

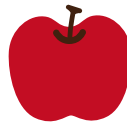
$$ma = F$$

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

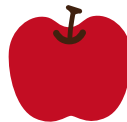


高校物理を振り返る 力学編

anmitsu48



universal gravitation



まえがき

学部時代に高校物理のことを振り返ることになったことがこのノートの作成のきっかけであった。本ノートは私が東大合格を目指して河合塾で予備校生活を送っている際に作成した物理のノートをベースとしている。当時（2016 年度）、ノートの作成にあたり参考にしたのは、駿台の山本義隆先生が書かれた『新・物理入門』[1]、ウェブサイト「高校物理の備忘録」(<https://physnotes.jp>) [2] と、河合塾のテキストと授業ノートである。このノートは浪人生であるにもかかわらず、受験勉強をほったらかして作ったノートで、基本的には高校で習う数学で理解可能な物理の理論だけがただ書かれているノートであった。基本的には『新・物理入門』を自学自習し、その内容を整理したものである。ただ入試で高得点を取るためのテクニックを習得するのではなく、物理学の本質を（高校数学のレベルで理解可能な範囲は）理解するのが重要であるという考えの下で作成した。実際は受験勉強からの逃避が主な目的であったが。

そのノートを 2018 年春から、大学で習ったことや、アルバイトで貯めたお金で買ったその他の物理の参考書（本ノート作成にあたり参考にした書籍は後述の「参考文献」に記す。）を参考に加筆・修正して、本ノートを作成した。ただ自分の気の向くままに書き続けているため、いまだに完成はしていない。

さて、本ノートの流れだが、色々と考えた結果、河合塾の『物理のエッセンス』[3]⁽¹⁾の流れをベースとすることにする（ただし、剛体に関する記述は一番最後とする）。また、本ノートでは高校の数学 3 の内容の理解を前提として論を展開する。そのため、「必要に応じて」ではなく「必要であるため」、高校の物理の教科書では使用されない微分・積分を適宜利用する。微分・積分を使用するのは、私自身も微分・積分の導入により近いが進んだためである⁽²⁾。「微積分物理」だから

(1) 『物理のエッセンス』は受験勉強を始めた段階で最初に手をつける物理の参考書としては適切なレベルであると思われる。上位大学を目指す受験生なら、『物理のエッセンス』レベルの内容は秋の模試までにはある程度は理解できているのが望ましい。しかし、実際はそうではないということを、本ノートの作成中に痛感している。

(2) 私の高校時代の 3 年生の時の物理の先生（佐藤先生）は必要ところで微分や積分を用いて授業を行っていた。浪人時代の杉山先生の授業も、高校物理では「微積分物理」と呼ばれる方法で授業をしていた。高校 2 年生の時の物理基礎の授業の担当教員は、佐藤先生ではなかった。その先生は、頑張って微分や積分を避けようとしていて、私は、イマイチ教科書の内容、受験に役立つテクニックを完璧に理解できなかった。私の卒業した高校は公立高校で、数 2 の微分積分は 2 学期の後半から扱った。そのため、物理基礎の授業で先生が微分積分を使うことはなかった。

高校物理の力学を理解できたのかどうかはわからない。ただ、間違いなく微分・積分の考えの導入は、私にプラスの影響を与えて、私の物理の理解を促進させたと思っている。

本ノートには高校物理で習う内容、または高校物理の知識だけで考えることが可能な発展的な内容しか載せないつもりである。教科書や参考書とは違い、力学分野の内容の本質を中心に記すことを目指し、うわべだけのことはできるだけ記さないように努めた。力学の本質を論じるうえで必要な数学のうち、高校の数学 3 までに習う内容は何の断りもなく利用する。それより高度な数学、大学で習う数学については高校の数学 3 をベースに導入の議論をしっかりと記述してから利用する。微分積分や行列、微分方程式など高校物理の教科書では出てこないような数学を利用した議論を展開していくが、本論あるいは付録部分に詳細な説明を載せるので、適宜参照して頂ければ内容を理解できると考えている。

本ノートのタイトルは「高校物理を振り返る」であるが、高校物理の教科書のレベルを遥かに逸脱するレベルの議論を展開する。このようなノートの作成を通して、高校レベルの力学を自分なりに再構成することができ、そして物理の面白さを感じることができた。読者の方も本ノートを読み、物理の面白さを少しでも理解できると幸いである。

anmitsu48

2022 年 9 月 24 日

目次

まえがき	i
第 1 章 運動の記述	1
1.1 座標系	1
1.1.1 質点	2
1.1.2 1次元の場合	2
1.1.3 2次元の場合	3
1.1.4 3次元の場合	4
1.1.5 原点と座標軸の向きの任意性	5
1.2 速度と加速度	7
1.2.1 速度	7
1.2.2 加速度	8
1.2.3 位置・速度・加速度の関係	8
1.3 等加速度直線運動	9
1.4 放物運動	11
1.5 相対運動	13
1.5.1 相対運動とは？	13
1.5.2 モンキーハンティング問題	15
1.5.3 相対運動の視点でモンキーハンティング問題を考え直す	17
第 2 章 テイラー展開と微分方程式の基礎	19
2.1 テイラー展開	19
2.1.1 ロルの定理	19
2.1.2 平均値の定理	20

2.1.3	テイラーの定理	21
2.1.4	テイラー展開	22
2.1.5	三角関数の近似	24
2.1.6	テイラー展開による一次近似、二次近似	25
2.2	微分方程式とは?	26
2.2.1	微分方程式とは何か?	27
2.2.2	変数分離型の微分方程式	27
2.2.3	変数分離型の微分方程式の解を求める	28
2.2.4	微分方程式の解の収束、発散	29
2.3	空気抵抗を受ける落体の運動の解析	30
2.3.1	空気抵抗を受ける落体の運動が従う微分方程式の解の導出	30
2.3.2	空気抵抗が十分小さい極限を考える	32
2.4	空気抵抗を考慮した放物運動	33
第 3 章	物体に働く力	37
3.1	力とは?	37
3.2	力のつりあい	38
3.3	重力	39
3.4	糸の張力	39
3.5	面から受ける力	39
3.5.1	垂直抗力	39
3.5.2	摩擦力	39
3.6	弾性力	39
3.7	浮力	39
参考文献		41

第 1 章

運動の記述

第 1 章では力学で一番重要な運動の記述法について考える。「力学は運動方程式が全て!」と教える先生は多いかもしれない。しかし、運動方程式を導入するより前に運動自体をどのように記述するかが重要になる。そこで、第 1 章では、今後の議論の基盤となる、座標系、速度、加速度の概念を導入し、簡単な運動について位置や速度、加速度の時間変化を追跡する方法を示す。

1.1 座標系

物体の運動を考えるためには、物体の位置をどう記述するかを決める必要がある。



図 1.1 Google Map で「国会議事堂」と検索した結果（検索日：2022/8/20）

地球上の位置を表現する際は緯度と経度が利用される。Google Map で「国会議事堂」と検索し、国会議事堂の位置を右クリックすると、国会議事堂の位置の緯度と経度が図 1.1 のように表示される。図 1.1 では国会議事堂の緯度は（北緯）35.67603 度で、経度は（東経）139.74478 度であると表示されている。

この 35 度や 139 度という値は地球上のどこかを 0 度としたときの値である。位置を定義するには位置の基準が必要となり、その基準として**原点 O** が導入される。そして、原点 O に対し、各点がどのような位置にあるかを、1 次元的な問題を考える際は 1 つの値、2 次元的な問題を考える際は 2 つの値、3 次元的な問題を考える際は 3 つの値を用いて記述する。

1.1.1 質点

1.1.1 節では文献 [4] の記述に基づいて「質点」という概念を説明する。力学において物体の運動を記述する際、その位置の表現方法として最も単純なものが**質点**による表現である。この質点の考えでは、物体の形状や大きさを無視してある一点に物体の力学的な特性（質量など）が集中していると考える。

基本的に高校物理の力学分野に出てくる題材は大きさをもつ。ただ、物体の形が時間的に変化しない場合には代表点の位置を把握すれば物体の位置の変化を追跡するには十分である。この点については、大きさをもった物体を質点の集まりとみなした場合に、その重心はその物体の全質量に等しい質量をもつ質点の運動と等価であることを示せることが保証してくれる。この性質は剛体の部分の話で再度紹介する。

また、対象とする系の大きさに比べて、物体の大きさが十分小さい場合には質点とみなすことは適切といえる。高校物理の力学分野では万有引力や天体の運動の話が登場する。天体の大きさは何千キロのサイズであるが、太陽の周りの交点などを考える場合は、その交点が起こる空間のスケールはこの天体の大きさよりも十分大きいため、天体自身を点（質点）とみなすことは適切といえる。

以上の理由からこの後の議論では物体は質点とみなして議論を進める。

1.1.2 1 次元の場合

1 次元的な運動は直線上の運動である。直線上の位置の記述は数直線の考えを適用することができる。適当な位置に原点を設定し、その後で正の方向を設定す

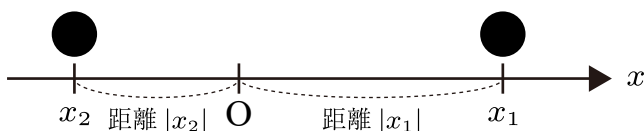


図 1.2 1次元上の物体の位置の表現方法

れば、図 1.2 のように、1 次元座標系の設定ができる。原点に対して正の方向に $x_1(> 0)$ で表される点があるとき、その点と原点の距離は $|x_1| = x_1$ である。逆に、原点に対して正の方向に $x_2(< 0)$ で表される点があるとき、その点と原点の距離は $|x_2| = -x_2$ である。このように原点からの距離を用いることで 1 次元的な運動をする物体の位置を表すことができる。

1.1.3 2次元の場合

2 次元的な運動は平面上の運動である。平面上の位置の記述には 2 つの量が必要となる。適当な位置に原点を設定した後に原点で直交する 2 軸（この 2 軸を x 軸と y 軸とする）を設定する。2 軸を使った位置の記述方法としては次の 2 つの方法がある。

- **直交座標系による表現**：原点から x, y それぞれの方向にどれだけ移動した位置であるかを基に位置を表す。
- **極座標系による表現**：ある点の原点からの距離と、原点とその点を結ぶベクトル（位置ベクトル）とある 1 つの軸がなす角度の 2 つの量を利用して位置を表す。

図 1.3 の点 P の表現方法について、直交座標系では (x, y) と表現するが、極座標系では (r, θ) と表現する。なお、 θ は x 軸の正の方向と \overrightarrow{OP} のなす角度とする。図 1.3 より、 (x, y) と (r, θ) の間には

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (1.1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad (1.2)$$

の関係がある⁽¹⁾。極座標系は円運動の解析において有用である。極座標系の詳細

⁽¹⁾ $y = \tan x$ を満たす x を $x = \arctan y$ と表すことがある。これは三角関数の逆関数で逆三角

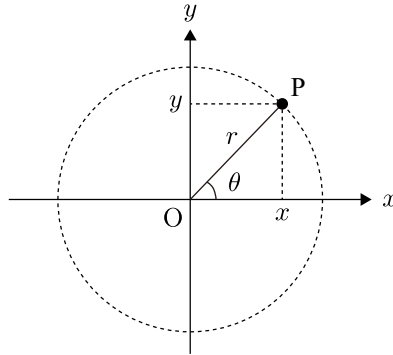


図 1.3 2次元上の物体の位置の表現方法

については円運動の解析の章で紹介する。

1.1.4 3次元の場合

3次元的な運動は空間上の運動である。平面上の位置の記述には3つの量が必要となる。適当な位置に原点を設定した後に原点で直交する3軸（この3軸を x, y, z 軸とする）を設定する。3軸を使った位置の記述方法としては代表的なものに次の3つがある。

- **直交座標系による表現**：原点から x, y, z それぞれの方向にどれだけ移動した位置であるかを基に位置を表す。
- **極座標系による表現**：原点と適当な点 P を結ぶベクトル \overrightarrow{OP} の大きさ r 、ベクトル \overrightarrow{OP} と z 軸のなす角 θ 、 \overrightarrow{OP} の xy 平面への射影と x 軸のなす角 ϕ の3つを用いて位置を表す。（図 1.4 参照）
- **円柱座標系による表現**：円柱の中心軸の方向を z 方向とする。ベクトル \overrightarrow{OP} の xy 平面への射影ベクトル \overrightarrow{OQ} を極座標表示したときの r, θ と原点からの z 方向の変位を用いて位置を表す。（図 1.4 参照）

関数という。三角関数は周期関数であるため、 $y = \tan x$ について y を一つ選んだ時、対応する x は無数にある。そこで多くの場合、 x の範囲として $-\pi/2 < x < \pi/2$ の範囲を考えることを前提とする。なお、 $\arctan x$ は書物によっては $\tan^{-1} x$ と表すものもあるが、この表記は $1/\tan x$ との紛らわしいので本ノートでは使用しない。

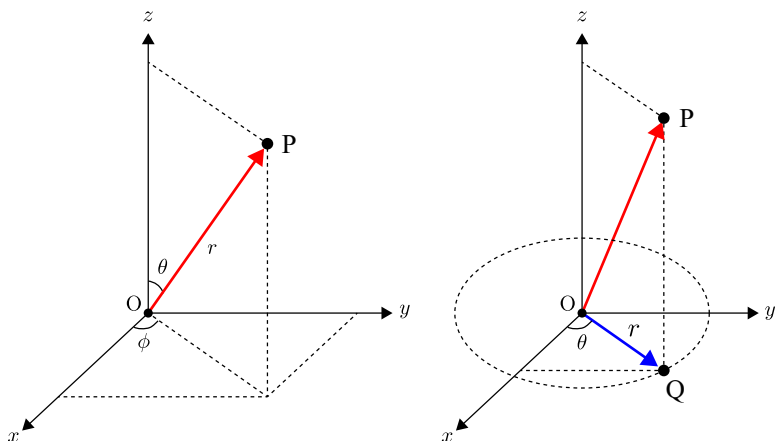


図 1.4 3次元上の物体の位置の表現方法（左図：極座標系、右図：円柱座標系）

この場合、直交座標系、極座標系、円柱座標系のそれぞれを用いて、位置を (x, y, z) , (r, θ, ϕ) , (r, θ, z) と表した場合、直交座標系と極座標系の表現の間には

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (1.3)$$

の関係が成立する。また、直交座標系と円柱座標系の間には

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z \quad (1.4)$$

の関係が成立する。ここで $z = z$ は直交座標系と円柱座標系の両方で z 座標の表現方法が同一であることを表す。

高校物理では3次元の極座標や円柱座標系を使用する機会はないが、このように表現できることは大学で学ぶ物理を理解する上で重要である。大学入試の数学を解くうえでも有用かもしれない。

1.1.5 原点と座標軸の向きの任意性

物理の問題を考える際は、どのような座標系を使用するかという点だけでなく、どのように座標軸を設定するかも重要である。多くの場合、2次元的な運動を考える際は左右方向と上下方向を直交する2軸とし、左右方向の正の向きは右向き、上下方向の正の向きは上向きとする。しかし、必ずしもこの向きに座標軸を設定する必要はない。図 1.5 の黒色で描かれた直交する x, y 軸をもつ座標系を Σ とす

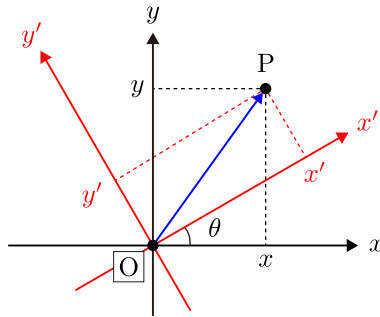


図 1.5 2次元平面内での直交する座標系の設定方法。共通の原点を含む座標系は無数に存在する。

る。また、赤色で描かれた直交する x', y' 軸をもつ座標系を Σ' とする。 Σ' は Σ と共通の原点をもち、その共通の原点に対して反時計回りに θ 回転させることで得られる座標系である。自明なことであるが共通の原点をもつ座標系は無数に存在する。そのため、原点 O を一箇所に決定するだけでは不十分である。直交する2軸をどの方向に設定するかが重要である。

例えば、この後の落体の運動では落下する方向を y 軸の正の方向として座標を設定して議論を行う。一方で、放物運動では左右方向に x 軸（右向きが正）、上下方向に y 軸（上向きが正）をとる。そして、斜面に沿った物体の運動では斜面に沿う方向とそれに垂直な方向に座標軸を設定する。斜面に沿う方向については斜面を下る運動を考えるなら、下る方向を正にとって議論することが多い。

座標軸の方向だけでなく、その正の向きにも任意性があることがわかった。これは2次元、3次元における極座標表示や円柱座標表示も一意に決まらないことに対応する。先ほど、式 (1.1)～式 (1.4) のように極座標表示や円柱座標表示を定義したが、それらは図 1.3 や図 1.4 のように座標軸とその正の向き、さらに角度 θ, ϕ を定めた場合の表記である。これらの取り方が変われば表現方法も変わることには注意する必要がある。

座標系の設定については問題を解きやすいように適切に定めるのがよい。今後様々な設定の方法が出てくるが、それはそう設定すると楽に議論できることが知られているからである。天下り的かもしれないが、最初はそうするものだと思うて読み進めるのが良い。本ノートでは座標系の取り方で問題の解きやすさが大きく変わることについても紹介する。

1.2 速度と加速度

1.2.1 速度

時刻 t で位置ベクトル $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ にある物体が非常に短い時間 Δt の間に $\mathbf{r}(t + \Delta t) = (x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t))$ に動いたとする。この時、物体の**変位**を

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \quad (1.5)$$

と定義する。単位時間あたりの平均の変位はこれを Δt で割ることで求めることができる。

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \quad (1.6)$$

この量を「**平均の速度**」という。高校物理の教科書には「**瞬間の速度**」という考え方も登場する。これは式 (1.6) で時間間隔 Δt を 0 に近づけた時の極限である。 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限は位置 $\mathbf{r}(t)$ の t での微分になる。これから出てくる速度は基本的に平均の速度ではなく、瞬間の速度である。

速度

物体の位置が $\mathbf{r}(t)$ という時間 t の関数で記述されるとき、

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right) \quad (1.7)$$

を物体の**速度**という。また、速度ベクトルの大きさ

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt} \right)^2} \quad (1.8)$$

を物体の**速さ**という。

平均の速度は式 (1.6) で定義され、それは図 1.6 の $\overrightarrow{PP'}$ に平行なベクトルである。 $\Delta t \rightarrow 0$ とすると、点 P' は徐々に点 P に近づき、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限、すなわち点 P における速度ベクトルは、物体の移動軌跡を表す曲線の接線として定義される。

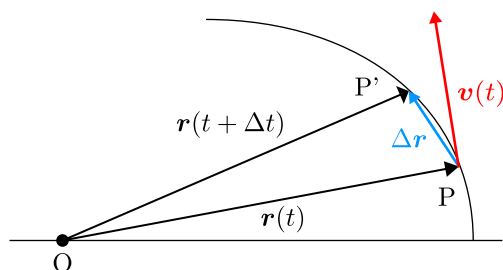


図 1.6 変位ベクトルと速度ベクトル。速度ベクトルは移動軌跡の接線である。

1.2.2 加速度

物体の速度が一定である運動は日常生活の中では稀である。そのため、速度が時間的にどう変化するか、あるいは速度の時間微分がどう変化するかを追跡することが重要である。力学では速度の時間微分として**加速度**が定義される。

加速度

物体の位置が $\mathbf{r}(t)$ 、速度が $\mathbf{v}(t)$ という時間 t の関数で記述されるとき、

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \left(\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt}, \frac{dv_z(t)}{dt} \right) \quad (1.9)$$

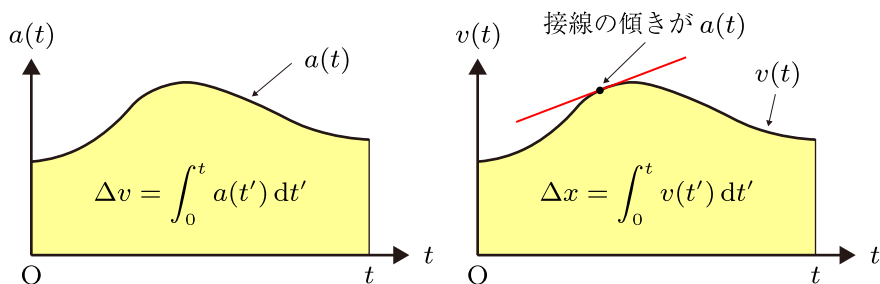
$$= \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \frac{d^2z(t)}{dt^2} \right) \quad (1.10)$$

を物体の**加速度**という。

この加速度は後述する運動方程式が、質量と加速度の積が加えられた力に等しいという形式で与えられることもあり、力学の議論を理解する上では極めて重要な量である。

1.2.3 位置・速度・加速度の関係

上述のように位置、速度、加速度はそれぞれ時間微分によって結びつけられている。これは逆に時間積分によって結びつけられていると考えることもできる。1次元の場合について、積分を利用して位置と速度を表現することを考えよう。

図 1.7 a - t グラフ、 v - t グラフ

加速度 a は速度 v の時間微分 $a = \frac{dv}{dt}$ で与えられることに注意すると、時刻 0 と時刻 t の間での速度変化は次のように表すことができる。

$$\Delta v = v(t) - v(0) = \int_0^t \frac{dv(t')}{dt'} dt' = \int_0^t a(t') dt' \quad (1.11)$$

$$\therefore v(t) = v(0) + \int_0^t a(t') dt' \quad (1.12)$$

同様に、速度 v は $v = \frac{dx}{dt}$ と書き表すことができるので、次の式も成立する。

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t') dt' \quad (1.13)$$

積分といえば数学の問題では面積を考える。高校物理の問題では横軸を時間 t 、縦軸を加速度 a 、あるいは速度 v とするグラフを考えることが有用な場合が多い。図 1.7 に時間と加速度、速度の関係を示すグラフ (a - t グラフ、 v - t グラフ) を示す。数式から明らかであるが図 1.7 の黄色の部分には速度の変化分、あるいは位置の変化分を表す。特に $t = 0$ のときの加速度 $a(0)$ や速度 $v(0)$ が 0 ならば、この面積の値は時刻 t における速度や位置を表す。また、 v - t グラフについては $v(t)$ を表す曲線の接線が $a(t)$ を表すことも重要なポイントである。

1.3 等加速度直線運動

本節では 1 次元の運動について、特に加速度 a が一定の場合について少々掘り下げていく。 $a(t) = a = \text{const.}$ のとき、式 (1.12) は

$$v(t) = v(0) + at \quad (1.14)$$

となる。これを使うと $x(t)$ は

$$x(t) = x(0) + \int_0^t (v(0) + at') dt' = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2 \quad (1.15)$$

となる。式 (1.14) と式 (1.15) から t を消去すると、

$$\{v(t)\}^2 - \{v(0)\}^2 = 2a\{x(t) - x(0)\} \quad (1.16)$$

という関係式が得られる⁽²⁾。

ここでは別の方法で式 (1.16) を導出する方法を紹介する。式 (1.15) の両辺に a をかけて整理すると、

$$a\{x(t) - x(0)\} = \int_0^t a \cdot v(t') dt'$$

となる。 $a = \frac{dv(t)}{dt}$ であることと $\frac{d}{dt}(v^2) = 2v \frac{dv}{dt}$ であることから、

$$a\{x(t) - x(0)\} = \int_0^t \left[\frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{2}\{v(t')\}^2 \right) \right] dt' = \frac{1}{2} (\{v(t)\}^2 - \{v(0)\}^2)$$

となる。この式を変形すると、式 (1.16) が得られる。このような式変形はエネルギー保存則の導出でよく使われる方法なのでおさえておきたい。ここまでで得られた3つの式を以下のようにまとめておこう。

等加速度運動の式

$$v(t) = v(0) + at \quad (1.14)$$

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2 \quad (1.15)$$

$$\{v(t)\}^2 - \{v(0)\}^2 = 2a\{x(t) - x(0)\} \quad (1.16)$$

⁽²⁾ t を消去することで式 (1.16) が得られることについては教科書にのっていると思うので、そちらを参照してほしい。本ノートおよび教科書にも記さない方法としては、式 (1.16) の両辺を2乗した

$$\{v(t)\}^2 = \{v(0)\}^2 + 2v(0)at + a^2t^2$$

と式 (1.15) を比較する方法が考えられる。この式の右辺の第2項と第3項を $2a$ で割ったものが式 (1.15) の右辺の第2項と第3項に一致することから、すぐに式 (1.16) を導出することができる。

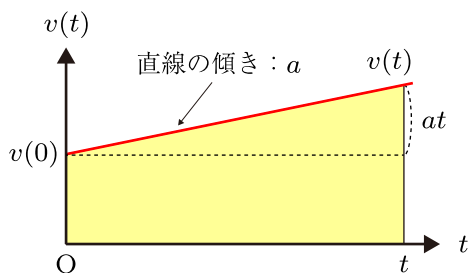


図 1.8 1 次元の等加速度直線運動の v - t グラフ

さて、等加速度直線運動について v - t グラフを考えよう。図 1.8 に 1 次元の等加速度直線運動の v - t グラフを示した。等加速度直線運動では $v(t) = v(0) + at$ であるため、 v - t グラフは傾き a 、切片 $v(0)$ の直線になる。この v - t グラフから式 (1.15) は容易に導出することができる。図 1.8 の黄色の部分の面積を考えると、長方形部分の面積が $v(0)t$ 、直角三角形の部分の面積が $\frac{1}{2}at^2$ であることから、

$$x(t) - x(0) = v(0)t + \frac{1}{2}at^2$$

となることがわかる。

1.4 放物運動

本節では等加速度直線運動の公式を利用して簡単に解析が可能な放物運動を取り扱う。図 1.9 のように原点 $O(0, 0)$ に小物体をおき、時刻 $t = 0$ に x 軸と角 θ をなす方向に初速 $\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$ を加える。このあと、小物体がどのような運動をするか考える。ただし、小物体には y 軸負方向に重力が働く以外には何の力も働かないとし、空気抵抗は無視できるとする。

詳細は後述するが、この運動では x 方向の加速度が $a_x = 0$ で、 y 方向の加速度が $a_y = -g$ となる。そのため、時刻 t における速度 $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ は

$$v_x = v_0 \cos \theta, \quad v_y = v_0 \sin \theta - gt \quad (1.17)$$

となる。また、時刻 t における位置 $\mathbf{r} = (x, y)$ は

$$x = (v_0 \cos \theta)t, \quad y = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.18)$$

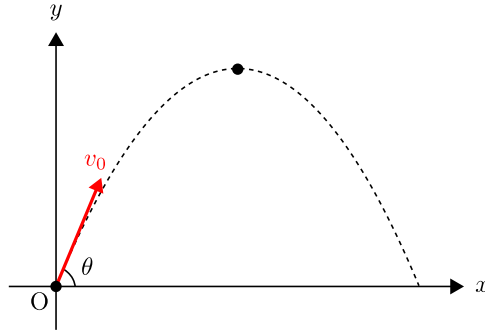


図 1.9 放物運動（斜方投射）のイメージ図

と書ける。これらの式を利用することで小物体の位置、速度の時間追跡を行うことが可能である。

x, y 座標の時間変化がわかれば、物体が x, y 平面上を通過する軌跡の形状を把握することができる。式 (1.18) から t を消去すると、

$$\begin{aligned}
 y &= (\tan \theta)x - \frac{g}{2(v_0 \cos \theta)^2}x^2 \\
 &= -\frac{g}{2(v_0 \cos \theta)^2} \left(x - \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} \right)^2 + \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g} \\
 &= -\frac{g}{2(v_0 \cos \theta)^2} \left(x - \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g} \right)^2 + \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g} \quad (1.19)
 \end{aligned}$$

となり、小物体の描く軌道の方程式が得られる⁽³⁾。この式は放物線の方程式である。

さて、この式から y 座標の最大値は $y_{\max} = \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g}$ であることがわかる。

そして、最大高さに到達するまでに要する時間 t は $t = \frac{x}{v_0 \cos \theta} = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$ であ

⁽³⁾ xy 平面での軌道を把握するには dy/dx を利用する方法も考えられる。式 (1.17) と式 (1.18) より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v_0 \sin \theta - gt}{v_0 \cos \theta} = \tan \theta - \frac{g}{v_0 \cos \theta} t = \tan \theta - \frac{g}{(v_0 \cos \theta)^2} x$$

とかけるので、これを x について積分して $(x, y) = (0, 0)$ を通過するという条件を利用して整理すると、式 (1.19) が得られる。

る。この時の y 方向の速度は

$$v_y = v_0 \sin \theta - g \cdot \frac{v_0 \sin \theta}{g} = 0$$

となる。つまり、放物線軌道の頂点では y 方向の速度 $v_y = 0$ である。これは、 $y(t)$ が極大となるためには $\dot{y} = v_y = 0$ を満たすことが必要であるという数学的な要請もしっかり満たしている。

ここで、直線 $y = 0$ (x 軸) を地面とすると、どのような θ を選択すると最も遠くまで届くかは興味のあることの 1 つである。式 (1.19) より、もう一度 $y = 0$ に到達する際の x 座標は $v_0^2 \sin 2\theta / g$ であり、 $\sin 2\theta$ に比例する。そのため、 $\theta = \pi/4$ のときにもう一度 $y = 0$ に到達する際の x 座標が最大になり、最も遠くまで到達する。

1.5 相対運動

1.5.1 相対運動とは？

電車にのっていると、上りの電車と下りの電車がすれ違うとき、上りの電車から見たとき、下りの電車が横を通過するスピードはとても速いように感じられる。これは、動いている観測者から見たときの運動 (**相対運動**) を検討することで理解しやすくなる。

観測者を A、観測する対象を B と記すことにしよう。A の位置 \mathbf{r}_A 、B の位置 \mathbf{r}_B に対して、速度や加速度がそれぞれ考えられる。A の速度 \mathbf{v}_A 、B の速度 \mathbf{v}_B は、

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt}, \quad \mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt}$$

であり、A の加速度 \mathbf{a}_A 、B の加速度 \mathbf{a}_B は、

$$\mathbf{a}_A = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt}, \quad \mathbf{a}_B = \frac{d\mathbf{v}_B}{dt}$$

である。このとき、動いている A からみた観測対象 B の位置 (**相対位置**) \mathbf{r}_{AB} は

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \quad (1.20)$$

で与えられる。そして、この \mathbf{r}_{AB} の時間微分を**相対速度**として定義し、もう一度

時間微分したものを**相対加速度**と定義する。つまり、

$$\boldsymbol{v}_{AB} = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A \quad (1.21)$$

$$\boldsymbol{a}_{AB} = \boldsymbol{a}_B - \boldsymbol{a}_A \quad (1.22)$$

である。

さて、電車にのっている時にすれ違う電車の速度が早く感じるのは相対速度を考えればよい。今、自分がのっている電車 A が 80 km/h で進んでいるとして、80 km/h で反対からくる電車 B とすれ違ったとする。電車 A と電車 B がすれ違う瞬間の運動を 1 次元的な運動とみなし、電車 A が進む方向を正の方向とすると、電車 A の速度は 80 km/h で、電車 B の速度は -80 km/h となる。そのため、A から B をみたときの相対速度 v_{AB} は、 $-80 - 80 = -160$ km/h となる。つまり、電車 A にのっている人からは、電車 B が 160 km/h の速さですれ違っているように見えるのである。これがすれ違う電車の速度を早く感じる理由である。

この相対運動の考えは動いている 2 物体の運動を解析する際に有効である。大学入試によく出てくる題材としては

- 摩擦面をもち自由に動くことが可能な台と、その上にのっている小物体の運動
- バネで繋がれた 2 物体の運動

などが典型的である。このような問題は重心運動と相対運動という 2 つの見方を活かすことで手早く解くことが可能になる。本ノートでも重心運動と相対運動の考えを用いて 2 物体の運動を解析する例を紹介する⁽⁴⁾。

⁽⁴⁾ 重心運動と相対運動を正しく理解できている人はあまり多くなく、大学入試の問題を解く際はむやみやたらに使用するべきではないと筆者は考えている。多くの入試問題は重心運動と相対運動を駆使しなくても解答を導出できる。各々の物体の運動方程式や系全体のエネルギー保存則、運動量保存則を適切に立てて解き進める方が確実に得点でき、かつ物理の内容をしっかりと理解できるはずである。

1.5.2 モンキーハンティング問題

ここからは相対運動の考えの理解を深めることや、本章で扱った放物運動の内容の理解を深めるために、モンキーハンティング問題を取り扱う⁽⁵⁾。

問題 1

図 1.10 のように水平方向に x 軸、鉛直方向に y 軸をとる。時刻 $t = 0$ に原点 O から小球 P を速さ v_0 で x 軸から $(0 <) \theta (< \pi/2)$ の角度に投げ出す。これと同時に点 (a, b) から小球 Q を自由落下させる。運動は xy 平面内で起こるものとし、重力加速度の大きさを g とする。

- (1) 時刻 t における P と Q の y 座標 y_P, y_Q を求めよ。
- (2) P を投げ出す角度 θ がある値の時、 v_0 の値によらず P と Q は衝突する。その時の $\tan \theta$ の値を求めよ。
- (3) x 軸の上側 ($y \geq 0$) で衝突が起こるために必要な v_0 に対する条件を求めよ。ただし、解答に θ を用いてはならない。
- (4) 小球 P が投げ出されてから衝突するまでの時間を求めよ。ただし、解答に θ を用いてはならない。

$$(1) \quad y_P = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2, \quad y_Q = b - \frac{1}{2}gt^2$$

- (2) P と Q が衝突する場合、衝突した瞬間の y 座標は一致するので、衝突時刻を $t = t_0$ とすると、

$$v_0 \sin \theta \cdot t_0 = b$$

が成立する。一方で x 座標の一致から

$$v_0 \cos \theta \cdot t_0 = a$$

も成立する。この 2 式の左辺どうし、右辺どうしを割ったものを考えると、

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

(5) モンキーハンティングの問題は大学入試では簡単なレベルの問題である。そのため、相対運動の考えを利用しなくても解くことが可能である。このようなレベルの問題こそ基本的な解法だけでなく、少々高度な解法も利用して解くことで、各種解法の特徴や物理的な意味を考察していきたい。

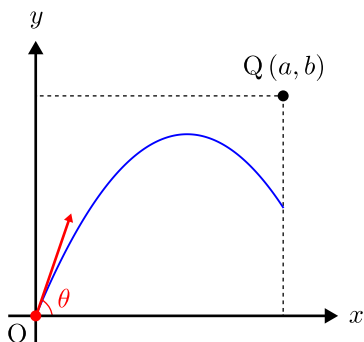


図 1.10

が得られる。

- (3) 衝突時の y 座標は $t = t_0 = \frac{a}{v_0 \cos \theta}$ を y_Q の式に代入して、

$$b - \frac{1}{2}g \left(\frac{a}{v_0 \cos \theta} \right)^2 = b - \frac{g}{2v_0^2} a^2 (1 + \tan^2 \theta)$$

とかける。2つの小球が衝突するとき、 θ は (2) で求めた $\tan \theta = b/a$ を満たすので、 x 軸の上側で衝突が起こる条件は以下になる。

$$b - \frac{g}{2v_0^2} a^2 \left\{ 1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right\} \geq 0 \iff v_0 \geq \sqrt{\frac{g(a^2 + b^2)}{2b}}$$

- (4) $\tan \theta = b/a$ と $0 < \theta < \pi/2$ より $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ となるから、

$$t_0 = \frac{a}{v_0 \cos \theta} = \frac{a}{v_0} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{v_0}$$

と書くことができる。

射出方向 θ が $\tan \theta = b/a$ を満たすが、この θ は $\overrightarrow{OQ_0}$ と x 軸のなす角と一致する (Q_0 は $t = 0$ での小球 Q の位置)。自由落下する小球 Q に小球 P をぶつけるには $t = 0$ において、小球 Q が存在する方向に小球 P を射出すればよいことがこの結果からわかる。

(2) では v_0 によらず θ が $\tan \theta = b/a$ を満たすときに P と Q は衝突するということであった。これより射出角度 θ が大きい、あるいは小さい場合にはどうな

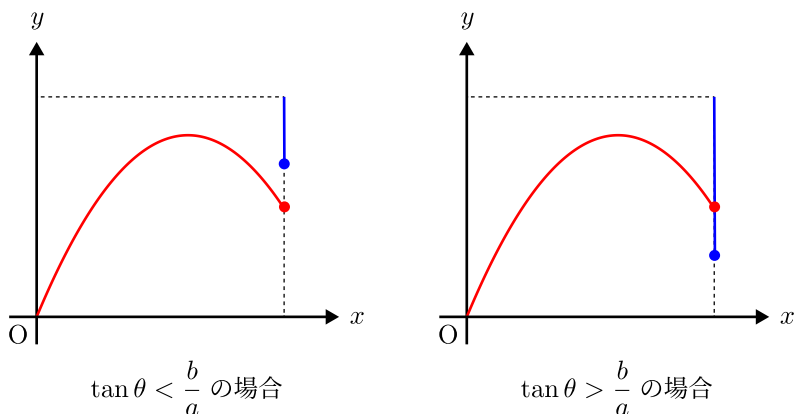


図 1.11

るかを考えよう。衝突時の P と Q の y 座標は衝突時刻が $t = \frac{a}{v_0 \cos \theta}$ なので、

$$y_P = a \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2} a^2 (1 + \tan^2 \theta), \quad y_Q = b - \frac{g}{2v_0^2} a^2 (1 + \tan^2 \theta)$$

である。この式から $\tan \theta$ と b/a の大小により図 1.11 のようになり、衝突するのはある特定の角度の場合だけに限ることがわかる。

(3) は $y = 0$ が地面对応するとき、小球 Q が地面に到達するより前に 2 つの小球が衝突するには、 v_0 をある程度大きくして、できるだけ早く $x = a$ に到達することが必要だということを表している。

1.5.3 相対運動の視点でモンキーハンティング問題を考え直す

この問題を「小球 Q から見た小球 P の相対運動」の視点で考えてみることにしよう。今回は 2 つの小球の位置、速度、加速度が全てわかっているので、相対位置 $\mathbf{r}_{QP} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q$ を計算する際は単に \mathbf{r}_P から \mathbf{r}_Q を引けば十分である。

$$\mathbf{r}_{QP} = \begin{pmatrix} (v_0 \cos \theta)t - a \\ (v_0 \sin \theta)t - b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{QP} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \\ v_0 \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_{QP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この後で運動方程式をとりあげるが、運動方程式を解くことで得られるのは加速度であるため、相対加速度から積分を行って、相対速度や相対位置を計算する方法もふれておこう。2 つの小球に働く力は重力であり両者の加速度は一致

する。そのため相対加速度は $\mathbf{0}$ である。相対速度はこれを積分したものであり、定数ベクトルである。小球 Q の初速度がゼロベクトルであり、小球 P の初速度が $\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$ であることから、

$$\mathbf{v}_{QP} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \\ v_0 \sin \theta \end{pmatrix}$$

である。相対位置はこれを積分したもののなので、積分定数を C_x, C_y とすると、

$$\mathbf{r}_{QP} = \begin{pmatrix} (v_0 \cos \theta)t + C_x \\ (v_0 \sin \theta)t + C_y \end{pmatrix}$$

である。これに $t = 0$ の時の相対位置を考慮して C_x, C_y を決定すると、

$$\mathbf{r}_{QP} = \begin{pmatrix} (v_0 \cos \theta)t - a \\ (v_0 \sin \theta)t - b \end{pmatrix}$$

となる。初期位置、初期速度だけはわかる場合は多く、相対位置や相対速度は求められることが多い。

さて、話を元に戻して相対運動の視点でいくつかの問題を解いてみよう。相対運動で2物体の衝突を観察するとき、衝突時は両者の位置が一致するため、相対位置が $\mathbf{0}$ になるということは重要なポイントである。

- (2) 小球 P と小球 Q が衝突する際は両者の座標が一致するので相対座標は $\mathbf{0}$ となる。相対位置の x, y 座標が 0 になる時刻は同一であることから、

$$\frac{a}{v_0 \cos \theta} = \frac{b}{v_0 \sin \theta} \iff \tan \theta = \frac{b}{a}$$

と $\tan \theta$ に関する式を得ることができる。

今回の場合、相対速度が定数ベクトルであることから、相対運動は等速度直線運動となる。相対速さは $\sqrt{(v_0 \cos \theta)^2 + (v_0 \sin \theta)^2} = v_0$ であることを考えると、最後の問題は以下のように解くことができる。

- (4) $t = 0$ と衝突時の相対座標で見た時の距離は $\sqrt{a^2 + b^2}$ であり、この距離を相対速さ v_0 で近づくから、衝突するまでの時間は

$$t_0 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{v_0}$$

となる。

第 2 章

テイラー展開と微分方程式の基礎

2.1 テイラー展開

2.1 節ではテイラーの定理とテイラー展開を導出する。テイラーの定理自体は高校数学を少々応用させることで証明できる⁽¹⁾。本節ではテイラーの定理、テイラー展開の導出過程を記すが、大学で習う数学のような厳密性は気にしない⁽²⁾。

2.1.1 ロルの定理

定理 2.1 (ロルの定理) \mathbb{R} (実数全体の集合) の閉区間 $a \leq x \leq b$ で連続で、开区間 $a < x < b$ で微分可能な実数値関数 $f(x)$ が $f(a) = f(b)$ を満たすならば、次の 2 つの条件を満たす c が存在する。

$$f'(c) = 0, \quad a < c < b$$

証明. ここではアバウトな証明を示す。まず、 $f(x)$ が定数関数の時は任意の x に

(1) 河合塾で浪人している際、私が所属していたハイパー東大理類コース (2016 年度の呼び方) の演習問題にテイラーの定理を証明する問題があった。

(2) 厳密性は気にしないものの、一応『解析入門』(杉浦光夫・東京大学出版会) や『微分積分学』(難波誠・裳華房) をベースに 2.1 節を作成した。本節の議論では、厳密には微分して出てくる関数の連続性も要求されることがある。しかし、高校物理の内容を扱っている限り、テイラー展開したい関数が、微分すると連続でない関数になることはないので、関数の連続性は満たされていることを前提として議論を進める。

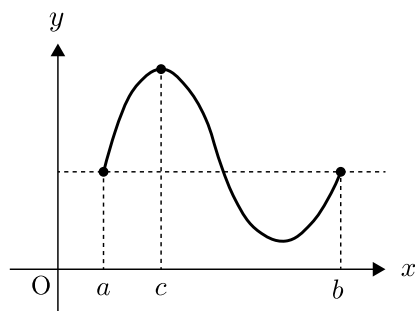


図 2.1 ロルの定理のイメージ

対して $f'(x) = 0$ なので OK。次に、 $f(x)$ が定数関数でない時を考えると、図 2.1 のように a と b の間に $f(a) = f(b)$ よりも大きい、あるいは小さい値が存在する。両端 $x = a, b$ での $f(x)$ の値は等しいから、必ず、元に戻ろうとする。ゆえに、ある $a < c < b$ を満たす c で極大あるいは極小となる。□

2.1.2 平均値の定理

ロルの定理を利用すると、高校数学で出てきた**平均値の定理**を証明できる。平均値の定理は教科書にのっているけれど、入試問題で出てきたときには、頭の片隅に絶対ないあの定理である。

定理 2.2 (平均値の定理) $a < b$ とする。 $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続で、 $a < x < b$ で微分可能ならば、次の 2 つの条件を満たす c が存在する。

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \quad a < c < b$$

証明. k を定数として $g(x) = f(x) - kx$ という関数を考える。ただし、この k は $g(a) = g(b)$ となるように定めることとする。つまり、 $k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ とする。

この時、 $g(a) = g(b)$ であるため、ロルの定理から、 $a < c < b$ を満たすある c が存在して、 $g'(c) = f'(c) - k = 0$ が成り立つ。ゆえに、 $k = f'(c)$ であり、平均値の定理が示された。□

2.1.3 テイラーの定理

定理 2.3 (テイラーの定理) n を 1 以上の整数として、実数 a, b を $a < b$ を満たすようにとる。区間 $a \leq x \leq b$ で n 回微分可能な実数値関数 $f(x)$ に対して、

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \\ &= f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \end{aligned} \quad (2.1)$$

を満たす c ($a < c < b$) が存在する。ただし、 $f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の第 k 階導関数を表す。

証明. 数 A を次の式を満たすように定める。

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{A}{n!}(b-a)^n \quad (2.2)$$

以下、この A が $f^{(n)}(c)$ と一致することを示す。ここで $F(x)$ を次のように定義する。

$$F(x) = f(b) - \left(f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + \frac{A}{n!}(b-x)^n \right) \quad (2.3)$$

このとき、関数 $F(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続で⁽³⁾、 $a < x < b$ で微分可能であり、 $F(a) = F(b) = 0$ を満たす。そのため、ロルの定理より、 $F'(c) = 0$ ($a < c < b$)

⁽³⁾ 微分積分学において、関数 $f(x)$ がある点 x_0 で微分可能であるとき、 $f(x)$ は点 x_0 で連続であることが知られている。そのため、関数 $f(x)$ が n 回微分可能である場合、関数 $f(x)$ とその $1, 2, \dots, n-1$ 階導関数 $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ も連続である。そして、連続な関数の和や積も連続であることも利用すると、式 (2.3) の右辺は連続な関数の和と積の形で書かれているため、連続であることがわかる。

を満たす c が存在する。 $F'(x)$ は次のようにかける。

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= - \left(f'(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} - \frac{A}{(n-1)!} (b-x)^{n-1} \right) \\
 &= - \left(f'(x) + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!} (b-x)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k \right. \\
 &\quad \left. - \frac{f'(x)}{0!} (b-x)^0 - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} - \frac{A}{(n-1)!} (b-x)^{n-1} \right)
 \end{aligned}$$

ここで $0! = 1$ や $(b-x)^0 = 1$ となり、さらに2つの \sum の部分は各項を書き下すと相殺できることがわかるため、

$$F'(x) = - \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!} (b-x)^{n-1} + \frac{A}{(n-1)!} (b-x)^{n-1} \quad (2.4)$$

となることがわかる。

この式に $x = c$ を代入すると、

$$0 = F'(c) = - \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!} (b-c)^{n-1} + \frac{A}{(n-1)!} (b-c)^{n-1}$$

となり、 $A = f^{(n)}(c)$ となることが示され、テイラーの定理が証明された。 \square

2.1.4 テイラー展開

テイラーの定理は、 $a > b$ の場合も成立することが知られている。さて、式(2.1)の b を x に置き換えることで、テイラー展開の基礎となる式が得られる。

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n \quad (2.5)$$

この式(2.5)の右辺の最後の1項は**剰余項**と呼ばれる。剰余項について $n \rightarrow \infty$ の極限を考えたときに0となるなら、 $f(x)$ は無限級数でかける。

テイラー展開

$f(x)$ が a を含む区間 I で、何回でも微分可能でかつ I 上の任意の点 x で $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ を満たすならば、 $f(x)$ は I 上で、

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

と表される。これを $x = a$ を中心とする**テイラー展開**という。

ここでテイラー展開の例として $\sin x$, $\cos x$ の $x = 0$ を中心とするテイラー展開を考える⁽⁴⁾。

まず $\sin x$ のテイラー展開を考える。 $\sin x$ を繰り返し微分したものは

$$\sin x \rightarrow \cos x \rightarrow -\sin x \rightarrow -\cos x \rightarrow \sin x \rightarrow \cdots$$

となる。そのため、任意の x に対して $0 \leq |f^{(n)}(x)| \leq 1$ となる。区間 I として $x = 0$ を含む $-\alpha \leq x \leq \alpha$ を考える。剰余項 $R_n(x)$ に関して、以下の不等式が成立するので、はさみうちの原理から $n \rightarrow \infty$ のときに $|R_n(x)| \rightarrow 0$ となる。

$$0 \leq \left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n \right| \leq \frac{1}{n!} |x|^n < \frac{\alpha^n}{n!} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

したがって、 $\sin x$ は $x = 0$ を中心にテイラー展開できる。 $f^{(n)}(0)$ は、

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

となるから、 $\sin x$ のテイラー展開は

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (2.6)$$

となる。

同様に考えると、 $\cos x$ のテイラー展開は以下になる。

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (2.7)$$

⁽⁴⁾ $x = 0$ を中心とするテイラー展開は特に**マクローリン展開**と呼ばれることもある。

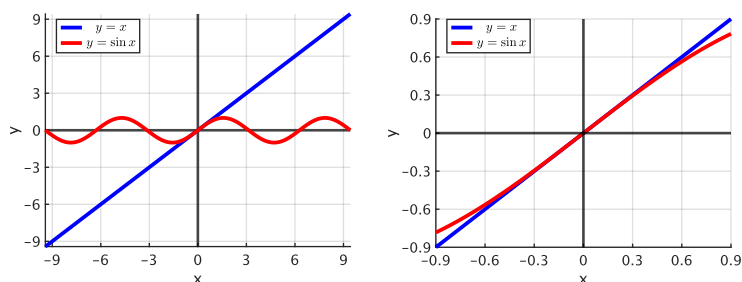


図 2.2 $y = \sin x$ と $y = x$ のグラフ。左は $-3\pi \leq x \leq 3\pi$ の範囲で、右は原点付近 ($-0.9 \leq x \leq 0.9$) の範囲をプロットしたものである。

三角関数のテイラー展開

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \quad (2.6)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad (2.7)$$

2.1.5 三角関数の近似

$\sin x$ と $\cos x$ のテイラー展開の式 (式 (2.6) と式 (2.7)) について $|x|$ が非常に小さい場合、 $|x^n|$ ($n \geq 2$) は十分小さく無視できる。そのため、

$$\sin x \rightarrow x \quad \cos x \rightarrow 1 \quad (2.8)$$

と近似できることが可能である⁽⁵⁾。この近似は、物理現象の概形を把握する時や物理の入試問題を解くときに使われる。

この近似の妥当性を確認するため $\sin x$ と x のグラフを見てみよう。図 2.2 に $\sin x$ と x のグラフを示す。この図より $x = 0$ の近傍で両者はほぼ一致していることがわかり、 $|x|$ が非常に小さい時、 $\sin x$ と x の差は十分小さく、 $\sin x$ を近似的に x とみなしても良いことがわかる。

⁽⁵⁾ $\cos x$ については定数 1 と近似する場合が不適切な場合があり、そのような時は、 $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ と近似することがある。

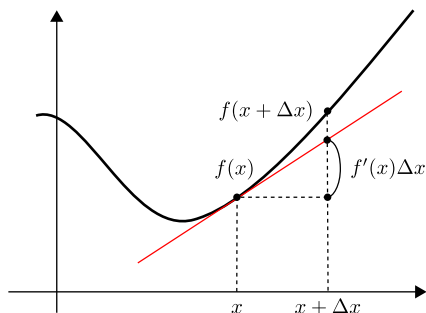


図 2.3 1 次元のテイラー展開を視覚的に捉える

2.1.6 テイラー展開による一次近似、二次近似

テイラー展開を利用すると、 $\sin x$ や $\log x$ など有限個の x のべき乗の項の和の形で表されていない関数を x のべき乗 (x, x^2, x^3, \dots) の項の無限級数で表すことができる。この無限級数表現を利用して、ある限定された範囲内の挙動を一次関数や二次関数で近似して解析することが様々な場面で行われる。

Δx を微小量とする。一変数関数 $f(x + \Delta x)$ を x のまわりでテイラー展開すると、

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}(\Delta x)^2 + \dots \quad (2.9)$$

となる。 $|\Delta x|$ が十分小さいとき、 Δx の 2 次以上の項は十分小さく無視することができる。そのため $|\Delta x|$ が十分小さいときは

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \quad (2.10)$$

と近似することができる。図 2.3 にこの式のイメージを示した。

Δx の 1 次の項までを残して近似した場合に Δx の項が消えてしまう場合などでは、 Δx の 2 次の項までを残して議論することもある。

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}(\Delta x)^2 \quad (2.11)$$

式 (2.10) を利用するとよく使う近似公式が導出される。 a は 0 または 1 でない実数とし、 $f(x) = x^a$ の $x = 1$ のまわりのテイラー展開を考える。 $f'(x) = ax^{a-1}$ なので、 $x = 1$ のまわりのテイラー展開は

$$f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^a \approx f(1) + f'(1) \cdot \Delta x = 1 + a\Delta x$$

と書ける。この結果をまとめると以下ようになる。

$(1+x)^a$ の線形近似

$|x|$ が十分小さい時、次の近似式が成立する。

$$(1+x)^a \approx 1+ax \quad (2.12)$$

この近似式を使った例として、高校物理や大学入試でよく見かける、 $|x|$ が十分小さいときに成立する次の近似式がある。

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \approx 1-x \quad (2.14)$$

大学入試問題でよく見かける $\sin(\theta_0 + \Delta\theta) \approx \sin\theta_0 + \cos\theta_0\Delta\theta$ という近似は、式(2.10)で $f(x) = \sin x$ とした場合の式である。おそらく、大学入試の問題集では、加法定理と $\sin x \rightarrow x$, $\cos x \rightarrow 1$ の近似を用いて導出する方法⁽⁶⁾が記されているだろう。

2.2 微分方程式とは？

物理の問題では微分方程式が必ず出てくる。高校の力学では位置 \boldsymbol{r} や速度 \boldsymbol{v} に関する微分方程式を解析することで物体の挙動を把握する。本節では高校物理に登場する内容を数学的に解析する際に必要な微分方程式の基礎的な内容を紹介する。高校物理では微分方程式の数学的な解析は行われず、定性的な考察しかしないが、定量的な考察の方法も身につけておくと、より理解が深まると思われる。

本節は、松尾厚『大学数学ことはじめ 新入生のために』（東京大学出版会）をもとに作成した。

⁽⁶⁾ 加法定理 $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ を利用して展開してから、近似を導入する。

$$\sin(\theta_0 + \Delta\theta) = \sin\theta_0 \cos\Delta\theta + \cos\theta_0 \sin\Delta\theta \approx \sin\theta_0 + \cos\theta_0\Delta\theta$$

2.2.1 微分方程式とは何か？

高校物理で出てくる微分方程式に運動方程式がある。この運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F$$

という一般的な形を持つ。 F は物体に外部から印加される力である。このように微分を含む項を関係式を**微分方程式**という。微分方程式を解くことは微分を含む関係式を満たす関数（上の式では $x(t)$ ）を求めることである。

2.2.2 変数分離型の微分方程式

微分方程式の中で簡単に解くことができるものに**変数分離型**の微分方程式がある。 $p(y)$ を y のみの関数、 $q(x)$ を x のみの関数として

$$p(y) \frac{dy}{dx} = q(x) \quad (2.15)$$

という微分方程式を満たす $y = f(x)$ を求めることを考えよう。

このような微分方程式は以下のような形式で解くことが多い。式 (2.15) の両辺を x で積分する。

$$\begin{aligned} \int p(y) \frac{dy}{dx} dx &= \int q(x) dx \\ \therefore \int p(y) dy &= \int q(x) dx \end{aligned} \quad (2.16)$$

式 (2.16) のように x だけの積分と y だけの積分に分解することができるため、式 (2.15) の微分方程式は「変数分離」型と呼ばれる。 $p(y), q(x)$ の原始関数を $P(y), Q(x)$ とする。すなわち、

$$\frac{dP(y)}{dy} = p(y), \quad \frac{dQ(x)}{dx} = q(x) \quad (2.17)$$

を満たす $P(y), Q(x)$ を 1 つ選択する⁽⁷⁾と、式 (2.16) の左辺は $P(y) + C_y$ 、右辺は $Q(x) + C_x$ となる。ここで C_x, C_y は不定積分の積分定数である。 C_x, C_y は任

(7) ここで「1 つ選択する」と書いたが、それはこの条件を満たす $P(y)$ や $Q(x)$ は無数に存在するためである。単純な例として $p(y) = y$ とすると、 $P(y) = y^2 + \text{const.}$ という形の 2 次関数は定数がどんな値であっても $dP(y)/dy = p(y)$ を満たす。

意の定数なので、 $C_x - C_y = C$ とすると、これも任意の定数であり、最終的に式 (2.17) は

$$P(y) = Q(x) + C \quad (2.18)$$

となる。このように微分を含まない形で x, y の関係を表す式を得られたなら、微分方程式を解いたことになる。

2.2.3 変数分離型の微分方程式の解を求める

ここで簡単な微分方程式を通して、変数分離型の微分方程式の解き方を確認しよう。 a を 0 でない実数として、次の微分方程式を考えよう。

$$\frac{dy}{dx} = ay \quad (2.19)$$

x だけの式、 y だけの式への分解を行うために両辺を y で割ることを考える。文字式で割る場合はそれが 0 となる場合について注意する必要がある。

まず y が定数関数 0 の場合を考える。定数関数 $y = 0$ の x 微分は 0 であり、これは $ay = 0$ と一致するため、定数関数 $y = 0$ は微分方程式 (2.19) の解である。

次に y が定数関数 0 でない場合を考える。このときは何の問題もなく両辺を y で割ることで

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = a \quad (2.20)$$

となる。これを x で積分して整理すると、

$$\int \frac{1}{y} dy = a \int dx \quad (2.21)$$

$$\therefore \log |y| = ax + C$$

$$\therefore y = \pm e^C e^{ax} \quad (2.22)$$

となる。 C は任意の定数であるため、 $\pm e^C$ は 0 以外の任意の値をとる。

定数関数 $y = 0$ も微分方程式 (2.19) の解であることを考慮すると、任意の値をとる定数 C を用いて

$$y = Ce^{ax} \quad (2.23)$$

が微分方程式 (2.19) の解であるといえる。 $C = 0$ の場合に定数関数 $y = 0$ を表す。

これはただ微分方程式 (2.19) を満たす全ての x の関数 y を求めただけである。物理の問題ではこの微分方程式に加えて、例えば時刻 $t = 0$ のときに y_0 という値をとる（初期条件）、平面 $x = 0$ 上では 0 となる（境界条件）、などの条件を考慮する必要がある場合がほとんどである。

続けて、微分方程式 (2.19) を満たす関数のうち、 $x = 0$ のときに $y = y_0$ となるものを求めることを考えよう。これは初期条件を考慮した微分方程式の解を計算する問題である。このような問題は初期条件を気にせず微分方程式を満たす全ての関数を計算した後で、初期条件を満たすものを選ぶ（任意の定数の値を一つに確定させる）方針がとられる。

$x = 0$ のときに $y = y_0$ となるものについては、式 (2.23) に $x = 0$, $y = y_0$ を代入してから、その条件を満たす C を決定すればよい。そのような C は $C = y_0$ であることがわかる。そのため、 $x = 0$ のときに $y = y_0$ となるものは

$$y = y_0 e^{ax} \quad (2.24)$$

であるといえる。

2.2.4 微分方程式の解の収束、発散

式 (2.19) で表される微分方程式 $dy/dx = ay$ の解のうち、 $x = 0$ のときに $y = y_0$ であるものは $y = y_0 e^{ax}$ であることは前節でふれた。

物理の問題では $|x|$ が十分小さい場合や、 $x \rightarrow \infty$ などの極限的な状況での振る舞いについての考察が重要となる。 $|x|$ が十分小さい場合の振る舞いについては e^{ax} をテイラー展開して x の低次の項に注目すれば十分である。大抵の場合は

$$e^{ax} \approx 1 + ax, \quad e^{ax} \approx 1 + ax + \frac{1}{2}(ax)^2$$

と x^2 の部分までを考えれば十分である。

$|x|$ が十分大きく $x \rightarrow \pm\infty$ での振る舞いを考える際は単に極限を考えるだけで十分である。 e^{ax} の $x \rightarrow \infty$ の極限は

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{ax} = \begin{cases} +\infty & a > 0 \\ 1 & a = 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}$$

であるため、 e^{ax} の極限的な状況での振る舞いは a の正負によって決まることが

わかる⁽⁸⁾。 $a < 0$ の時は初期値 ($x = 0$ での y の値) y_0 の正負によらず $y \rightarrow 0$ と収束する。

2.3 空気抵抗を受ける落体の運動の解析

空気抵抗を受ける運動を数学的に解析することは高校物理の範囲外である。その理由の1つに解析の際に（高校数学の範囲外である）微分方程式を解かなければならないことがあげられる。本節では2.2節で紹介した議論に基づいて、空気抵抗を受ける落体の運動に関する微分方程式を解き、その挙動を議論していく。なお、ここでは空気抵抗の大きさが速度に比例する場合⁽⁹⁾を考える。

2.3.1 空気抵抗を受ける落体の運動が従う微分方程式の解の導出

$t = 0$ で原点から静かに質量 m の小球を放す。鉛直下向きを正として y 軸をとる。このとき、小球の速度 v は次の微分方程式（運動方程式）を満たしながら時間変化する。

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv \quad (2.25)$$

式 (2.25) の両辺を m で割って整理する。定数 mg/k の時間微分は0であることを考慮すると、

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= g - \frac{k}{m}v = -\frac{k}{m} \left(v - \frac{mg}{k} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(v - \frac{mg}{k} \right) &= -\frac{k}{m} \left(v - \frac{mg}{k} \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

⁽⁸⁾ 大学で学ぶ数学や工学では

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

という形式の微分方程式を扱う。この微分方程式の解は $e^{\lambda_i x}$ ($i = 1, \dots, n$) の重ね合わせ

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}$$

という形で表されることが知られている。この λ_i は実数だけに限らず、複素数である場合も考える。大学で学ぶ数学や工学では $x \rightarrow \infty$ の極限で収束する解（安定解）であるか、発散する解（不安定解）であるかが重要なポイントであり、全ての λ_i の（実部の）正負について微分項の係数だけから評価する方法論が登場する。

⁽⁹⁾ 速度に比例する抵抗を**粘性抵抗**という。速度の2乗に比例する抵抗を**慣性抵抗**という。

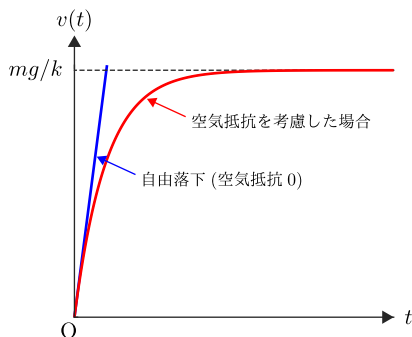


図 2.4 空気抵抗を受ける落体の運動 — $v(t)$ と t の関係 —

となる。これは $v - mg/k$ という量が指数的に時間変化することを表している。
 $t = 0$ のとき $v = 0$ なので $v - mg/k = -mg/k$ であることから、

$$v - \frac{mg}{k} = -\frac{mg}{k} \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) \iff v = \frac{mg}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)\right) \quad (2.27)$$

と $v(t)$ を求めることができる。速度 $v(t)$ と時間 t の関係を図示すると図 2.4 のようになる。

速度の式より加速度 a は

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = g \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) \quad (2.28)$$

である。加速度 $a(t)$ は時間とともに減少して 0 に近づくことがわかる。

位置 $y(t)$ は速度 $v(t)$ を積分することで求められる。 $y(0) = 0$ なので

$$y(t) = \int_0^t v(t) dt = \frac{mg}{k}t + \frac{(mg/k)^2}{g} \left(\exp\left(-\frac{k}{m}t\right) - 1\right) \quad (2.29)$$

と求められる。

$t \rightarrow \infty$ の極限を考えると $a \rightarrow 0$, $v \rightarrow mg/k$ である。十分時間が経つと加速度 a が 0 に収束することは、十分時間が経つと重力と空気抵抗がつり合うことを表している。十分時間が経った時の速度 $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = mg/k$ のことを終端速度という。

2.3.2 空気抵抗が十分小さい極限を考える

空気抵抗を表す係数 k が小さい場合に、空気抵抗が存在しない場合と一致するかどうかを確認しよう。これは $k \rightarrow 0$ の極限における振る舞いを考えることに相当する。

まず、加速度については $k \rightarrow 0$ のときに $a(t) \rightarrow g = \text{const.}$ に収束することがわかる。空気抵抗がない場合は重力だけを受けて運動をするので、その加速度は g である（正の方向に注意）。そのため、 $k \rightarrow 0$ の極限で空気抵抗がない場合と一致することがわかる。

速度 $v(t)$ と位置 $y(t)$ については mg/k という項があるため、単に $k \rightarrow 0$ とするだけでは不適切である。このような場合はテイラー展開を利用して、 \exp の部分の項を展開して、 k の 1 次や 2 次までの項をとり出すことを考える。 \exp のテイラー展開は以下ようになる⁽¹⁰⁾。

$$\exp\left(-\frac{k}{m}t\right) = 1 - \frac{k}{m}t + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^2 t^2 + \mathcal{O}(k^3) \quad (2.30)$$

ここで $\mathcal{O}(k^n)$ は k の n 次以上の項をまとめた部分を表す記号である。例えば、 $\mathcal{O}(k^3)$ は k の 3 次以上の項をまとめたものを表しており、

$$\mathcal{O}(k^3) = \sum_{n=3}^{\infty} a_n k^n, \quad (a_n \text{ は任意の定数})$$

であると考えれば、本ノートでは十分である。このテイラー展開を利用すると $v(t)$ は

$$\begin{aligned} v &= \frac{mg}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) \right) \\ &= \frac{mg}{k} \left(1 - \left(1 - \frac{k}{m}t + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^2 t^2 + \mathcal{O}(k^3) \right) \right) \end{aligned}$$

⁽¹⁰⁾ z の関数 e^z は何回微分しても e^z であるため、 $z=0$ での n 階微分の微分係数は n によらず 1 である。そのため、テイラー展開に関する公式より、

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

となる。これは $\sin x$, $\cos x$ と並んで、大学で学ぶ数学や物理、工学で重要なテイラー展開の式である。

$$= gt + \frac{1}{2} \frac{k}{m} gt^2 + \mathcal{O}(k^2) \quad (2.31)$$

となり、 $k \rightarrow 0$ の極限は $v \rightarrow gt$ となる。これも空気抵抗がない場合の速度と一致している。

位置 $y(t)$ については

$$\begin{aligned} y &= \frac{mg}{k} t + \frac{(mg/k)^2}{g} \left(\exp \left(-\frac{k}{m} t \right) - 1 \right) \\ &= \frac{mg}{k} t + \frac{(mg/k)^2}{g} \left(\left(1 - \frac{k}{m} t + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{m} \right)^2 t^2 + \mathcal{O}(k^3) \right) - 1 \right) \\ &= \frac{mg}{k} t - \frac{mg}{k} t + \frac{1}{2} gt^2 + \mathcal{O}(k) \\ &= \frac{1}{2} gt^2 + \mathcal{O}(k) \end{aligned} \quad (2.32)$$

となり、 $k \rightarrow 0$ の極限は $y \rightarrow \frac{1}{2} gt^2$ となり、これも空気抵抗がない場合の位置の式と一致している。

2.4 空気抵抗を考慮した放物運動

第1章で考えた放物運動について、速度に比例する空気抵抗を受ける場合を考えてみよう。原点から射出した小球の速度の x, y 成分 v_x, v_y に関する微分方程式は

$$\frac{dv_x}{dt} = -kv_x \quad (2.33)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - kv_y \quad (2.34)$$

である⁽¹¹⁾。

これを $t = 0$ で $v_x(0) = v_0 \cos \theta$, $v_y(0) = v_0 \sin \theta$ であることを利用すると、

$$v_x(t) = (v_0 \cos \theta) e^{-kt} \quad (2.35)$$

$$v_y(t) = -\frac{g}{k} + \left(v_0 \sin \theta + \frac{g}{k} \right) e^{-kt} \quad (2.36)$$

⁽¹¹⁾ ここでは速度に比例する空気抵抗の係数を k/m と物体の質量で割った値ではなく、それを新たに k と書き換えた式を考えることにする。

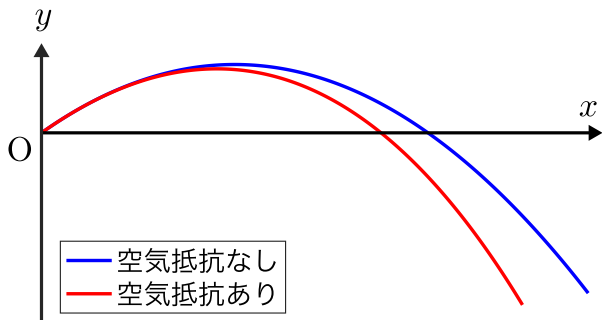


図 2.5 空気抵抗がない場合とある場合の小球の軌道

と v_x, v_y を求めることができる。この式を t で積分して $t = 0$ で $x(0) = y(0) = 0$ であることを利用すると、

$$x(t) = \frac{v_0 \cos \theta}{k} (1 - e^{-kt}) \quad (2.37)$$

$$y(t) = -\frac{g}{k}t + \frac{1}{k} \left(v_0 \sin \theta + \frac{g}{k} \right) (1 - e^{-kt}) \quad (2.38)$$

と x, y も求めることができる。式 (2.37) から $t = \frac{1}{k} \log \left(\frac{v_0 \cos \theta}{v_0 \cos \theta - kx} \right)$ であるから、

$$\begin{aligned} y &= -\frac{g}{k^2} \log \left(\frac{v_0 \cos \theta}{v_0 \cos \theta - kx} \right) + \frac{1}{k} \left(v_0 \sin \theta + \frac{g}{k} \right) \frac{kx}{v_0 \cos \theta} \\ &= \frac{g}{k^2} \log \left(1 - \frac{kx}{v_0 \cos \theta} \right) + \left(v_0 \sin \theta + \frac{g}{k} \right) \frac{x}{v_0 \cos \theta} \end{aligned} \quad (2.39)$$

と xy 平面での小球 P の軌跡は複雑な形の関数になる。この関数のグラフをプロットすると図 2.5 のようになる。このグラフより空気抵抗がある場合は空気抵抗がない場合と比べて、最高高さと到達点が小さくなることがわかる。この結果は直感的に予想されることと一致する。

図 2.5 より x が小さいときは空気抵抗があつたとしても小球の軌道が空気抵抗がない場合とほぼ同一であることがわかる。この点については \log の部分のテイラー展開を計算して、 x が小さい時の $y(x)$ の x 依存性の主要な部分を取り出すこ

とで説明可能である。テイラー展開を計算して x の 2 次の項までを取り出す⁽¹²⁾ことを考える。

$$\begin{aligned} y &= \frac{g}{k^2} \left(-\frac{kx}{v_0 \cos \theta} - \frac{1}{2} \frac{k^2 x^2}{(v_0 \cos \theta)^2} \right) + \left(v_0 \sin \theta + \frac{g}{k} \right) \frac{x}{v_0 \cos \theta} \\ &= (\tan \theta)x - \frac{g}{2(v_0 \cos \theta)} x^2 \end{aligned}$$

が得られる。この式は空気抵抗がない場合の小球の軌道を表す式と同一である。そのため、 x が小さいときに限っては空気抵抗の有無にかかわらずほぼ同一の軌道上を動く。

⁽¹²⁾ z は実数で $|z| \ll 1$ を満たすときを考えよう。

$$\frac{d}{dz} \log(1-z) = -\frac{1}{1-z}, \quad \frac{d^2}{dz^2} \log(1-z) = -\frac{1}{(1-z)^2}$$

であることから、

$$\log(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} + \mathcal{O}(z^3)$$

となる。ここで $\mathcal{O}(z^3)$ は z の 3 次以上の項を表しており、 $|z| \ll 1$ の場合、この項は z や $z^2/2$ よりも十分小さく無視することができる。

第3章

物体に働く力

第3章では物体に働く力について、高校物理の力学分野で登場する内容を紹介する。運動を記述する方法及びその解析の基礎となる数学的内容については第1章と第2章で紹介した。それらに加えて、力に関する基本的な内容をおさえることは、力のつりあいや運動方程式を扱う上で重要である。本章では重力、糸の張力、摩擦力、弾性力、浮力を取り扱う⁽¹⁾。

3.1 力とは？

そもそも「力」とは何なのか？哲学的な意味ではなく、物理の問題での意味を少しだけ整理する。

『ファインマン物理学』では、次の章で紹介する運動方程式 $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ （質量と加速度の積が力に等しい）という式をもとに、

力の定義 1 もしも一つの物体に加速度があるなら、それには力がはたらいているのである。

力の定義 2 力の定義はいろいろ考えられるが、その中でもっとも厳密で美しいのは、単に力とは物体の質量と加速度とをかけたものであるというのであろう。

⁽¹⁾ 弾性力については単振動との関連があるが、それは後の章で詳細に説明することとする。また、万有引力についてもこの後の章で詳細に説明する。この他に高校物理では電氣的な力（クーロン力）も登場するが、それは本ノートでは取り扱わない。

という2つの定義方法が記されている。1つ目に記した定義から、物体に加速度を生じさせる因子が「力」であるということができる。

また、等速度直線運動をしている際には加速度 \boldsymbol{a} がゼロベクトルであることをもとに、

力の定義3 また力の定義として、力のはたらいていない物体は、一定の速度で一直線の上を運動するということもできる。そうすれば、一直線の上を一定の速度で運動しているのではない物体があったとすれば、我々はそれに力のはたらいているということができる。

と3つ目の定義方法が記されている。これは物体の運動の方向を変える因子が「力」であると言っている。

「力」については確定した1つの定義があるわけではない。しかし、数式的あるいは現象的にこう定義するのが自然であるというものとして、上の3つが『フェインマン物理学』で提示されている。厳密な定義を考え出すと泥沼にハマりそうであるため、本ノートでは「**物体の運動の状態を変える因子が力である**」というぐらいのラフな定義を「力」の定義として採用することにしよう。

3.2 力のつりあい

物体には後述する重力や張力、摩擦力、弾性力など様々な力が働く。

3.3 重力

3.4 糸の張力

3.5 面から受ける力

3.5.1 垂直抗力

3.5.2 摩擦力

3.6 弾性力

3.7 浮力

参考文献

- [1] 山本義隆『新・物理入門（駿台受験シリーズ）増補改訂版』（駿台文庫）
- [2] 「高校物理の備忘録」<https://physnotes.jp>
- [3] 浜島清利『物理のエッセンス 力学・波動 四訂版（河合塾シリーズ）』（河合出版）
- [4] 山内恭彦『一般力学 増訂第 3 版』（岩波書店）
- [5] 藤原邦彦『基礎物理学 1 物理学序論としての力学』（東京大学出版会）
- [6] ファインマン、レイトン、サンズ（著）、坪井忠二（訳）、『ファインマン物理学 I』（岩波書店）
- [7] 松尾厚『大学数学ことはじめ 新入生のために』（東京大学出版会）
- [8] 難波誠『数学シリーズ 微分積分学』（裳華房）
- [9] 杉浦光夫『解析入門 I』（東京大学出版会）