は、回転を引き起こす能力の指標を表すベクトルで、 \mathbf{N} と表す⁽⁵⁾。

すると、角運動量ベクトル \mathbf{L} の時間微分は、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \quad (6.7)$$

と表せる。この式は、 \mathbf{N} によって回転が生じ、勢い \mathbf{L} が変化することを表している。

さて、 $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ となるのは、 $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ より、 \mathbf{r} と \mathbf{F} が平行なとき、つまり、 \mathbf{r} と \mathbf{F} の向きが同じか反対のときである。 \mathbf{r} と \mathbf{F} の向きが同じか反対のとき、この力を特に中心力という。

$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0}$ となるとき、 $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$ と書くと、

$$\frac{dL_x}{dt} = 0, \quad \frac{dL_y}{dt} = 0, \quad \frac{dL_z}{dt} = 0,$$

となるから、 L_x, L_y, L_z は時間によらず一定となる。すなわち、 \mathbf{L} は時間によらない定ベクトルである。

角運動量保存則

物体に働く力 (or 合力) \mathbf{F} が中心力のとき、角運動量ベクトル $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ は一定である。

⁽⁵⁾次の chapter 「剛体のつりあい」で特に重要なベクトルとして再度登場する。

6.2 万有引力の性質

6.2.1 万有引力とは

アイザック・ニュートンの逸話といえば、リンゴの話だろう。Googleで「ニュートン りんご」と検索すると、一番上に出てくるサイトは、<https://matome.naver.jp/odai/2143778201977202601> であった(2020年2月24日)。NAVERのまとめサイトである。まとめのタイトルは、「『ニュートンがリンゴで万有引力の法則を閃いた』は、作り話」であった。「地球がリンゴを引っ張っている」とニュートンは考えたという感じのことを、小学生ぐらいの時に、小学生向けの偉人集で誰もが読んだことがあるだろう。

さて、地球がリンゴを引っ張っているという事実は、リンゴが木から落ちるということから認めるしかない。でも、リンゴが地球を引っ張っているとは誰も思わないだろう。しかし、これが物理学的に正しいstatementである。上で紹介したまとめサイトでは、ニュートンは天体の運動の解析を通して万有引力の存在を見つけたと書かれている。なぜ、身の回りの現象から発見することはできなかったのか。The Feynman Lectures on Physics, Volume 2 にこんな記述がある。

If you were standing at arm's length from someone and each of you had one percent more electrons than protons, the repelling force would be incredible? How great?

日本語訳版の訳は、「人体の中の電子が陽子より1パーセント多いとすると、あなたがある人から腕の長さの所に立つ時、信じられない位強い力で反発するはずである。」となっている。

この主張は簡単に確かめることができるが、そのための準備として、万有引力の大きさを求める式とクーロンの法則を定義する必要がある。

万有引力の法則

2つの物体の間には、常に両者の質量 m_1, m_2 の積に比例し、距離 r の 2 乗に反比例する万有引力 F_G を及ぼしあう。この時、万有引力の大きさ F_G は

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (6.8)$$

と表せる。ここに登場した比例定数 G は万有引力定数で、 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ である。

Coulomb の法則

2つの物体が電荷 q_1, q_2 を持つ時、2つの物体の間には、常に両者の電荷の積に比例し、距離の 2 乗に反比例するクーロン力 F_C を及ぼしあう。この時、クーロン力の大きさ F_C は

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2} \quad (6.9)$$

と表せる。ここに登場した ϵ_0 は真空の誘電率で、 $\epsilon = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/N}$ である。クーロン力は2つの電荷の積が正なら斥力、負なら引力となる。

ベクトルを使って表すと、2つの物体の位置ベクトルが $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ なら、位置 \mathbf{r}_1 にある物体に働く万有引力 $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$ は、

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = G \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^2} \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|} \quad (6.10)$$

と表せる。

今、体重 60 kg の 2 人の人が共に 1 C の電荷を帯びているとする。腕の距離を今 1 m とみなすと、2 人の間に働く万有引力 F_G と静電気力 F_C は、

$$F_G = 6.67 \times 10^{-11} \times 60^2 = 2.40 \times 10^{-7} \text{ N}$$

$$F_C = \frac{1}{4 \times 3.14 \times (8.85 \times 10^{-12})} = 9.00 \times 10^9 \text{ N}$$

となり、 10^9 N のレベルの静電気力を受けることがわかる。もし、2 人の電荷が異なっているなら、お互いに 10^9 N の力で引き合っていて、離れることはできないだろう。それはさておき、万有引力は 10^{-7} N であり、十分小さいことがわかる。また、 F_C を F_G でわると、 10^{16} のオーダーなので、万有引力は静電気力に比べてとても小さく無視できることがわかる。従って、万有引力はとても小さく、日常生活で感じることはほとんどないと言える。

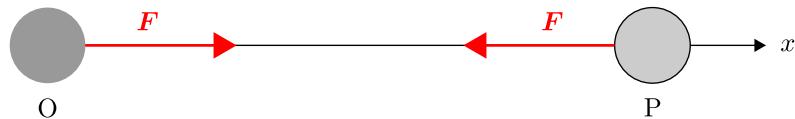
6.2.2 万有引力の位置エネルギー

次に、万有引力の位置エネルギーを考えよう。ここで、位置エネルギーの定義を思い出そう。

位置エネルギー

物体がある点 A から基準点 O まで移動させる時、保存力がする仕事を点 O を基準とした点 A における物体の位置エネルギーと定義する。

上の「位置エネルギー」の定義から、万有引力が保存力であることを確認する必要がある。



2 つの物体の一方が原点にあるとする。そして、図のように x 軸を取ることにする。 $\|\overrightarrow{OP}\| = r$ なら、2 つの物体に働く万有引力の大きさは

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

となる。上の図のように軸を設定すると、右側の物体に働く万有引力は(正負も含めて書くと、)

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

とかける。そのため、位置エネルギーの基準が $x = r_O$ であるとすると、位置エネルギーは万有引力が保存力なら、上の定義より、

$$U(r) = \int_r^{r_O} \left(-G \frac{m_1 m_2}{x^2} \right) dx \quad (6.11)$$

となる。

では、万有引力が保存力であるかどうか考えよう⁽⁶⁾。図 6.3 のように、 xy 平面の原点に質点 A (質量 M) があり、点 $P(a, 0)$ に質点 B (質量 m) があるとする。今回はこの物体の間に万有引力のみが働くとする。この状況下で、点 P から点 R($b \cos \phi, b \sin \phi$) に移動するときに要する仕事を考える。ただし、 M は m に比べて十分大きく、 $a < b \cos \phi$ とする。

⁽⁶⁾厳密な証明は、大学で習うベクトル解析で登場する grad や rot といった概念を導入しないとできない。ここでは、保存力ならランダムに 2 つのルートを選択した時に、保存力のした仕事は 2 つのルートの選び方に依存しないという性質を使い、考えやすい 2 つのルートを選択した時に保存力のした仕事が変わらないことを確認する。

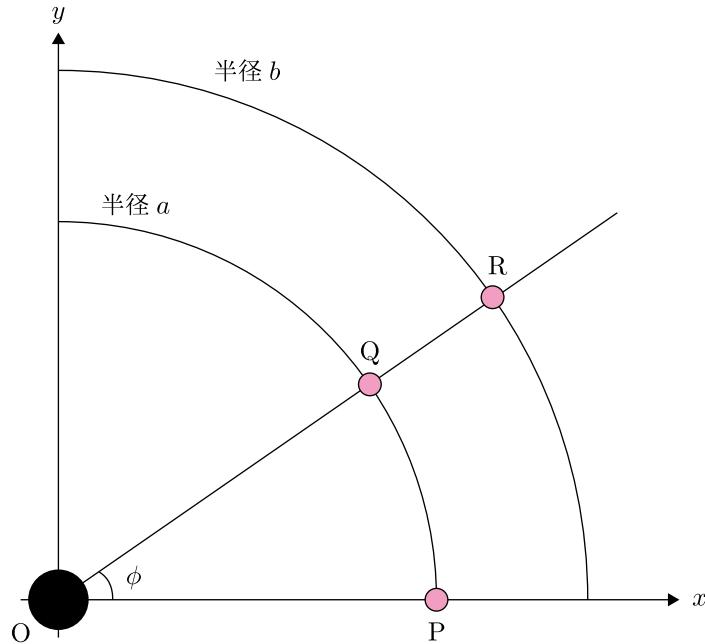


図 6.3 今回考える系の様子

「 M は m に比べて十分大きい」とき、2つの物体の相互作用に実際は動くが、原点 O にある質点 A の変位は小さく、質点 A は静止していると近似して良い。

ルート 1 点 P から点 $Q(a \cos \phi, a \sin \phi)$ へ円弧に沿って進み、その後、直線 QR に沿って、点 R へと移動する。

- PQ 間の移動で保存力がした仕事 W_{PQ} を考える。

万有引力はその定義からもわかるように中心力である。そのため、円弧に沿って動くとき、万有引力の向きは動径方向となり、進行方向と垂直となる。そのため、 $W_{PQ} = 0$ である。

- 続けて、QR 間の移動で保存力がした仕事 W_{QR} を考える。

原点からの距離が r のとき、質点 B に働く力 $F(r)$ は

$$F(r) = -G \frac{Mm}{r^2}$$

である(中心方向を向いているので、 $-$ が付いている。)。よって、 W_{QR} は

$$\begin{aligned} W_{QR} &= \int_{\text{点 } Q}^{\text{点 } R} \left(G \frac{Mm}{r^2} \right) dr = \int_a^b \left(-G \frac{Mm}{r^2} \right) dr \\ &= \left[G \frac{Mm}{r} \right]_a^b \\ &= GMm \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \end{aligned} \tag{6.12}$$

よって、ルート 1 での移動で保存力がした仕事は $W_1 = GMm \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$ である。

ルート2 点Pから点S($b \cos \phi, 0$)へx軸上を進み、その後、y軸に平行に点Sから点Rへと移動する。

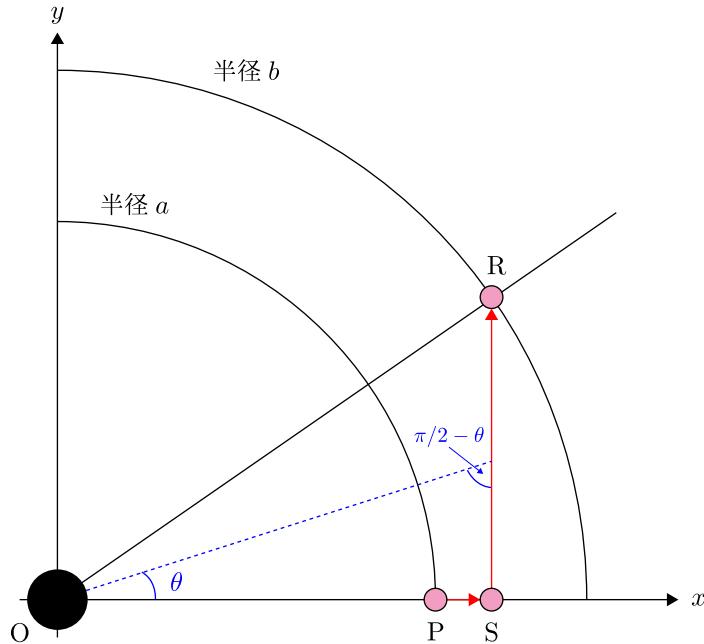


図 6.4 今回考える系の様子(2)：ルート2

- PS間の移動に要した仕事は W_{PS} は⁽⁷⁾、

$$W_{PS} = \int_a^{b \cos \phi} \left(-G \frac{Mm}{x^2} \right) dx = GMm \left(\frac{1}{b \cos \phi} - \frac{1}{a} \right) \quad (6.13)$$

となる。

- 次に、点Sから点Rへと移動する時に保存力がする仕事 W_{SR} を考える。

線分SR上で物体の位置が $(b \cos \phi, y) = (b \cos \phi, b \cos \phi \tan \theta)$ と表されるとき、中心力の大きさは、

$$|F(y)| = G \frac{Mm}{(b \cos \phi)^2 + (b \cos \phi \tan \theta)^2} = G \frac{Mm}{(b \cos \phi)^2} \cos^2 \theta \quad (6.14)$$

となる。よって、RS間で保存力がする仕事 W_{RS} は、進行方向と平行な成分(y成分)に注目すると、

$$W_{SR} = \int_0^{b \sin \phi} -|F(y)| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) dy = \int_0^{b \sin \phi} -G \frac{Mm}{(b \cos \phi)^2} \cos^2 \theta \sin \theta dy \quad (6.15)$$

である。ここで、線分RS上の点のy座標は $y = b \cos \phi \tan \theta$ と書けるから、 $\frac{dy}{d\theta} = b \cos \phi \frac{1}{\cos^2 \theta}$ となる。よって、上の積分は、

$$W_{SR} = \int_0^\phi -G \frac{Mm}{b \cos \phi} \sin \theta d\theta$$

と書ける。この積分を計算すると、以下のようになる。

$$W_{SR} = GMm \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b \cos \phi} \right) \quad (6.16)$$

⁽⁷⁾x軸上を物体が動くため積分変数をxとした。この後のSからRへの移動はy軸に平行に移動するので、積分変数をyとする。

以上より、(ルート 2) の移動で保存力がした仕事 W_2 は、

$$W_2 = W_{\text{PS}} + W_{\text{SR}} = GMm \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \quad (6.17)$$

と求められる。これは (ルート 1) の移動で保存力がした仕事 W_1 と等しい。

さて、なんとなく万有引力が保存力である感じがしてきた。厳密には、 $\nabla \times \mathbf{F}$ という量を評価する必要があるが、それは高校の範囲を逸脱するので、もう万有引力が保存力であることを認めることにして先に進もう。万有引力は保存力であることがわかったので、この subsection の最初にも書いた通り、位置エネルギー $U(r)$ を

$$U(r) = \int_r^{r_0} \left(-G \frac{m_1 m_2}{x^2} \right) dx \quad ((6.11))$$

により導入することができる。この積分を計算すると、

$$U(r) = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$$

となる。位置エネルギーは基準点の位置エネルギーを 0 とするのがとても扱いやすい。そこで、万有引力の場合、通常 $G \frac{m_1 m_2}{r_0}$ が 0 となるように位置エネルギーの基準 r_0 を無限遠にとる。

万有引力の位置エネルギー

2つの物体 (m_1, m_2) の距離が r のとき、無限遠を基準にした万有引力の位置エネルギー $U(r)$ は、

$$U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (6.18)$$

と書ける。

6.2.3 万有引力の位置エネルギーを含むエネルギー保存則

2つの物体 (M, m) の距離が r の時の万有引力の大きさは $G \frac{Mm}{r^2}$ であることはすでに説明した。今度は運動方程式を変形することで、万有引力の位置エネルギーの式 (式 (6.18)) が出てくることを確認しよう。

2つの物体の質量を M, m とし、 M は m に比べて非常に大きいとする。すると、質量 M の物体は静止しているとみなすことができるので、質量 m の物体の運動方程式だけを考えれば良い。

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (6.19)$$

この運動方程式の両辺のベクトルと $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ の内積をとる。

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (6.20)$$

ここで、左辺のベクトルの内積は、

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v_x^2 + \frac{1}{2} v_y^2 + \frac{1}{2} v_z^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$$

と変形できる。すると、式 (6.20) は、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = -G \frac{Mm}{r^3} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r^2 \right)$$

となる。逆に、 $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r^2 \right) = r \frac{dr}{dt}$ なので、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dr} \left(G \frac{Mm}{r} \right) \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(G \frac{Mm}{r} \right)$$

と変形できて、これより、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 - G \frac{Mm}{r} \right) = 0 \quad (6.21)$$

という式が導ける。この式はエネルギー保存則である。 $\frac{1}{2} mv^2$ は運動エネルギーを表す項なので、 $-G \frac{Mm}{r}$ は万有引力による位置エネルギーの項であると考えられる。以上より、運動方程式を変形することで、万有引力の位置エネルギーの式、式 (6.18) が得られることが確かめられた。

6.2.4 万有引力定数 G と重力加速度の大きさ g の関係

地球がリンゴを引っ張っている力は何か。この答えは「万有引力」である。いや、それ以外にも「重力」と答えることもできるだろう。では、万有引力と重力の間にはどんな関係があるのか。名前が違うのだから、もちろん違うものである。しかし、大学入試の物理の問題を解く時は、「万有引力 = 重力」という式を立てる。これはなぜか？

図 6.5⁽⁸⁾は、万有引力と重力の違いをわかりやすく説明している図である。重力は万有引力と自転の遠心力の合力である。そして、この遠心力は万有引力に比べてとても小さく無視できる。

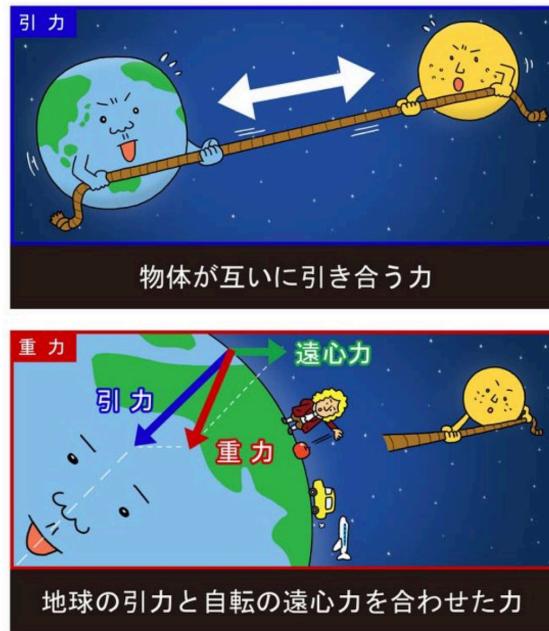


図 6.5 引力と重力の違い

万有引力定数 G と重力加速度の大きさ g の関係を見る前に、遠心力が万有引力に比べて十分小さいことを確認する。次のページの図のような位置における遠心力と万有引力の大きさを考える。

ここでは、地球は完全な球体とみなし、各種の物理量として、次の値を用いることとする。

- 地球の自転周期：23 時間 56 分 4.098903691 秒 (86164.098903691 秒)

⁽⁸⁾<https://mainichi.jp/articles/20160425/mul/00m/040/00700sc> より。

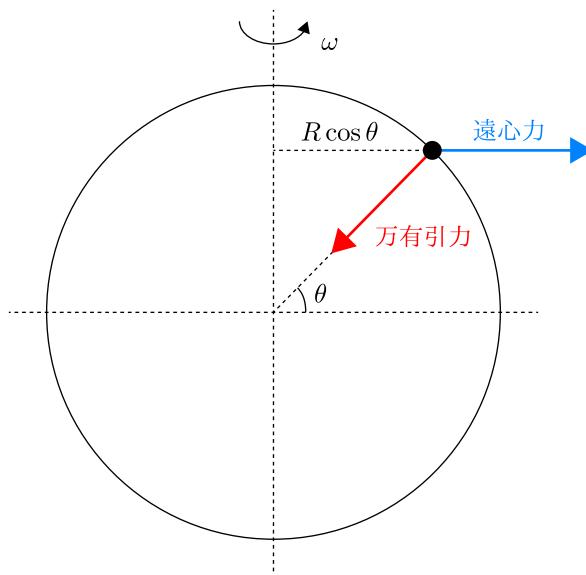


図 6.6 万有引力と地球の自転の遠心力の関係

- 地球の質量 : $5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
- 地球の半径 : 6371 km

まず、地球の自転の角速度 ω を求める。自転周期は、86164.098903691 秒なので、

$$\omega = \frac{2\pi}{86164.098903691} \approx 7.29 \times 10^{-5} / \text{s}$$

である。すると、上の図の位置にある物体(質量 m)が感じる遠心力の大きさ F_ω は、

$$\begin{aligned} F_\omega &= m(R \cos \theta) \omega^2 = m \cos \theta \cdot 6371 \times 10^3 \times (7.29 \times 10^{-5})^2 \\ &\approx m \cos \theta \cdot 3.39^{-2} \end{aligned}$$

と求められる。一方、万有引力の大きさ F_G は、万有引力定数 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ を使うと、

$$F_G = G \frac{Mm}{R^2} = m \cdot \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24}}{(6371 \times 10^3)^2} \approx m \cdot 9.81$$

となる。よって、 F_ω と F_G の比は、

$$\frac{F_\omega}{F_G} = \frac{3.39 \times 10^{-2} \cos \theta}{9.81} \approx 3.46 \times 10^{-3} \cos \theta \quad (6.22)$$

となる。つまり、 θ がどんな値をとっても、遠心力の大きさは、万有引力の大きさの 3.46×10^{-3} 倍をこえることはない。よって、自転による遠心力が万有引力より十分小さいことがわかる。しかし、 10^{-3} のオーダーというのは、なんとも言えない微妙な値であるように私は思ってしまう。

とにかく、遠心力は十分小さいことがわかったので、「重力 \approx 万有引力」と考えよう。すると、この 2 つの量の大きさは近似的に等しいので、次の式が成立する。

$$mg = G \frac{Mm}{R^2} \quad (6.23)$$

これより、 g と G は

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

という関係で結ばれることがわかる。そして、前のページの計算より、この g の値が 9.81m/s^2 であることもわかる。

万有引力定数 G と重力加速度の大きさ g の関係

地球の質量を M 、半径を R とした時、 G と g の間には、

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad (6.24)$$

という関係が成立する。

6.2.5 第一宇宙速度と第二宇宙速度

万有引力を受ける物体の運動に関する指標として、第一宇宙速度と第二宇宙速度がある。6.2節の最後にこの2つの速度について紹介する。以下、地球の質量を M 、半径を R とし、万有引力定数を G とする。

第一宇宙速度

地表すれすれに円軌道を描く人工衛星について考えよう。ここでいう「すれすれ」とは、地表面からの高さが数メートルということではなく、地球の半径 6371km に対して十分小さい高さを表す。そのため、高度 50km であっても、地球半径の $1/100$ 以下なので「すれすれ」であると言える。

この場合の人工衛星の運動方程式を立てよう。人工衛星の質量を m 、速さを v とすると、

$$m \frac{v^2}{R} = G \frac{Mm}{R^2}$$

となる。これより、 $v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR}$ と書くこともできる。 $g = 9.81\text{m/s}^2$ と $R = 6371\text{km}$ を使うと、この速さは約 7.9km/s であることがわかる。この速さ $v = \sqrt{gR}$ のことを第一宇宙速度という。

第二宇宙速度

次に、地球の地表面から初速 v で真上に打ち上げた時に、どこまでも高く飛んでいき無限遠方に到達する条件を考えよう。これは入試問題にもよく出てくる問題である。

エネルギー保存則を考える。無限遠方での万有引力の位置エネルギーは 0 なので、無限遠方に到達した場合、

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{mM}{R}}_{\text{点 A における力学的エネルギー}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_\infty^2}_{\text{無限遠方における力学的エネルギー}} \quad (6.25)$$

が成立する。この式の右辺は非負なので、

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{mM}{R} \geq 0 \iff v \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR}$$

を初速 v が満たしていないと、無限遠方に到達することはない。

この速さ $\sqrt{2gR}$ は無限遠方に到達するために最低限必要な速度であり、第二宇宙速度という。第二宇宙速度を計算すると、約 11km/s であることがわかる。

これで、第一宇宙速度と第二宇宙速度の記述は十分であるが、面白い記述を見つけたので紹介する。吉田弘幸先生の『はじめて学ぶ物理学 [上] —学問としての高校物理』(日本評論社) の例 10-1 である。

初速 v で真上に打ち上げた時の物体が到達する最高点の地表面からの高さを h とする。このときのエネルギー保存則を考える。最高点が h ということは地球の中心からの距離は $R + h$ である。また、最高点では速度が 0 になるので、エネルギー保存則を考えると、次の式が成立する。

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R}}_{\text{点 A における力学的エネルギー}} = \underbrace{-G\frac{mM}{R+h}}_{\text{無限遠方における力学的エネルギー}} \quad (6.26)$$

この式を解いて h を求める。まず、 $GM = gR^2$ を用いて、式 (6.26) を書き換えると、

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 - mgR}_{\text{点 A における力学的エネルギー}} = \underbrace{-mg\frac{R^2}{R+h}}_{\text{無限遠方における力学的エネルギー}} \quad (6.27)$$

となる。これを変形すると、

$$R + h = \frac{mgR^2}{mgR - \frac{1}{2}mv^2} = \frac{2gR^2}{2gR - v^2} \quad (6.28)$$

となる。ゆえに、最高点 h は以下のようになる。

$$h = \frac{2gR^2}{2gR - v^2} - R = \frac{v^2}{2gR - v^2}R \quad (6.29)$$

さて、ここまでとりあえず h を求めるなどを意識して式変形をしてきたが、注意しないといけない点があった。それは、式 (6.27) から式 (6.28) の変形で、 $mv^2/2 - mgR$ で割っているので、この量は non-0 でないといけない。式 (6.27) の右辺は負の量なので、式 (6.29) の h を求める際は、式変形の裏で、

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgR < 0 \iff v^2 < 2gR$$

が要請されている。この要請をクリアしていないと、式 (6.29) の h は負になってしまう。

次に、 v^2 と h の関係を調べよう。式 (6.29) より、

$$\frac{dh}{dv^2} = \frac{2gR^2}{(2gR - v^2)^2} > 0, \quad \lim_{v^2 \rightarrow 2gR} h = +\infty$$

であることがすぐにわかる。したがって、初速 v が大きくなると最高点の高さ h が大きくなり、 $v < \sqrt{2gR}$ の場合は h は有限となる。そして、 $v \rightarrow \sqrt{2gR}$, $v > \sqrt{2gR}$ の場合は無限遠方に到達する。先ほどの第二宇宙速度 $\sqrt{2gR}$ は無限遠方に到達するかどうかの境界の速度である。

6.3 Kepler の法則と惑星の運動

この section では、Kepler の法則をまず紹介して、Kepler の法則と既に登場した万有引力の式に基づき、惑星の運動を解析する。この section では、高校物理の教科書に記載されているレベルを逸脱するが、数学 3 レベルまでの数学でけっこう対処できるので、数学的な解析も適宜記す。

6.3.1 Kepler の法則とは？

太古の昔から太陽や月、星々に関する興味を人は持っていた。特に、天動説と地動説については昔から論争があった。前の section では Newton が万有引力を発見したことを記したが、これはティコ・ブラーエ (Tycho Brahe) による天体の観測の成果と、その後のケプラー (Kepler) による解析の成果が大きく影響している。ケプラーが発見したことは以下に記す **Kepler の 3 法則**としてまとまっている。

Kepler の法則

1. 惑星は太陽を 1 つの焦点とする橙円上を動く。
2. 面積速度は一定。
3. 惑星の公転周期 T と軌道橙円の長半径 a の間には、

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const.} \quad (6.30)$$

の関係がある。

Kepler の法則について具体的に見ていく。第 1 法則と第 3 法則についてはそれ以上のことを言っていない。ただ、第 3 法則は Newton が惑星に対する太陽の引力が距離の 2 乗に反比例することを導くきっかけになっている。文章にするとシンプルだけど、非常に重要な法則である。

第 2 法則について。ここでは面積速度という言葉が出てくる。面積速度は、動径ベクトルが単位時間あたりに通過する面積により定義される。

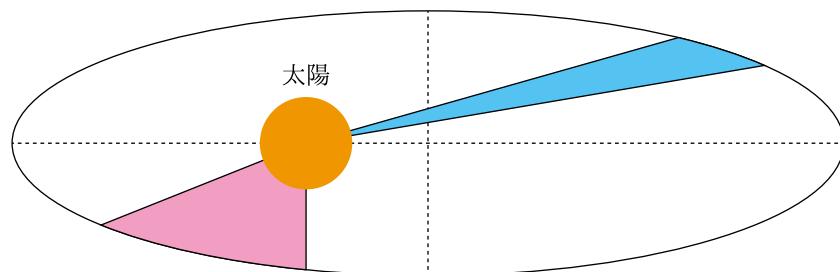


図 6.7 Kepler の第 2 法則：面積速度は等しい

6.3.2 面積速度保存則

2020年2月26日に行われた東大入試の2日目。Twitterに前年よりも物理の問題が難しくなったというツイートが多数投稿された。また、第1問に「暗黒物質」に関する簡単な考察が問題に登場して話題になった。そんな第1問の前半の話題は「面積速度」であった。問題文の冒頭で面積速度の定義が記され、それをもとに解く問題だった。このsubsectionでは、まず一般論を記したあと、受験生を苦しめた東大入試を考えることにする。

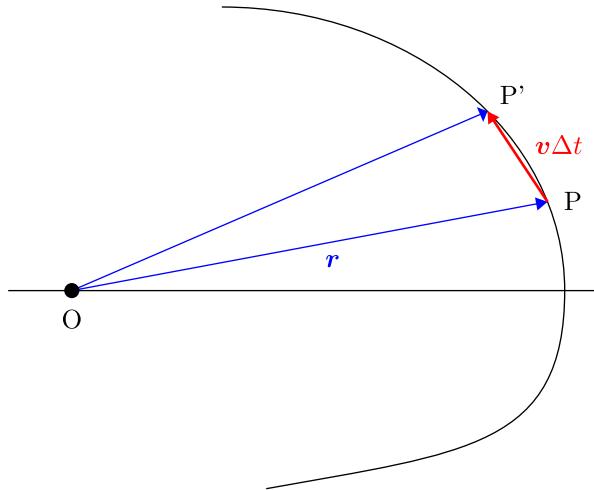


図 6.8 面積速度の定義

点 $P(r)$ から点 $P'(r + dr = r + v\Delta t)$ まで動径ベクトルが動いた時に通過する面積を考える。 Δt が十分小さい時、点 P と点 P' をつなぐ曲線を近似的に直線と近似できる。そのため、動径ベクトルが動いた時に通過する面積 ΔS は三角形 OPP' の面積で表される。三角形の面積は数学1で習うように、 $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$ の公式で求められるが、これはベクトルの外積を使って書き直すことができる。三角形 OPP' の面積は、ベクトル \overrightarrow{OP} と $\overrightarrow{PP'}$ が張る平行四辺形の面積の半分なので、

$$\Delta S = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}\Delta t| = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| \Delta t$$

とかける。ここで、角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ との関連を見ていくことにする。

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$$

であり、 $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$ を使うと、

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2m} |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{L}|}{2m}$$

が得られる。ここで、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると、

$$\frac{dS}{dt} = \frac{|\mathbf{L}|}{2m} \quad (6.31)$$

と書くことができる。この左辺は面積の時間微分であり、面積速度と言われる。この式(6.22)より、面積速度は角運動量の大きさと結びつけられることがわかる。すると、角運動量が一定なら、面積速度も一定になる。6.1.3「角運動量保存則」で見た通り、物体に働く力が中心力だけならば、角運動量ベクトル \mathbf{L} は一定なので、その大きさも一定である。したがって、「物体に働く力が中心力だけならば、面積速度は一定である」という性質を面積速度保存則といふ。

面積速度保存則

物体に働く力 (or 合力) \mathbf{F} が中心力だけのとき、動径ベクトルが単位時間に通過する面積 (面積速度) は一定である。

$$\frac{dS}{dt} = \frac{|\mathbf{L}|}{2m} = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| \quad (6.32)$$

続けて、例の東大の入試問題を考える。2020年の東大物理の第1問の[1]を考えよう。

問題 14

xy 平面内で運動する質量 m の小球を考える。小球の各時刻における位置、速度、加速度および小球に働く力のベクトルをそれぞれ

$$\mathbf{r} = (x, y), \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y), \quad \mathbf{a} = (a_x, a_y), \quad \mathbf{F} = (F_x, F_y)$$

とする。また、小球の各時刻における原点 O からの距離を $r = |\mathbf{r}|$ 、速度の大きさを $v = |\mathbf{v}|$ とする。なお、小球の大きさは無視できるものとする。

(1) 以下の文中の (ア)~(カ) に当てはまるものを v_x, v_y, a_x, a_y から選べ。

各時刻において原点 O と小球を結ぶ線分が描く面積速度は

$$A_v = \frac{1}{2}(xv_y - yv_x) \quad (1)$$

で与えられる。ある時刻における位置および速度ベクトルが

$$\mathbf{r} = (x, y), \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y)$$

であったとき、それらは微小時刻 Δt たった後にそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= (x + \boxed{\text{(ア)}} \Delta t, y + \boxed{\text{(イ)}} \Delta t) \\ \mathbf{v}' &= (v_x + \boxed{\text{(ウ)}} \Delta t, v_y + \boxed{\text{(エ)}} \Delta t) \end{aligned}$$

に変化する。このことを用いると、微小時間 Δt における面積速度の変化分は、

$$\Delta A_v = \frac{1}{2}(x \boxed{\text{(オ)}} - y \boxed{\text{(カ)}}) \Delta t \quad (2)$$

で与えられる。なお $(\Delta t)^2$ に比例した面積速度の変化分は無視する。

(2) 上の結果を用いて、面積速度が時間変化しないためには力 \mathbf{F} の成分 F_x, F_y がどのような条件を満たせばよいか答えよ。ただし小球は原点 O から離れた点にあり、力は零ベクトルではないとする。

(解答)

(1) 速度と加速度の定義が、位置と速度の微分であることをふまえて考える。

(2)

6.3.3 万有引力とケプラーの法則(演習)

2020年春の改訂で、万有引力やケプラーの法則に関する問題も変更することにしました。以下の問題は『2016 物理重要問題集』の49番の問題を一部変更したものです。万有引力に関する入試問題のエッセンス、どのような公式を利用するかは太字で記した。

問題 15

地上の1点から鉛直上方へ質量 m の小物体を打ち上げる。地球は半径 R 、質量 M の一様な球で、物体は地球から万有引力の法則に従う力を受けるものとする。ただし、地上での重力加速度の大きさを g 、万有引力定数を G とする。図6.9を参照して、次の問い合わせに答えよ。また、地球の自転および公転は無視するものとする。

- (1) 地上での重力加速度の大きさ g を R, M, G を用いて表せ。
- (2) 物体の速度が地球の中心Oから $2R$ の距離にある点Aで0になるためには、初速度の大きさをどれだけにすればよいか。 g, R を用いて表せ。

物体の速度が点Aで0になった瞬間、物体に大きさが v でOAに垂直な方向の速度を与える。

- (3) 物体が地球の中心Oを中心とする等速円運動をするためには、 v をどれだけにすればよいか、 g, R を用いて表せ。また、この円運動の周期を g, R を用いて表せ。

点Aで物体に与える速さが v が(3)で求めた値からずれると、物体の軌道は、地球の中心を1つの焦点とする楕円となる。楕円軌道は v が大きくなるほど大きくなり、 v がある値以上になると、物体は無限遠方に飛び去ってしまう。

- (4) 物体がABを長軸とする楕円軌道を描くとき、次の問い合わせに答えよ。ただし、点Bの地球の中心からの距離は $6R$ である。
 - (4-a) 点Bにおける物体の速さ V を v を用いて表せ。
 - (4-b) 速さ v を g, R を用いて表せ。
 - (4-c) この楕円軌道の周期を g, R を用いて表せ。
- (5) 物体が地球に衝突もせざかつ無限遠方に飛び去ることもなく楕円軌道を描き続けるためには、速さ v はどのような範囲になければならないか答えよ。

(解答)

$$(1) \text{ (注 9)} \quad g = \frac{GM}{R^2}$$

この問題15では、(2)以降の問題では、 $g = \frac{GM}{R^2} \iff GM = gR^2$ を用いて、 G, M を用いずに答えを表す。

- (2) エネルギー保存則を利用して求める。 万有引力による位置エネルギーの基準を無限遠方にとると、

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM}{R}}_{\text{点Oにおける力学的エネルギー}} = \underbrace{-G\frac{mM}{2R}}_{\text{点Aにおける力学的エネルギー}} \iff v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR}$$

⁽⁹⁾ これは公式として覚えてよいかもしれない。6.2.5「第一宇宙速度と第二宇宙速度」に詳細を記している。

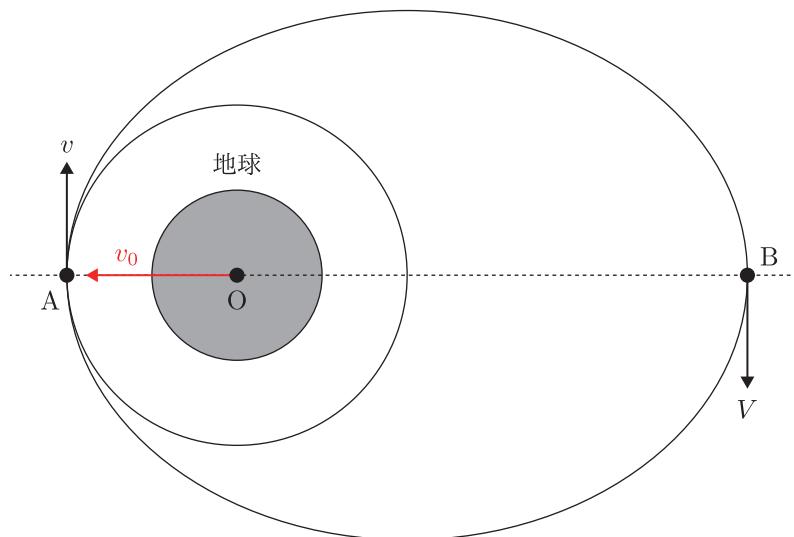


図 6.9 問題 15 で使用する図

(3) 円運動の式を使う。向心力が万有引力であることに注意する。

$$m \frac{v^2}{2R} = G \frac{mM}{(2R)^2} \iff v = \sqrt{\frac{GM}{2R}} = \sqrt{\frac{gR}{2}}$$

また、等速円運動の周期を T とすると、

$$T = \frac{2\pi(2R)}{v} = \frac{2\pi(2R)}{\sqrt{\frac{gR}{2}}} = 4\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

(4-a) 面積速度保存則を使う。

$$\underbrace{\frac{1}{2}(2R)v}_{\text{点 A での面積速度}} = \underbrace{\frac{1}{2}(6R)V}_{\text{点 B での面積速度}} \iff V = \frac{1}{3}v$$

(4-b) 再び、エネルギー保存則を使う。エネルギー保存則により、図 6.9 のような軌道を実現するための v を求めることができる。

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{mM}{2R}}_{\text{点 A における力学的エネルギー}} = \underbrace{\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{3}v\right)^2 - G \frac{mM}{6R}}_{\text{点 B における力学的エネルギー}} \iff \frac{1}{2}m \cdot \frac{8}{9}v^2 = G \frac{mM}{3R}$$

が成立することから、 $v^2 = \frac{3GM}{4R} = \frac{3}{4}gR$ となる。ゆえに $v = \frac{1}{2}\sqrt{3gR}$ と求められる。

(4-c) Kepler の第 3 法則を使う。橙円軌道の長半径は、図 6.9 より $4R$ である。橙円軌道の周期を T' とすると、 $(\text{周期})^2 / (\text{長半径})^3$ が一定であることより、

$$\frac{T^2}{(2a)^3} = \frac{T'^2}{(4a)^3} \iff T'^2 = 8T^2 \iff T' = 2\sqrt{2}T$$

が成立する。よって、 $T = 16\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$ である。

- (5) 物体が無限遠方に飛び去るのに必要な初速度をまず考える。無限遠方での万有引力の位置エネルギーは 0 なので、無限遠方に飛び去った場合、

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{2R}}_{\text{点 A における力学的エネルギー}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_\infty^2}_{\text{無限遠方における力学的エネルギー}}$$

が成立する。この式の右辺は非負なので、 v は $v^2 \geq \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR}$ を満たす必要がある。よって、無限遠方に飛び去らないためには、 $v < \sqrt{gR}$ を満たす必要がある。

一方、地球に衝突しないのは、 v が小さくて図 6.9 の 2 点 A、B 間の距離が $\overline{AB} \geq 3R$ となるときである。そこで、 $\overline{AB} = 3R$ の場合に注目する。

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{1}{2}(2R)v}_{\text{点 A における面積速度}} &= \underbrace{\frac{1}{2}RV}_{\text{点 B における面積速度}} \\ \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{2R}}_{\text{点 A における力学的エネルギー}} &= \underbrace{\frac{1}{2}mV^2 - G\frac{mM}{R}}_{\text{点 B における力学的エネルギー}} \end{aligned}$$

この 2 式より、 $\frac{3}{2}mv^2 = G\frac{mM}{2R} \iff v^2 = \sqrt{\frac{GM}{3R}} = \sqrt{\frac{gR}{3}}$ となる。よって、これより v が大きいと、地球に衝突しない。

以上より、求める v の条件は $\boxed{\sqrt{\frac{gR}{3}} \leq v < \sqrt{gR}}$ である。

6.3.4 逆2乗則から橙円軌道をとる理由を考える

6.2.1 「万有引力とは」で、万有引力の大きさは距離の2乗に比例するという逆2乗則を紹介した。昔の人ほどのように発見したのか。ニュートンをはじめとする偉大な研究者たちは実験を行い、逆2乗則を予想していたかもしれない。理論的に逆2乗則が正しいことを保証するのは、ケプラーが発見した3つの法則である。この3法則を利用して逆2乗則が理論的に正しいのではないかと考えられ、数々の実験結果によって裏付けられていった。学問的な発展はこの順序である。

多くの教科書や参考書には逆2乗則を認めてケプラーの法則を導出することが書かれていて、逆のケプラーの法則を認めて逆2乗則を導出する記述は0である。このことは歴史的順序に反している。ただ、「逆2乗則 → ケプラーの法則」の流れはその導出過程を含めて得るものが多い。そこで、このTeXノートでも、「逆2乗則 → ケプラーの法則」のアプローチをまずしようと思う。でも、「逆2乗則 → ケプラーの法則」はとても複雑なので、その一部だけに触れる。このsubsectionでは、タイトルにもあるように、逆2乗則を認めた上で、橙円軌道をとる理由を考える。特に、前のsubsectionの例題に登場した

「橙円軌道が実現するためには、人工衛星の力学的エネルギーが負の値をとることが必要である」

という文について考えることにする。

まず、準備として、第4章で取り上げた「速度・加速度の極座標表示」を確認する。

速度の極座標表示

速度 \mathbf{V} を極座標系で表す。原点から遠ざかる方向の成分 V_r と、それに垂直な方向(接線方向)成分 V_θ は次のように表せる。

$$\begin{aligned} V_r &= \dot{r} = \frac{dr}{dt} \\ V_\theta &= r\dot{\theta} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega \end{aligned}$$

加速度の極座標表示

加速度 \mathbf{a} を極座標系で表す。原点から遠ざかる方向の成分 a_r と、それに垂直な方向(接線方向)成分 a_θ は次のように表せる。

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 = \ddot{r} - r\omega^2 \\ a_\theta &= \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt}(r^2\omega) \end{aligned}$$

極座標系で惑星の運動方程式を考える。惑星に働く力は中心力の万有引力だけなので、運動方程式は以下のようになる。

(向心方向の運動方程式)

$$m\{\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2\} = -G\frac{Mm}{r^2} \quad (6.33)$$

(接線方向の運動方程式)

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad (6.34)$$

式 (6.27) は、 $\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$ と書けるので、これより、 $mr^2\dot{\theta} = \text{const.}$ と書ける。この一定値を L とおく。すると、 $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$ なので、式 (6.26) に代入すると、

$$m\ddot{r} - mr\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 + G\frac{Mm}{r^2} = 0$$

が成立する。この式を少し書き換える。 $v = \frac{dr}{dt}$ とおくと、

$$m\frac{dv}{dt} - \frac{L^2}{mr^3} + G\frac{Mm}{r^2} = 0$$

となるから、これに $v = \frac{dr}{dt}$ をかけると、

$$mv\frac{dv}{dt} + \frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{2mr^2}\right) \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{d}{dr}\left(-G\frac{Mm}{r}\right) \cdot \frac{dr}{dt} = 0$$

となる。これを変形すると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r}\right) = 0 \quad (6.35)$$

となる。これはエネルギー保存則のような式である。先ほど、 $v = \frac{dr}{dt}$ と、速度を表さないにも関わらず、速度を表すのによく使う v を用いたのは、運動エネルギーと類似する項が導けるからである。ここでは、この項を「形式的運動エネルギー」と呼ぶことにしよう。エネルギー保存則は位置エネルギーと運動エネルギーの総和が一定になるという法則である。このことをふまえると、 $\frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r}$ は位置エネルギーに相当する項であるといえる。そこで、 $\frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r}$ を「形式的位置エネルギー」と呼ぶことにしよう。実際、 $-G\frac{Mm}{r}$ は万有引力による位置エネルギーである。では、 $\frac{L^2}{2mr^2}$ の項は何を意味するのか。

再び運動方程式に戻って考える。運動方程式を書き直すと、次のようになる。

$$m\ddot{r} = -G\frac{Mm}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3} \quad (6.36)$$

この式は何か。静止系から見た運動方程式は、

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = -G\frac{Mm}{r^2}$$

なので、式 (6.29) は慣性系（惑星とともに動く観測者）から見た運動方程式といえる。すると、 $\frac{L^2}{mr^3}$ は慣性力である。それも中心から遠ざかる向きに働くことが式 (6.29) からわかるので遠心力である。そのため、式 (6.28) の $\frac{L^2}{2mr^2}$ の項は遠心力に由来するポテンシャルといえる。

では、元に戻ろう。

- 形式的運動エネルギー: $K = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$

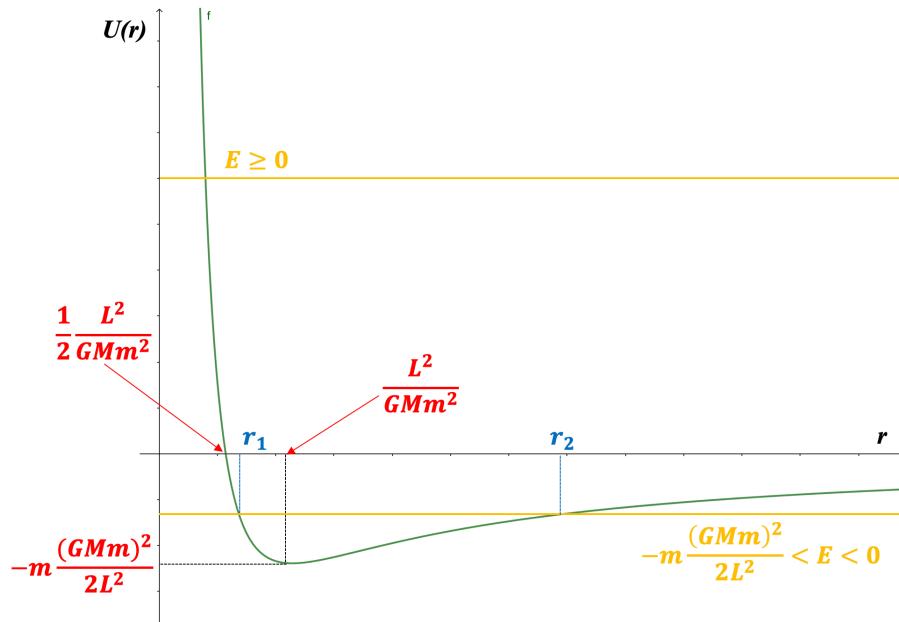
- 形式的運動エネルギー: $U = \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r}$

とすると、式 (6.28) より $K + U = E (= \text{const.})$ が成立する。なお、 $K \geq 0$ である。この E は全力学的エネルギーである。極座標系で見ているので、とても変な感じがする。でも、この E は運動方程式を変形することで自然に出てきた E なので、全力学的エネルギーである。

$K \geq 0$ より、 $E - U \geq 0$ である。つまり、初期条件により定まる E に対して、 $E \geq U$ を満たすような r を惑星はとりうる。ここで U の r 依存性を調べる。 U を r で微分して増減表を書くと以下のようになる。

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{L^2}{mr^3} + G\frac{Mm}{r^2} = \frac{1}{r^3} \left(-\frac{L^2}{m} + GMmr \right)$$

r	0	...	$\frac{L^2}{GMm^2}$...	$+\infty$
$\frac{dU}{dr}$		-	0	+	
U	$+\infty$	\searrow	$-\frac{m}{2L^2}(GMm)^2$	\nearrow	0



$E \geq U$ を満たす r を取りうることから、 r の範囲について以下のことわざわかる。

- $E \geq 0$: $U(r) = E$ となる r 以上の全ての r を取りうる。 $(r \rightarrow \infty$ もありうる)
- $-m\frac{(GMm)^2}{2L^2} < E < 0$: r としては、上の図の $r_1 \leq r \leq r_2$ の部分が該当する。
- $E = -m\frac{(GMm)^2}{2L^2}$: r としては $r = \frac{L^2}{GMm^2}$ のみが当てはまる。
- $E < -m\frac{(GMm)^2}{2L^2}$: $E \geq U$ を満たす r は存在しない。

まず、 $E = -m\frac{(GMm)^2}{2L^2}$ の時を考える。 $r_0 = \frac{L^2}{GMm^2}$ とおく。 r の値として取りうるものが 1 つしかないというのには、ずっとその r の値 $r = r_0$ を取るということを表す。これは、 $E = -m\frac{(GMm)^2}{2L^2}$ の時は、原点からの距離が常に等しい状態を保つことを意味する。それはどんな状況か。答えは 2 パターンある。

- 惑星がずっと静止している状態。
- 惑星は、運動して位置を変えたとしても、半径 r_0 の円軌道上しか動かない。

前者の方を考えるのは無意味なので、一旦無視しよう。物理的に意味があるのは、後者の方で、エネルギーが最も安定になる時、惑星は円運動をすることがわかった。

続けて、 $-m \frac{(GMm)^2}{2L^2} < E < 0$ のときを考える。 r の値は、 $r_1 \leq r \leq r_2$ をとる。まず、 r_1 と r_2 を求めよう。

$$\frac{L^2}{2mr^2} - G \frac{Mm}{r} = E \iff Er^2 + GMmr - \frac{L^2}{2m} = 0$$

よって、2次方程式の解の公式より、

$$r = \frac{-(GMm) \pm \sqrt{(GMm)^2 + \frac{2EL^2}{m}}}{2E}$$

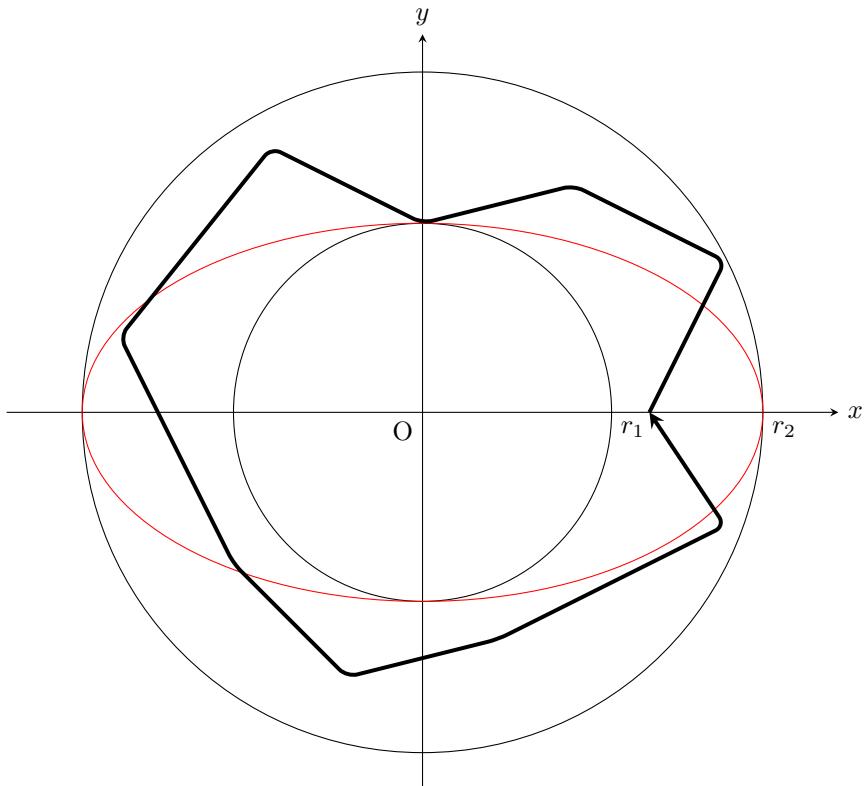
$E < 0$ に注意すると、

$$r_1 = \frac{-(GMm) + \sqrt{(GMm)^2 + \frac{2EL^2}{m}}}{2E}, \quad r_2 = \frac{-(GMm) - \sqrt{(GMm)^2 + \frac{2EL^2}{m}}}{2E}$$

となる。この E によって決まる r_1 と r_2 の間の値を r はとる。さて、本題に戻る。このことが意味することは何か。 r が r_1 と r_2 の間をとるということは、下図の太線のように、ドーナツ型の領域を動く可能性があると考えられる。しかし、厳密に解析すると、赤線のような橙円上を動くことがわかる。この話もしたいが、さらにページが必要なことと、高校物理の範囲をさらに逸脱してしまうので、ここではふれない。ただ、 $-m \frac{(GMm)^2}{2L^2} < E < 0$ の時は、長軸 r_2 、短軸 r_1 の橙円軌道上を運動するということだけふれて、この section を終わりにする。もうここまでくれば、

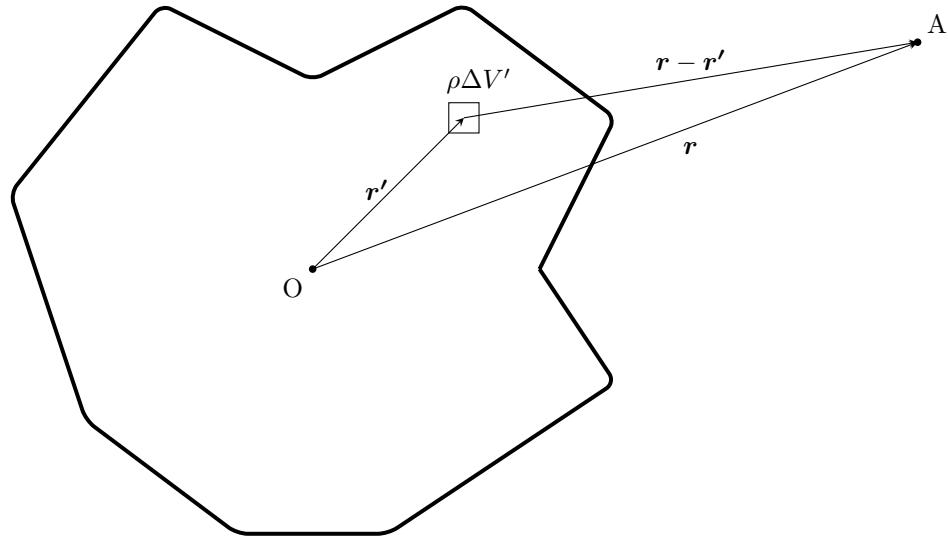
「橙円軌道が実現するためには、人工衛星の力学的エネルギーが負の値をとることが必要である」

の意味がわかるはずだ。



6.4 大きさのある物体の間の万有引力

ここまで取り上げた万有引力の法則は、大きさが十分無視できる物体（質点）にのみ適用できる。この subsection では、大きさが無視できない場合について考える。この subsection での考え方は、物理学の色々な場面へ応用できる。



大きさを無視できない物体を扱う時は、その物体を微小部分に分割することを考える。これを質点近似という。なぜ、質点近似をするのか。理由は2つある。

- 質点、あるいは、質点とみなせるぐらい十分小さくなければ、万有引力の法則が使用できない。
- 質点という単純なモデルの合成として全体を考えられる。
(複雑な物体を複雑なまま考えることを避ける。複雑から単純へ。)

以上の2つの理由から、私たちは質点近似モデルを利用することができる。

では、2つの物体のうちの一方が、上の図のような形をしているとする。点 A(位置ベクトル \mathbf{r}) にある質点(質量 m)に働く力を考える。簡単のために、万有引力以外の力は働くないものとする。質点近似をすると、以下のようになる。

- (1) 物体を微小部分に分割する。
- (2) 位置ベクトル \mathbf{r}' で表される微小部分を考える。微小部分と点 A の間に働く万有引力を考える。一般に物体の質量密度は位置によって異なる。すなわち、質量密度は \mathbf{r}' の関数である。ただ、質点とみなせるぐらい小さい微小領域では、質量密度は一定であると近似できる。

$$\Delta \mathbf{F} = G \frac{m(\rho(\mathbf{r}') \Delta V')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}$$

- (3) 微小部分すべての総和をとる。

$$\mathbf{F} = \sum_{\text{全ての微小部分}} \Delta \mathbf{F} = \sum_{\text{全ての微小部分}} G \frac{m(\rho(\mathbf{r}') \Delta V')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}$$

ここで、微小部分の体積 $\Delta V'$ を、 $\Delta^3 \mathbf{r}'$ と書くことにする⁽¹¹⁾。そうすると、

$$\mathbf{F} = \sum_{\text{全ての微小部分}} \Delta \mathbf{F} = \sum_{\text{全ての微小部分}} G \frac{m(\rho(\mathbf{r}') \Delta^3 \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \quad (6.37)$$

⁽¹¹⁾ この記法は、 Σ 記号の中を動くのは、位置ベクトル \mathbf{r}' が代表点の微小部分であることを明示する方法の1つである。「全ての微小部分」の合計をとることは、変数 \mathbf{r}' を(領域内全範囲をくまなく)動かすことと等価である。

ということで、質点近似の結果は式 (6.30) である。本当にそれでいいのか。何を言っているのかというと、微小部分の分割は細かければ細かいほど、(理想極限である) 質点に近づく。つまり、質点近似の正確な結果は式 (6.30) の $\Delta^3\mathbf{r}'$ (体積要素の大きさ) が 0 に限りなく近づく極限である。この極限を表す方法が積分である。

$$\sum \Rightarrow \int$$

(3) のように、 Σ を使って表した後に、上のように \int に変えればよい。そして、この時に一緒に $\Delta^3\mathbf{r}' \Rightarrow d^3\mathbf{r}'$ と書き換えれば良い。その結果、質点に働く力は以下のようにかける。

(4) 積分(体積積分)を使って表す。

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int G \frac{m\rho(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \\ &= Gm \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (6.38)$$

こうして、点 A にある質点に働く力が求められた。

第 7 章 剛体の力学

私が高校時代に使った数研出版の教科書では、剛体に関する話は「運動量保存則」に関する話の前に書かれていた。しかし、私は剛体に関する話を力学編の一番最後に書くことにした。それは、剛体の話は運動量保存則や円運動、単振動とは（高校物理の範囲内では）独立したものと考えているからだ。私が大学の力学の授業を受けている時に使った教科書、『物理学序論としての力学』（藤原邦男・東京大学出版会）では、剛体の話は一番最後に出てくる。高校物理という視点から考えると、剛体の話を最後に持ってくるのは変かもしれないが、実は全然普通のことであるのだ。

さて、剛体といえば、高校物理で重要なのは「力のモーメント」である。しかし、この TeX ノートでは、既に前の chapter では角運動量やモーメントという概念を導入しているので、特別新しい概念を導入する必要はないのだ。「剛体」とは何かを定義し、淡々と話を進めて、最後に例題を取りあげて、この chapter を終わりにしていこうと思う。

7.1 剛体とその重心

7.1.1 剛体とは何か

まず、「剛体」とは何かを定義する。

剛体

力を加えても変形しない理想的な物体を剛体という。剛体内の任意の 2 点を取ったとき、力が外部から加わっても、その 2 点間の位置関係は変化しない物体が剛体である。

剛体の特徴は力が加わっても変形しないことがある。そのため、剛体の運動をとらえる時は、図 7.1 のように、剛体を細かく分割した微小物体の運動をイチイチ考える必要はなく、剛体のある 1 点がどのような運動をするかが分かれば、後は位置関係が不变であることから、他の点がどのように動くかがわかる（図 7.2）。では、その特別な 1 点はどのように決めれば良いのか。

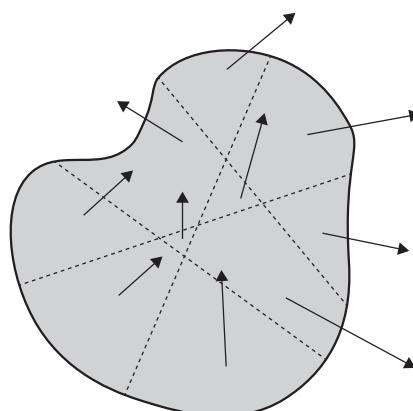


図 7.1 剛体を細かく分割した微小物体の運動のイメージ

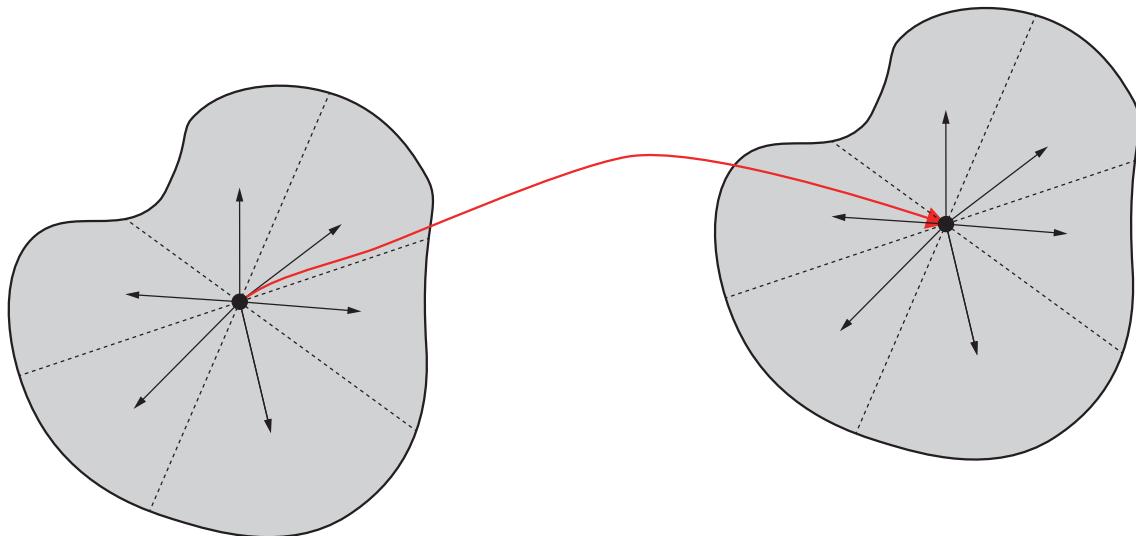


図 7.2 剛体の運動の正しいイメージ（赤線：特別な1点の軌跡）

結論をかくと、特別な1点は剛体の重心にすればよい。そこで、剛体の重心を質点系の重心の定義を拡張することで定義する。 n 個の質点の重心の位置 \mathbf{r}_G は??ページで次のように定義した。

$$\mathbf{r}_G = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \cdots + m_n \mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \quad (7.1)$$

剛体を質点近似して、 n 個の質点から集まるとすると、上の重心の定義式をそのまま使用できる。

だが、6.4「大きさのある物体の間の万有引力」と同じように考えると、剛体の重心も積分を用いて表現できそうである。ということで、同じように考える。

(1) 剛体を微小部分に分割する。

(2) 位置ベクトル \mathbf{r} で表される微小部分を考える。一般に物体の質量密度は位置によって異なる。すなわち、質量密度は \mathbf{r} の関数である。ただ、質点とみなせるぐらい小さい微小領域では、質量密度は一定であると近似できる。この微小部分では、上の式の $m_k \mathbf{r}_k$ に相当する量は、

$$m_k \mathbf{r}_k \implies (\rho(\mathbf{r}) \Delta V) \mathbf{r}$$

と書ける。

(3) 微小部分すべての総和をとる。

$$\mathbf{r}_G \text{の分子} = \sum_{\text{全ての微小部分}} (\rho(\mathbf{r}) \Delta V) \mathbf{r}$$

ここで、微小部分の体積 $\Delta V'$ を、 $\Delta^3 \mathbf{r}$ と書くこととする⁽¹⁾。そうすると、

$$\mathbf{r}_G \text{の分子} = \sum_{\text{全ての微小部分}} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \Delta^3 \mathbf{r}$$

(4) 微小部分の分割が細かければ細かいほど正確になる。そこで、上の式の $\Delta^3 \mathbf{r}'$ （体積要素の大きさ）が 0 に限りなく近づく極限としての積分を考える。

$$\sum \implies \int, \Delta^3 \mathbf{r} \implies d^3 \mathbf{r}$$

⁽¹⁾ この記法については、第6章の脚注(11)を参照。

と書き換えれば良くて、 \mathbf{r}_G の分子は以下のようになる。

$$\mathbf{r}_G \text{の分子} = \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3\mathbf{r} \quad (7.2)$$

分母は、剛体の全質量であり、これは $\int \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$ と書ける。すると、 \mathbf{r}_G を積分を使って書くと以下のようにになる。

$$\mathbf{r}_G = \frac{\int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3\mathbf{r}}{\int \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}} \quad (7.3)$$

7.1.2 一様な剛体（一様な円盤）の重心

高校物理と大学入試問題では、「一様な剛体の重心はその物体の重心である」ということを認めて議論することにしている。このことが本当かどうかを確かめたい。そこで、この subsection では、式 (7.3) を使って、一様な円盤の場合について、その重心が、円盤の中心であることを数学的に示す。

式 (7.2) の $\int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3\mathbf{r}'$ は

$$\int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3\mathbf{r} = \left(\int x\rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \int y\rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \int z\rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \right) \quad (7.4)$$

というベクトルである。

xyz 空間上で、 $K = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R, 0 \leq z \leq H\}$ という領域 K を考えると、これはまさに円盤形である。一様な剛体なので K 内の任意の点において、 $\rho(\mathbf{r})$ は一定である。この一定値を ρ と書くことにする。

式 (7.4) のベクトルの第 1 成分を書くと以下のようなになる。

$$\int x\rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \rho \int x dx dy dz$$

この積分はどのように計算すれば良いのか。3重積分の計算法を調べて実行しても良いだろう。しかし、積分は微小分割したものを足し合わせるという操作だということが分かれば、対称性がいいときは計算する必要がない場合が多い。今回の場合、 K 内の点 (x, y, z) に対して、 $(-x, y, z)$ も必ず K 内に存在する。そうすると、 $x \leq 0$ の部分は、 $x \geq 0$ の部分と相殺されるので、この積分は 0 である。

同様に考えて、 $\int y\rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 0$ である。

最後に、 $\int z\rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$ を考える。 $d^3\mathbf{r}$ と書いているが、これは dV と同じである。（ここからしばらく、とても厳密性を欠いたことを書く。）円柱型なので、 $dV = Sdz (S = \pi R^2)$ と見ればうまくいく。微小体積要素をわざわざ直方体でとる必要はないということである。

7.1.3 剛体の重心運動

剛体の重心の運動がどのような運動をするかを調べる。調べる際に、積分を使った式 (7.3) よりも式 (7.1)の方が使いやすいので、こちらを使うことにする。

- 剛体を構成する要素に $1, 2, \dots, n$ という番号を振ることにする。
- 質量 m_k の要素 k に外力 \mathbf{F}_k が働く。

- 要素 ℓ から要素 k に内力 $f_{\ell \rightarrow k}$ が働く

という状況を考える。個々の要素 k の運動方程式は、

$$m_k \frac{dv_k}{dt} = \mathbf{F}_k + \sum_{\ell \neq k} f_{\ell \rightarrow k} \quad (7.5)$$

と書ける。ここで、 Σ の下の $\ell \neq k$ は変数を ℓ とし、その変数 ℓ が $1, 2, \dots, n$ のうち、 k 以外を動くという意味である。要するに、

$$\sum_{\ell \neq k} f_{\ell \rightarrow k} = (f_{1 \rightarrow k} + f_{2 \rightarrow k} + \dots + f_{(k-1) \rightarrow k}) + (f_{(k+1) \rightarrow k} + f_{(k+2) \rightarrow k} + \dots + f_{n \rightarrow k})$$

を表している。ここから、重心の運動方程式を求める。式 (7.1) の両辺を時間 t で 2 回微分すると、

$$\frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \frac{dv_k}{dt}$$

となる。ただし、 $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ である。よって、重心の運動方程式は、

$$M \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{dv_k}{dt} \quad (7.6)$$

となる。式 (7.1.3) より、この式は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} M \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} &= \sum_{k=1}^n \left(\mathbf{F}_k + \sum_{\ell \neq k} f_{\ell \rightarrow k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{\ell \neq k} f_{\ell \rightarrow k} \right) \end{aligned} \quad (7.7)$$

さて、右辺の第 2 項について見ていく。作用・反作用の法則より、 $f_{\ell \rightarrow k} = -f_{k \rightarrow \ell}$ である。すると、第 2 項は $\mathbf{0}$ となることがわかる⁽²⁾。

以上より、重心の運動方程式について以下のことが言える。

剛体の重心運動

$$M \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = \sum \mathbf{F}_k \quad (7.8)$$

剛体の重心の運動は剛体に働く外力だけで決まる。その運動は、剛体の全質量と剛体に働く全外力が重心に集中したとみなした時の運動と同じであり、これまでの質点の運動と同じように議論することができる。

7.2 剛体の回転運動

剛体の運動を考える際は質点とは違う大きさを持った物体の運動を考えることになる。大きさを持った瞬間に空間上の運動を議論する際に、これまで考えてきた並進運動だけでは不十分になってしまう。重心が動かず、物体がある軸のまわりに回転するという運動など「回転」を考える必要が出てくるのである。その回転を考えるための道具の 1 つが「力のモーメント」である。

⁽²⁾ 丁寧に展開していくれば、全ての項が消えることがわかる。

7.2.1 力のモーメント

6.1.2 「ベクトルのモーメントと角運動量」で、ベクトルのモーメントを定義した。

Remark

空間のある点 P にベクトル \mathbf{A} が与えられたとき、ある特定の点 O を定め、「点 O のまわりのベクトル \mathbf{A} のモーメント」を

$$(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O) \times \mathbf{A} \quad (7.9)$$

と定義する。角運動量は、この \mathbf{A} が運動量ベクトル \mathbf{p} の時の「原点 O のまわりの運動量ベクトル \mathbf{p} のモーメント」として定義される。つまり、角運動量ベクトル \mathbf{L} は、位置ベクトル \mathbf{r} と運動量ベクトル \mathbf{p} を用いて、

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (7.10)$$

と書ける。

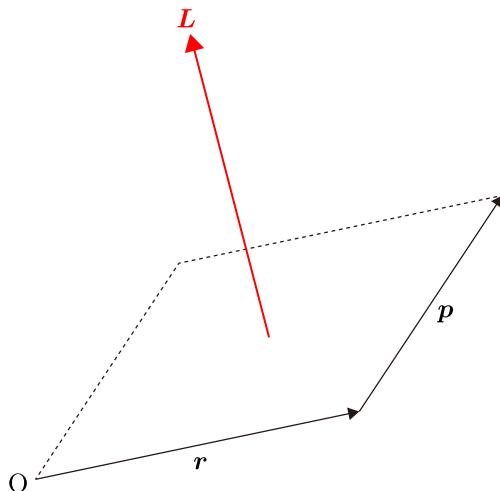


図 7.3 角運動量と運動量の関係

力のモーメントは、Remark の式 (7.9) の \mathbf{A} が力 \mathbf{F} になったものである。

力のモーメント

力のモーメント \mathbf{N} は次の式で定義される。

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (7.11)$$

この \mathbf{N} の大きさ N はベクトルの外積の定義から、

$$N = rF \sin \theta \quad (7.12)$$

と書ける。ただし、 θ は位置ベクトル \mathbf{r} と力 \mathbf{F} のなす角である。

上記のように改めて定義した「力のモーメント」は回転を引き起こす能力の指標であり、角運動量ベクトル \mathbf{L} との間に、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \quad (7.13)$$

の関係がある⁽³⁾。

7.2.2 剛体の回転運動方程式

(3) 6.1.3 「角運動量保存則」を参照

第II部

付録編

付録 A 発展的な数学の話

この章では高校数学で登場しない数学の話を記す。これらの内容は物理学の内容を理解したり、効率よく計算するのに非常に役に立つツールである。本文中でいきなり行列やテイラー展開が出てきて混乱したかもしれないが、本章を読めば、きっと理解できるはずである。本章では以下の 2 つのことについて、理系大学生なら大学 1 年の数学の授業で習う基本的なことを記す。

- **行列**：この TeX ノートでは連立一次方程式を効率的に解くツールとして基礎の基礎を紹介する。多変数関数を用いて記述される現象の解析には不可欠の道具で、大学ではより込み入った議論がなされる。
- **テイラー展開**：テイラー展開は関数をべき級数の無限和で表す際の数学的ツールの 1 つである。テイラー展開により、関数 $f(x)$ の $x = 0$ の近くのふるまいを 1 次関数や 2 次関数など解析をしやすい低次の関数で近似して把握することが可能になる。

A.1 行列に関する基本事項

現在の高校数学では行列を扱わない。旧課程では行列の簡単な計算を取り扱っていたそうだ。特に連立方程式を解く際は、行列を使うと、かなり楽に解くことができる。この section では行列の基本的なことを導入する。この Section の内容は、東京大学の理系 1 年生が春学期の最初に習う「数理科学基礎」のテキスト⁽¹⁾の内容を参考にしながら、高校物理の話を理解する際に必要だと思われる内容のみ取り上げる。

A.1.1 行列とは何か

まず、押さえておきたいのが、高校の教科書では、ベクトルの成分を (a, b) のように書くが、大学ではベクトルといったら、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

のように数字を縦に並べたものをさす。数字を縦に並べると場所をとるので、スペースの都合上、数字を横に並べて書くこともある。このような場合は

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}^\top \quad (\text{A.2})$$

と書く。記号 \top は縦方向を横方向に直したことを表す。式 (A.1) のような列ベクトルのことをいう。この section では、ベクトルといえば、上記のような列ベクトルのことを表すことにする。

さて、平面ベクトル $\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$ の係数 a, b, c, d を抜き出して、以下のように書いたものを考える。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

⁽¹⁾私が初めてこの行列に関する section を作成した時は、大学内でのみ配布されていた補助資料を利用した。その補助資料が書籍化されたものが、付録編 202 ページの『大学数学ことはじめ』です。この section は『大学数学ことはじめ』の第 1 部の第 8 章と第 14 章 §4 の内容をもとに作成した。

このように実数⁽²⁾を縦横に並べてカッコで括ったものを行列⁽³⁾という。

さらに、行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

と約束する。これを行列とベクトルの積という。

例 A.1 (行列とベクトルの積の計算)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times (-1) + (-1) \times 3 \\ 1 \times (-1) + 0 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A.1.2 一次変換と行列

平面上の点 (x, y) に対して、点 $(ax + by, cx + dy)$ を対応させること

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

を(平面上の)一次変換という。ここで、式(A.4)より、一次変換は次のように書くこともできる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

これより、一次変換とは、ベクトルに左からある行列をかける操作でもあるといえる。特に、行列 A を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ としたとき、ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、式(A.6)のように対応させることを行列 A の定める一次変換という。

A.1.3 一次変換の行列表示

前の subsection で書いた通り、一次変換とは、ベクトルに行列を左から作用させることである。行列 A を左からかける一次変換(行列 A の定める一次変換)を F_A とする。すると、ベクトル x に対して、 $F_A(x) = Ax$ と書ける。ここで線形性という概念を定義する。

定義 A.2 (線形性) 平面上の一次変換 F と、ベクトル v_1 と v_2 、および実数 k に対して、次の 2 つの式が成り立つとき、 F は線形性を持つといい、一次変換 F は線形変換であるという。

$$F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2) \quad (\text{A.7})$$

$$F(\lambda v_1) = \lambda \cdot F(v_1) \quad (\text{A.8})$$

(2) 「複素数」でも良いが、この TeX ノートでは虚数の場合を使わないので、実数と書いた。この次の subsection で書くが、一次変換を二次元平面上の点から点へと移す対応関係として、この TeX ノートでは捉えることにする都合で、「複素数」とは書かなかった。

(3) この TeX ノートでは「行列」と記したら、4 個の数が縦に 2 個、横に 2 個並んだ式(A.3)のようなものを指すことにする。大学で習う数学で登場する「行列」は

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

と縦に m 個、横に n 個の計 mn 個の数が並んだものをさす。

命題 A.3 (線形変換の行列表示) 行列の定める平面の一次変換は線型性をもつ。つまり、その行列を A としたとき、以下の 2 つの式が成立する。

$$A(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = A(\mathbf{v}_1) + A(\mathbf{v}_2) \quad (\text{A.9})$$

$$A(\lambda \mathbf{v}_1) = \lambda \cdot A(\mathbf{v}_1) \quad (\text{A.10})$$

証明. 行列 A とベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ を以下のようにおいて、あとは頑張って計算することで示すことができる。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

□

命題 A.4 (線形変換の行列表示) 平面上の一次変換 F が線型性を持つならば、変換 F はある行列 A の定める一次変換に一致する。この行列 A は、

$$A = [F(\mathbf{e}_1) \ F(\mathbf{e}_2)] \quad (\text{A.11})$$

と表され、変換 F の表現行列という。ただし、 $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

証明. $F(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ と行列 A を用いてかけたとする。ここで、 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と表すことになると、

$$F(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad F(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

となる。そのため、 $F(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ と書けるなら、

$$A = [F(\mathbf{e}_1) \ F(\mathbf{e}_2)]$$

である。そこで、(逆に) 行列 A を上記のように定めると、任意のベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は、 $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ と書けるので、 F の線型性より、

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}) &= F(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = xF(\mathbf{e}_1) + yF(\mathbf{e}_2) \\ &= x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = A\mathbf{v} \end{aligned}$$

となり、任意の \mathbf{v} に対して、 $F(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ となる。

□

命題 A.5 (線形変換の合成) 線型変換を組み合わせて得られる変換も線型性を持つことが知られている(証明は省略)。つまり、

1. ベクトル \mathbf{v} に対し、行列 B で定まる変換 F_1 を行い、ベクトル $B\mathbf{v}$ に変換。
2. この $B\mathbf{v}$ に、行列 A で定まる変換 F_2 を行い、ベクトル $A(B\mathbf{v})$ に変換

の 2 つの変換をまとめて、一気にベクトル \mathbf{v} を $A(B\mathbf{v})$ に変換する一次変換 G を考えたとき、この G が線型性を持つことが知られている。

(4) 『線型代数学』(足助太郎・東京大学出版会) の 100 ページに記されている「定理 3.5.4」の証明をもとにわかりやすいようにした。

(5) この証明は $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ という特別な場合を考え、行列 A がどのような条件を満たせば良いかをまず考える。つまり、必要性から攻めていく。その後、導いた条件は実は任意のベクトル \mathbf{v} に対しても正しいことを確認する(十分性の check)という論法をこの証明では採用している。

A.1.4 行列の積

命題 A.5 より、行列 A, B とベクトル \mathbf{v} に対して、

$$\mathbf{v} \longrightarrow A(B\mathbf{v}) \quad (\text{A.12})$$

は線型性を持つ。したがって、この変換の行列表示を考える際は、前のページの命題 A.4 より、この変換の行列表示は、 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がどう移るかを考えれば良い。 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br \\ cp + dr \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aq + bs \\ cq + ds \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

となるので、式 (A.12) の線型変換の行列表示は、 $\begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$ となる。

ここで、行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と行列 $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ の積 AB を

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

と約束する。

例 A.6 (行列と行列の積の計算)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 & 1 \times 0 + 2 \times 2 \\ 0 \times 1 + 2 \times 2 & 0 \times 0 + 2 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

A.1.5 逆行列

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と行列 $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ の積 AB が

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たすとする。このとき、右辺の行列を単位行列といい、 E と表す。2つの行列 A, B に対して、

$$AB = BA = E \quad (\text{A.16})$$

が成立するとき、 B を A の逆行列といい、 A^{-1} と表す。ここで逆行列について次の命題が成立する。

命題 A.7 (2 × 2 行列の逆行列) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、 $AB = BA = E$ を満たす B 、すなわち A の逆行列 A^{-1} は、

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad - bc} & -\frac{b}{ad - bc} \\ -\frac{c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

と表される。このとき、 $ad - bc$ を行列 A の**行列式**といい、 $\det A$ と表す。行列 A が逆行列を持つには、 $\det A \neq 0$ であることが必要である。

証明. この命題の証明は、

$$\begin{cases} ap + br = 1 \\ aq + bs = 0 \\ cp + dr = 0 \\ cq + ds = 1 \end{cases}$$

を満たす p, q, r, s を求めて、行列の形で表すと、式 (A.17) のようになることを確認すれば良い。 \square

例 A.8 (逆行列を求める) $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求める。行列式 $\det A$ を求めると、

$$\det A = 5 \times 2 - 6 \times (-3) = 28$$

となるから、逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{28} \\ -\frac{3}{14} & \frac{5}{28} \end{pmatrix}$$

である。

A.1.6 行列と連立一次方程式

連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$$

を、ある点 $v = (x, y)$ に対して、行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を左から作用させると、点 (m, n) にうつるとみなせば、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

と、連立方程式を行列を用いて書くことができる。

これは $Av = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ と書けるので、 A の逆行列を左からかけると、

$$\begin{aligned} \underbrace{A^{-1}A}_E v &= A^{-1} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A^{-1} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A^{-1} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

となる。このように逆行列をベクトルに作用させることで、連立方程式を解くことができる。

さて、この計算過程から単位行列 E に関する重要な性質がわかった。最後に、その性質を書いて、行列の説明は終わりにしよう。

Remark

単位行列 E と任意のベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、

$$E\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

である。つまり、単位行列 E を左からかけてもベクトルは変化しない。

例 A.9 (逆行列を用いて連立方程式を解く)

$$\begin{cases} 5x - 3y = 7 \\ 6x + 2y = 5 \end{cases}$$

この連立方程式を行列を使って表すと、 $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ として、

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

とかける。よって、 A の逆行列 A^{-1} を使って、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{28} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}}_{\sim} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 29 \\ -17 \end{pmatrix}$$

A.2 テイラー展開

行列の次にテイラーの定理とテイラー展開を確認する。テイラーの定理自体は高校数学の範囲内で証明することが可能である。河合塾のハイパー東大理類コース（2016年度の呼び方）の演習問題にテイラーの定理を証明する問題があった。

このchapterではテイラーの定理、テイラー展開の導出過程を記すが、このTeXノートのタイトルが「高校物理を振り返る」であるため、大学で習う数学のような厳密性は気にならないで書くことにした。そうは言はれど、『解析入門』（杉浦光夫・東京大学出版会）や『微分積分学』（難波誠・裳華房）をもとに作成する。ここからの先の議論では、厳密には微分して出てくる関数の連続性も要求される場合がある。しかし、高校物理の内容を扱っている限り、テイラー展開したい関数が、微分すると連続でない関数になることはないので、このTeXノートでは関数の連続性は満たされていると仮定する。

A.2.1 ロルの定理

このTeXノートでは厳密性をあまり気にしないので、いきなりロルの定理を登場させることにする。というより、しっかりした数学書なら極大、極小とは何かをしっかり定義してからロルの定理の話に入る。

定理 A.10 (ロルの定理) \mathbf{R} (実数全体の集合) の有界閉区間 $a \leq x \leq b$ で連続で、開区間 $a < x < b$ で微分可能な実数値関数 $f(x)$ が $f(a) = f(b)$ を満たすならば、次の 2つの条件を満たす c が存在する。

$$f'(c) = 0, \quad a < c < b$$

証明. ここではアバウトな(感覚的な) 証明をする。厳密な証明は探してください。

- (1) $f(x)$ が定数関数の時は、任意の x に対して、 $f'(x) = 0$ なので、OK。
- (2) $f(x)$ が定数関数でない時は、図 A.1 のように、 a と b の間に、 $f(a) = f(b)$ よりも大きい、または小さい値が存在する。両端 ($x = a, b$) での $f(x)$ の値は等しいから、必ず、元に戻ろうとする。ゆえに、ある $c \in (a, b)$ で、極大あるいは極小となる。

□

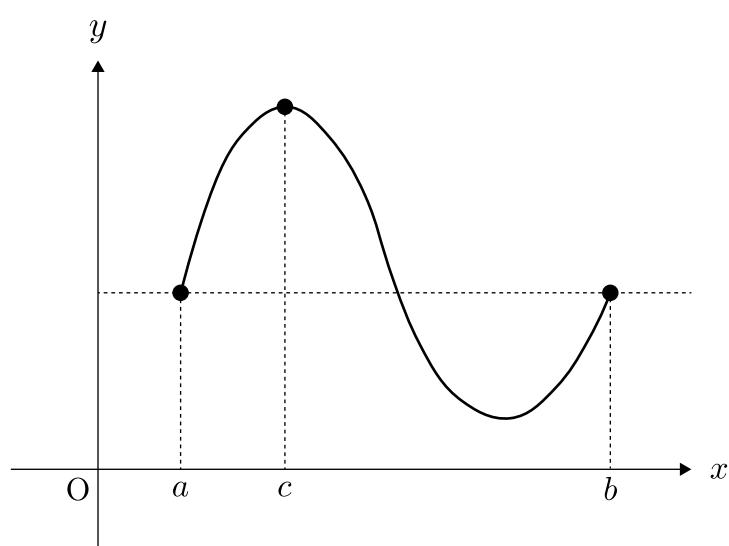


図 A.1 ロルの定理のイメージ

A.2.2 平均値の定理

ロルの定理を利用してことで、高校数学で出てきた「**平均値の定理**」が証明できる。平均値の定理は教科書にのっているけれど、入試問題で出てきたときには、頭の片隅に絶対ないあの定理です。

このTEXノートでは平均値の定理を紹介するだけにとどめるが、『解析入門』では平均値の定理を利用して、数学の問題を解く際は当たり前のことのように使っている性質を証明している。

定理 A.11 (平均値の定理) $a < b$ とする。 $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続で、 $a < x < b$ で微分可能ならば、次の2つの条件を満たす c が存在する。

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \quad a < c < b$$

証明. k を定数として、 $g(x) = f(x) - kx$ という関数を考える。今、定数 k を $g(a) = g(b)$ となるように定める。つまり、 $k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ と k を定めれば良い。

この時、 $g(a) = g(b)$ より、ロルの定理から、 $a < c < b$ を満たすある c が存在して、 $g'(c) = f'(c) - k = 0$ が成り立つ。ゆえに、 $k = f'(c)$ であり、平均値の定理が示された。□

A.2.3 テイラーの定理

ロルの定理を準備すると、本題の「**テイラーの定理**」を証明できる⁽⁶⁾。

定理 A.12 (テイラーの定理) n を1以上の整数として、実数 a, b を $a < b$ を満たすようにとる。区間 $I = [a, b]$ で n 回微分可能な実数値関数 $f(x)$ に対して、

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b - a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b - a)^n \quad (\text{A.20})$$

を満たす c ($a < c < b$)が存在する。ただし、 $f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の第 k 階導関数を表す。

証明. 数 A を次の式を満たすように定める。

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b - a)^{n-1} + \frac{A}{n!}(b - a)^n$$

次に新しい関数 $F(x)$ を次の式で定義する。

$$F(x) = f(b) - \left\{ f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(b - x) + \frac{f''(x)}{2!}(b - x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b - x)^{n-1} + \frac{A}{n!}(b - x)^n \right\}$$

このとき、関数 $F(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続で、 $a < x < b$ で微分可能であり、 $F(a) = F(b)$ を満たす。すると、ロルの定理より、 $F'(c) = 0$ ($a < c < b$)を満たす c が存在する。 $F'(x)$ は次のようにかける。

$$\begin{aligned} F'(x) &= - \left\{ f'(x) + \frac{f''(x)}{1!}(b - x) + \frac{f^{(3)}(x)}{2!}(b - x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b - x)^{n-1} \right\} \\ &\quad + \left\{ f'(x) + \frac{f''(x)}{1!}(b - x) + \frac{f^{(3)}(x)}{2!}(b - x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-2)!}(b - x)^{n-2} + \frac{A}{(n-1)!}(b - x)^{n-1} \right\} \\ &= - \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b - x)^{n-1} + \frac{A}{(n-1)!}(b - x)^{n-1} \end{aligned}$$

⁽⁶⁾ テイラーの定理の証明については、『数学シリーズ 微分積分学』(難波誠・裳華房) を参考にした。

ゆえに、 $x = c$ を代入すると、

$$0 = F'(c) = -\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1} + \frac{A}{(n-1)!}(b-c)^{n-1}$$

となり、 $A = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}$ となることが示され、テイラーの定理が証明された。 \square

A.2.4 テイラー展開

テイラーの定理は、 $a > b$ の場合も成立することが知られている。さて、式 (A.20) の b を x に置き換えることで、テイラー展開の基礎となる式が得られる。

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \quad (\text{A.21})$$

この式 (A.21) の右辺の最後の 1 項 $\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ のことを剩余項といい、 $R_n(x)$ と表す。 $R_n(x)$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ を満たすなら、 $f(x)$ は無限級数でかけることがわかる。

テイラー展開

$f(x)$ が a を含む区間 I で、何回でも微分可能で、 I 上の任意の点 x で $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ を満たすならば、 $f(x)$ は I 上で、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

と表される。これを $x = a$ を中心とするテイラー展開という。

A.2.5 指数関数と三角関数のテイラー展開

この subsection は具体的な関数のテイラー展開を求める。求めるのは、 e^x と $\sin x$, $\cos x$ である。特に、 $x = 0$ を中心とするテイラー展開を考える。(これをマクローリン展開ということもある)

e^x のテイラー展開

まず、テイラー展開できるかどうか調べるために、 $R_n(x)$ の $n \rightarrow \infty$ の極限が 0 になるかどうかを調べる。 $f(x) = e^x$ とし、 $0 \leq |x| < a (< +\infty)$ とする。 e^x は何回微分しても e^x なので、

$$0 \leq |R_n(x)| = \left| \frac{e^c}{n!} x^n \right| \leq \frac{|e^c|}{n!} |x|^n < \frac{e^a}{n!} a^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる⁽⁷⁾。よって、 $n \rightarrow \infty$ で $R_n(x) \rightarrow 0$ となる。したがって、 e^x は $x = 0$ を中心にテイラー展開できる。テイラー展開の公式を使うと、 $-a < x < a$ において、

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (\text{A.23})$$

(7) $a > 0$ の時、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ が成立することを使った。

となる。

sin x のテイラー展開

$f(x) = \sin x$ とし、 $0 \leq |x| < a (< +\infty)$ とする。 $\sin x$ を微分すると、

$$\sin x \rightarrow \cos x \rightarrow -\sin x \rightarrow -\cos x \rightarrow \sin x \rightarrow \dots$$

となる。そのため、任意の x に対して、 $0 \leq |f^{(n)}(x)| \leq 1$ となる。 e^x の場合と同様に $R_n(x)$ を考える。

$$0 \leq \left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n \right| \leq \frac{1}{n!} |x|^n < \frac{a^n}{n!} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

したがって、 $\sin x$ は $x = 0$ を中心にテイラー展開できる。 $f^{(n)}(0)$ は、

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

となるから、テイラー展開の公式を使うと、 $-a < x < a$ において、

$$\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots \quad (\text{A.24})$$

となる。

cos x のテイラー展開

$\sin x$ と同じように考えると、 $\cos x$ のテイラー展開は以下のようになる。

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \dots \quad (\text{A.25})$$

指数関数と三角関数のテイラー展開

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (\text{A.23})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots \quad (\text{A.24})$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \dots \quad (\text{A.25})$$

A.2.6 三角関数の近似

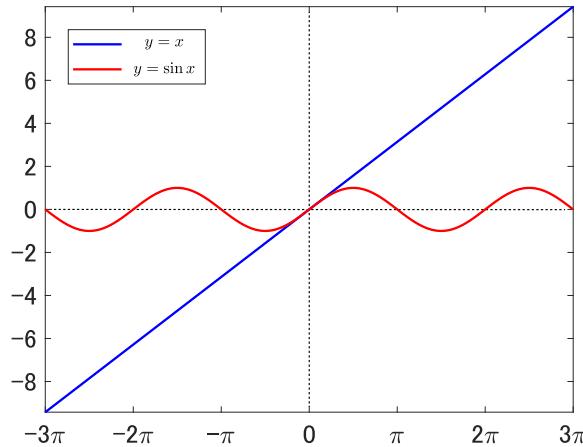
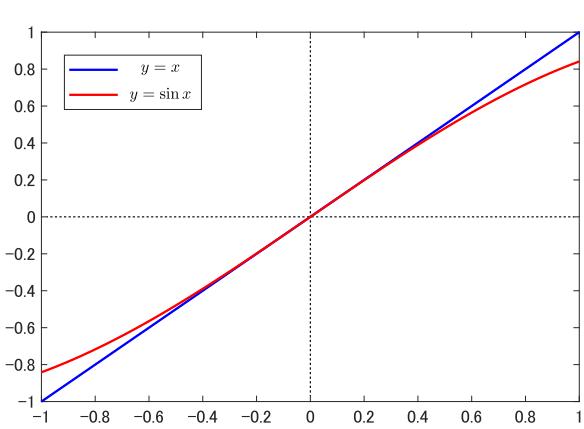
$\sin x$ と $\cos x$ のテイラー展開の式、式 (A.24) と式 (A.25) を見ると、 $|x|$ が非常に小さいなら、 $|x^n| (n \geq 2)$ は十分小さく無視できる。そのため、

$$\sin x \rightarrow x \quad \cos x \rightarrow 1 \quad (\text{A.26})$$

と近似できることがわかる⁽⁸⁾。この近似は、物理現象の概形を把握する時や物理の入試問題を解くときに使われる。

では、 $\sin x$ と x の差がどれぐらいか調べてみよう。 $\sin x$ と x のグラフは以下の図 A.2 のようになる。両者のグラフは、 $x = 0$ の近くでは一致しているように見える。これを $x = 0$ の周りだけに注目して拡大すると、図 A.3 のようになる。図 A.3 から分かるように、 $|x|$ が非常に小さい時、 $\sin x$ と x の差は十分小さく、 $\sin x$ を近似的に x とみなしても良いだろう。

(8) $\cos x$ については定数 1 と近似する場合が不適切な場合があり、そのような時は、 $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2} x^2$ と近似することがある。

図 A.2 $\sin x$ と x のグラフ (1)図 A.3 $\sin x$ と x のグラフ (2)

A.2.7 テイラー展開による一次近似

Δx を微小量とする。一変数関数 $f(x + \Delta x)$ を x のまわりでテイラー展開すると、

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}(\Delta x)^2 + \dots \quad (\text{A.27})$$

となる。ここで、 $|\Delta x|$ が十分小さいとき、 Δx の 2 次以上の項は無視できる。そのため、 $|\Delta x|$ が十分小さいとき、

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \quad (\text{A.28})$$

と近似できる。この近似は非常によく使われる近似で重要である。図 A.4 はこの式のイメージを図にしたものである。

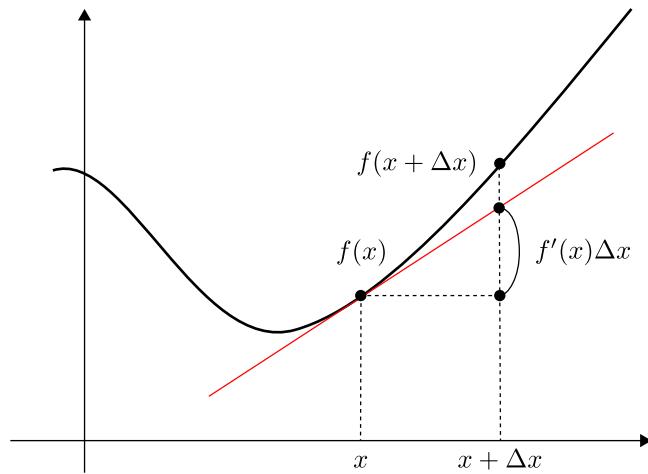


図 A.4 1 次元の Taylor 展開を視覚的に捉える

ここで、式 (A.28) を利用して得られる近似公式を紹介する。それは $f(x) = x^a$ の $x = 1$ のまわりのテイラー展開を利用した近似である。ここで a は 0 または 1 でない実数とする。 $f'(x) = ax^{a-1}$ なので、 $x = 1$ のまわりのテイラー展開は

$$f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^a \approx f(1) + f'(1) \cdot \Delta x = 1 + a\Delta x$$

と書ける。

($1 + x)^a$ の線形近似

$|x|$ が十分小さい時、次の近似式が成立する。

$$(1 + x)^a \approx 1 + ax \quad (\text{A.29})$$

この近似式を使った例として、高校物理や大学入試でよく出てくるのに次の式がある。

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x, \quad \sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x \quad (\text{A.30})$$

続けて、こんな感じの大学入試問題ではよく見かける近似について考える。

$$\sin(\theta_0 + \Delta\theta) \approx \sin \theta_0 + \cos \theta_0 \Delta\theta$$

これは加法定理と $\sin x \rightarrow x, \cos x \rightarrow 1$ の近似を使うことで導くことができる。

$$\sin(\theta_0 + \Delta\theta) = \sin \theta_0 \cos \Delta\theta + \cos \theta_0 \sin \Delta\theta \approx \sin \theta_0 + \cos \theta_0 \Delta\theta$$

でも、 \sin の微分が \cos になるので、式 (A.28) で $f(x) = \sin x$ とすることでこの近似式をすぐに得られる。わざわざ加法定理を使わなくても、泰勒展開がわかれば自明の結果といえる。

付録 B 高校物理のための微分方程式論

理系の大学生の多くは常微分方程式について勉強する機会がある。微分方程式には多様な種類の微分方程式が存在する。その中でも、高校物理に登場する微分方程式の多くは「変数分離型」に分類される。「変数分離型」の微分方程式はとても簡単に解けるので、この chapter を読んだ方は必ずマスターしてほしい。一応、高校物理では「交流」の話のところで登場する「定数係数 2 階線形微分方程式」についてもまとめた。

B.1 微分方程式とは何か？ —自然法則と微分方程式—

Wikipedia における「微分方程式」の記述は以下の記述からスタートする。

微分方程式 (differential equation) とは未知関数とその導関数の関係式として書かれている関数方程式である。

物理法則を記述する基礎方程式は多くが時間微分、空間微分を含む微分方程式であり、物理学からの要請もあり微分方程式の解法には多くの関心が注がれてきた。

自然界の様々な現象、マクロな現象からミクロな現象まで、ありとあらゆる現象を数学という道具を用いて理解しようとする学問は物理学と呼ばれる。いつか、高校物理の TeX ノートで「原子」編をまとめる時が来たら、必ず記す「放射性物質の崩壊過程」を例に考える。

放射性物質は、放射線を放出して崩壊する。原子の数 N は時間 t とともに減少する。短い時間間隔 Δt における原子の数の変化を ΔN とかく。原子の数を t の関数として、 $N(t)$ と書くことにすると、

$$\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$$

である。実験により、この ΔN は $N(t)$ と時間間隔 Δt に比例することが確かめられている。比例定数を k とかくと、

$$\Delta N = -kN(t) \cdot \Delta t \quad (\text{B.1})$$

とかける（原子の数は減少するのでマイナスをつけた）。この式の両辺を Δt で割ると、

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = -kN(t)$$

となる。

時間間隔 Δt の間で、原子の数 N が一定とここまで勝手に考えてきたが、それが正しいとみなせるのは、 Δt が十分小さい時である。そこで、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を考えてみよう。左辺の極限の形は導関数や微分と表現されるため、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dN}{dt}$$

と書くことができる。

すると、原子の数 $N(t)$ については、

$$\frac{dN(t)}{dt} = -kN(t) \quad (\text{B.2})$$

が成立するといえる。このように、自然現象を表現するには微分を利用する必要があり、この世界には、導関数を含む式で表現される現象がたくさんある。微分方程式は現実世界の現象を表現するのに欠かせない数学的道具なのである。

B.2 1階の微分方程式 — 変数分離型 —

微分方程式に関する基本的な概念を把握するのに必要なキーワードとして以下のようなものがあげられる。

- 独立変数と従属変数
- 常微分方程式と偏微分方程式
- 微分方程式の階数
- 線形・非線形・正規形
- 解の初期条件

このTeXノートは、「高校物理を振り返る」ノートであり、大学で習う数学の内容に深く突っ込むノートではない。そのため、これらのこととは気にせず、とにかく微分方程式を解くことができればそれでよい。

B.2.1 変数分離型の微分方程式の解法

さて、前のsectionで登場した

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

という微分方程式を満たす $N(t)$ はどのように求めればよいのか？すでに、1.1.5節で変数分離型の微分方程式とその解法については簡単に紹介している。ここではもう少し丁寧に記していく。このTeXノートを読むにあたっては、微分方程式を解くことができれば十分なので、あまり細かいことを気にせずに一旦受け入れてほしい。そして、簡単な微分方程式は解けるようになってほしい。

(1) dN や dt は記号のように見えるが、元々は ΔN と Δt という微小量である。そこで、次のように式変形をする。

$$\frac{1}{N}dN = -kdt$$

(2) なんかインテグラル \int をつけるといい感じになりそうなので、インテグラルをつけて積分計算を実行する。

$$\int \frac{1}{N}dN = -k \int dt \implies \log|N| + C_1 = -kt + C_2$$

(3) いろいろと式をいじって $N(t) = \sim$ の形にする。

$$\begin{aligned} \log|N| &= -kt + C && (C = C_2 - C_1 \text{ とおいた}) \\ |N| &= \pm e^C \cdot e^{-kt} \\ \therefore N &= Ae^{-kt} && (\pm C = A \text{ とおいた}) \end{aligned}$$

(4) こうして求められた $N(t) = Ae^{-kt}$ が微分方程式の解である。

$\frac{1}{N}dN = -kdt$ と変形して、インテグラルをつけるというのはとても卑怯な方法に思えるが問題ない。今は具体的な例で考えたがもう少し一般的な場合を考えよう。

微分の値が x だけの関数 $f(x)$ と y だけの関数 $g(y)$ の積の形で書かれている次のタイプの微分方程式は、**変数分離型**の微分方程式といわれる。

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (\text{B.3})$$

上の微分方程式を $g(y)$ でわり、 x について積分すると、

$$\int \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx \quad (\text{B.4})$$

と書ける。左辺は数学 3 で登場する置換積分の形なので、

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx \quad (\text{B.5})$$

となる。これが変数分離型の微分方程式の解の一般形となる。この節の最初に記した例のように式を整理することで、簡単な形で書けるならば、この後で式を簡単にすることで、微分方程式を解いたことになる。

ここで式 (B.5) の被積分関数に注目してみると、左辺は $\frac{1}{g(y)} dy$ で、右辺は $f(x) dx$ である。式 (B.5) はこれに積分がついてイコールで結ばれているだけとみることもできよう。これは、式 (B.3) を

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

と変形してインテグラルをつけた結果と同じである。従って、都合よく $\frac{1}{N}dN = -kdt$ と変形したけど OK であるといえる。

B.2.2 変数分離型の微分方程式の具体例

前の subsection で変数分離型の微分方程式の解き方がなんとなくわかったと思うので、この subsection では具体例を通して、変数分離型の微分方程式の解き方をマスターしていこう。

例 B.1 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = y(\cos x - \tan x)$ を解け。

解答

まず、明らかに $y = 0$ はこの微分方程式を満たす。 $y \neq 0$ のとき、

$$\int \frac{1}{y} dy = \int (\cos x - \tan x) dx$$

$\tan x = -\frac{(\cos x)'}{\cos x}$ より、この積分を計算すると、

$$\log |y| = \sin x + \log |\cos x| + C = \log |e^C \cos x \cdot \exp(\sin x)|$$

となるから、 $e^C = C$ と改めておくことで、 $y = C \cos x \cdot \exp(\sin x)$ と解を求めることができる。これは、 $C = 0$ とすると $y = 0$ になることから、 $y = 0$ も内包した一般解であるといえる。

例 B.2 試験管の中で培養されたバクテリアの数 $u(t)$ について考えよう。試験管内に栄養素や酸素が十分にあれば、バクテリアは栄養素を吸収しながらほぼ一定の時間ごとに分裂を繰り返して、増殖していく。その様子を表現する微分方程式は、

$$\frac{du}{dt} = au \quad (\text{B.6})$$

と書ける。係数 a は好環境下での増殖率を表す正の定数である。この微分方程式を解き、解 $u(t)$ について調べよ。

解答

式 (B.6) を $\frac{du}{u} = adt$ と変形して積分すると、 $\log|u| = at$ となるから、 $t = 0$ のときの $u(t)$ の値を u_0 とすると、

$$u(t) = u_0 e^{at} \quad (\text{B.7})$$

と $u(t)$ の式を決定することができる。これより、 $u(t)$ は指数関数的に、爆発的に増加することがわかる。このモデルが正しいなら、バクテリアは爆発的に増加し続けることになる。しかし、そんなことは実際にはありえない。□

例 B.3 引き続き、試験管の中で培養されたバクテリアの数 $u(t)$ について考えよう。実際はバクテリアが多くなると、試験管内の栄養素や酸素が不足して、バクテリアにとって環境が悪化する。これによる増加率の悪化を $b > 0$ として、 $a \rightarrow a - bu$ とすることで、

$$\frac{du}{dt} = (a - bu)u \quad (\text{B.8})$$

とモデル化しよう。この微分方程式を解き、解 $u(t)$ について調べよ。

解答

式 (B.8) を変形すると、

$$\int \frac{1}{u(a - bu)} du = \int dt \quad (\text{B.9})$$

となる。左辺の被積分関数を部分分数展開する。

$$\frac{1}{u(a - bu)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{a - bu}$$

この時、 A, B は

$$A = \left. \frac{1}{u(a - bu)} \times u \right|_{u=0} = \frac{1}{a}, \quad B = \left. \frac{1}{u(a - bu)} \times (a - bu) \right|_{u=a/b} = \frac{b}{a}$$

と求めることができるので、式 (B.9) は

$$\int \frac{1}{a} \left(\frac{1}{u} + \frac{b}{a - bu} \right) du = \int dt \quad (\text{B.10})$$

と変形することができる。これを計算すると、

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{u}{a - bu} \right| &= at + C \\ \therefore \frac{u}{a - bu} &= C \cdot \exp(at) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\therefore u(t) = \frac{Ca \cdot \exp(at)}{1 + Cb \cdot \exp(at)} \quad (\text{B.12})$$

となる。□

B.2.3 ロジスティック曲線

例 B.3 について、 $a = b = 1$ の場合を考えよう。まず、微分方程式は

$$\frac{du}{dt} = u(1 - u) \quad (\text{B.13})$$

と書くことができて、その解は $u(t)$ が恒等的に 0 または 1 でないとき、

$$u(t) = \frac{Ce^t}{1 + Ce^t} \quad (\text{B.14})$$

となる。さらに簡単のために任意定数 C と適切に選び、 $t = 0$ の時に $u(0) = 0.1$ となる場合を考えよう。図 B.1 は例 B.2 と例 B.3 の 2 つの場合で $u(t)$ がどのように変化するかを表した図である。 $a - bu$ の項を加えることで、 $t \rightarrow \infty$ で $u(t)$ が発散しなくなる。式 (B.12) で表される曲線はロジスティック曲線と呼ばれ、図 B.1 の赤線のような形を持つ。

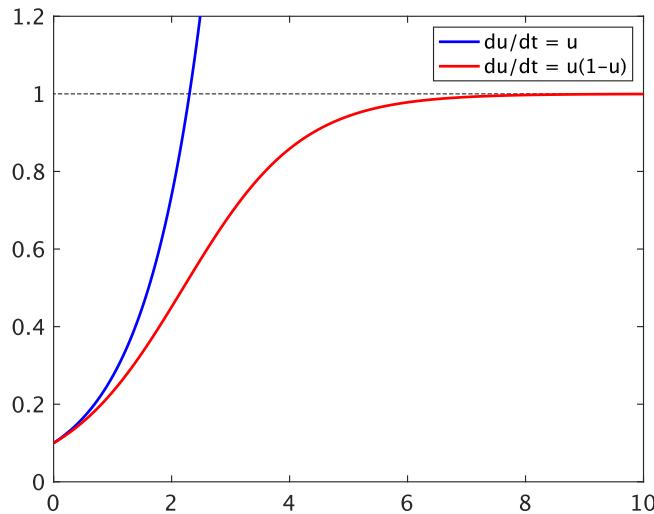


図 B.1 $du/dt = u$ と $du/dt = u(1 - u)$ の 2 つの場合について、 $u(t)$ の挙動を比較した様子。

式 (B.13) の微分方程式の解の挙動は微分方程式を解かなくても概形は把握できる。 $u(t)$ の時間変化が $u(1 - u)$ で記述されるが、これは $u = 1/2$ を頂点とする上に凸な放物線で、 $0 < u < 1$ の範囲で $u(1 - u) > 0$ となる。そのため、初期値 $u(t = 0)$ が 0 と 1 の間にあれば、単調に $u(t)$ に増加し続ける。そして、 $u(t)$ が 1 に近づくと、微分係数 $u(1 - u)$ が 0 に近づくので、グラフは直線 $u = 1$ に漸近するようになる。

B.3 1階の線形微分方程式

この節では定数変化法では解けない種類の微分方程式のうち、

$$\frac{dy}{dx} + ay = f(x) \quad (\text{B.15})$$

の形で記述できる微分方程式の解法を記す。この形の微分方程式は、基本的には定数変化法と呼ばれる方法で解くことが可能である。

B.3.1 式変形により簡単な場合に帰着させる

定数変化法の話をする前に式変形をすることで簡単に微分方程式が解ける場合を紹介する。微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = ay \quad (\text{B.16})$$

を考える。この微分方程式の解は定数変化法により、 $y = Ce^{ax}$ と容易に求めることができる。ここで、 y は x の関数 $y(x)$ として、 $e^{ax} \frac{d}{dx}(e^{-ax}y)$ を計算する。

$$\begin{aligned} e^{ax} \frac{d}{dx}(e^{-ax}y) &= e^{ax} \left(-ae^{-ax}y + e^{-ax} \frac{dy}{dx} \right) \\ &= \frac{dy}{dx} - ay \end{aligned}$$

これより、式 (B.16) の微分方程式は

$$e^{ax} \frac{d}{dx}(e^{-ax}y) = 0$$

とかけて、 $e^{-ax}y = C = \text{const.}$ となる。したがって、 $y = Ce^{ax}$ が微分方程式 (B.16) の解である。

例 B.4 上記の考え方を拡張して、 $\frac{dy}{dx} + 2y = x^2$ を解くことを考えよう。

解答

まず、 $\frac{dy}{dx} + 2y$ は $\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-2x} \frac{d}{dx}(e^{2x}y)$ と書けるので、微分方程式は

$$e^{-2x} \frac{d}{dx}(e^{2x}y) = x^2$$

となる。これより、元の微分方程式は

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}y) = x^2 e^{2x}$$

と書き表すことができる。このように変形すると、変数分離型ではなかった微分方程式が非常にシンプルな微分方程式と同等になる。後は、頑張って $x^2 e^{2x}$ の積分を計算しよう。

$$\begin{aligned} e^{2x}y &= \int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}x e^{2x} + \int \frac{1}{2}e^{2x} dx \\ &= e^{2x} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) + C \end{aligned}$$

ゆえに、微分方程式の一般解は以下のようになる。

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + Ce^{-2x}$$

□

式 (B.15) の形の微分方程式の解法

式 (B.15) の形の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + ay = f(x) \quad (\text{B.15})$$

は両辺に e^{ax} をかけることで、次のような微分方程式に変形することができる。

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}y) = e^{ax}f(x) \quad (\text{B.17})$$

B.3.2 定数変化法

式 (B.15) の形の微分方程式の解法としては定数変化法がオーソドックスといえるだろう。式 (B.15) の微分方程式について、 $f(x) = 0$ の場合の解を $y_1(x)$ とする。この時、ある $y_2(x)$ が式 (B.15) を満たすことが

わかれば、 $y_1(x) + y_2(x)$ は式 (B.15) の解である。なぜなら、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(y_1 + y_2) + a(y_1 + y_2) &= \underbrace{\left(\frac{dy_1}{dx} + ay_1 \right)}_0 + \underbrace{\left(\frac{dy_2}{dx} + ay_2 \right)}_{f(x)} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

となるからである。微分方程式の性質として、微分要素が dy/dx のみを含む場合は、一般解に含まれる任意定数は 1 つであるという性質が知られている。この性質を認めると、 $f(x) = 0$ の場合の解（齊次解） y_1 を求めることは比較的容易なので、齊次解の方に任意定数を持たせて、 y_2 は微分方程式を満たす特別な解（特解）を 1 つ見つけるのがよい。この考え方のもと、定数変化法は次の方法で微分方程式を解く。

定数変化法

(1) $\frac{dy}{dx} + ay = f(x)$ において、 $f(x) = 0$ とみなした場合の解（齊次解） y_1 を求める。

$$y(x) = Ce^{-ax} \quad (\text{B.18})$$

(2) 式 (B.18) の定数 C を関数 $\hat{C}(x)$ に置き換えて、この $\hat{C}(x)$ を微分方程式 (B.15) を満足するように適切に決めて特解を求める。

$$\frac{dy}{dx} + ay = \hat{C}'(x)e^{-ax} - a\hat{C}(x)e^{-ax} + a\hat{C}(x)e^{-ax} = \hat{C}'(x)e^{-ax} = f(x)$$

これより、関数 $\hat{C}(x)$ は次の式で決定することができる。

$$\hat{C}(x) = \int f(x)e^{ax} dx \quad (\text{ただし、積分定数は } 0 \text{ とする}) \quad (\text{B.19})$$

(3) 一般解は式 (B.18) と式 (B.19) より以下のようになる。

$$y(x) = Ce^{-ax} + \underbrace{\left(\int f(x)e^{ax} dx \right)}_{\hat{C}(x)} e^{-ax} \quad (\text{B.20})$$

さて、式 (B.20) を変形すると、

$$e^{ax}y = C + \int f(x)e^{ax} dx$$

となるので、これを微分すると式 (B.17) と一致する。そのため、定数変化法は数学的には前の subsection で紹介した議論と等価である。

例 B.5 上記の定数変化法を利用して、 $\frac{dy}{dx} + 2y = x^2$ を解くことを考えよう。

解答

まず、齊次解は $y = Ce^{-2x}$ である。そこで、 C を $\hat{C}(x)$ に置き換えて、元の微分方程式に代入して式を整理すると、

$$\hat{C}(x) = \int x^2 e^{2x} dx = e^{2x} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right)$$

となる。ゆえに、微分方程式の一般解は以下のようになる。

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + Ce^{-2x}$$

□

B.4 定数係数 2 階線形微分方程式

高校物理では「交流」の部分で登場する 2 回微分を含む微分方程式を考えよう。この T_EX ノートでは、減衰振動の部分で

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

という微分方程式が登場した。この section では、このような微分方程式の解がどのようになるかを数学的に把握する方法を記す。

B.4.1 オイラーの公式

定数係数 2 階線形微分方程式の解について調べるには、オイラーの公式が不可欠である。 e^x の x が実数の場合を考えてきた。これを複素数に拡張できるかどうかについては、改めて考え直すのが適切であるが、ここではその手順を飛ばして、複素数と三角関数を結びつける公式が次の**オイラーの公式**を導出する。

定義 B.6 複素数 z に対して、複素数 e^z を次のように定義する。

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (\text{B.21})$$

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\text{B.22})$$

証明. e^x のテイラー展開の式に $x = i\theta$ を代入する。(i は $i^2 = -1$ を満たす複素数である。)

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \dots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \right) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

□

定理 B.7 複素数 z_1, z_2 に対して、複素数 e^{z_1}, e^{z_2} を式 (B.21) に基づいて定義する。このとき、次の指数法則が成立する。

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \quad (\text{B.23})$$

証明. 右辺を定義に基づいて変形することで、左辺が得られることを示していく。

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_2^l}{l!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+l=n} \frac{z_1^k z_2^l}{k! l!} \right) \end{aligned}$$

□

オイラーの公式が導出できれば十分であるが、付録編なので指数法則も記しておく。この指数法則は肩にのっている z が実数の時は

B.4.2 定数係数2階線形微分方程式の解

B.4.3 特性方程式の利用

B.5 減衰振動と強制振動(再考)

付録 C 近似的に物理現象を把握する

単振り子の接線方向の運動方程式は

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \quad (\text{C.1})$$

と書かれることは第5章で紹介した。この際、 θ が十分小さい時は $\sin \theta \approx \theta$ と近似をすることで、

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \quad (\text{C.2})$$

と单振動を表す微分方程式が書けることを紹介した。この章では、 $\sin \theta \approx \theta$ と近似した時に $\theta(t)$ の挙動がどう変わるかをシミュレーションで調べた。

C.1 Euler 法

コンピュータシミュレーションでは、 $t > 0$ の全ての値について値を求ることはできない。基本的には漸化式を解くことによって、 $t > 0$ での挙動を把握することが行われる。一番簡単かつ直感的にもわかりやすい方法は Euler 法と呼ばれる⁽¹⁾。

$x(t + \Delta t)$ の Taylor 展開は

$$x(t + \Delta t) = x(t) + x'(t)\Delta t + \frac{1}{2}x''(t)(\Delta t)^2 + \dots$$

となる。 Δt が十分小さいとき、 Δt の2次以上の項を無視できて、

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t \quad (\text{C.3})$$

となる ($v(t) \equiv \dot{x}(t)$)。同様にして、 $a(t) \equiv \ddot{x}(t)$ として、

$$v(t + \Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t \quad (\text{C.4})$$

と近似できることもわかる。これをもとに $t = 0$ における $x(t), v(t)$ の初期値 $x(0), v(0)$ を与えたのちに、 $\Delta t > 0$ を十分小さくとり、 $t_n = n\Delta t$ における $x(t_n)$ と $v(t_n)$ を順次求めることで $x(t)$ の挙動を把握することが可能である。以上が Euler 法の概要である。

Euler 法

微分方程式 $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ の解を $a \leq t \leq b$ の範囲で数値的に求めることを考える。ただし、 $x(a) = x_0$ とする。この時、

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad t_i = a + ih \quad (0 \leq i \leq n)$$

により、数列 $\{t_i\}$ を定めて、

$$X_0 = x_0, \quad X_{i+1} = X_i + h \cdot f(t_i, X_i) \quad (0 \leq i \leq n) \quad (\text{C.5})$$

によって、数列 $\{X_i\}$ を決定すると、各 X_i は $x(t_i)$ を近似する。

⁽¹⁾Euler 法の数学的意味や詳細は「数値解析」のテキストに記されているが、Euler 法の概略については「ファインマン物理学」など物理のテキストにも少しあっていることがある。

C.2 Runge-Kutta 法

Euler 法の他にも微分方程式を数値的に解く方法がある。ここでは **Runge-Kutta 法**を紹介する。Euler 法では

$$X_0 = x_0, \quad X_{i+1} = X_i + h \cdot f(t_i, X_i) \quad (0 \leq i \leq n) \quad (\text{C.5})$$

という漸化式によって、 $x(t_i)$ の近似値を計算する。Euler 法では $f(t_i, x_i)$ は $x(t)$ の時間微分となっている。Runge-Kutta 法では

$$X_0 = x_0, \quad X_{i+1} = X_i + h \cdot \Phi(t_i, X_i) \quad (0 \leq i \leq n) \quad (\text{C.6})$$

により、 $x(t_i)$ の近似値を計算する。この $\Phi(t_i, X_i)$ は必ずしも $x(t)$ の導関数でなくても良い。そのため、導関数を求めるのが難しい場合でも数値的に解を求めることができる。

- Heun 法 — 2 次の Runge-Kutta 法 —

式 (C.6) の $\Phi(t_i, x_i)$ として、

$$\Phi(t_i, x_i) = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad k_1 = f(t_i, X_i), \quad k_2 = f(t_i + h, X_i + hk_1) \quad (\text{C.7})$$

を選んだ場合は特に **Heun 法**と呼ばれる。

- 3 次の Runge-Kutta 法

式 (C.6) の $\Phi(t_i, x_i)$ として、以下のようにする方法がある。これは 3 次の Runge-Kutta 法の一種である。

$$\Phi(t_i, x_i) = \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3 \quad (\text{C.8})$$

$$k_1 = f(t_i, X_i), \quad k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, X_i + \frac{1}{2}hk_1\right), \quad k_3 = f(t_i + h, X_i + 2hk_2 - hk_1)$$

- 4 次の Runge-Kutta 法 (1/6 公式)

式 (C.6) の $\Phi(t_i, x_i)$ として、以下のようにする方法がある。これは 4 次の Runge-Kutta 法の一種である。

$$\Phi(t_i, x_i) = \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4$$

$$k_1 = f(t_i, X_i), \quad k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, X_i + \frac{1}{2}hk_1\right), \quad (\text{C.9})$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, X_i + \frac{1}{2}hk_2\right), \quad k_4 = f(t_i + h, X_i + hk_3)$$

C.3 振り子の運動を数値的に解析する

ここからは、線形近似する前の单振り子の運動方程式

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\sin \theta \quad (\text{C.10})$$

をコンピュータで解いてみた結果を記す。なお、簡単のために $g/L = 1$ とした。先ほどまでに紹介した Euler 法や Runge-Kutta 法は 1 階の微分方程式に適用できる方法である。2 階の微分方程式の場合には補助変数を導入して 1 階の微分方程式に変形すればよい。ここで、 $\varphi(t) = \dot{\theta}(t)$ とおくと、式 (C.10) は

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\sin \theta \quad (\text{C.11})$$

と書くことができて、運動系自体は

$$\frac{d\theta}{dt} = \varphi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\sin \theta \quad (\text{C.12})$$

という 2 つの 1 階の微分方程式により記述できる。

C.3.1 Euler 法による解析

式 (C.12) のような連立微分方程式は、ここまで出てきた X_i をベクトル $\mathbf{X}_i = (\theta_i, \varphi_i)^\top$ とみなすだけで Euler 法や Runge-Kutta 法を適用できる。式 (C.12) で記述される物理系を Euler 法で解析して、 θ, φ の 2 つの挙動を決定するときは、

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i + h \begin{pmatrix} \varphi_i \\ -\sin \theta_i \end{pmatrix} \quad (\text{C.13})$$

を使えばよい。Euler 法で式 (C.2) や式 (C.11) で記述される物理系における $\theta(t)$ の挙動をコンピュータで計算すると、以下のようになる。以下の 4 つの図では、 θ_0 の値を変えた時の $\theta(t)$ の挙動を表している。どれも $\dot{\theta}(t=0) = 0$ としている。これは振り子を $\theta = \theta_0$ の位置まで移動させた後に、静かに物体を放すことに対応する。

青線が Euler 法で計算した結果を表し、赤線は線形近似 ($\sin \theta \approx \theta$) と近似した時の理論解を表す。初期値 θ_0 を大きくしていくと、 $\theta_0 = \pi/6$ とした時、赤線と青線の振動周期がズレ始めていることが確認できる。これは、線形近似をしてもよい条件である「 $|\theta|$ が十分小さい」を満足していないからだと考えられる。もう一つ重要なこととして、青線の振幅が徐々に大きくなっていることが確認できる。この結果はエネルギー保存則に反する結果であるが、これは数値計算では避けて通れない数値誤差に起因するものである。

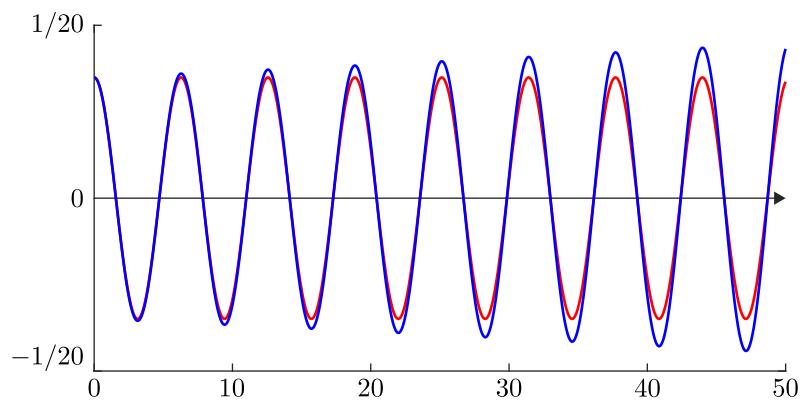


図 C.1 $\theta(t=0) = \pi/90, h = 0.01$ とした時の Euler 法の計算結果：青線が Euler 法を用いて $\theta(t)$ の挙動を計算した結果で、赤線が線形近似をした時の $\theta(t)$ の理論的な挙動を表す。

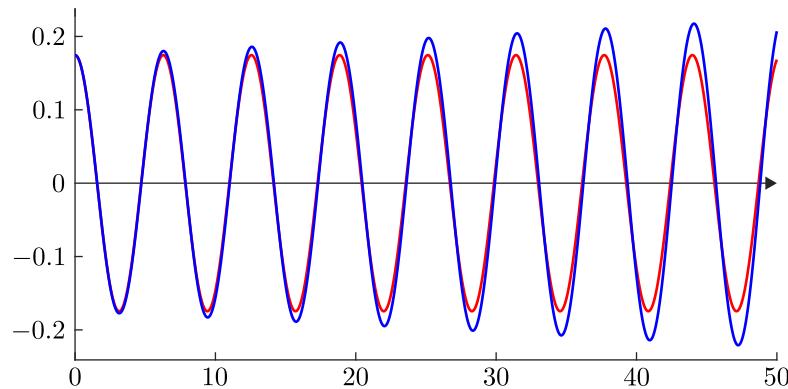


図 C.2 $\theta(t=0) = \pi/18, h = 0.01$ とした時の Euler 法の計算結果：青線が Euler 法を用いて $\theta(t)$ の挙動を計算した結果で、赤線が線形近似をした時の $\theta(t)$ の理論的な挙動を表す。

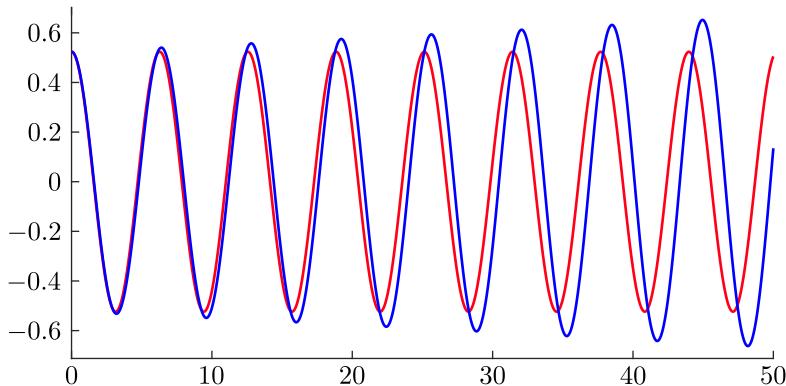


図 C.3 $\theta(t=0) = \pi/6, h = 0.01$ とした時の Euler 法の計算結果：青線が Euler 法を用いて $\theta(t)$ の挙動を計算した結果で、赤線が線形近似をした時の $\theta(t)$ の理論的な挙動を表す。

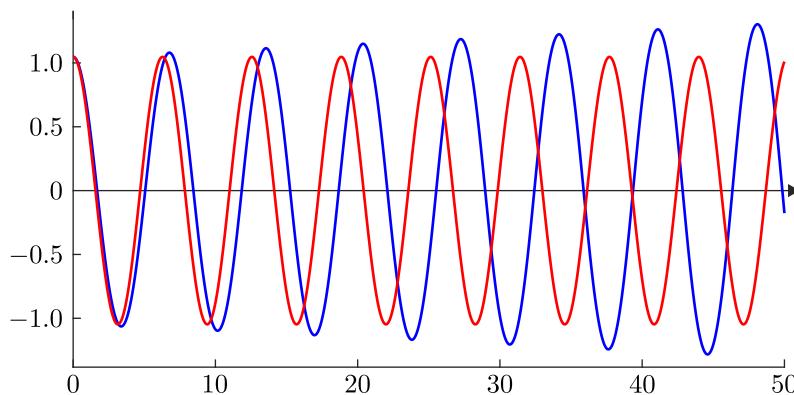


図 C.4 $\theta(t=0) = \pi/3, h = 0.01$ とした時の Euler 法の計算結果：青線が Euler 法を用いて $\theta(t)$ の挙動を計算した結果で、赤線が線形近似をした時の $\theta(t)$ の理論的な挙動を表す。

C.3.2 4次の Runge-Kutta 法 (1/6 公式) による解析

続けて、4次の Runge-Kutta 法 (1/6 公式) を利用して、式 (C.12) の解を計算する。初期条件は引き続き $\theta(t=0) = \theta_0, \dot{\theta}(t=0) = 0$ とする。次の 2つの図は Runge-Kutta 法の計算結果である。Euler 法との一番の違いは、時間が経っても振幅が増加しないことである。エネルギー保存則を考えると、図 C.6 の青線のように振幅が増加しないことは自然である。数値計算に関する理論によると、数値的に計算することに起因する誤差（真値とのズレ）は Euler 法より 4次の Runge-Kutta 法の方が小さいことが知られている。この事実を認めると、Runge-Kutta 法の計算結果が真値を表していると解釈しているのが適切である。すると、図 C.6 は線形近似が適切とはいえない場合は、振動はするものの単振動の理論解である \cos 関数からずれることを表現している図であるといえて、図 C.5 は線形近似が適切といえる範囲内ならば、線形近似の解と真値の誤差は十分小さいことを表す図であるといえる。

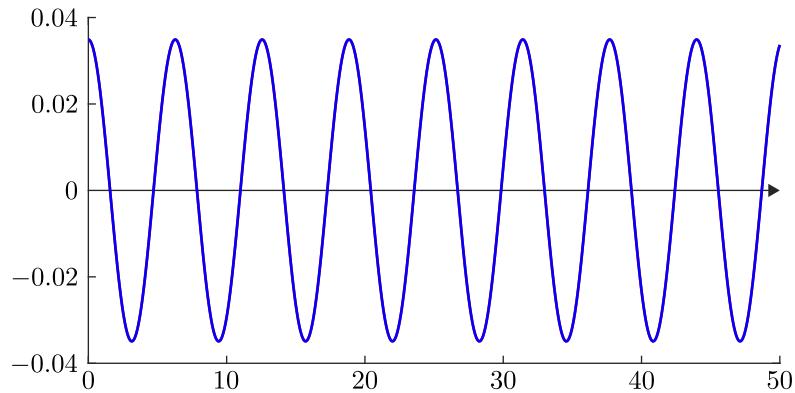


図 C.5 $\theta(t = 0) = \pi/90$, $h = 0.01$ とした時の Runge-Kutta 法（4 次：1/6 公式）の計算結果：青線が Runge-Kutta 法を用いて $\theta(t)$ の挙動を計算した結果で、赤線が線形近似をした時の $\theta(t)$ の理論的な挙動を表す。

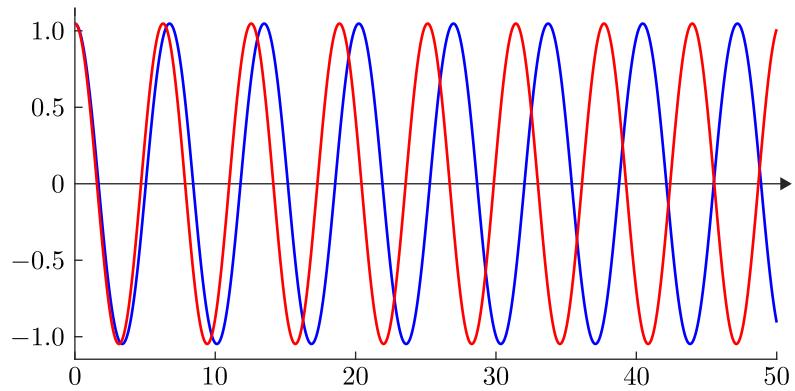


図 C.6 $\theta(t = 0) = \pi/3$, $h = 0.01$ とした時の Runge-Kutta 法（4 次：1/6 公式）の計算結果：青線が Runge-Kutta 法を用いて $\theta(t)$ の挙動を計算した結果で、赤線が線形近似をした時の $\theta(t)$ の理論的な挙動を表す。

付録 D 参考文献

この T_EX ノートを作成する上で参考にした書物を記す。筆者がオススメする本ではないことだけ注意してほしい。

大学受験対策用の参考書

- (1) 山本義隆『新・物理入門 (駿台受験シリーズ) 増補改訂版』(駿台文庫)
- (2) 山本義隆『新・物理入門問題演習 (駿台受験シリーズ) 改訂版』(駿台文庫)
- (3) 服部嗣夫『難問題の系統とその解き方 物理』(ニュートンプレス)
- (4) 浜島清利『名間の森 物理 力学・熱・波動 1 (河合塾シリーズ)』(河合出版)
- (5) 杉山忠男『理論物理への道標 (上)』(河合出版)
- (6) 吉田弘幸『はじめて学ぶ物理学 学問としての高校物理 (上)』(日本評論社)
- (7) 鈴木健一『東大の物理 25 カ年 [第 5 版] (難関校過去問シリーズ)』(教学社)
- (8) 2020 物理基礎・物理 重要問題集 (数研出版)
- (9) 2014 物理入試問題集 (数研出版)
- (10) 2015 物理入試問題集 (数研出版)
- (11) 2018 物理入試問題集 (数研出版)
- (12) 改訂版 物理基礎 (数研出版)
- (13) 改訂版 物理 (数研出版)
- (14) 高校物理の備忘録 (<https://physnotes.jp>)
- (15) 三ツ矢和弘『ハイレベル理系数学 三訂版』(河合出版)
- (16) 木村光一『数学 微分方程式・複素整数 分野別 標準問題精構』(旺文社)

大学生用参考書（数学や物理の参考書）

- (1) 松尾厚『大学数学ことはじめ』(東京大学出版会)
- (2) 杉浦光夫『解析入門 I』(東京大学出版会)
- (3) 難波誠『数学シリーズ 微分積分学』(裳華房)
- (4) 足助太郎『線型代数学』(東京大学出版会)
- (5) 稲見武夫『常微分方程式 理工系の基礎数学 3』(岩波書店)
- (6) 柳田英二・栄伸一郎『講座＜数学の考え方＞7 常微分方程式』(朝倉書店)
- (7) 坂井卓三『初等力学』(岩波全書)
- (8) 藤原邦男『基礎物理学 1 物理学序論としての力学』(東京大学出版会)
- (9) 篠本滋・坂口英継『基幹講座物理学 力学』(東京図書)
- (10) 山内恭彦『一般力学 増訂第3版』(岩波書店)
- (11) 有山正孝『基礎物理学選書 8 振動・波動』(裳華房)
- (12) ファインマン・レイトン・サンズ(著), 坪井忠二(訳)『ファインマン物理学 1 力学』(岩波書店)
- (13) ファインマン・レイトン・サンズ(著), 宮島龍興(訳)『ファインマン物理学 3 電磁気学』(岩波書店)
- (14) The Feynman Lectures on Physics, Volume 2
(http://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_toc.html)