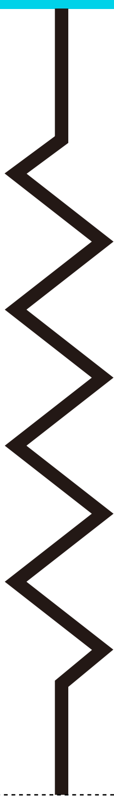
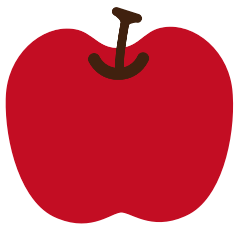
$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

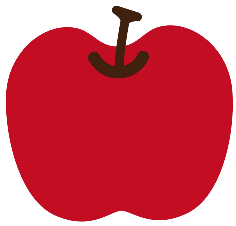


高校物理を振り返る(力学編)

れいな(仮)



universal gravitation



まえがき

私は諸事情により、高校で習う物理について振り返ることになった。その際、山本義隆先生の本『新・物理入門』[1]や、インターネットで見つけられる「高校物理の備忘録」、それと浪人時代のハイパー東大理類クラスのテキスト、浪人時の物理の先生、杉山忠男先生の板書を元に作成したノートを見た。私が (浪人時代であるにも関わらず) 受験勉強をほったらかして作ったノート。理論だけがただ書かれているノート。それを作り、一人で満足し、物理の受験勉強をした気になったあの頃を思い出した。そんなノートを大学で習ったことも取り入れながら、TEX で Re-write した。

その Re-write を始めて 1 年半が経った。未だに完成していない。それに自分でも完成形が見えていない。いつ終わりになるのかもわからず、ただ自分の気の向くままに書き続けている。この TEX ノートの全体の流れは、私が作成したノートに基づいている。一応、私が高校生、浪人生だった 2015 年、2016 年の時点の「物理基礎」の部分の内容を取り上げたあと、「物理」の内容を取り上げている。ただし、剛体に関する記述は一番後ろに持っていった。これは、大学の力学の教科書では、剛体に関する話が一番最後に記されていることを真似したためである。

私は、高校時代の佐藤先生の必要なところで微分や積分を使う授業、浪人時代の杉山先生の授業などで、高校の範囲であっても微分や積分を活用すべきだと思うようになった。高校 2 年生の時に佐藤先生とは別の先生の、頑張って微分や積分を避けようとする先生の、物理基礎の授業では、イマイチ教科書の内容、受験に役立つテクニックを完璧に理解できなかった[2]。微分積分の導入が理解に結びついたのかどうかはわからない。ただ、高校 3 年生の時の佐藤先生の授業は私に大きな影響を、プラスの影響を与えたのは事実である。

この TEX ノートでは、微分積分を多用するほか、行列も多用する。現在の高校数学では行列を扱わない。そこで、行列を使用する直前に、行列の基礎知識を説明する Subsection を設けた (第 3 章・61 ページ〜)。私は、高校数学で行列を扱っている時の、高校数学の教科書を見たことがないので、当時どのレベルまで理系の高校生が行列を扱えたか知らない。そのため、行列の説明については基礎の基礎から記した。

また、第 5 章では Taylor 展開を導入することで、高校物理の内容をより理解しやすいようにした。2019 年 7 月末の編集では、それまでは本編で紹介していたいくつかの事柄を付録編に移した。途中で本論からそれてしまう今までの展開を不適切と考えたからである。さらに、高校物理を完璧に理解するには常微分方程式の理解が必要である。数学 3 の教科書で発展事項として少ししか書かれていない常微分方程式についても付録編でまとめた。

「高校物理を振り返る」というタイトルをこの TEX ノートにつけたが、全体を通して、高校数学や高校物理の範囲を超えた記述をしている。しかし、高校数学の応用で理解できるように、数学的な記述にも注意した (つもりである)。

高校物理を振り返るという行為をすることで、その範囲における力学を自分なりに再構成することができた。東京大学の同じ学部の人は、同期のメンバーとゼミを開き、自らの興味のある分野をさらに追求していた。この TEX ノートはそのような行為とは対極の位置にあるといえよう。しかし、自分なりに力学の内容を再構成することは、非常に面白いことであるように、段々思うようになった。

2019 年 2 月、(大学 2 年の) 春休みの短期バイトの仕事内容の影響を受けて、私が作成した TEX ファイルにも手を加えた。章の始まりの章タイトルに色をつけた。その他にも、TEX ファイルの作成も工夫して、私が編集しやすいようにした。私自身は、文章を先に進めるのを第一に作成している。そのため、とりあえ

[1] 私が持っているのは、増補改訂版第 13 刷である。
[2] 私は公立高校の出身である。私の卒業した高校では、数 2 の微分積分は 2 学期の後半から扱った。そのため、物理基礎の授業でも、物理の先生が微分積分を使うことはなかった。

ず Powerpoint で簡単な図を作って貼り付けている部分が多々あるが、それだと pdf ファイルのファイルサイズがとても大きくなってしまう。短期バイトの仕事内容の影響で、TikZ や Adobe illustrator を利用できるようにならなければならなくなった。その短期バイトの経験を活かして、順番に powerpoint の図を作成しなおしている。また、ノート全体の構成、内容面の見直しもあわせて行っている。

れいな (仮)
2019 年 9 月

目 次

第 1 章　運動方程式

この Chapter では、力学の基礎となる「**運動方程式**」の取り扱いを考える。運動方程式自体は $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ と見た目はとても簡単な式である。しかし、運動状態を正確に把握することは簡単ではない。特に、「束縛条件」や「摩擦力」が入試問題に登場すると、とても面倒になる。そこで、この Chapter では、まず、最も単純な例として、「放物運動」と「空気抵抗を受ける落体の運動」を取り上げ、その後、「束縛条件」や「摩擦力」といった強敵に立ち向かう。

1.1　運動の表し方

1.1.1　運動の表現法の基礎

力学の式を利用するためには、まず、物体の運動を記述する方法を知る必要がある。この section では、物体の運動を記述する方法を簡単に触れる。物体の運動を表すのに必要な要素は、物体の**位置**である。位置は、x, y, z の 3 つの成分を使ってかけるが、それらは時間的に変化するため、**時刻** t という変数も必要となる。位置 $\boldsymbol{r}$ と時刻 t だけで運動は記述できるが、運動を観測する際は、そのほかの要素にも注目する。**変位**、**速度**[(1)]、**加速度**などである。

- 位置：(1) $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ (xyz 座標)　(2) (r, θ, ϕ) (球座標)
- 変位：$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}$

---

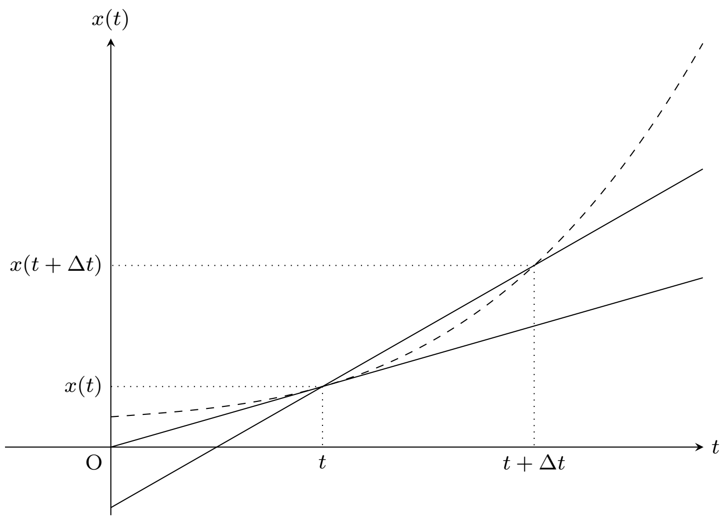
(1) 高校物理の教科書には、「平均の速度」と「瞬間の速度」という考え方が登場する。私は、この TEX ノートにおいて、

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

という「平均の速度」の考え方はあまり利用しない。ただ、微分の定義はこの式の Δt が十分近い時を考えて、0 に飛ばした時の極限である。そのため、「平均の速度」という考えは、物理において完全に無視していいものではない。(加速度についても同様)

- 平均の速度は、以下の図の 2 点 $(t, x(t))$ と $(t + \Delta t, x(t + \Delta t))$ を結ぶ直線の傾き
- 瞬間の速度は、点 $(t, x(t))$ における接線の傾き

Δt を 0 に近づけていくと、2 点 $(t, x(t))$ と $(t + \Delta t, x(t + \Delta t))$ を結ぶ直線の傾きは、点 $(t, x(t))$ における接線の傾きに近づいて、$\Delta t \to 0$ の極限で両者は重なる。



- 速度：$\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$
- 加速度：$\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

特に 1 次元の場合を考えると、$v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ である。

$$\Delta v = v(t) - v(0) = \int \mathrm{d}v = \int_0^t \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^t a(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\therefore \quad v(t) = v(0) + \int_0^t a(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.1}$$

同様に考えると、

$$\Delta x = x(t) - x(0) = \int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\therefore \quad x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.2}$$

となる。したがって、$a(t) = a$(一定) ならば、次のページのような教科書で見かける「**等加速度運動の式**」が導ける。

等加速度運動の式

$$v(t) = v(0) + at \tag{1.3}$$
$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1.4}$$

この 2 式より、次の式が導ける。(この式は結構役にたつ)

$$\{v(t)\}^2 - \{v(0)\}^2 = 2a\{x(t) - x(0)\} \tag{1.5}$$

1.1.2　相対運動

電車にのっていると、上りの電車と下りの電車がすれ違うとき、上りの電車からみたとき、下りの電車が横を通過することはとても速いように感じられる。このように、動いている観測者から見たときの運動 (**相対運動**) を検討することがある。この subsection では相対運動の定義を記す。

観測者を A、観測する対象を B と呼ぶことにしよう。A の位置 $\boldsymbol{r_A}$、B の位置 $\boldsymbol{r_B}$ に対して、速度や加速度がそれぞれ考えられる。A の速度 $\boldsymbol{v_A}$、B の速度 $\boldsymbol{v_B}$ は、

$$\boldsymbol{v_A} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r_A}}{\mathrm{d}t}, \quad \boldsymbol{v_B} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r_B}}{\mathrm{d}t}$$

であり、A の加速度 $\boldsymbol{\alpha_A}$、B の加速度 $\boldsymbol{\alpha_B}$ は、

$$\boldsymbol{\alpha_A} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_A}}{\mathrm{d}t}, \quad \boldsymbol{\alpha_B} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_B}}{\mathrm{d}t}$$

である。このとき、動いている A からみた物体の B の位置 (**相対位置**) は、$\boldsymbol{r_B} - \boldsymbol{r_A}$ で与えられる。これを $\boldsymbol{r_{\mathrm{AB}}}$ と書くことにする。そして、この $\boldsymbol{r_{\mathrm{AB}}}$ の時間微分を**相対速度**として定義し、もう一度時間微分したも

のを**相対加速度**と定義する。つまり、

$$\boldsymbol{v}_{\mathbf{AB}} = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{A}} \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{AB}} = \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{A}} \tag{1.7}$$

である。さて、電車にのっていると、すれ違う電車の速度が早く感じるのは、相対速度の効果による。今、自分がのっている電車 A が 80km/h で進んでいるとして、80km/h で反対からくる電車 B とすれ違ったとする。電車 A と電車 B がすれ違う瞬間の運動を 1 次元的な運動とみなし、電車 A が進む方向を正の方向とすると、電車 A の速度は 80km/h で、電車 B の速度は −80km/h となるので、(A から B をみたときの) 相対速度 v_{AB} は、$-80-80=-160$km/h となる。つまり、電車 A にのっている人からは、電車 B が 160km/h の速さですれ違っているように見えるのである。だから、すれ違う電車の速度は早く感じるのである。

1.2 Newton の 3 つの法則

1.2.1 Newton の 3 つの法則

(1) **慣性の法則**
全ての質点は、それに力が加えられず運動状態が変化させられない限り、静止または等速直線運動を続ける。言い換えると、物体の運動状態 (速度や向き) を変えるには力を加えなければならない。

(2) **運動方程式**
$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$(運動量) の変化は、加えられた力の方向にそって起こる。この時、$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$ の関係がある。
m が一定の場合、$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ となる。$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ は**運動方程式**という名で親しまれている。

(3) **作用・反作用の法則**
2 つの物体 A,B について、A が B に力を働かせると、B から A に、(1) 同じ作用線上、(2) 大きさが等しい、(3) 向きが反対 の力が働く。

1.2.2 慣性の法則の裏の意味

慣性の法則の主張を再度記す。

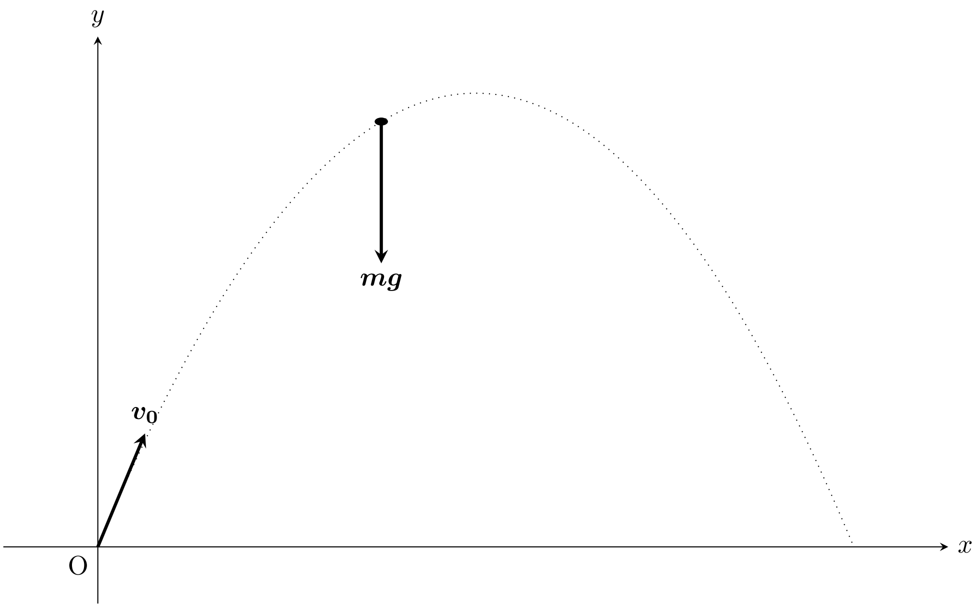
> 全ての質点は、それに力が加えられず運動状態が変化させられない限り、静止または等速直線運動を続ける。言い換えると、物体の運動状態 (速度や向き) を変えるには力を加えなければならない。

でも、この主張は運動方程式において、力 $\boldsymbol{F}$ が $\mathbf{0}$ のときは、加速度が $\mathbf{0}$ となることを考えると、自明のことのように思える。では、そうなのに「慣性の法則」があるのはなぜか。加速度はどのような座標系で見ているかによって値が変わる (このことは、Chapter4 の慣性力などと関係がある)。座標系によっては、力 $\boldsymbol{F}$ が $\mathbf{0}$ なのに、加速度が $\mathbf{0}$ とならない場合がある。慣性の法則は、この宇宙には必ず「力 $\boldsymbol{F}$ が $\mathbf{0}$ のときは、加速度が $\mathbf{0}$ となる」座標系が存在することを慣性の法則は主張しているのである。

1.3　運動方程式を解く (1)

1.3.1　放物運動 (斜方投射)

原点 $(0,0)$ に小物体をおき、時刻 $t=0$ に x 軸と角 θ をなす方向に初速 $\boldsymbol{v_0}=(v_0\cos\theta, v_0\sin\theta)$ を加える。このあと、小物体がどのような運動をするか考える。ただし、小物体には y 軸負方向に重力が働く以外には何の力も働かないとし、空気抵抗は無視できるとする。また、重力加速度の大きさを g とする。



x 方向、y 方向についてそれぞれ以下の運動方程式が成立する。

$$ma_x = 0, \qquad ma_y = -mg \tag{1.8}$$

これより、$a_x=0,\ a_y=-g$ なので、時刻 t における速度 $\boldsymbol{v}=(v_x, v_y)$ は

$$v_x = v_0\cos\theta, \qquad v_y = v_0\sin\theta - gt \tag{1.9}$$

となる。また、時刻 t における位置 $\boldsymbol{r}=(x,y)$ は

$$x = (v_0\cos\theta)t \tag{1.10}$$

$$y = (v_0\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.11}$$

と書ける。上の 2 つの式から t を消去すると、

$$y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}x^2 = -\frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}\left(x - \frac{{v_0}^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2 + \frac{(v_0\sin\theta)^2}{2g} \tag{1.12}$$

と小物体の描く軌道の方程式が得られる。

これより、y 座標は、$x=\dfrac{{v_0}^2}{g}\sin\theta\cos\theta$ で、最大値 $y_{max}=\dfrac{(v_0\sin\theta)^2}{2g}$ である。
この時、時刻 t は、$t=\dfrac{x}{v_0\cos\theta}=\dfrac{v_0\sin\theta}{g}$ で、また、$v_y=v_0\sin\theta - g\cdot\dfrac{v_0\sin\theta}{g}=0$ である。

つまり、放物線軌道の頂点では y 方向の速度 $v_y=0$ である。これは、$y(t)$ が極大となるためには、$\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=v_y=0$ が成り立つことが必要であるという数学的な要請をしっかり満たしている。

1.3.2 空気抵抗を受ける落体の運動

空気抵抗を受ける運動を、数学的に解析するのは、高校物理の範囲外である。その理由の 1 つに解析の際に**微分方程式**を解かなければならないことがあげられるだろう。現在の数学 3 では、発展課題として微分方程式が取り上げられている。微分方程式についての数学的な厳密さについての議論は放っておいて、ただこうすれば良いという方法にのっとって解くだけなら、高校で習う数学のレベルでもできる。では、実際に空気抵抗を受ける落体の運動を考える。今回は空気抵抗の大きさが速度に比例する場合[2]を考える。

$t=0$ の時、原点から静かに質量 m の球を放したとしよう。鉛直下向きを正としてに y 軸をとる。位置 y における速度を v として、運動方程式を立てると、以下のようになる。

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv \tag{1.13}$$

後は、型通りの変形 (**変数分離法**) をする。

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= g - \frac{k}{m}v \\
\frac{\mathrm{d}v}{\frac{mg}{k} - v} &= \frac{k}{m}\mathrm{d}t \\
\int \frac{\mathrm{d}v}{\frac{mg}{k} - v} &= \int \frac{k}{m}\mathrm{d}t \\
-\log\left|\frac{mg}{k} - v\right| &= \frac{k}{m}t + C \quad (C\ \text{は積分定数})
\end{aligned}$$

$t=0$ の時、$v=0$ であり、徐々に加速していくことから、$v < \dfrac{mg}{k}$ の時のみを考える。すると、

$$\frac{mg}{k} - v = A\exp\left(-\frac{k}{m}t\right) \quad (A = e^C)$$

初期条件 ($t=0$ の時、$v=0$) より、$A = \dfrac{mg}{k}$ と決まるから、

$$v = \frac{mg}{k}\left\{1 - \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)\right\} \tag{1.14}$$

$y(t)$ については、これを積分することで求まる。$y(0)=0$ なので、

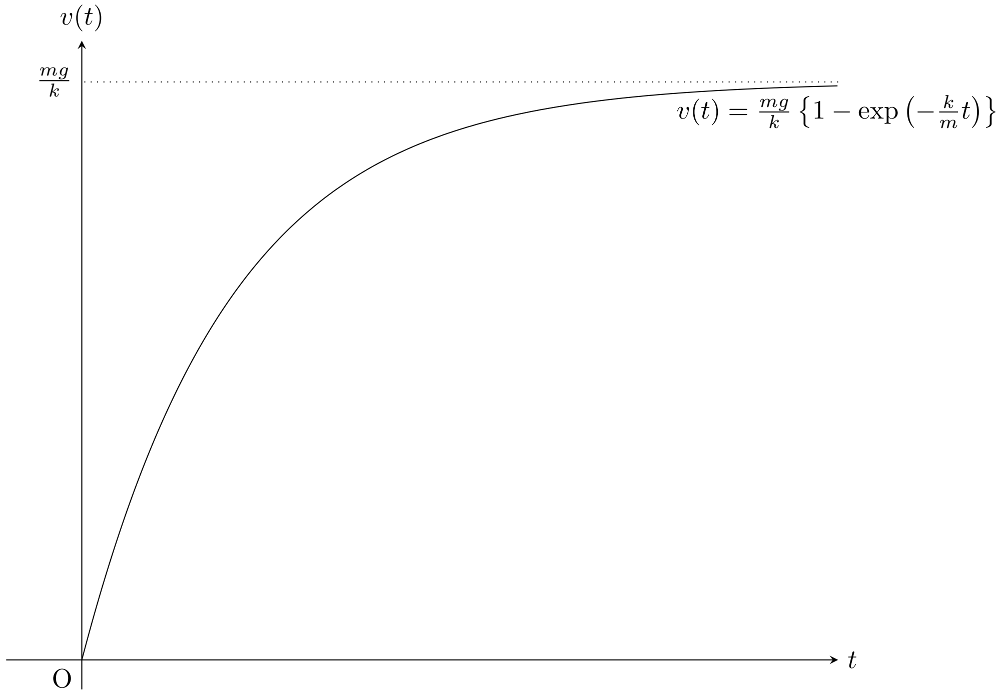
$$y(t) = \int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{mg}{k}\left\{t + \frac{m}{k}\exp\left(-\frac{k}{m}t\right)\right\} - \frac{mg}{k}\frac{m}{k}$$

さて、$t\to\infty$ の極限を考えると、$v \to \dfrac{mg}{k}$ であるが、この極限値は、運動方程式の右辺を $mg - kv = 0$ とした時の v の値である。つまり、$t\to\infty$ のとき、**重力と空気抵抗がつり合う。** この $\displaystyle\lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{mg}{k}$ のことを**終端速度**という。

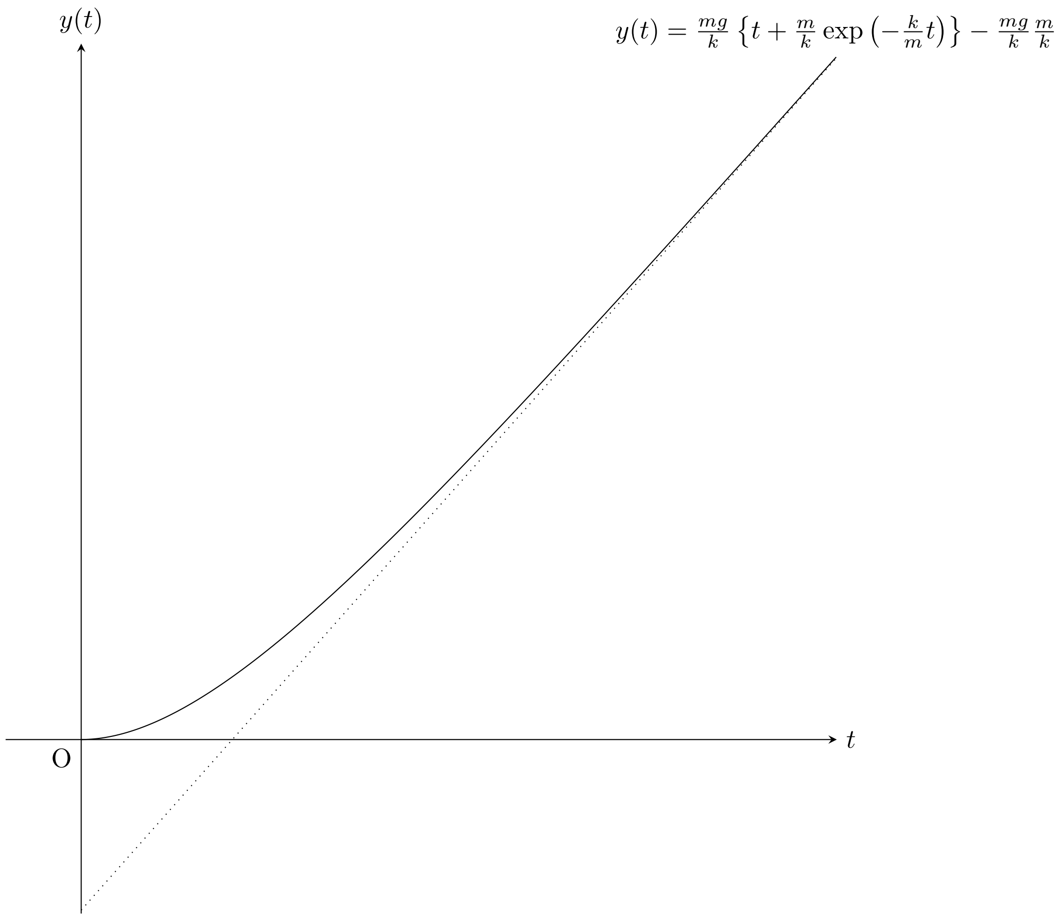
---

[2] 速度に比例する抵抗を**粘性抵抗**という。速度の 2 乗に比例する抵抗を**慣性抵抗**という。速度の 2 乗、3 乗、$\cdots$、n 乗に比例する場合は、関数の形が変わるだけで微分方程式の解き方は基本的に同じである。

速度 $v(t)$ と時間 t の関係を図示すると、以下のようになる。



また、位置 $y(t)$ と時間 t の関係を図示すると、以下のようになる。



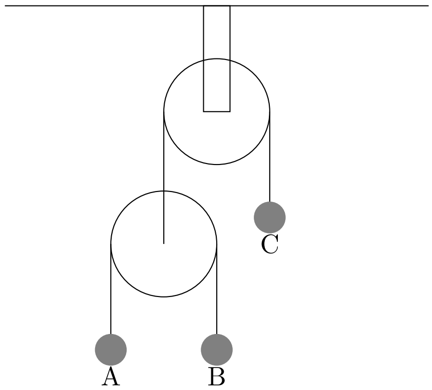
1.4 運動方程式を解く (2)

1.4.1 糸の質量を無視するという記述の意味

このSectionでは、「**難問題の系統とその解き方 物理**[3]」、受験生から「難系」の名で親しまれている本の例題7について考える。この問題を通して、運動方程式の使い方と「糸の質量を無視する」という記述の意味、束縛条件について考える。

問題 1

図に示すように、質量Mに小さいおもりAと、質量$3M$の小さいおもりBを糸で結び、滑らかな滑車Pにかける。さらに、この滑車Pと小さいおもりCを糸で結び、天井から吊ってある滑らかな滑車Qにかける。<u>滑車と糸の重さは無視</u>し、重力加速度はgとする。



(1) はじめA,B,Cを固定し、ついでにAとBだけを静かに放す。

(a) 滑車PとCを結ぶ糸の張力はいくらになるか。

(b) おもりAの加速度の大きさはいくらになるか。

(2) 再びA,B,Cを固定し、ついでにA,B,C全部を同時に静かに放す場合を考える。今、Cの質量が$4M$である時、AとBの質量の和が等しいにもかかわらず、Cは動き始めるという。

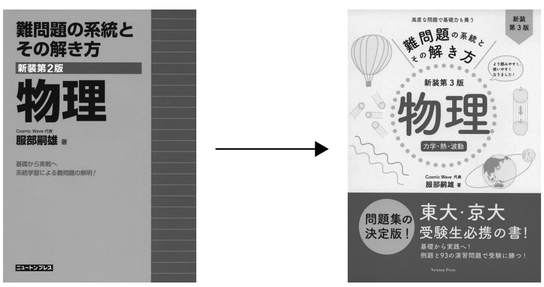
(a) おもりCの加速度の大きさはいくらになるか。

(b) おもりAとおもりBを結ぶ糸の張力はいくらになるか。

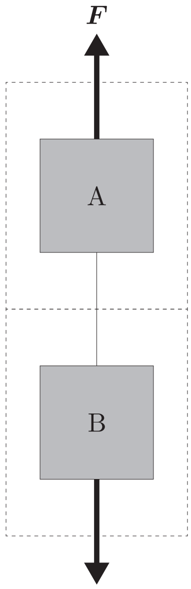
(c) おもりAとおもりBは、はじめ、天井からの距離hの同じ高さに、おもりCは、天井からの距離dの高さにあったとする。このAとBの高さの差がlになる時、AとCの天井からの距離を求めよ。

(3) (2)と同様に、A,B,Cを固定し、ついでにA,B,C全部を同時に静かに放す場合を考える。Cの質量をある値にすると、Cは静止し続けた。この時のCの質量を求めよ。

[3] ここ最近、『難問題の系統とその解き方 物理』が新しくなったらしい。今までの難系の重々しい表紙からガラリと変わってしまった。新しい難系の表紙には「より読みやすく、使いやすくなりました！」とあるが、参考書マニア状態になってしまった人たちは以前の重々しい体裁が気に入っていたため、ガッカリしてしまったとのこと。ちなみに、中の問題は旧版と同じらしいです。



まず、1.4.1 では上の Example 1 の問題文中の「糸の重さを無視する」という Phrase の役割を考える。(問題は 1.4.2 と 1.4.3 で片付ける。) そのために、「物理入門」でも紹介されているこのような系を考える。



物体 A(質量 m_A) と物体 B(質量 m_B) を糸でつなぎ、A に大きさ F の力をかけて上に引き上げる。糸は一様な糸とし、糸全体の質量は M とする。この時、糸を上下に $x:(1-x)$ に内分する点における糸の張力 $T(x)$ を求める。

内分点より上側の質量は $m_A + xM$、下側の質量は $m_B + (1-x)M$ である。2 つの物体と糸は繋がれているので加速度は同一であるから、その加速度の大きさを a(上向きを正) とおくと、

$$(m_A + xM)a = F - (m_A + xM)g - T(x) \tag{1.15}$$
$$(m_B + (1-x)M)a = T(x) - (m_B + (1-x)M)g \tag{1.16}$$

辺々加えると、

$$\begin{aligned}(m_A + m_B + M)a &= F - (m_A + m_B + M)g \\ a &= \frac{F}{m_A + m_B + M} - g \end{aligned} \tag{1.17}$$

よって、$T(x)$ は、

$$\begin{aligned}T(x) &= (m_B + (1-x)M)(a + g) \\ &= \frac{m_B + (1-x)M}{m_A + m_B + M}F \end{aligned} \tag{1.18}$$

したがって、$M \to 0$ の極限をとると

$$\lim_{M\to 0} T(x) = \frac{m_B}{m_A + m_B}F$$

となり、x に依存しない。つまり、糸の重さを無視できる時、糸のどの位置の張力も等しい。

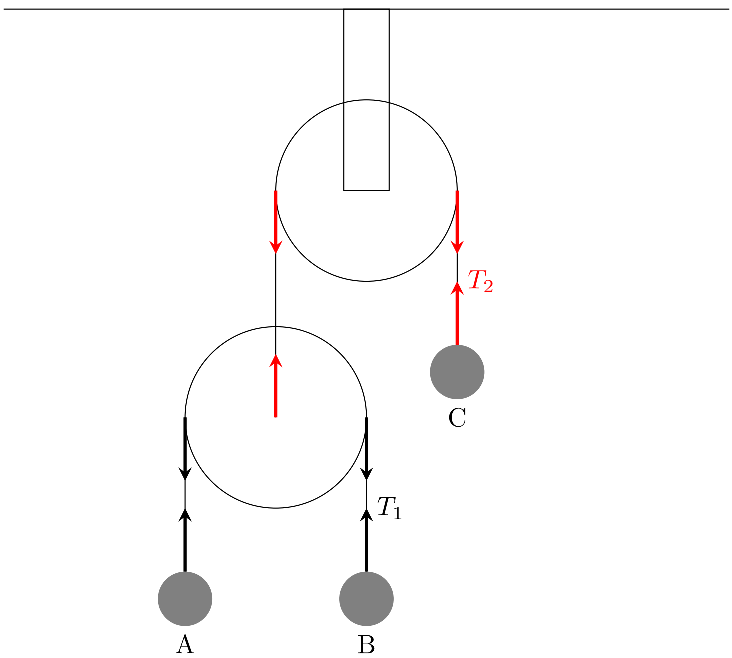
1.4.2 束縛条件 (1)

問題 1 (前半)

図に示すように、質量 M に小さいおもり A と、質量 $3M$ の小さいおもり B を糸で結び、滑らかな滑車 P にかける。さらに、この滑車 P と小さいおもり C を糸で結び、天井から吊ってある滑らかな滑車 Q にかける。**滑車と糸の重さは無視**し、重力加速度は g とする。

(1) はじめ A,B,C を固定し、ついでに A と B だけを静かに放す。

- (a) 滑車 P と C を結ぶ糸の張力はいくらになるか。
- (b) おもり A の加速度の大きさはいくらになるか。



「おもり C が動かないということは、おもり C に働く力の総和は 0」ということを使いたくなるが、残念なことにおもり C の質量がわからないので、この方法は使えない[4]。では、どうするか。上の図の T_2 は、他にどこに現れるかみてみると、滑車 P に現れる。そこで、滑車 P の運動方程式を立ててみる。加速度を α とすると、

$$M_P \cdot \alpha = T_2 - 2T_1$$

でも、**滑車の質量を無視できる**から、$M_P = 0$ なので、上の式は、**力のつりあい**の式となる。

$$0 = T_2 - 2T_1 \tag{1.19}$$

そのため、T_1 を求めれば良い。そこで、A と B の運動方程式を立てる (それぞれの加速度を a, b とする)。B の方が重いので、B の方が下がるように動くことは明らかなので、A については鉛直上向きを正、B については鉛直下向きを正とすると、

$$\begin{cases} Ma &= T_1 - Mg \\ 3Mb &= 3Mg - T_1 \end{cases} \tag{1.20}$$

[4] おもり C に働く重力と張力がつりあうという関係が使えないということである。

が成立する。この連立方程式 (1.20) を解けば良いが、しかし、変数は a, b, T_1 と 3 つあるのに、式は 2 つなのでこの連立方程式を解くことはできない[5]。そこで、もう 1 つ式が必要である。そのもう 1 つの式が**拘束条件**や**束縛条件**というものである。[6]

「束縛条件」は、**系の特徴を表す**式である。今回の場合、**糸の全長が一定である**ということが「束縛条件」である。糸の全長が一定なので、

- C が固定されていて動かないなら、P も動かない。
- P が動かないので、A が x 上昇すると、B は x 下降する。

そのため、A と B の加速度は同じである。式で書くと、

$$a = b \tag{1.21}$$

これを使うと、式 (1.20) は 2 変数 a, T_1 に関する連立方程式になる。

$$\begin{cases} Ma &= T_1 - Mg \\ 3Ma &= 3Mg - T_1 \end{cases}$$

これより、$a = \dfrac{g}{2}$ であり、$T_2 = 2T_1 = 2M(a+g) = 3Mg$ である。

以上[7]より、(a) の答えは $3Mg$、(b) の答えは $\dfrac{g}{2}$ □

1.4.3　束縛条件 (2)

問題 1 (後半)

図に示すように、質量 M に小さいおもり A と、質量 $3M$ の小さいおもり B を糸で結び、滑らかな滑車 P にかける。さらに、この滑車 P と小さいおもり C を糸で結び、天井から吊ってある滑らかな滑車 Q にかける。**滑車と糸の重さは無視**し、重力加速度は g とする。

(2) 再び A,B,C を固定し、ついでに A,B,C 全部を同時に静かに放す場合を考える。今、C の質量が $4M$ である時、A と B の質量の和が等しいにもかかわらず、C は動き始めるという。

　(a) おもり C の加速度の大きさはいくらになるか。

　(b) おもり A とおもり B を結ぶ糸の張力はいくらになるか。

　(c) おもり A とおもり B は、はじめ、天井からの距離 h の同じ高さに、おもり C は、天井からの距離 d の高さにあったとする。この A と B の高さの差が l になる時、A と C の天井からの距離を求めよ。

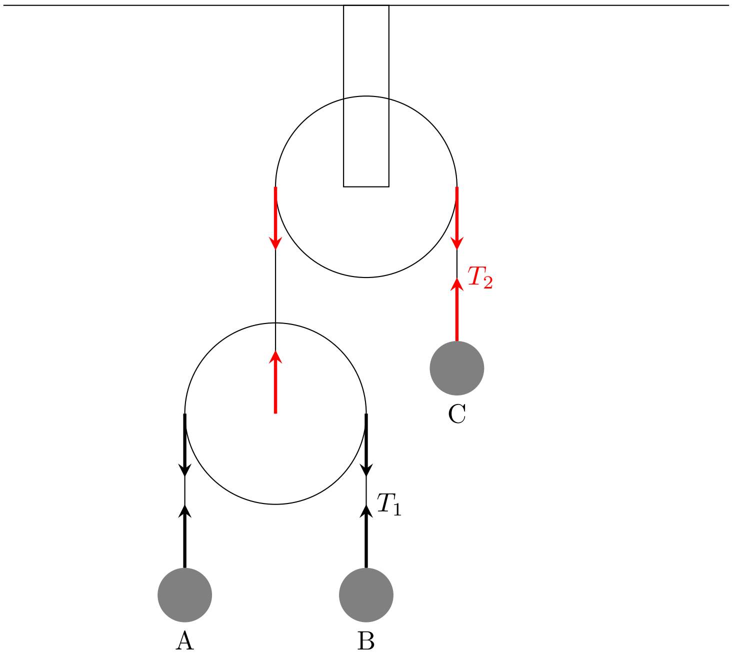
(3) (2) と同様に、A,B,C を固定し、ついでに A,B,C 全部を同時に静かに放す場合を考える。C の質量をある値にすると、C は静止し続けた。この時の C の質量を求めよ。

---

[5] 厳密にいうなら「解が一意に定まらない」が正しい。このとき、連立方程式の解は無数に存在することが知られている。これ自体は数学的には問題ない。(大学の線形代数学の授業では、行列の rank 落ちと関係があることを習う。) ただ、これは物理的に意味がない。加速度が任意であるなら、加速度がとてつもなく大きいということもありうる。しかし、そんなことは実際には起きないことは明らかだ。連立方程式の解が一意に定まった時の、その解に私たちは興味があるのである。

[6] 私は「束縛条件」派なので、**この TEX ノートでは、「束縛条件」と統一する。**

[7] 私が書いたこの解法では、先に (b) の答えが出てきたが、それは何の問題もない。この問題の作成者は、(a)、(b) の順で解く方法を念頭において作っただけかもしれない。ただ、私がその方法に気づけなかっただけである。解答用紙に書くときには、採点者にわかるようにうまく書けば良いだけである。



(2)-(a) **(2)-(b)**
おもり C は上下どちらの方向に動くか。今回は下向きに動くと仮定しよう。前の Subsection と同様に、おもり P に働く力は釣り合う。

$$0 = T_2 - 2T_1 \tag{1.22}$$

次に、A と B、そして C の運動方程式を立てる (それぞれの加速度を a, b, c とする)。B の方が重いので、B の方が下がるように動くことは明らかなので、A については鉛直上向きを正、B については鉛直下向きを正とする。また、C については、今、下向きに動くと仮定したので、鉛直下向きを正とする。すると、3 つのおもりの運動方程式は、以下のようになる。

$$\begin{cases} Ma &= T_1 - Mg \\ 3Mb &= 3Mg - T_1 \\ 4Mc &= 4Mg - 2T_1 \end{cases} \tag{1.23}$$

($T_2 = 2T_1$ であることを用いた。)

前の Subsection と同じことの繰り返しだが、連立方程式 (1.23) を解けば良い。しかし、変数は a, b, c, T_1 と 4 つあるのに、式は 3 つなのでこの連立方程式を解くことはできない。(厳密にいうなら、解が一意的に定まらない。) そのため、もう 1 つ (有用な) 式が必要である。そこで束縛条件を考える。

今回の場合、まず、微小時間 Δt の間に、おもり C が ΔC 動くと、滑車 P も ΔC 動く。Δt の間に、おもり A が ΔA 上昇し、おもり B が ΔB 下降したとする。おもり A の変位のうち、滑車 P とおもり A をつなぐ糸の長さの変化による上昇量は、$\Delta A - \Delta C$。おもり B の変位のうち、滑車 P とおもり B をつなぐ糸の長さの変化による下降量は、$\Delta B + \Delta C$。糸の全長は一定なので、この 2 つの量は等しい。

$$\Delta A - \Delta C = \Delta B + \Delta C \tag{1.24}$$

よって[8]、

$$a - c = b + c$$
$$\therefore \quad 2c = a - b \qquad (1.25)$$

式 (1.25) を式 (1.23) に代入して両辺を 2 で割ると、以下のようになる。

$$\begin{cases} Ma &= T_1 - Mg \\ 3Mb &= 3Mg - T_1 \\ M(a-b) &= 2Mg - T_1 \end{cases}$$

これより、$T_1 = \dfrac{12}{7}Mg$ と求められるので、a, b, c は次のように求められる。

$$a = \frac{5}{7}g \qquad b = \frac{3}{7}g \qquad c = \frac{1}{7}g$$

以上より、(a) の答えは $\dfrac{1}{7}g$　(b) の答えは $\dfrac{12}{7}Mg$ □

(2)-(c)

等加速度運動では、初期位置からの変位は、初速度が 0 のとき、加速度と時間の 2 乗に比例する[9]ので、時間が固定されているときは、加速度に比例する。A の上昇量と B の下降量の和が l で、A と B の加速度の比が 5 : 3 なので、l のうち、A の上昇量は $\dfrac{5}{8}l$、B の下降量は $\dfrac{3}{8}l$ である。また、B と C の加速度の比は 3 : 1 なので、C の下降量は $\dfrac{1}{8}l$ である。
ゆえに、A の天井からの距離は $h - \dfrac{5}{8}l$ 、C の天井からの距離は $d + \dfrac{1}{8}l$ である。 □

(3)

再び、(2) と同様に 3 つの物体の運動方程式を立てる。(C の質量を M_0 とした。)

$$\begin{cases} Ma &= T_1 - Mg \\ 3Mb &= 3Mg - T_1 \\ M_0c &= M_0g - T_2 \end{cases}$$

C が静止し続ける状況は、前の Subsection で扱った (1) と同じである。そのため、$T_2 = 3Mg$ である。C は静止しているので、C の加速度 c は 0 である。ゆえに、$M_0 = 3M$ である。 □

---

[8] 式 (1.24) の関係から加速度 a, b, c が満たさなければならない条件を考えるときは、ある時間 Δt の間の変位を考えればよい。

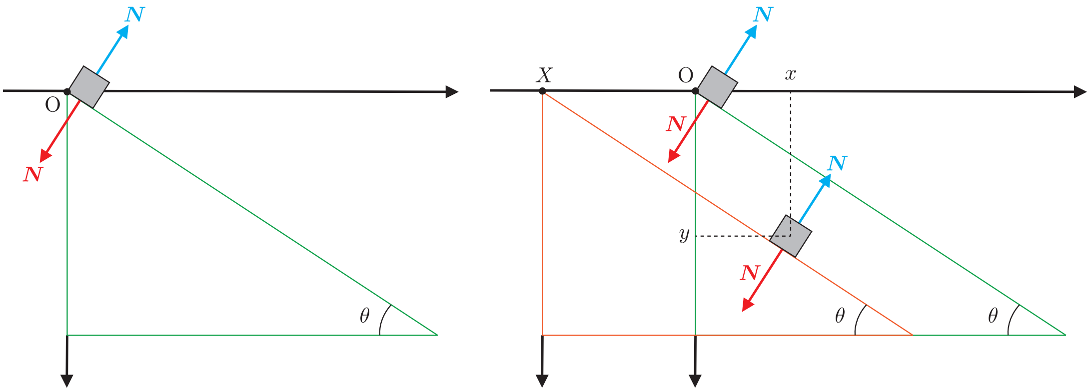
$$\Delta A = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \qquad \Delta B = \frac{1}{2}b(\Delta t)^2 \qquad \Delta C = \frac{1}{2}c(\Delta t)^2$$

この 3 式を、式 (1.24) に代入して整理すると、式 (1.25) の関係が得られる。

[9] 1.1「運動の表し方」の式 (1.4) を参照。

1.5 運動方程式を解く (3)

束縛条件についてもう少し考える。斜面が固定されていないとき、斜面の一番上から物体が滑り落ちると、三角形の台と物体はどのような運動をするか。以下のように $x-y$ 座標を定める (x 方向は右向き。y 方向は下向き。)。$m,\ M$ をそれぞれ小物体と台の質量とし、$a_x,\ a_y$ を小物体の x 方向、y 方向の加速度、A を台の x 方向の加速度とする。



(運動方程式)

$$\begin{cases} ma_x &= N\sin\theta \\ ma_y &= mg - N\cos\theta \\ MA &= -N\sin\theta \end{cases} \tag{1.26}$$

(小物体が台から垂直抗力を受けるので、台はその反作用を受けることに注意。)
でも、変数が $a_x,\ a_y,\ A,\ N$ の 4 つなので、この連立方程式は解けない。そこで、束縛条件を考える。
上の図より次の関係が成り立つ。

$$y = (x - X)\tan\theta \tag{1.27}$$

両辺を時間で 2 回微分すると、

$$a_y = (a_x - A)\tan\theta \tag{1.28}$$

よって、式 (1.26) で表される 3 つの運動方程式を、それぞれ $a_x,\ a_y,\ A$ について解き、束縛条件 (1.28) に代入すると、

$$g - \frac{N}{m}\cos\theta = \left(\frac{N}{m}\sin\theta + \frac{N}{M}\sin\theta\right)\tan\theta$$

$$\begin{aligned} g &= \frac{N}{m}\cos\theta + N\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\sin\theta\tan\theta \\ &= \cdots \\ &= \frac{N}{m\cos\theta}\left(\frac{M + m\sin^2\theta}{M}\right) \end{aligned}$$

ゆえに、垂直抗力 N は、

$$N = mg\cos\theta \cdot \frac{M}{M + m\sin^2\theta} \tag{1.29}$$

すると、a_x，a_y，A は、(1.26) を使って求められる。

$$a_x = \frac{N\sin\theta}{m} = g\sin\theta\cos\theta\cdot\frac{M}{M+m\sin^2\theta} \tag{1.30}$$

$$a_y = g - \frac{N\cos\theta}{m} = g\left(1-\cos^2\theta\cdot\frac{M}{M+m\sin^2\theta}\right) = \frac{(M+m)\sin^2\theta}{M+m\sin^2\theta}g \tag{1.31}$$

$$A = -\frac{N\sin\theta}{M} = -g\sin\theta\cos\theta\cdot\frac{m}{M+m\sin^2\theta} \tag{1.32}$$

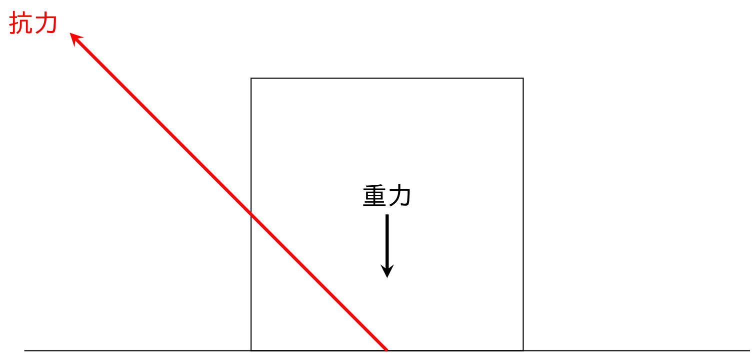
1.6 摩擦力を受ける運動

この section を作成時には PyeongChang オリンピックが行われていた。冬のオリンピックの種目では、床面との摩擦や風の強さ、斜面の角度などの条件を選手は考慮して、少しでも記録を伸ばそうとしている。この Section では、摩擦力が運動に与える影響について考える。

1.6.1 摩擦力

地球上にある物体には、地球と物体の間に重力が働く。それ以外にも様々な力が働く。物体が複数あると、その物体間に万有引力や静電気力が働く。もし複数の物体がバネでつながっていたら、バネの弾性力が働く。そして、普通、物体は床上に存在するので、床を押し、反作用で押し返される (**作用・反作用**)。
物体に働く力を的確に把握することは、運動の状態を理解する上で大切である。垂直抗力とは何か。摩擦力とは何か。摩擦力といえば、とりあえず μN として良いのか。

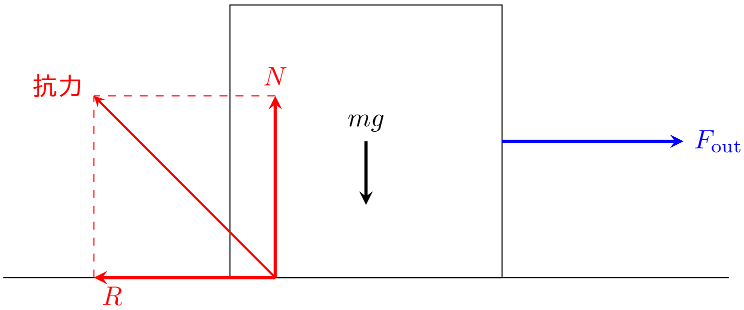
まず、**抗力**について確認する。



物体が床面の上にあると、床面から力を受ける。その力の向きは、はっきりと「床面に対して垂直な方向」と決まっているわけではない。ただ、つりあいを保つように、神様が望むように決まる。床面から受ける抗力について、それを水平方向と鉛直方向に分けたものを特に以下のように呼ぶ。

- **垂直抗力：** 床面から受ける抗力の、床面に対して垂直な方向の成分
- **摩擦力：** 床面から受ける抗力の、床面に対して平行な方向の成分

N を垂直抗力、R を摩擦力とする。前のページで紹介した垂直抗力と摩擦力の定義より、N と R は以下のようになる。



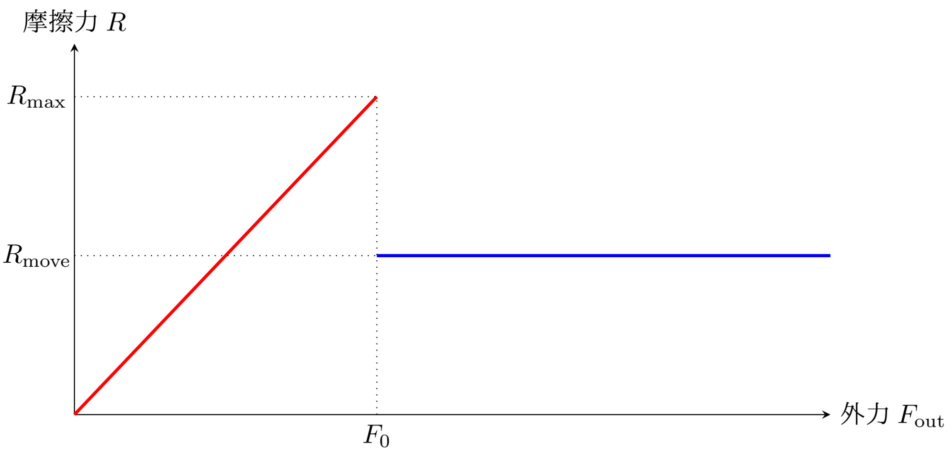
さて、上のような物体を右側に動かそうとして、右向きに力 F_{out} を加える。紐をつけて引っ張るのだろうか。右向きの力が小さかったら、物体は動かないことは経験的にわかる。なぜなら、動こうとするのを妨げるように摩擦力 R が働くからだ。

- **静止摩擦力：** 静止している物体が動き出すのを妨げるようにはたらく。

物体が**静止**しているとき、左右方向 (x 方向) のつりあいの式[10]をかくと、

$$0 = F_{\mathrm{out}} - R \tag{1.33}$$

となり、これより、$R = F_{\mathrm{out}}$ であることがわかる。この式から、F_{out} が大きくなると、R も大きくなる。でも、経験的に F_{out} が大きくなると、つりあいが崩れることもわかっている。R には最大値があることが (経験的に) わかる。これを R_{max} と書くことにする。また、$R = R_{\mathrm{max}}$ の時の外力を $F_{\mathrm{out}} = F_0$ とする。すると、外力 F_{out} と摩擦力 R の関係は以下のようになる。



では、物体が床面上を動きだしてから摩擦力はどうなるか。自動車を考えてみれば明らかだ。物体が動き出してからも (物体に) 摩擦力が働く。自動車もアクセルを踏み続けないと (基本的には) 減速する。それは、物体が動き出してからも、物体の動きを妨げるように摩擦力が働くからである。

- **動摩擦力：** 動いている物体の運動を妨げるようにはたらく。**物体に働く摩擦力 (動摩擦力) は外力 F_{out} によらない一定値であることが知られている。**

[10] 1.4.2「束縛条件 (1)」でも書いているが、つりあいの式は、加速度 $a = 0$ の時の運動方程式のことである。つまり、つりあいの式は運動方程式の特別な場合ということであり、別々のものとして考える必要はない。でも、私は、運動もしていないのに「運動方程式」と書くのは変な気がする。そのため、私は「つりあいの式」と書く。

この section の最後に、摩擦力 R と垂直抗力 N の関係を考える。物体に働く抗力の垂直成分と床面に平行な成分の 2 つなのだから、全く関係がないわけではない。特に、静止摩擦力 R_{max} と垂直抗力 N を結びつけるパラメーター μ_0 と、動摩擦力 R_{move} と垂直抗力 N を結びつけるパラメーター μ' が重要である。

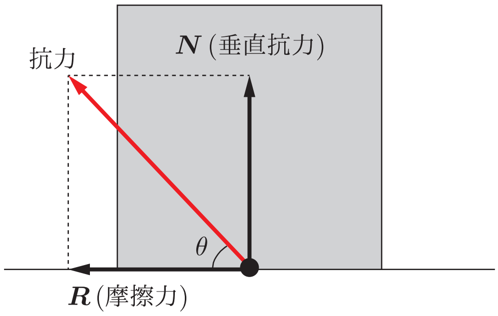
抗力と垂直抗力の関係

静止摩擦力や動摩擦力、垂直抗力をつなぐパラメーターを以下のように定める。

$$R_{\mathrm{max}} = \mu_0 N \tag{1.34}$$

$$R_{\mathrm{move}} = \mu' N \tag{1.35}$$

このとき、μ_0 を**静止摩擦係数**といい、μ' を**動摩擦係数**という。



静止している時を考える。$R = R_{\mathrm{max}}$ の時について考えると、$R = \mu_0 N$ なので、上の図において、$\tan\theta = \dfrac{1}{\mu_0}$ が成立する。このように、角度と静止摩擦係数が結びつくことは覚えておいて損なことはないだろう。

1.6.2 運動方程式を解く (4)

摩擦力も考慮しなければならない状況における運動方程式の解法を考える。この SubSection では、「難系」の例題 4[11]について考える。

問題 2

図に示すように、滑らかで水平な床に置かれた質量 M の台車の上に、質量 m の小物体が置かれている。台車の右端には質量の無視できる紐が取り付けられている。速度や加速度、力は全て図の右向きを正とする。また、重力加速度は g とする。

(A) 最初に**台車と小物体の間に摩擦がない場合**を考える。台車の紐を水平右向きにひき、台車に F_0 の力を加えた。台車の床に対する加速度を求めよ。

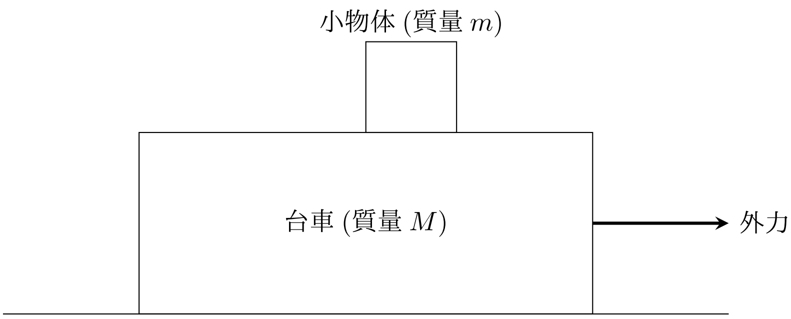
(B) 次に**台車と小物体の間に摩擦がある場合**を考える。台車と小物体の静止摩擦係数を μ_0、動摩擦係数を μ_1 とする。

(1) 台車の紐を水平方向右向きにひき、台車に F_1 の力を加えたところ、小物体は台車の上を滑ることなく、台車と一体となって動いた。この時、床に対する加速度を求めよ。

(2) 台車を水平方向右向きに引っ張る力を F_2 まで増していったところ、小物体は台車上を滑り始めた。μ_0 の値を求めよ。

(3) F_2 に比べ十分大きい水平方向右向きの力 F_3 を台車に $t = 0$ から $t = t_0$ まで加えた。ただし、台車と小物体は時刻 $t = 0$ で静止していたとし、以下では速度や加速度は床に固定された座標で考えることにする。また台車は十分に長く、小物体が台車から落ちないものとする。

(3-1) 力 F_3 が台車に作用している間 $(0 \leq t \leq t_0)$ の台車と小物体の加速度を求めよ。
(3-2) 力 F_3 が働かなくなる瞬間 $t = t_0$ における台車の速度 V_0 と小物体の速度 w_0 を求めよ。
(3-3) 力 F_3 が働かなくなった直後の台車の加速度を求めよ。
(3-4) $t = t_0$ からある時間が経過して $t = t_1$ になった時、台車は等速度運動を始めた。t_1 を求めよ。($V_0,\ w_0$ を用いてよい。)
(3-5) $t \geq t_1$ における台車の一定速度 V_1 を求めよ。($V_0,\ w_0$ を用いてよい。)



[11]問題文の表記を多少変更した部分がある。これは、ただ単に編集の都合である。**解答は全部自分で作ったものをのせています。**また、図がかなりテキトーすぎますが、これだけで状況は十分把握できると思います。

(A)

小物体には力は働かないので、**(静止系から見た)** 小物体の位置は変わらない。
台車の運動方程式は、加速度を a_0 とすると、

$$Ma_0 = F_0 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = \frac{F_0}{M}$$

(B)-(1)

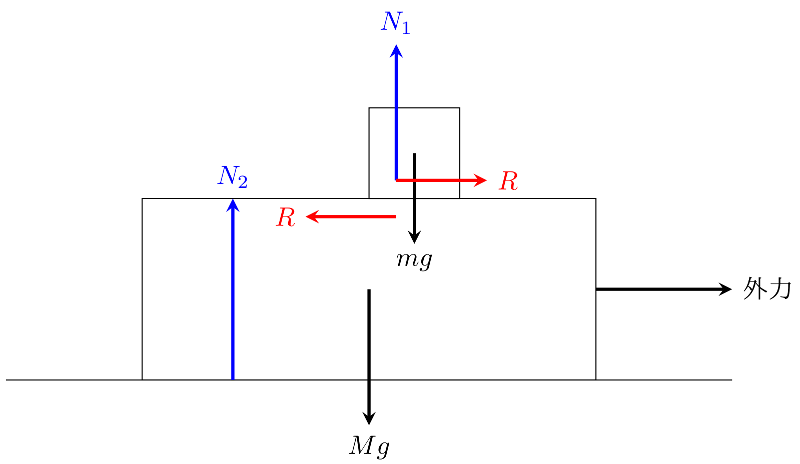
問題を解く前に、身の回りのものを使って、図と似た状況を作って、台車に相当する物体を引っ張ってみよう。きっと弱く引っ張ると一体となって動き、強く引っ張ると滑り始めるか、すぐに上に載せた小物体が後ろに落ちるだろう。現実世界では、(A) の状況を想像する方が難しいことが簡単な実験ですぐにわかる。

(B)-(1) について、ある解答を記す。私はこの解答をあまりオススメしたくない。

「一体になって動いた」ということは、質量 $M+m$ の物体に力 F_1 を加えた場合と同じだから、求める加速度を a_1 とすると、

$$(M+m)a_1 = F_1 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = \frac{F_1}{M+m} \tag{1.36}$$

この解き方はすごく Simple な解き方である。実際、$a_1 = \dfrac{F_1}{M+m}$ が答えである。参考書によっては、この解法が解答としてあげられているものもあるだろう。しかし、こういう方法をやっていると、(B) の (2) 以降で苦戦するかもしれない。というのも、台車と小物体のそれぞれについて運動方程式を立てて整理した結果が式 (1.36) だからである。上の解答では、2 つの物体に働いている摩擦力を気にしない。**2 つの物体の間に摩擦力が働いているが、全体として見たときは前面に出てこない**ということを気にしないのであまりオススメしたくない。物体に働く力を全て図示すると、以下のようになる。



摩擦力の向きの把握はとても悩ましいものである。「**摩擦力は運動するのを妨げる向きに働く**」という原則に従って考えれば良い。結論を書くと、上の図のように小物体には右向きに摩擦力が働き、その**反作用**で台車にも左向きの力が働く。小物体には右向きの摩擦力が働くとしているが、これはなぜか。

台車は右向きに引っ張っているのだから右向きに動く。この時、台車に対して小物体は **(相対的に)** 左に動く。だから、摩擦力は右向きに力が働く。(これは仮定なのかもしれない。) もし、この仮定 (相対的に左に動くこと) がおかしいと判断できる根拠を見つけたなら、その時に修正すれば良い。要するに、**動く物体の上にのっている物体に働く摩擦力の向きは相対運動を考えればよい**ということである。

では、台車と小物体の運動方程式を立てよう。一体になって動くということは、**両者の加速度が等しい**(12)ということである。加速度を a_1 とすると、

$$\begin{cases} Ma_1 &= F_1 - R \\ ma_1 &= R \end{cases} \tag{1.37}$$

2 つの式を足すと、前のページの (1.36) のようになる。**大事なのは、(1.37) の 2 つの式から (1.36) が出てくることである。**

(2)

$F = F_2$ の時、加速度を a_2 とすると(13)、$R = \mu_0 N_1 = \mu_0 mg$ なので、

$$\begin{cases} Ma_2 &= F_2 - \mu_0 mg \\ ma_2 &= \mu_0 mg \end{cases} \tag{1.38}$$

この連立方程式より $\mu_0 = \dfrac{a_2}{g} = \dfrac{F_2}{(M+m)g}$ と求められる。 □

(3-1)

台車の加速度を a_3、小物体の加速度を b_3 とする(14)。

$$\begin{cases} Ma_3 &= F_3 - \mu_1 mg \\ mb_3 &= \mu_1 mg \end{cases} \tag{1.39}$$

これを解くと、$a_3 = \dfrac{F_1 - \mu_1 mg}{M},\ \ b_3 = \mu_1 g$ である。 □

(3-2)

$v(t) = v(0) + \displaystyle\int_0^{t_0} a(t)\mathrm{d}t$ だが、$v(0) = 0$ であり、また、加速度 $a(t)$ は時間によらず一定なので、

$$V_0 = a_3 t_0 = \frac{F_3 - \mu_1 mg}{M} t_0$$
$$w_0 = b_3 t_0 = \mu_1 g t_0$$

□

(3-3) 式 (1.37) で $F_3 = 0$ とすれば良いので、求める加速度は、$-\dfrac{\mu_1 mg}{M}$ □

---

(12) そうでなければ一体となって動くことはありえないことは明らかであろう。

(13) 小物体が滑り出すギリギリを考えればいいので、両者の加速度は同じとして良い。また、滑り出すギリギリの瞬間を考えるから、摩擦力 R は静止摩擦力 $\mu_0 N_1$ に等しい。

(14)「一体となって動く」という Phrase はないので別々のものとして考える。(B)-(1)、(B)-(2) も本来は別々のものと考えるのが、適切なのかもしれない。

1. 台車の加速度を a_1, a_2、小物体の加速度を b_1, b_2 として、それぞれの運動方程式を立てる。
2. 「一体となって動く」から $a_1 = b_1$、$a_2 = b_2$ という束縛条件を課すことができる。

という 2 つの操作の結果が式 (1.37) や式 (1.38) であると考えた方が本来は適切なのかもしれない。ただ、毎度毎度このように考えるのは時間の無駄かもしれない。何問も物理の難問を解くことで、上記の 2 つの操作を飛ばして、いきなり式 (1.37) や式 (1.38) を立てても良いとわかってしまう。本当はこの 2 つの操作の結果だということを知らずに、いきなり式 (1.37) や式 (1.38) のような式を立てることは、物理現象の理解を完璧にできているとはいえない。いつか苦しむだろう。私は、浪人時代に苦しんだ。

(3-4)

$t = t_0$ 以降、台車は加速度 $-\dfrac{\mu_1 mg}{M}$ の運動をするので、台車の速度は減速していく。$t = t_0$ 以降は、式 (1.39) の F_3 を 0 とした場合を考えるが、式 (1.39) からわかるように小物体の加速度は $t = t_0$ 以前も力 F_3 に依存しない。そのため、$t = t_0$ 以降も一定の加速度 $\mu_1 g$ を持ち、速度は上昇していく。問題文にもあるように、F_3 は十分に大きい値であるのだから、$V_0 \gg w_0$ として良い。すると、$t = t_0$ 以降、台車の速度と小物体の速度の差は徐々に小さくなっていき、ある時等しくなる。

この時、台車上から小物体を見ると、小物体は静止したことになり、この時刻以降小物体には静止摩擦力が働くことになる。しかし、それを振り切り再び動き出すことを可能にする力は一切働いていないので、台車上で見て小物体が静止した時刻以降、小物体は台車上を動かない。そうすると、式 (1.39) の $\mu_1 mg$(動摩擦力) の効果もなくなるので、加速度は 0 となり等速度運動をする。そして、等速度運動をしている時、台車と小物体は一体になって運動する。

以上の説明から関係式を作ると、次のようになる。

$$V_0 - \frac{\mu_1 mg}{M}(t_1 - t_0) = w_0 + \mu_1 g(t_1 - t_0)$$

これを解くと、

$$t_1 = t_0 + \frac{M(V_0 - w_0)}{\mu_1 g(M + m)}$$

(3-5) [15]

V_1 は台車の速度でもあり、小物体の速度でもあることを利用する。

$$V_1 = \mu_1 g t_1 = \mu_1 g \left(t_0 + \frac{M(V_0 - w_0)}{\mu_1 g(M + m)} \right)$$

(3-2) で $w_0 = \mu_1 g t_0$ の関係が求められているので

$$\begin{aligned} &= w_0 + \frac{M(V_0 - w_0)}{M + m} \\ &= \frac{MV_0 + mw_0}{M + m} \end{aligned} \tag{1.40}$$

□

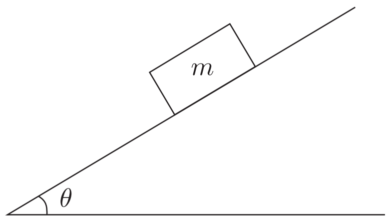
[15] (3-5) の解答である式 (1.40) は後述する「運動量保存則」の考えを導入すると、とても簡単な計算だけで求められる。この問題を解く上で大切なのは、運動量保存則でも最後の答えが出せるということではない。$t = 0$ から $t = t_1$ の間に、どのようなことが起きているかを正確に捉えることである。状況を正確に理解した上で、「運動量保存則」を使うのが最善だと思えば「運動量保存則」を使えば良い。

1.7 座標系の設定と問題の難易度

このsection は、座標系の設定の仕方で、問題の解きやすさが変わることにふれる。座標系の設定方法には、「**慣性系**」の利用もある。慣性系については第4章でふれる。ここでは、「斜面上の物体の運動」というシンプルなテーマについて考える。その題材として、2017年度の新潟大学の入試問題を扱う。この問題は基礎的な内容だけしか問われていない問題である。国立大学の二次試験のレベルというより、センター試験のレベルの問題である。
(6) の問題は、第1章の内容だけでは解くことができない。第2章のエネルギー保存則の内容が必要である。一応、解答は記すが、読み飛ばしてもらっても構わない。

問題 3

図に示すように、水平面に対して角度 θ だけ傾いた粗い斜面上に、質量 m の物体がある。斜面と物体との間の静止摩擦係数を μ、動摩擦係数を μ' とし、また重力加速度の大きさを g として、以下の問いに答えよ。ただし、物体の大きさや空気の影響は無視できるものとする。



(1) 物体が静止しているとき、物体に働く3つの力について、それらの名称、大きさ、および向きを答えよ。

(2) 角度 θ をゆっくり大きくすると、$\theta = \theta_0$ のとき物体が斜面に沿って滑り出した。静止摩擦係数 μ を θ_0 で表せ。

次に、斜面と水平面のなす角 θ を $\theta_0 < \theta < \pi/2$ の値に固定して、物体を静かに斜面上に置くと、物体は斜面に沿って滑り出した。斜面上に置いた時刻を0として、以下の問いに答えよ。ただし、斜面は十分に長いものとする。

(3) 物体の加速度の大きさを求めよ。

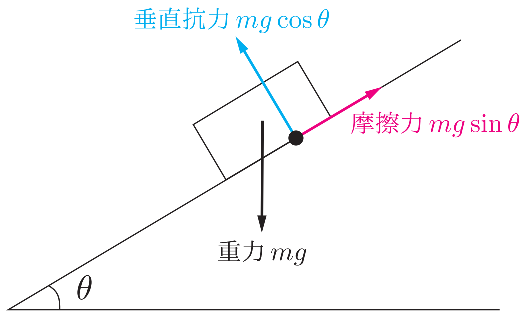
(4) 時刻 t における物体の速さを求めよ。

(5) 時刻0から t までの間に、物体がすべり落ちた鉛直距離 (高さの差) を求めよ。

(6) 時刻0から t までの間に減少した物体の力学的エネルギーを求めよ。

1.7.1　摩擦力の復習

(1) 答えは以下の図のようになる[17]。



(2) 脚注 (17) の考えを使う。$\theta = \theta_0$ の時、摩擦力 R が μN となる。よって、

$$mg\sin\theta_0 = \mu mg\cos\theta_0$$

が成立する。これより、$\underline{\mu = \tan\theta_0}$である。

ここまでは、「摩擦力」の復習で、この section のメイントピックではない。次の (3) からの解法についてがメイントピックである。

1.7.2　正攻法の確認

もし、この新潟大学の問題が、問題集で取り上げられたら、(3) 以降の問題の解説はどうなるか。まず、(3) 以降の解答を記す。

(3) $a = g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)$

(4) $g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)t$

(5) $\dfrac{1}{2}g\sin\theta(\sin\theta - \mu'\cos\theta)t^2$

(6) $\dfrac{1}{2}m(gt)^2(\sin\theta - \mu'\cos\theta)\cdot\mu'\cos\theta$

---

(17) 斜面に沿った方向の摩擦力が $\mu mg\cos\theta$ とならないことに注意する必要がある。なぜなら、垂直抗力を N、摩擦力を R とすると、運動方程式 (つりあいの式) が

$$\text{(斜面に垂直な方向)}\qquad 0 = N - mg\cos\theta \tag{1.41}$$
$$\text{(斜面に沿った方向)}\qquad 0 = R - mg\sin\theta \tag{1.42}$$

となるからである。もし、この説明に納得がいかないのなら、その人は摩擦力について正しく理解できていない。おそらく、勘違いしている人は $mg\sin\theta$ の部分を $\mu mg\cos\theta$ と誤答するだろう。

静止摩擦力は、物体の運動を妨げようとして働く。物体は運動しようとするのだから、動きたい方向に力が働いている。摩擦力はその力とつりあうことで運動を妨げる。そのため、静止摩擦力は μN(N は垂直抗力) ではない。では、μN は何か。動きたい方向に働く力が強いと静止摩擦力を振り切って動き出す。動き出すか動き出さないかの境目における摩擦力の大きさ、すなわち、静止摩擦力の最大値が μN である。

以下に問題集に書かれていそうな解説を記す。

正攻法 (よく見かける解法)

(3) 斜面下向きの加速度を a とすると、運動方程式は、

$$ma = mg\sin\theta - \mu' mg\cos\theta$$

となるから、$a = g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)$ である。
ここで、静止摩擦力を振り切って下向きに動くことは明らかなので、

$$mg\sin\theta > \mu mg\cos\theta > \mu' mg\cos\theta$$

という関係が成立する。よって、今求めた a は正の値である。
(答え) $\cdots$ $\underline{g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)}$

(4) 等加速度運動の公式を使うと、求める速さを v とすると、

$$v = at = g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)t$$

(5) 斜面上を滑りおりた距離を x とすると、求める鉛直距離は $x\sin\theta$ とかける。等加速度運動の公式を使うと、求める高さの差 h は、

$$\begin{aligned} h = \frac{1}{2}at^2\sin\theta &= \frac{1}{2}g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)t^2\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}g\sin\theta(\sin\theta - \mu'\cos\theta)t^2 \end{aligned}$$

(6) エネルギーの変化を ΔE とすると、上で定義した v と h を使えば、

$$\begin{aligned} \Delta E = \frac{1}{2}mv^2 - mgh &= \frac{1}{2}mg^2(\sin\theta - \mu'\cos\theta)^2t^2 - mg\cdot\frac{1}{2}g\sin\theta(\sin\theta - \mu'\cos\theta)t^2 \\ &= -\frac{1}{2}m(gt)^2(\sin\theta - \mu'\cos\theta)\cdot\mu'\cos\theta \end{aligned}$$

今回の場合、$|\Delta E|$ を答えれば良いので、求める答えは、$\frac{1}{2}m(gt)^2(\sin\theta - \mu'\cos\theta)\cdot\mu'\cos\theta$ である。

この解説にいくつかコメントを加える。

- (3) の解答では、動摩擦係数 μ' が静止摩擦係数 μ より小さいことと、斜面上を滑りだしたので、斜面下向きの力 $mg\sin\theta$ が静止摩擦力の最大値 $\mu N = \mu mg\cos\theta$ より大きいことを利用した。
- この問題を見つけた `http://www.geocities.jp/hmqbj932/nyushibutukaisetu.html` では、「力学的エネルギーの減少量は、動摩擦力のした仕事に等しい」ということを使って求めている。どのような方法を使って解くかは好みの問題なので、好きな方法で解けは良いだろう。
今回の場合、動摩擦力は、$\mu' N = \mu' mg\cos\theta$ で、移動距離は $x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}g\sin\theta(\sin\theta - \mu'\cos\theta)t^2$ である。移動方向と力の距離のなす角は $180°$ なので、この 2 つをかけて $-$ をつければ、ΔE が求まる。無駄な因数分解をしなくてよく、式処理は楽かもしれない。

1.7.3　水平方向と鉛直方向を 2 つの軸とする座標系の導入

前のページで書いた正攻法は、以下の図 1.1 の黒矢印のように座標系を導入して解いている。なぜ、赤線で書いたような座標系を導入しないのか。答えは、赤線の座標系で計算するのは面倒で、手間がかかり、あまり得ではないからである。

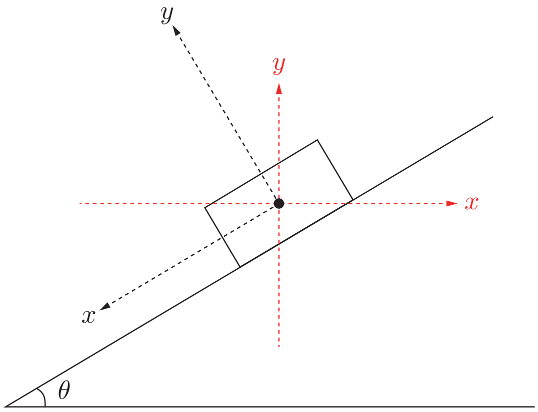


図 1.1: 2 つの座標系

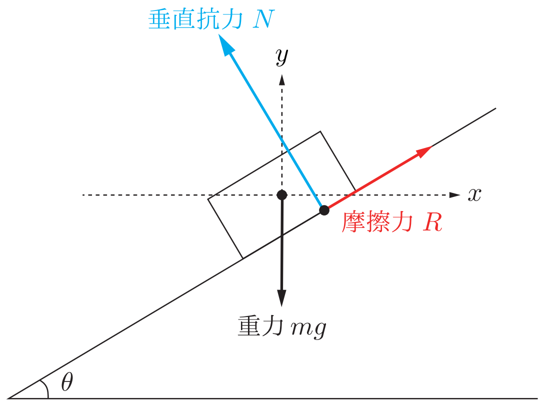


図 1.2: 物体に働く力

では、定期試験や入試で絶対に使いたくない方法で(3) から (6) を解こう。

垂直抗力 $\boldsymbol{N}$ と摩擦力 $\boldsymbol{R}$ の大きさが未知であるとする。図 1.2 の x, y 方向の運動方程式は、

$$ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = R\cos\theta - N\sin\theta \tag{1.43}$$

$$ma_y = m\frac{d^2y}{dt^2} = R\sin\theta + N\cos\theta - mg \tag{1.44}$$

となる。この式の変数は $x(a_x)$, $y(a_y)$, R, N の 4 つなのに、式が 2 つなので解を求めることはできない。そのため、束縛条件 (拘束条件) を導入する必要がある。今回は、式が 2 つ足りないので、2 つの束縛条件を導入する。

- 摩擦力と垂直抗力の大きさ R と N

$$R = \mu' N \tag{1.45}$$

　で結ばれる。

- 最初の物体の位置を原点とするように 2 軸をとると、物体の位置は

$$y = (\tan\theta)x \tag{1.46}$$

　という拘束を受ける。この条件で斜面上を運動するということを表現する。

(3)

式 (1.46) より、$a_y = a_x \tan\theta$ なので、式 (1.45) と式 (1.46) を式 (1.43) と式 (1.44) に代入すると、

$$ma_x = N(\mu'\cos\theta - \sin\theta) \tag{1.47}$$

$$ma_x \tan\theta = N(\mu'\sin\theta - \cos\theta) - mg \tag{1.48}$$

となる。これで、変数が a_x と N だけになったので、この連立方程式は解ける。式 (1.48) を $\tan\theta$ で割ると、

$$\begin{aligned} N(\mu'\cos\theta - \sin\theta) &= N\left(\mu'\frac{\sin\theta}{\tan\theta} + \frac{\cos\theta}{\tan\theta}\right) - \frac{mg}{\tan\theta} \\ &= N\left(\mu'\cos\theta + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right) - \frac{mg}{\tan\theta} \end{aligned}$$

となるので、この式を整理すると、

$$\frac{N}{\sin\theta} = \frac{mg}{\tan\theta} = mg\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

となり、$N = mg\cos\theta$ であることがわかる。こうして、N がわかったので、後は a_x を求める。
$a_y = a_x\tan\theta$ より、$a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \dfrac{|a_x|}{\cos\theta}$ となることをおさえておく。
式 (1.47) と $N = mg\cos\theta$ より、

$$ma_x = mg(\mu'\cos\theta - \sin\theta)\cos\theta$$

と書けるので、ゆえに、

$$a = \frac{|a_x|}{\cos\theta} = g|\mu'\cos\theta - \sin\theta| = g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)$$

である。なお、絶対値記号を外す時は、次の関係式が成立することを利用した。

$$mg\sin\theta > \mu mg\cos\theta > \mu' mg\cos\theta \tag{1.49}$$

(4)

式 (1.46) より $v_y = v_x\tan\theta$ である。今、a_x, a_y は定数なので、初速度が $\mathbf{0}$ であることから、等加速度運動の公式を使えば、

$$v_x = a_x t \qquad v_y = a_y t$$

である。すると、$v = \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{(a_x t)^2 + (a_y t)^2} = t\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = at$ となる。よって、面倒な方法で求めた場合も、(3) で求めた a に t をかければ速さが求められる。

$$v = g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)t$$

(5)

$a_y = a_x\tan\theta$ より、

$$a_y = g(\mu'\cos\theta - \sin\theta)\sin\theta$$

である。よって、y 方向の座標は、等加速度運動の公式より、

$$\Delta y = x(0) + \frac{1}{2}a_y t^2 = x(0) + \frac{1}{2}gt^2(\mu'\cos\theta - \sin\theta)\sin\theta$$

(初速度が $\mathbf{0}$ であることを利用した。)

今回求めるのは、高さの差なので、第 2 項の絶対値を求めればよく、求める高さの差 h は

$$h = \frac{1}{2}gt^2(\sin\theta - \mu'\cos\theta)\sin\theta$$

である。

(3) から (5) について 2 通りの座標系で解いたがどちらが楽だっただろうか。当然最初のやり方の方が楽だろう。でも、なぜ、最初の方法を使うのかという説明は少なかったのではないか。全部の問題を後に書いた方法で解いてもかまわない。しかし、計算量が多くなったり、束縛条件を考えなければならずとても面倒である。そのようなことを避けるモノの見方が、今回の場合、斜面に沿って座標系を設定することである。学校や予備校、参考書で知らず知らずのうちにベストな方法が何の説明もなく教えられている。その理由も知っているのが一番良いが、大学入試などで高得点をとりたいなら、そんなことは一旦頭の端に置いておいて、「天下り」的な方法を利用するのが一番良いだろう。この section を通して、そのことを私は伝えたかった。

第 2 章　仕事とエネルギー

私が持っている電子辞書に入っている国語辞典で「仕事」と調べると、「体や頭を使って働くこと。」という意味がでてくる。力学において、「仕事」という言葉がこのような言葉で使われることはない。
同様に、「エネルギー」と調べると、「仕事などをするのに必要な心身の元気。精力。」とでてくる。しかし、「エネルギー」の 2 つ目の意味として、こう書かれている。

(物理学において) **物体が持っている、仕事をする能力の量**

この Chapter では、(物理学の)「仕事」と「エネルギー」の関係を見ていく。最初に「運動エネルギーの変化と仕事の関係[1]」を紹介する。その後、「力学的エネルギー保存則」や「位置エネルギー (Potential)」、「保存力」について見ていく。

物理基礎の教科書では、力学分野の「仕事とエネルギー」の項目で、バネの弾性エネルギーについて扱っているが、この TEX ノートでは、それは扱わない。(第 5 章の「単振動」の部分で扱う)

2.1　仕事と運動エネルギー

2.1.1　仕事の定義

「仕事」とは何かを定義する。私が高校 2 年生の時に使った物理基礎の教科書 (数研出版) に書かれている仕事の定義を見てみる。それは最も単純な場合における仕事の定義である。

仕事の定義 (1)

一直線上で物体に**一定の大きさ**の力 F[N] をはたらかせて、その力の向きに x[m] 動かす時、

$$W = Fx \tag{2.1}$$

をその力のした**仕事**という。

いつでも力の向きと動かす方向が平行であるとは限らない。次のページの図 2.1 のように、右に x 動かすために斜め右上方向に一定の力 F を加えてもよい。このような場合は、**力を 2 方向に分解**して考えれば良い。力の上方向成分 $F\sin\theta$ が小さければ、物体は床面から離れない。ここでは、力の上方向成分はあまり大きくなく、物体が床面から離れないものとする。すると、力の右方向成分 $F\cos\theta$ が物体の運動に影響してくる。

[1] 私は、この関係のことを「エネルギーの原理」ということを、高校 3 年の時に佐藤先生から習ったのだが、この名称を使う参考書や問題集をあまり見ない。しかし、インターネットで「エネルギーの原理」と検索すると、必ず「運動エネルギーの変化と仕事の関係」と教科書で紹介されている式がでてくる。私は、この TEX ノートでは「エネルギーの原理」と呼ぶことにする。

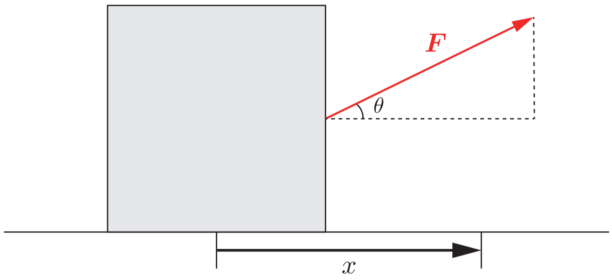


図 2.1: 仕事の定義

この時、加えた力のした仕事を考えるが、この状況は、式 (2.1) の F の代わりに $F\cos\theta$ を使ったものと同じである。そのため、加えた力のした仕事は、

$$W = (F\cos\theta)x = Fx\cos\theta$$

となる。$\theta = 0$ の場合は、前のページの「仕事の定義 (1)」と同じである。

したがって、**力の大きさが一定**でかつ**一直線上を動かす**時の仕事は次のように定義すれば良い。

仕事の定義 (2)

一直線上で物体に**一定の大きさ**の力 F [N] をはたらかせて、その力の向きに x [m] 動かす時、力の向きと移動の向きのなす角を θ とすると、

$$W = Fx\cos\theta \tag{2.2}$$

をその力のした**仕事**という。

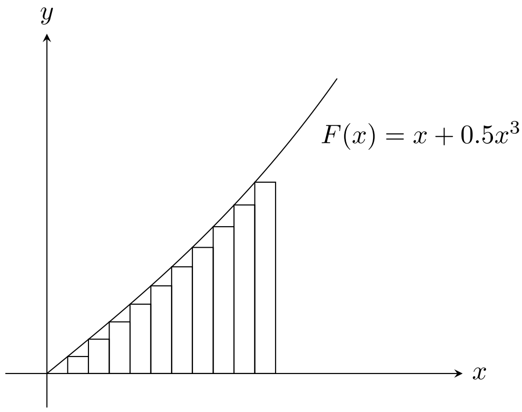
式 (2.2) から以下のことがすぐにわかる。

- $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ の時、$\cos\theta = 0$ となる。つまり、**移動する向きと垂直に働く力は物体に対して仕事をしない。**
- $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ の時、$\cos\theta < 0$ となる。つまり、仕事には**正の仕事**と**負の仕事**がある。

私たちが物を引っ張る時、引っ張る力を測定してみると、どんな結果になるだろうか。引っ張っている間ずっと一定ということはないだろう。ある値の周りを振動しているかもしれない。これまでは、加える力が一定の時を考えたが、今度は加える力が位置によって変化する場合を考える。つまり、力 F が位置の関数 $F(\boldsymbol{r})$ でかける時を考える。まずは一次元の場合を考える。

今、力 $F(x)$ が、右の図のように ($F(x) = x + 0.5x^3$) 変化しているとする。$x = 0$ の位置から、$x = 0.5$ の位置まで動かす時の仕事を考えよう。

$x = 0$ から $x = 0.5$ までの区間を非常に細かく N 個に分割する。各区間を $I_n = \{x \mid x_{n-1} \leq x \leq x_n\}$ とし、各分割の幅を $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ とする。各微小区間において、$F(x_n) - F(x_{n-1})$ が十分小さければ、この微小区間において、力 F は (近似的に) 一定とみなせる。そのため、この微小区間において力 F のした仕事は、近似的に $F(x_n)\Delta x_n$ とかける。よって、これを全ての微小区間について足し合わせればよい。



$$W(x = 0 \to x = 0.5) = \sum_{\text{全微小区間}} F(x_n)\Delta x_n \tag{2.3}$$

各 Δx_n ができるだけ小さくなればなるほど正確なので、$\max\{\Delta x_n \mid n = 1, 2, \cdots, n\} \to 0$ の極限を考える[(2)]。ここで、$F(x_n)\Delta x_n$ という量は、上図のように長方形をとったときの、長方形の面積に等しい。そのため、$\max\{\Delta x_n \mid n = 1, 2, \cdots, n\} \to 0$ の極限をとると、

$$W(x = 0 \to x = 0.5) = \int_0^{0.5} F(x)dx \tag{2.4}$$

となる。この積分で表された量が、$x = 0$ の位置から、$x = 0.5$ の位置まで動かす時の仕事である。上の式に $F(x) = x + 0.5x^3$ を代入すると、

$$W = \int_0^{0.5} \left(x + \frac{1}{2}x^3\right) dx = \frac{17}{128}$$

と求められる。

この話を拡張すると、「仕事」の定義として、次のようにかける。

仕事の定義 (3)

一直線上で物体に力 $F(x)$ をはたらかせて、位置 x_1 から x_2 まで動かす時に物体がされた仕事 (力 $F(x)$ のした仕事) は、

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \tag{2.5}$$

をその力のした**仕事**という。

---

(2) Δx_n のうち、一番最大のものが 0 になれば、それより小さいものは当然 0 になる。イメージとしては、任意の Δx_n に対して、

$$0 \leq \Delta x_n \leq \max\{\Delta x_n \mid n = 1, 2, \cdots, n\}$$

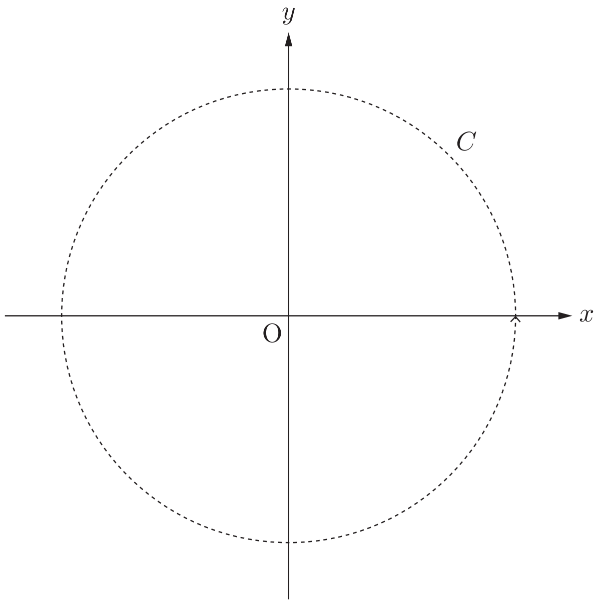
が成立するので、はさみうちの原理より、各 Δx_n は 0 になると考えればよい。

今、max を使ったが、大学で登場する sup の方が良いのではないかと私は思っている。sup の定義は以下のようである。

- 実数 b が $\mathbf{R}$ の部分集合 A の**上界**であるとは、任意の $a \in A$ に対して、$a \leq b$ が成立することである。
- A の上界の集合に最小の元が存在するとき、これを $\sup A$ と表す。

ただ、この定義を見ると、max でも OK な気がするが、sup の方が厳密には正しい気がする。少し余分なことを書いてしまった。

この式において、$F(x)$ が x によらず一定の時は、上の式は式 (2.1) と同じである。したがって、この式は「仕事の定義 (1)」の内容も含む式であり、より一般的な定義といえよう。しかし、式 (2.5) は 2 次元以上で考えるときには使えない。そこで、式 (2.5) を拡張しよう。



今度は、一直線上ではなく、上の図のような曲線 C 上を動かすことを考える。力が $F(\boldsymbol{r})$ と位置の関数でかけるとき、一次元の場合と同様に区間をたくさんの微小区間に区切る。すると、この微小区間では、曲線も直線に近似できて、式 (2.2) が使える。ここで、式 (2.2) に少し手を加える。

32 ページの図 2.1 で、右向きに x 動かすということを表すように、下側に矢印が書かれている。この矢印を大きさ x のベクトル $\boldsymbol{x}$ と見ると、$W = Fx\cos\theta$ というのは、力のベクトル $\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{x}$ の内積となる。そのため、式 (2.2) は次のように書き換えてもよい。

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{x} \tag{2.6}$$

この内積を使うと、上の曲線 C 上を動かす場合は、曲線を微小区間に分割し、各微小区間を (近似) 直線 (ベクトル) と見れば、各微小区間で力 $\boldsymbol{F(r_i)}$ と微小ベクトル $\Delta\boldsymbol{r_i}$ の内積をとり、足し合わせれば良い。

$$W = \sum_{\text{全微小区間}} \boldsymbol{F(r_i)}\cdot\Delta\boldsymbol{r_i} \tag{2.7}$$

1 次元の場合と同様に考えると、これも積分の形でかけそうである。実際、大学で習う**線積分**[(3)]を用いると、積分の形でかける。その結果は次のようになる。

$$W = \int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{dr} \tag{2.8}$$

線積分が登場してきて難しい感じがするが、重要なのは、1 次元だろうが、2 次元だろうが、**微小区間に分けて微小仕事を計算し、全区間分足し合わせれば、仕事が求められる**ということである。2 次元の場合、1 次元と表記法が変わっただけで、本質的な部分は何も変わっていない。

(3)私が作成する高校物理の TEX ノートの「力学」編では、1 次元の場合や、視点をうまく変えることで 1 次元に帰着できる場合を中心に考える。この線積分は、ただこういう風に書くのかと思いながら、読み流してくれれば良い。

2.1.2 「エネルギーの原理」の導出

いよいよ、「エネルギーの原理」あるいは、「運動エネルギーと仕事の関係」といわれる式を導出する。ここでは、1 次元の場合のみ考える。1 次元の系における運動方程式は以下のようになる。

$$m\frac{dv}{dt} = F(x) \tag{2.9}$$

「運動エネルギーと仕事の関係」の式を導くのだから、「仕事」の式を作ることを考えよう。式 (2.5) の「仕事の定義」を利用すると、式 (2.9) は次のようにすれば良い。

$$\int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv}{dt}dx = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$$

左辺の積分変数を x から t に変える。$dx = \dfrac{dx}{dt}dt = vdt$ より、

$$\int_{t_1}^{t_2} mv\frac{dv}{dt}dt = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$$

ここで、$\dfrac{d}{dt}(v^2) = \dfrac{d}{dv}(v^2)\cdot\dfrac{dv}{dt} = 2v\dfrac{dv}{dt}$ の関係を使うと、

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt &= \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \\ \frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 &= \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \qquad (2.10)\end{aligned}$$

式 (2.10) を導く過程で現れた $\dfrac{1}{2}mv^2$ という量は、仕事と同じ次元[(4)]をもつ値で、これを**運動エネルギー** (Kinetic Energy) という。1.2「Newton の 3 つの法則」で少しだけ登場した $p = mv$ で表される運動量を用いると、運動エネルギーは $\dfrac{p^2}{2m}$ とかける[(5)]。

「運動エネルギー」と「エネルギーの原理」

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \tag{2.11}$$

を、物体が持つ**運動エネルギー**という。
また、**運動エネルギーの変化は、物体に働く力 $F(x)$ がした仕事に等しい。(エネルギーの原理)**

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$$

---

(4) 全ての物理量は**単位**をもつ。例えば、距離や変位は**メートル** (m) という単位をもつ。質量は**キログラム** (kg) という単位をもつ。速さの単位として (m/s) という単位が使われるが、これは単位や次元という解釈の下では、「メートル」で表される量を「秒 (Second)」で表される量で割ったものだという意味がある。力は**ニュートン** (N) という単位で表される。その一方で、運動方程式を見ると、質量 (kg)× 加速度 (m/s^2) でも力と同じ次元を表せることがわかる。すると、仕事の単位は、「仕事 = 力 × 距離」なので、(N · m)、つまり、(kg · m^2/s^2) である。(m^2/s^2) = (m/s)^2 と見れば、運動エネルギーと仕事が同じ次元をもつことがわかる。

(5) この表記方法は、速度を介さない表記をするとき、高校物理では「原子」分野で役立つ。私が高校 3 年生の時の駿台の東大実戦の物理で、「原子」分野ではないが、運動エネルギーを $\frac{p^2}{2m}$ で表さなければならない問題がでた。

2.1.3　仕事率

この section の最後に「仕事率」について考える。前のページで登場した式をもう一度かく。

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$$

この式の左辺は t について積分していて、右辺は x について積分している。右辺も t についての積分に直して統一感のある感じにしてみよう。$dx = vdt$ を使うと、

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} F(t)v(t)dt \tag{2.12}$$

左辺と右辺を見比べよう。積分区間が同じ t_1 から t_2 でかつ、積分変数はどちらも t である。その上、定積分の値は等しい。ならば、積分される関数も同じではないか。つまり、$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right)dt = F(t)v(t)$ ではないか[(6)]。

実際、両者は等しい。なぜなら、式 (2.12) の $v(t)$ や $F(t)$ は具体的な関数と指定されてなく、**任意**の関数だからである。それに、積分区間も 0 から 3 というように具体的ではなく、t_1 から t_2 と**任意**だからである[(7)]。被積分関数がどんな関数でも、積分区間がどんな区間でも、式 (2.12) が成立するためには、両者が等しくなければ困る。

しかし、今回の場合、こんなに面倒な方法をとらなくても良い。

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

両辺に v をかけて、$\dfrac{d}{dt}(v^2) = \dfrac{d}{dv}(v^2)\cdot\dfrac{dv}{dt} = 2v\dfrac{dv}{dt}$ の関係を使えば、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F\cdot v \tag{2.13}$$

たったこれだけで良い。ここで右辺の意味を考える。微小仕事 dW は力 F で微小距離 dx 動かす時の仕事で、微小区間を動かすので、力 F は一定とみなすと

$$dW = Fdx = Fvdt$$
$$\therefore \frac{dW}{dt} = F\cdot v \tag{2.14}$$

なので、右辺の $F\cdot v$ は仕事の変化率 (時間微分) に等しい。この値を**仕事率**といい、式 (2.13) と式 (2.14) より「運動エネルギーの変化率 = 仕事率」という関係が成り立つことがわかる。

---

(6) しかし、積分される関数も同じとすぐに決めつけるのは注意が必要である。

$$\int_0^{2\pi}\sin x dx = \int_0^{2\pi}\cos x dx = 0$$

である。積分区間も積分変数も同じで、定積分も同じである。しかし、$0 \le x \le 2\pi$ を満たす全ての x において $\sin x = \cos x$ は成立しない。そのため、一般的には $\sin x \ne \cos x$ である。こういう風に簡単に反例を示すことができる。

(7) 上の (注) で使った sin と cos について、今度は積分区間が $0 \le x \le \pi$ の場合を考える。

$$2 = \int_0^{\pi}\sin x dx \ne \int_0^{\pi}\cos x dx = 0$$

であるので、同じ sin と cos でも積分区間が変わると、定積分の値は等しくない。定積分の区間を変えても、式 (2.12) が成立するのは、$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right)dt = F(t)v(t)$ と関数が**完全**に一致しなければならないというのは、この例からもよくわかるだろう。

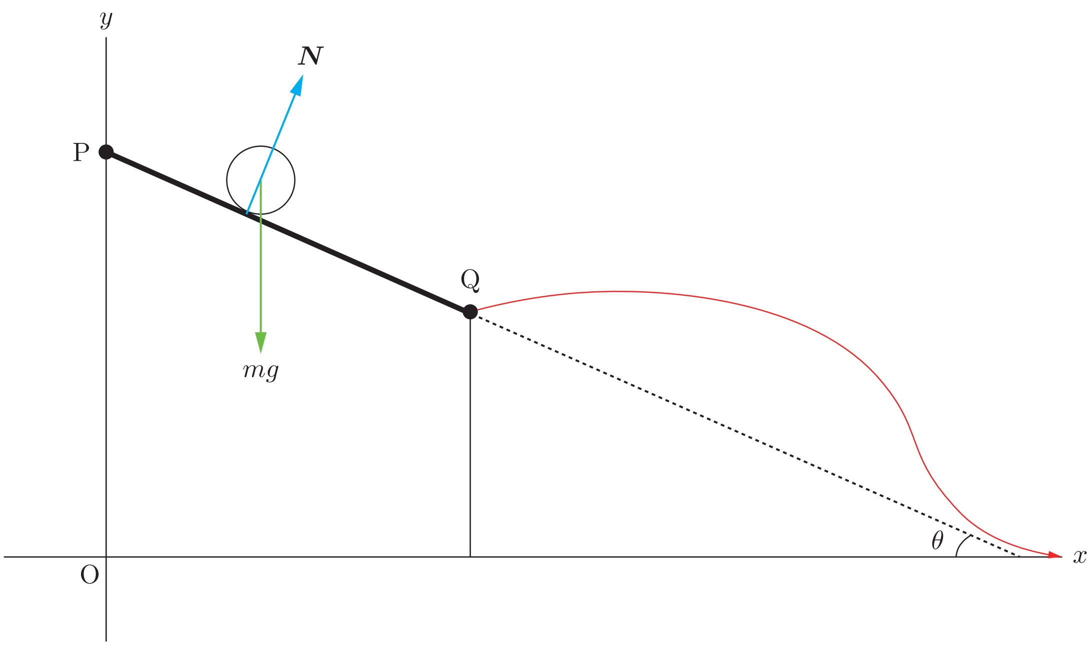
2.2　力学的エネルギー保存則と位置エネルギー

2.2.1　重力のした仕事

PyeongChang オリンピックで羽生結弦が男子フィギュアスケートで 2 連覇し、国民栄誉賞の授与が決まった。冬のオリンピックで日本人が活躍したのはフィギュアスケートだけではない。平野歩夢の銀メダル、原大智の銅メダル。そして、高梨沙羅の銅メダル。金メダルを取って欲しかったと多くの日本人が感じているであろう。次のオリンピックを目指すなら頑張ってほしい。

さて、平野歩夢の男子ハーフパイプ、原大智の男子モーグル、高梨沙羅の女子スキージャンプのスタート地点はどれも高い所にある。高いところから滑り始め勢いをつけている。スキージャンプの中継を見た人は、Gate Factor という言葉を聞いたかもしれない。スタートの位置が定められた基準より低くなると、得点がプラスになるというものだ。加点される理由は、飛び立つ瞬間までに勢いがつかなくて不利になるからである。

より高いところから滑り始めれば、より勢いがつく。これを仕事やエネルギーという観点から考える。そこでこんな簡易的なモデルでスキージャンプを考える。スタート地点の座標を $\mathrm{P}(0, h_P)$、飛び立つ地点の座標を $\mathrm{Q}(s, h_Q)$ とする。空気抵抗や物体と斜面の摩擦は無視する。



上の図のような斜面を滑る時についてエネルギーの原理を考える。点 P、点 Q における運動エネルギーを $K_P,\ K_Q$ とおくと、

$$K_Q - K_P = \int_C (\boldsymbol{N} + m\boldsymbol{g}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

斜面上を滑る時、常に垂直抗力 N は斜面に垂直なので、垂直抗力は仕事をしない。また、重力のした仕事は、式 (2.2) の「仕事の定義 (2)」を使って考えればよい。すると、上の線積分は次の式は、

$$\begin{aligned} K_Q - K_P &= \int_C m\boldsymbol{g} \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= mg\sin\theta \cdot \frac{h_P - h_Q}{\sin\theta} \\ &= mg(h_P - h_Q) \end{aligned}$$

となる。ここで、添字が同じものどうしをまとめると

$$K_P + mgh_P = K_Q + mgh_Q \tag{2.15}$$

となる。

ここで、式 (2.15) の意味を考える。点 P において速度が 0 なら、$K_P = 0$ である。すると、

$$K_Q = mg(h_P - h_Q)$$

となり、点 Q における運動エネルギー K_Q は、質量 m、点 P と点 Q の高さの差 $h_P - h_Q$ の両方に比例することがわかる。だから、高いところから滑ると、運動エネルギーが大きくなる。つまり、点 Q における速さが大きくなる。

点 P と点 Q の取り方として、今回はスタート地点と飛び立つ地点をとったが、具体的に標高が何メートルの位置と決まっているわけではない。そのため、この式の h_P と h_Q は任意である。また、点 P と点 Q の運動エネルギーも具体的に何ジュールと決まっているわけではない。つまり、K_P と K_Q も任意である。式 (2.15) には添字がついていて、斜面上の特定の 2 点間の関係のように見えるが、実際は、「斜面上の任意の点で、$K + mgh$ (K は運動エネルギー) が等しい」というのが、式 (2.15) の意味である。

この式 (2.15) が、スキージャンプのような場合において成り立つ式で、**力学的エネルギー保存則**といわれる。

力学的エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \mathrm{const.}$$

さて、「mgh という量と運動エネルギーの和が一定」という式が成立するということは、mgh という量の単位は**ジュール** (J) である。つまり、この mgh はエネルギーに変換できる量か、エネルギーなのである。

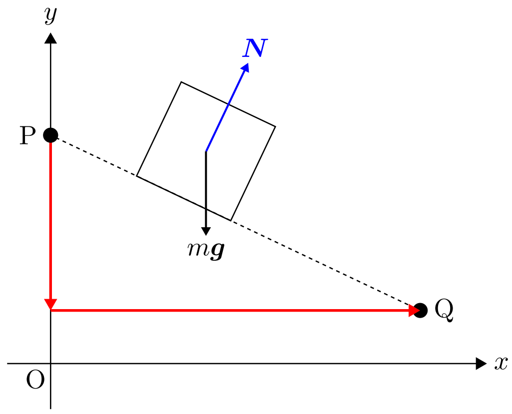
2.2.2　保存力

mgh という量は何物か。どうすればうまく説明できるのか。私に教えて欲しい。とりあえず、保存力の重要な性質を取り上げる。

保存力

「保存力」のする仕事は、始点と終点の位置のみで決まり、経路によらない[8]。

[8] 一般に、仕事 W は移動経路に依存する。「保存力」は移動経路に依存しない特別な力である。仕事が移動経路に依存することは、2.2.3 で簡単な例を用いて説明する。



2.2.1 でも取り扱った重力の仕事について考える。点 P から点 Q へ、斜面にそって移動する時に重力のした仕事は $mg(h_P - h_Q)$ である。今度は、紫の矢印にそって移動する時に重力のした仕事を考える。

- 真下に動く時、**進行方向と重力の向きは同じ**なので、真下に動く時の仕事は、$mg(h_P - h_Q)$ である。
- 真横に動く時、**進行方向と重力の向きは垂直**なので、真横に動く時の重力の仕事は 0 である。

2 つの合計を考えると、紫矢印のルートにそって移動した時の仕事も $mg(h_P - h_Q)$ である。したがって、重力は保存力であると考えられる。実際、点 P から点 Q へどのように移動しても、重力のした仕事は $mg(h_P - h_Q)$ である。そのため、重力は保存力である。

そして、保存力に対しては、保存力のした仕事を用いて**位置エネルギー**を定義できる。

位置エネルギー

物体をある点 A から基準点 O まで移動させる時、保存力がする仕事を点 O を基準とした点 A における物体の**位置エネルギー**と定義する。

2.2.3 仕事と移動経路

重力の場合は、2.2.2 で見たように 2 つの経路で重力のする仕事は等しい。しかし、一般には力のした仕事は移動経路により異なる。2 次元平面上で、$\boldsymbol{F} = (-ay,\ ax)$ (a は定数) という力が働く空間で、物体を原点 O$(0,0)$ から点 A$(1,1)$ に移動するときに、物体が受ける仕事を計算してみよう。

(1) 原点 O$(0,0) \Longrightarrow (1,0) \Longrightarrow$ A$(1,1)$

$$\int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(0,0)}^{(1,0)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{(1,0)}^{(1,1)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

- $(0,0) \Longrightarrow (1,0)$ の過程では、$d\boldsymbol{r} = (dx, 0)$ である。要するに、y 方向には動かない。そのため、$\boldsymbol{F}$ の y 成分は仕事に関与しない。よって、

$$\int_{(0,0)}^{(1,0)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 (-ay)dx$$

となるが、x 軸上は $y = 0$ なので、この積分は 0 である。

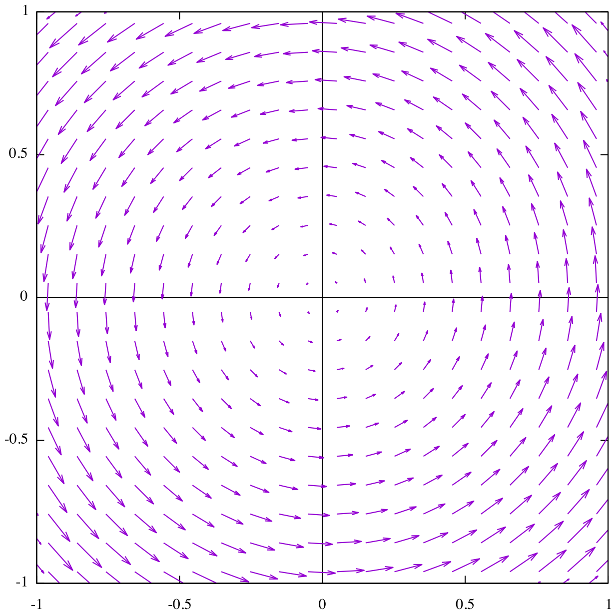


図 2.2: ベクトル場 $\boldsymbol{F} = (-ay,\ ax)$ $(a = 0.1)$ の様子

- $(1, 0) \Longrightarrow (1, 1)$ の過程では、$d\boldsymbol{r} = (0, dy)$ である。要するに、x 方向には動かない。そのため、$\boldsymbol{F}$ の x 成分は仕事に関与しない。よって、

$$\int_{(1,0)}^{(1,1)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 (ax)dy$$

となる。このルートでは、$x = 1$ なので、この積分は、$\displaystyle\int_0^1 a\,dy = a$ である。

- ゆえに、$\displaystyle\int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(0,0)}^{(1,0)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{(1,0)}^{(1,1)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = a$ である。

(2) 原点 $\mathrm{O}(0, 0) \Longrightarrow (0, 1) \Longrightarrow \mathrm{A}(1, 1)$

$$\int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(0,0)}^{(0,1)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{(0,1)}^{(1,1)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

- $(0, 0) \Longrightarrow (0, 1)$ の過程では、$d\boldsymbol{r} = (0, dy)$ である。要するに、x 方向には動かない。そのため、$\boldsymbol{F}$ の x 成分は仕事に関与しない。よって、

$$\int_{(0,0)}^{(1,0)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 (ax)dy$$

となるが、y 軸上は $x = 0$ なので、この積分は 0 である。

- $(0, 1) \Longrightarrow (1, 1)$ の過程では、$d\boldsymbol{r} = (dx, 0)$ である。要するに、y 方向には動かない。そのため、$\boldsymbol{F}$ の y 成分は仕事に関与しない。よって、

$$\int_{(1,0)}^{(1,1)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 (-ay)dx$$

となる。このルートでは、$y = 1$ なので、この積分は、$\displaystyle\int_0^1 (-a)\,dx = -a$ である。

- ゆえに、$\displaystyle\int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(0,0)}^{(0,1)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{(0,1)}^{(1,1)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -a$ である。

(3) 直線 $y = x$ 上を動いて、点 O(0,0) から点 A(1,1) まで動く
この直線上の点は、1 つのパラメーター t を用いて (t, t) とかける。つまり、この直線の方向ベクトル $\boldsymbol{d}$ は、$\boldsymbol{d} = (1, 1)$ である。また、直線 $y = x$ 上では $\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{F} = (-t, t)$ とかける。すると、直線 $y = x$ 上の任意の点において、

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d} = 0$$

となるので、直線 $y = x$ 上を動くとき、力 $\boldsymbol{F}$ のする仕事は 0 となる。

2.2.4 位置エネルギー

もう一度、**位置エネルギー**の定義を確認する。

位置エネルギー

物体をある点 A から基準点 O まで移動させる時、保存力がする仕事を点 O を基準とした点 A における物体の**位置エネルギー**と定義する。

この定義を数式で表すことを考える。保存力 $\boldsymbol{F}$ がする仕事は式 (2.8) のように線積分を使って書くと

$$U = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{O}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

とかける。ただ、A から基準 O までの仕事と、ゴールが基準点であるより、基準点をスタートにした方がわかりやすいかもしれない。積分では始点と終点を入れかえると、積分結果の正負が入れかわるので、上の式は次のように書き換えられる。

$$U = -\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{2.16}$$

この式は、負号 (マイナス) をインテグラル $\int$ の中に入れると

$$U = \int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} (-\boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{r} \tag{2.17}$$

となり、U は O から A まで、保存力 $\boldsymbol{F}$ と大きさが等しく、向きが反対の力 $-\boldsymbol{F}$ のする仕事と見ることもできる。つまり、「O から A に至る経路の各点において保存力 $\boldsymbol{F}$ とつり合うように働かせた力」のする仕事が U(位置エネルギー) なのである。

さて、定積分では始点と終点が同じとき、積分結果は 0 となる。そのため、式 (2.16) や式 (2.17) の A と O が一致する場合 $U = 0$ である。つまり、位置エネルギー $U(\boldsymbol{r})$ は基準点では 0 である。

ここまで位置エネルギーについて見てきたが、基準の取り方については具体的に定まっていない。むしろ、具体的に決めていないというのが適切かもしれない。積分で位置エネルギーを定義したが、基準について定義していないのは、基準はどこにとっても問題ないからだ。位置エネルギーの特徴の 1 つは、**基準点をどこにとっても良い**ということだ。線積分で定義しているので、基準を変えれば位置エネルギーも変わってしまう。しかし、定義には何の問題もない。

基準点として点 O をとる。2 点 A,B を考える。それぞれの点の位置エネルギーは

$$U(A) = \int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} -\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$
$$U(B) = \int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{B}} -\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

である。

では、基準点が B だった場合の A の位置エネルギーを考える。この時の A の位置エネルギーを $E(A)$ とすると、

$$E(A) = \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} -\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

定積分計算の性質から、B→A を B→O と O→A の 2 つに分けると、

$$\begin{aligned} E(A) &= \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{O}} -\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} -\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} -\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} - \int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{B}} -\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= U(A) - U(B) \end{aligned}$$

この式から言えるのは、基準点を O から B にずらすと、位置エネルギーも変化するが、その変化量は、(O が基準の場合の) B の位置エネルギーに相当する。つまり、基準点をずらすと、そのズレに対応して位置エネルギーは変化するのである。だから、基準点をどこにとっても問題はない。そのため、多くの場合、都合の良い[(9)]位置を基準点とする。

2.2.1 や 2.2.2 で見てきた重力は保存力である。そのため、重力による位置エネルギーを定義できる。重力の場合、どの点でも $-mg$ であることから、線積分は単純に $mg \times \Delta h$(Δh はある位置 A と基準点 O の y 座標の差) となる。そのため、重力による位置エネルギーの基準を原点にとれば、2.2.1 や 2.2.2 の図の点 P の位置エネルギーは mgh_P で、点 Q の位置エネルギーは mgh_Q である。ゆえに、mgh という量は原点[(10)]を位置エネルギーの基準とした時の直線 $y = h$ 上の点の位置エネルギーなのである。

ここまでは線積分を使った定義を書いてきたが、実際に大学入試問題を解いたり、物理法則を導く上で重要なのは、基本となる 1 次元の場合である。そこで、以下では 1 次元の場合について掘り下げていく。

まず、線積分を使った難しそうな定義を 1 次元の場合に直すと、

$$U(x) = \int_{0}^{x} -F(x')dx' \tag{2.18}$$

となる。ただし、$F(x)$ は保存力で、基準を $x = 0$ とした。この式から逆に、

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \tag{2.19}$$

と書けることがわかる。この式より、位置エネルギーの増加する方向と、保存力の向きは反対であることがわかる。

[(9)]問題を解くときに都合の良いように、あるいは、位置エネルギーを関数で表したときに都合の良いように、基準点を勝手に定められるということである。
[(10)]正確には、原点でなくても x 軸上の点ならどこを基準にしても、直線 $y = h$ 上の任意の点の位置エネルギーは mgh となる。

2.2.5 力学的エネルギー保存則

1 次元の場合における力学的エネルギー保存則を考える。物体に保存力しか働かないとき、2.1.2 の「**エネルギーの原理**」の式は位置エネルギーを用いて変形できる。

$$\frac{1}{2}m(v_2)^2 - \frac{1}{2}m(v_1)^2 = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$$

保存力に対しては、前のページの式 (2.18) のように位置エネルギーを導入できるから、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m(v_2)^2 - \frac{1}{2}m(v_1)^2 &= -\int_{x_2}^{x_1} F(x)dx \\ &= -\int_{x_2}^{0} F(x)dx - \int_{0}^{x_1} F(x)dx \\ &= \int_{0}^{x_2} F(x)dx - \int_{0}^{x_1} F(x)dx \\ &= -U(x_2) + U(x_1)\end{aligned}$$

添字が同じものを揃えると、

$$\frac{1}{2}m(v_1)^2 + U(x_1) = \frac{1}{2}m(v_2)^2 + U(x_2) \tag{2.20}$$

となる。この式 (2.20) の扱い方は、2.2.1 の場合と同じで x_1 と x_2、v_1 と v_2 の任意性から、次のようにまとめられる。

力学的エネルギー保存則

保存力しか物体に働かないとき、運動エネルギー K と位置エネルギー U の和 (**力学的エネルギー**) は常に一定である。

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = \text{const.}$$

では、保存力以外の力が働くときはどうなるのか。$F(x)$ が保存力 $f(x)$ と非保存力 $g(x)$ の和でかけるとき、

$$\frac{1}{2}m(v_2)^2 - \frac{1}{2}m(v_1)^2 = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx$$

$f(x)$ は保存力なので、$f(x)$ に対応する位置エネルギーが定義できる。これを $U(x)$ とすると、

$$\frac{1}{2}m(v_2)^2 - \frac{1}{2}m(v_1)^2 = U(x_1) - U(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx$$

従って、添字が同じものを揃えると

$$\left(\frac{1}{2}m(v_2)^2 + U(x_2)\right) - \left(\frac{1}{2}m(v_1)^2 + U(x_1)\right) = \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx \tag{2.21}$$

となって、**力学的エネルギーの変化は非保存力のした仕事に等しい**ことがわかる。

2.3　非保存力と力学的エネルギー

前のページで見た通り、非保存力が働くと力学的エネルギーは一定とならない。このことを問題演習を通して確認する。今回扱う問題は、河合塾シリーズの「名問の森」の 34 ページから 35 ページにのっている問題をアレンジ[11]したものである。

問題 4

質量 m の小球 P と質量 $3m$ の小物体 Q を糸で結び、Q を傾角 θ の斜面上の点 A におき、糸を斜面と平行にし、滑車にかけて P をつるす。斜面は点 A の上側では滑らかであるが、下側は粗く、Q との間の動摩擦係数は μ である。重力加速度を g とする。

(A) P に鉛直下向きの初速 v_0 を与えたところ、Q も v_0 で点 A から動き出した。

(1) θ の値がある値より大きいとき、P と Q はずっと同じ方向に運動せず、あるところで一旦静止し、反対方向に動き始める。このようになるのは、θ がどのような条件を満たしている時か。ただし、P と Q が一旦停止するまでに、P が床面についたり、あるいは Q が斜面の頂上に到達することはないものとする。

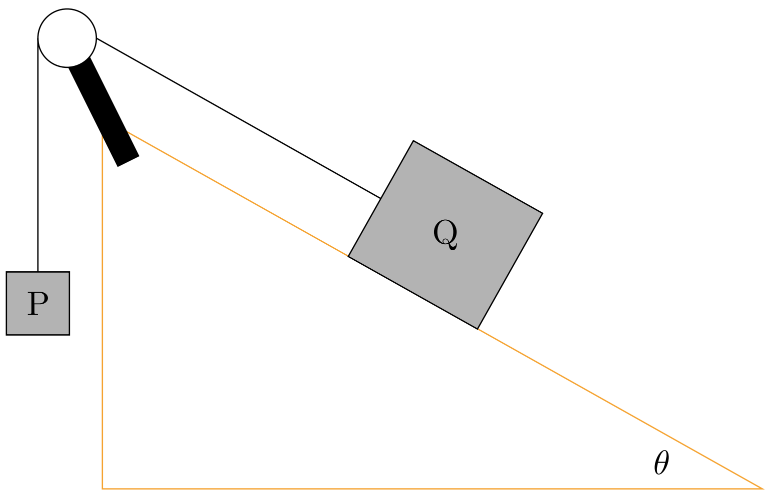
(2) θ が (1) の条件を満たすとき、Q の達する最高点 B と点 A の距離 L を求めよ。(エネルギー保存則を用いること)

(B) (A) の (1) の条件が満たされている時、Q が点 B まで到達した後、Q は再び斜面下方向へ滑り、斜面上の点 C で止まった。(この点 C は点 A より下側にある。)

(3) このような運動をするために、μ と θ の間に成り立つ関係を求めよ。

(4) μ と θ が (A) の (1) の条件と (B) の (3) の条件を満たしている時、AC 間の距離 d を求めよ。(エネルギー保存則を用いること)

(C) (A) の (2) と (B) の (4) の問題について、エネルギー保存則を使わないで L や d を求めよ。



[11] 原題は $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ で、$\mu = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ と具体的になっている。(A) の (1)、(B) の (3) および (C) のような問題はない。この具体的な数値の時に (A) の (1)、(B) の (3) の条件が満たされることが確かめられる。

(ちょっと寄り道。この「**問題 4**」について)

『名問の森』の 34 ページをみればわかるが、この問題の原題は「L と d をエネルギー保存則を使って求める」問題で、さらに「$\theta = \dfrac{\pi}{6}$, $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$」と θ と μ が具体的な数値となっていた。それを一般化した時に、問題文に書かれているような運動するには、(2.24) や (2.28) のような条件が必要だということに気づき、原題で使われている具体的な数値がこの 2 つの条件を満たしていることに気づいた。さらに、この問題は、等加速度運動の式を使っても解ける問題であり、実は、等加速度運動の式を使った方が楽に解けるということに気づいた。

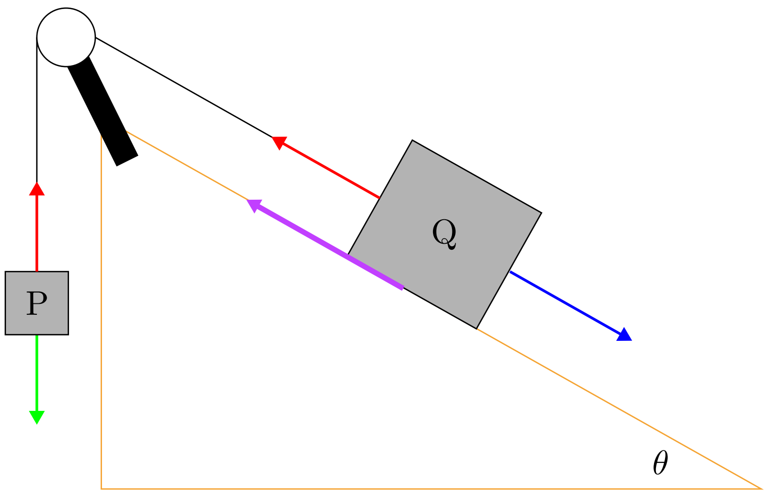


図 2.3: 物体に働いている力 (紫の線は摩擦力)

(1) 運動の様子を把握するには、どのような力が働いているか確かめて運動方程式をたてればよい。**両者は糸でつながっているので加速度の大きさは同じである。**P の加速度を鉛直下向きを正として a とおくと、Q の加速度は斜面をのぼる向きを正として a である。よって、P と Q の運動方程式は

$$ma = mg - T \tag{2.22}$$

$$3ma = T - 3mg\sin\theta \tag{2.23}$$

これより、加速度 a は

$$a = \frac{1 - 3\sin\theta}{4}g$$

である。P が下がり続けている間、P と Q の加速度は変わらない。そのため、$a \geq 0$ なら、P は減速することがないので、P が床面につくか、Q が斜面の頂上に到達してしまう。よって、$a < 0$ となることが必要である。ゆえに、

$$1 - 3\sin\theta < 0$$

つまり、

$$\sin\theta < \frac{1}{3} \tag{2.24}$$

が θ の満たすべき条件である。 □

(2)「エネルギー保存則を用いること」と問題文にあるので、エネルギー保存則を使う。エネルギー保存則とは、非保存力[12]が一切働かないとき「P と Q の位置エネルギー」と「P と Q の運動エネルギー」の総和が一定ということである。そのため、エネルギー保存則は

$$「運動エネルギーの変化量」= \ -「位置エネルギーの変化量」$$

ともかける。今回はこれを使う[13]。

- 運動エネルギーの変化量は $-\dfrac{1}{2}m(v_0)^2 - \dfrac{1}{2}(3m)(v_0)^2 = -2m(v_0)^2$ である。
- 一方、位置エネルギーの変化量について。P は L 下がり、Q は斜面上を L 上がるが、斜面上を L 上がるということは Q は鉛直方向に $L\sin\theta$ 上がるということなので、変化量は $-mgL + (3m)gL\sin\theta$ である。

よって、

$$2m(v_0)^2 = -mgL + 3mgL\sin\theta \tag{2.25}$$

これを解くと、

$$L = \frac{2(v_0)^2}{g(3\sin\theta - 1)}$$

□

(3) (A) の (1) と同様に運動方程式をたてて考える。A より下側を通過する時 (斜面を下る時)、紫色の矢印のように摩擦力が働く。このことに気をつけて運動方程式をたてればよい。P の加速度を鉛直上向きを正として b とおくと、Q の加速度は斜面を下る向きを正として b であるから、P と Q の運動方程式は

$$mb = T - mg \tag{2.26}$$

$$3mb = 3mg\sin\theta - 3mg\mu\cos\theta - T \tag{2.27}$$

---

[12] 内力と外力の違いに注意。非保存力でも 2 物体間に働く内力なら問題ない。エネルギー保存則が運動方程式や「エネルギーの原理」から来ていることを考えるとわかる。
今回の場合、P の位置を x_1、Q の位置を x_2 (P と Q の $t=0$ の時の位置を基準とする。) とすると、P と Q の運動方程式は、

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = m\frac{dv_1}{dt} = mg - T$$
$$3m\frac{d^2x_2}{dt^2} = 3m\frac{dv_2}{dt} = T - 3mg\sin\theta$$

であり、それぞれの両辺に $v_1 = \dfrac{dx_1}{dt}$、$v_2 = \dfrac{dx_2}{dt}$ をかけて整理すると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m(v_1)^2\right) = \frac{d}{dt}(mgx_1) - Tv_1$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(3m)(v_2)^2\right) = Tv_2 - \frac{d}{dt}(3mgx_2\sin\theta)$$

今回の場合、P と Q は糸でつながっているので $v_1 = v_2$ である。そのため、辺々加えると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m(v_1)^2 + \frac{1}{2}(3m)(v_2)^2\right) = \frac{d}{dt}(mgx_1 - 3mgx_2\sin\theta)$$

となり、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m(v_1)^2 + \frac{1}{2}(3m)(v_2)^2 - mgx_1 + 3mgx_2\sin\theta\right) = 0$$

なので、P と Q の運動エネルギーと、位置エネルギー (に相当する量) の和が一定であることがわかる。
このことから、<u>張力は働くけれどもエネルギー保存則には関与しないことがわかる。</u>

[13] 変化量に着目すれば良いのは、保存則の性質を考えれば当たり前である。これで十分なのは、次のような理由による。
P と Q の y 座標 (位置エネルギーの基準点を原点とする xy 座標系) を h_P, h_Q とすると、力学的エネルギー保存則は、

$$\left(\frac{1}{2}m(v_0)^2 + mgh_P\right) + \left(\frac{1}{2}(3m)(v_0)^2 + (3m)gh_Q\right) = mg(h_P - L) + (3m)g(h_Q + L\sin\theta)$$

となるが、この式を整理すると、(2.25) のようになる。そのため、(2.25) のように変化量に着目すれば十分である。

これより、加速度 b は

$$b = \frac{3\sin\theta - 3\mu\cos\theta - 1}{4}g$$

である。Q が下がり続けている間、P と Q の加速度は変わらない。そのため、$b \geq 0$ なら Q は静止しない。よって、$b < 0$ となることが必要である。

$$3\sin\theta - 3\mu\cos\theta - 1 < 0$$

つまり、

$$\sin\theta - \mu\cos\theta < \frac{1}{3} \tag{2.28}$$

が μ と θ の満たすべき条件である。しかし、μ と $\cos\theta$ は正[(14)]なので、(A) の (1) の条件 $\sin\theta < \dfrac{1}{3}$ が満たされているとき、(2.28) は必ず成立する。そのため、

$$\sin\theta < \frac{1}{3}$$

が求める条件である。 □

(4) エネルギー保存則は非保存力が一切関与しない時は、

「運動エネルギーの変化量」= −「位置エネルギーの変化量」

が使えるが、今回は摩擦力 (非保存力) が働くため使えない。張力はエネルギー保存則に関与しないのに、摩擦力は関与する。同じ非保存力なのに違いがあるが、これはどこから来るのか。その違いは運動方程式に現れている。

張力 T は、2 物体全体を考えたとき、つまり 2 つの運動方程式 (2.26) と (2.27) の両辺を加えたときには存在しない。**大きな視点で見た時に内力は打ち消しあう**のである。張力は厳密には内力ではないが、P と Q の間で互いに及ぼしあう**相互作用的**な力であり、内力と同等である。しかし、動摩擦力は、両者の間に働く力でなく、P と Q 以外の別物、斜面から働く力であり、外力なのでエネルギー保存則に関与する。

さて、動摩擦力がエネルギー保存則に関与することがわかったが、どう関与するか。2.2.4「力学的エネルギー保存則」の所に登場する式 (2.21) のように関与する。つまり、

「力学的エネルギーの変化量」=「外力 (動摩擦力) のした仕事」

である。

Q が点 A にある状態 (一番最初) と点 B にある状態の力学的エネルギーは等しい。そのため、Q が点 A にある状態 (一番最初) と点 C にある状態を比べれば良い。

- 点 C における力学的エネルギー[(15)]は、P と Q の速度が 0 なので、$mgd - 3mgd\sin\theta$ である。
- 点 A(一番最初) における力学的エネルギーは、$\dfrac{1}{2}m(v_0)^2 + \dfrac{1}{2}(3m)(v_0)^2$ である。
- 動摩擦力のした仕事は、垂直抗力は $3mg\cos\theta$ なので、$-3\mu mgd\cos\theta$ である。

[(14)] 動摩擦係数 μ は、摩擦力が斜面から働く垂直抗力の何倍になるかを表す量で、正の値である。傾角は普通 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ でとるので、この範囲内では必ず $\cos\theta$ は正である。

[(15)] P と Q のそれぞれの位置エネルギーの基準は、Q が点 A にある状態における P と Q の位置とした。

よって、

$$(mgd - 3mgd\sin\theta) - \left(\frac{1}{2}m(v_0)^2 + \frac{1}{2}(3m)(v_0)^2\right) = -3\mu mgd\cos\theta \tag{2.29}$$

が成立する。これを解くと、

$$d = \frac{2(v_0)^2}{g}\cdot\frac{1}{1-3(\sin\theta - \mu\cos\theta)} \tag{2.30}$$

□

(C) 今回の場合、P と Q の運動は等加速度運動なので、等加速度運動の式[16]を使う。今回は「いつ静止したか」といった時間に関する情報は必要ないので、3 つの式のうち、一番最後の式を使えば良い。

- まず、L について考える。P について着目すると、P は加速度の向きに L 動くから、

$$0 - (v_0)^2 = 2\cdot\frac{1-3\sin\theta}{4}g\cdot L$$

これを解くと、

$$L = \frac{2(v_0)^2}{g(3\sin\theta - 1)}$$

- 次に、d について。A を通過してから摩擦力が働いている区間について考える。

$$0 - (v_0)^2 = 2\cdot\frac{3\sin\theta - 3\mu\cos\theta - 1}{4}g\cdot d$$

これを解くと、

$$d = \frac{2(v_0)^2}{g}\cdot\frac{1}{1-3(\sin\theta - \mu\cos\theta)}$$

□

[16]

Remark

等加速度運動の式

$$v(t) = v(0) + at$$

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\{v(t)\}^2 - \{v(0)\}^2 = 2a\{x(t) - x(0)\}$$

第 3 章　運動量保存則と 2 体問題

この Chapter では、まず、大学入試問題を解くのに役立つ**運動量保存則**と、運動量保存則を使って問題が解ける「2 物体の衝突」に関係する**反発係数**を取り扱う。その後、「2 体問題」や、重心から見た 2 物体の運動について考える。

この Chapter の内容、特に「2 体問題」について、私は現役時代全く理解していなかった。浪人時代、そして、大学生になった今は「重心系」という言葉を当たり前のように使っている。しかし、現役時代、そんな言葉は知らなかった。実際、多くの入試問題は重心系で考えなくても解けるし、重心系を使う場合は丁寧な誘導が付くだろう。そのため、重心系なんて知らなくても良いのかもしれない。だが、知っているだけで有利なのである。だから、私は浪人時代は「重心系」についての理解を深めた。

この Chapter では、高校の一般的な Level を逸脱する内容を取り上げ、2 体問題の理解を深めていくことを目標にしていく。その第 1 歩が「運動量保存則」である。また、今後の議論を円滑に進めるために、この Chapter の途中で、現在の高校数学では範囲外となっている「行列」の基本的知識を導入する。

3.1　運動量保存則

3.1.1　力積と運動量の変化

第 1 章の最初でも取り上げたが、**運動量**の定義をしっかり書こう。

- **運動量**：物体の運動の勢いを表す量として、$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ により運動量を定義する。

運動方程式とは、Chapter1 でも取り上げたが、運動量の時間変化 $\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt}$ が、物体に加えられた外力 $\boldsymbol{F}$ に等しいというものである。しかし、外力が加えられた時間が極めて短いとき、$\boldsymbol{F}$ がどのような関数で表されるか分析することができないので、$\boldsymbol{v}$ について分析することはできない。

このような時は、運動方程式の積分形が活躍する。運動方程式から「エネルギーの原理」を導き、エネルギー保存則を導いたように、積分形が活躍する。運動方程式の両辺を位置 (一次元なら x) で積分すると、「エネルギーの原理」が導ける。今回は運動方程式を t で積分する。

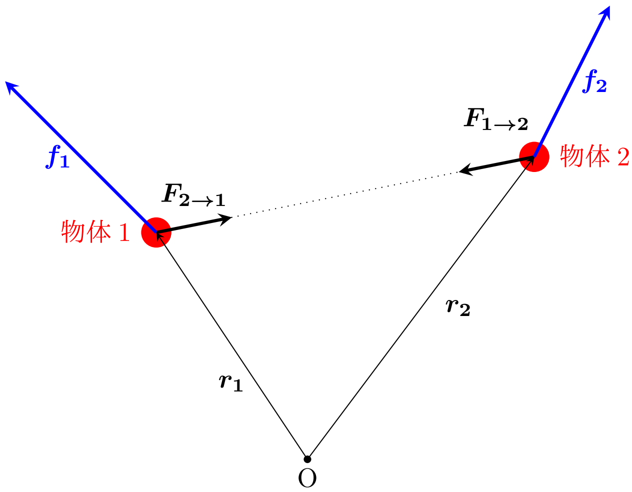
$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\boldsymbol{p}(t)}{dt}\,dt = \int_{\boldsymbol{p_1}}^{\boldsymbol{p_2}} d\boldsymbol{p} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(t)\,dt$$

よって、

$$\boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_1} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(t)\,dt \tag{3.1}$$

という関係式が導ける。この右辺の積分を**力積**という。
この式より、「物体の運動量 $\boldsymbol{p}$ の変化は、その間に物体に与えられた力積に等しい」ということがわかる。

3.1.2　運動量保存則



複数の物体がある場合、それぞれの物体には様々な力が働く。今回は最も簡単な場合である「2 体系」についてとりあげる。働く力には**内力**と**外力**の 2 種類がある。

内力とは、2 つの物体の間に働く力のことで、上の図では $\boldsymbol{F_{12}}$ や $\boldsymbol{F_{21}}$ である。Newton の 3 つの法則の一つに「**作用・反作用の法則**」があるが、これによると、物体 1 から物体 2 に力 $\boldsymbol{F}$(作用) が働くとき、物体 2 から物体 1 に力 $-\boldsymbol{F}$(反作用) が働く。そのため、上の図では $\boldsymbol{F_{21}} = -\boldsymbol{F_{12}}$ という関係式が成り立つ。

一方、**外力**とは、2 つの物体を 1 つのまとまり (系) として見たとき、系の外から、つまり A と B 以外から働く力のことである。上の図では $\boldsymbol{f_1}$ を物体 1 に働く外力のベクトル和 (合力)、$\boldsymbol{f_2}$ を物体 2 に働く外力のベクトル和とした。前の Section では、物体 P と物体 Q、そして力を伝達する**媒介者**的な存在である糸をまとめて 1 つの系として見たのである。すると、地球と物体 P、物体 Q の間に働く力である「重力」や、斜面と物体 Q の間に働く力である「摩擦力」は外力ということになる。

さて、今、物体 1 と物体 2 に一切の外力が働いていない場合を考える。このとき、2 つの物体の運動方程式は以下のようになる。(物体 1 の質量を m_1、物体 2 の質量を m_2 とした。)

$$m_1 \frac{d\boldsymbol{v_1}}{dt} = \boldsymbol{F_{12}} \tag{3.2}$$

$$m_2 \frac{d\boldsymbol{v_2}}{dt} = \boldsymbol{F_{21}} = -\boldsymbol{F_{12}} \tag{3.3}$$

よって、内力 (相互作用) による力積を考えると、

$$m_1\boldsymbol{v_1'} - m_1\boldsymbol{v_1} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F_{12}}\ dt$$

$$m_2\boldsymbol{v_2'} - m_2\boldsymbol{v_2} = \int_{t_1}^{t_2} -\boldsymbol{F_{12}}\ dt$$

となる。積分の部分、つまり力積の部分を消去して整理すると、次の式が成り立つ。

$$m_1\boldsymbol{v_1} + m_2\boldsymbol{v_2} = m_1\boldsymbol{v_1'} + m_2\boldsymbol{v_2'} \tag{3.4}$$

文字の任意性、すなわち、速度が具体的な値ではないということを考慮すると、式 (3.4) は、任意の時刻において $m_1\boldsymbol{v_1} + m_2\boldsymbol{v_2}$、つまり **2 つの物体の運動量の和は保存する**ということを意味している。

運動量保存則

2 つの物体 (系) に一切外力が働かないとき (内力しか働かないとき)、2 つの物体 (系) の運動量の和は常に一定である。

この運動量保存則については、Newton 力学が適用できない場合にも成り立つことがわかっている。この TEX ノートでいつか取り扱う「原子」分野編の「Compton 効果」で X 線光子と電子の衝突に対して運動量保存則の式を立てて分析をする。ここで気づいてほしいのが、運動量という量が、Newton 力学だけではなく、光子や電子といった微視的粒子の運動を表すのに使えるということである。運動量は極めて重要な物理量である。

さて、わざわざ力積を間に挟んで運動量保存則を導いたが、そんなことをする必要はない。式 (3.2) と式 (3.3) の辺々を加えると、

$$\frac{d}{dt}(m_1\boldsymbol{v_1} + m_2\boldsymbol{v_2}) = \boldsymbol{0} \tag{3.5}$$

となっており、これは $m_1\boldsymbol{v_1} + m_2\boldsymbol{v_2}$ の時間微分が $\boldsymbol{0}$、つまり、$m_1\boldsymbol{v_1} + m_2\boldsymbol{v_2}$ は時間によらず一定であることを示している。とにかく、重要なのは、外力が働かなければ、2 つの物体の運動量の和は保存するということである。

では、外力が働く時はどうなるか。

$$m_1\frac{d\boldsymbol{v_1}}{dt} = \boldsymbol{F_{12}} + \boldsymbol{f_1}$$
$$m_2\frac{d\boldsymbol{v_2}}{dt} = \boldsymbol{F_{21}} + \boldsymbol{f_2} = -\boldsymbol{F_{12}} + \boldsymbol{f_2}$$

2 つの物体の運動方程式はこのようであるから、辺々を加えると、

$$\frac{d}{dt}(m_1\boldsymbol{v_1} + m_2\boldsymbol{v_2}) = \boldsymbol{f_1} + \boldsymbol{f_2} \tag{3.6}$$

となる。

以上の内容をまとめると、**運動量**の重要な性質は次の 3 点である。

運動量の変化と力の関係

1. 運動量の和の変化は外力によって引き起こされる。
2. 2 体系の運動量に内力は影響を与えない。
3. 外力が一切働かない、あるいは、外力が働いているがそれらのベクトル和が打ち消しあう時は、2 体系の運動量は一定。

3.1.3　反発係数

2 体問題の例として典型的なのが、「2 物体の衝突」である。2 物体の衝突においては、極めて短い時間に極めて大きな撃力が働いて 2 物体の運動状態が変化する。外力が存在しないなら、当然運動量保存則が成り立つが、外力が存在したとしても、**衝突による撃力が外力より圧倒的に大きく、多くの衝突の場合、外力はないものとして扱える。**

ここで、2 つの物体の衝突を考える。それも最も単純な場合の、1 次元 (直線上) の衝突を考える。2 つの物体の質量を $m_1,\ m_2$ とし、それらの衝突前の速さを $v_1,\ v_2$ とする。衝突後の 2 つの物体の速さを $v_1',\ v_2'$ とする。衝突の際は、外力はないものとして扱えるので、運動量保存則が成立する。

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

衝突後の 2 物体の運動がどうなるかを知るには、v_1' と v_2' を明確にする必要がある。つまり、v_1' と v_2' を変数とする方程式を解く必要がある。しかし、変数が 2 つなのに方程式が 1 つなので、これでは解くことができない。そこで、もう 1 つの式を立てる。それは衝突前後の一方の物体を基準にした他方の物体の速度 (**相対速度**) に関する式である。

$$e = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} \tag{3.7}$$

このように衝突の前後が相対速度がどうなるかという 2 つ目の式を立てることで、v_1' と v_2' を決定することができる。

ここで重要なのが、「エネルギーは急に湧き出るものではない」という不変 (普遍) の Fact である。この場合の「急に」は「原因となる出来事がなく」という意味である。バスケットボールが弾むのには理由がある。小学生にわかりやすく説明しているサイト (`https://kids.gakken.co.jp/kagaku/110ban/text/1488.html`) には、バスケットボールが弾むのは床に当たって凹んだボールの表面のゴムの弾性力が 1 つの原因と書かれている。

固い物体が床と衝突してはね返る時を考える。高いところから落として跳ね返っても元の位置に戻ることはない。なぜなら、衝突の際に速度ベクトルの大きさが小さくなるからである。この時、速度の基準は静止している床に対する速度 (床に対する相対速度) である。そのため、前のページの式 (3.7) に着目すると、$-$(マイナス) がついているのは速度の向きが変わるからである。相対速度の大きさは必ず小さくなるはずなので、一般的に**反発係数** e は $0 \leq e \leq 1$ を満たす。

反発係数 e

2 つの物体の衝突前の速さを $v_1,\ v_2$、衝突後の 2 つの物体の速さを $v'_1,\ v'_2$ とすると、反発係数 e は相対速度を用いて次のように定義される。

$$e = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2}$$

また、e の値によって、衝突は以下の 3 つに分類される。

1. **弾性衝突**: $e = 1$ の衝突。衝突の前後における 2 物体の運動エネルギーの和は保存する(1)。
2. **非弾性衝突**: $0 < e < 1$ の衝突。
3. **完全非弾性衝突**: $e = 0$ の衝突。衝突後、2 物体は一体となって運動する。

では、運動量保存則と反発係数の式から衝突後の速度を求める。

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \tag{3.8}$$

$$e = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2}$$

反発係数 e の定義式を変形すると、

$$ev_1 - ev_2 = -v'_1 + v'_2 \tag{3.9}$$

となる。(3.8) と (3.9) の両辺に m_2 をかけて辺々引くと、

$$(m_1 - em_2)v_1 + (1+e)m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v'_1 \tag{3.10}$$

(3.8) と (3.9) の両辺に m_1 をかけて辺々足すと、

$$(1+e)m_1 v_1 + (m_2 - em_1)v_2 = (m_1 + m_2)v'_2 \tag{3.11}$$

となるから、

$$v'_1 = \frac{(m_1 - em_2)v_1 + (1+e)m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{3.12}$$

$$v'_2 = \frac{(1+e)m_1 v_1 + (m_2 - em_1)v_2}{m_1 + m_2} \tag{3.13}$$

と衝突後の 2 物体の速度が求まる。これより、衝突後の速度は、2 物体の衝突前の速度と反発係数の影響を受けることがわかる。

衝突は物体と物体の衝突だけではなく、物体と床の衝突もある。物体 2 を床とすると、床は $m_2 = \infty,\ v_2 = 0$ の物体と見なせばよい。式 (3.13) の両辺を m_2 でわると、次のようになる。

$$v'_1 = \frac{\{(m_1/m_2) - e\}v_1 + (1+e)v_2}{(m_1/m_2) + 1} \tag{3.14}$$

ここで、$m_2 \to \infty,\ v_2 \to 0$ の極限をとると、$v'_1 = -ev_1$ となることがわかる。

(1) $e = 1$ の時に、2 物体の運動エネルギーの和が保存することについては、重心系を導入してから議論する。

3.2　2 次元の衝突 (演習問題を通して考える)

2 次元の衝突、つまり一直線上の衝突でない衝突は、x 方向、y 方向に分けて考えればよい。今回は問題演習を通して、2 次元の衝突について考える。扱う問題は、難系の 99 ページの演習問題 24 である。(一部変更している箇所あり)

問題 5

以下の文章中の空欄を埋めよ。答えは文章中の記号 m, θ, α, h, e, v_0, g (重力加速度の大きさ) を用いて表せ。

水平面と角度 θ をなすなめらかな斜面がある。この斜面との反発係数 e、質量 m の小球がある。

(A) 図 3.1 のように、時刻 $t=0$ で小球を斜面から鉛直上方、高さ h にある点 P より、静かに落下させると、小球は、初めのうちは弾み、やがて斜面を滑り出す。小球と斜面の n 回目の衝突地点を Q_n、その時刻を t_n とする。いま、点 P より斜面に垂線を下ろし、斜面との交点を Q とする。点 Q と点 Q_n の距離を x_n とすると、x_n は t_n^2 に比例し、その比例定数 $\dfrac{x_n}{t_n^2} = \boxed{\text{ア}}$ で与えられる。また、小球が滑り出すまでに失うエネルギーは $\boxed{\text{イ}}$ である。

(B) 次に、図 3.2 のように、斜面の下方から速さ v_0、入射角 α で、小球を時刻 $t=0$ で斜面に衝突させる。小球と斜面の n 回目の衝突時刻を t_n とすると、$\dfrac{t_{n+2}-t_{n+1}}{t_{n+1}-t_n} = \boxed{\text{ウ}}$ と与えられる。また、小球が滑り出す時刻 t_∞ は $\boxed{\text{エ}}$ となり、小球の速度の斜面方向の成分が 0 となる時刻は $\boxed{\text{オ}}$ となる。$\boxed{\text{エ}}$ と $\boxed{\text{オ}}$ の結果から、小球が弾みながら上がった後、さらに滑り上がるためには、不等式 $\tan\alpha > \boxed{\text{カ}}$ が成立する必要がある。

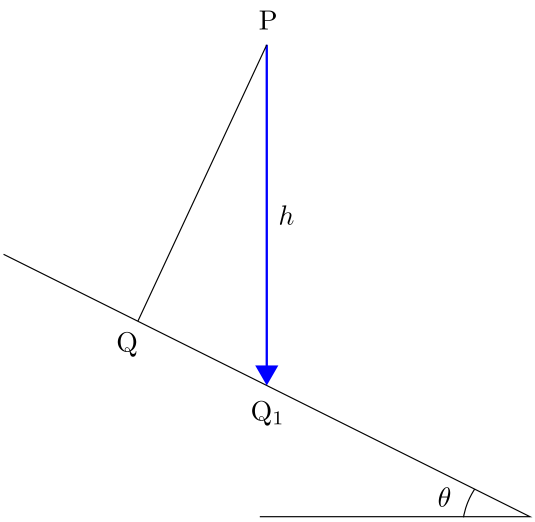


図 3.1: (A)

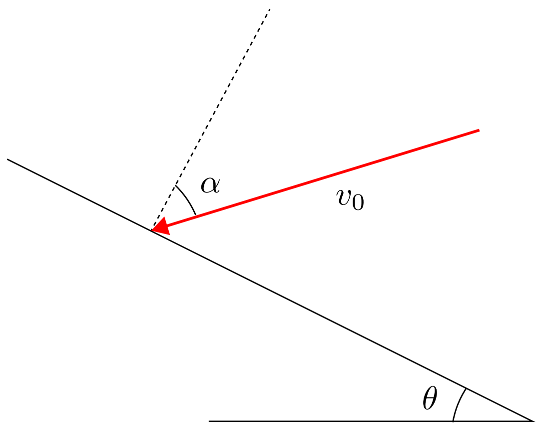


図 3.2: (B)

(A) について

問題文を最後まで読んでいると、図 3.3 のように xy 座標系を導入すればスッキリしそうである。特に、Q を原点とすると、x_n がわかりやすい。しかし、重力加速度には注意しなければならない。下図のように座標系を入れると、重力加速度 (ベクトル)$\boldsymbol{g}$ の x 方向成分は $g\sin\theta$ で、y 方向成分は $-g\cos\theta$ となる。

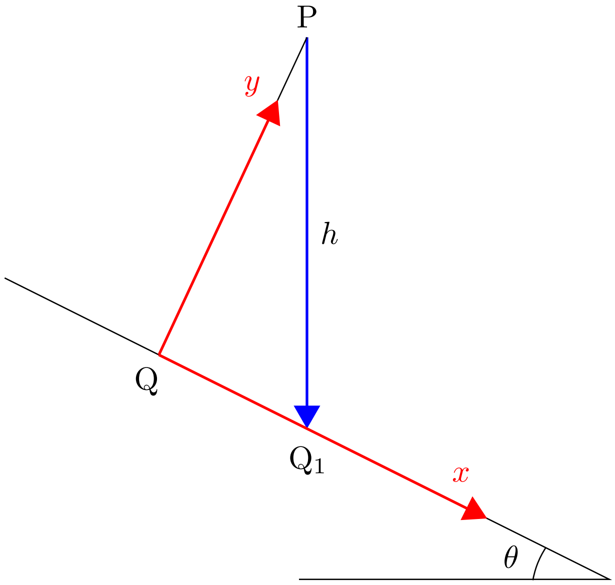


図 3.3: xy 座標系をどのように導入する?

$\boxed{\quad ア \quad}$ について

斜面に垂直なのは y 方向なので、衝突の時に y 方向成分は変化する。しかし、**斜面と平行な方向である x 方向の速度は変化しない。**これより、x 方向には加速度 $g\sin\theta$ の等加速度運動をすることがわかる。そのため、等加速度運動の式を使って、

$$\frac{x_n}{t_n^2} = \frac{1}{2}g\sin\theta$$

と求められる。 □

$\boxed{\quad イ \quad}$ について

- 滑り出すということは、y 方向の速度を持たないということである。つまり、y 方向の運動エネルギーを持たないということである。$t=0$ における y 方向の位置エネルギー(2) は $m(g\cos\theta)(h\cos\theta) = mgh\cos^2\theta$ である。

- y 方向については P から Q_1 の間に、この $mgh\cos^2\theta$ が徐々に運動エネルギーに変わる。点 Q_1 で衝突する際、速さが e 倍になり運動エネルギーも e^2 倍に減少する。その後、衝突を繰り返す度に、y 方向の速さがどんどん小さくなる。したがって、最終的に $m(g\cos\theta)(h\cos\theta) = mgh\cos^2\theta$ のエネルギーがなくなる。

(2) 重力加速度の y 方向成分は $-g\cos\theta$ であることと、位置エネルギーの基準点を Q とすると、P と Q の y 座標の差 $y_P - y_Q$ は図より $h\cos\theta$ である。この 2 点より位置エネルギーは mgh ではないことがわかる。十分注意しなければならない。

(B) について
今度は図 3.4 のように座標系を設定すればスッキリしそうである。

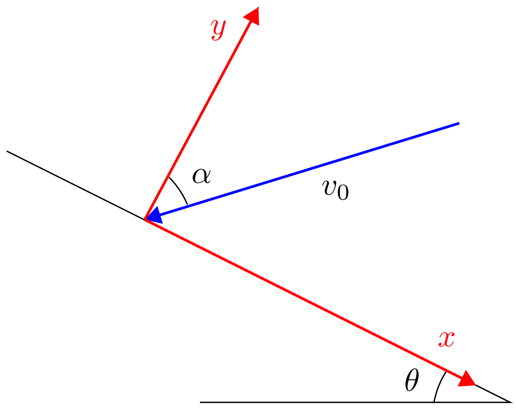


図 3.4: xy 座標系をどのように導入する? (2)

$\boxed{\text{ウ}}$ について
初速度は、図 3.4 のような座標系では $\boldsymbol{v} = (-v_0 \sin\alpha,\ -v_0\cos\alpha)$ とかける。衝突により、y 方向の成分の大きさは e 倍になるから、y 方向の速度は $ev_0\cos\alpha$ となる。y 方向の変位が初めて極大になるまでに要する時間 Δt_1 は、

$$(ev_0\cos\alpha) - (g\cos\theta)\Delta t_1 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \Delta t_1 = \frac{ev_0\cos\alpha}{g\cos\theta}$$

である。これより、

$$t_2 - t_1 = 2\Delta t_1 = \frac{2ev_0\cos\alpha}{g\cos\theta}$$

となる。同様に $t_3 - t_2,\ t_4 - t_3,\ \cdots$ を求めようとすると、放物運動の初速 (y 成分) が衝突のたびに e 倍になることから、$t_{n+1} - t_n$ は n が大きくなるにつれて e 倍になる。よって、

$$\frac{t_{n+2} - t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n} = e$$

$\boxed{\text{エ}}$ について
上で求めた漸化式と問題文の条件から $t_1 = 0$ となることを使って、t_n を求める。

$$\begin{aligned} t_n = t_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(t_{k+1} - t_k) &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2v_0\cos\alpha}{g\cos\theta}e^k \\ &= \frac{2v_0\cos\alpha}{g\cos\theta}\cdot\frac{e(1-e^{n-1})}{1-e} \end{aligned}$$

とかける。小球が滑り出すのは衝突後の速度 (y 成分) が 0 となる時である。n 回目の衝突後の小球の速度の y 成分は $e^n v_0\cos\alpha$ なので、$n\to\infty$ のとき、衝突後の速度 (y 成分) が 0 となる。ゆえに、

$$t_\infty = \lim_{n\to\infty} t_n = \frac{2v_0\cos\alpha}{g\cos\theta}\cdot\frac{e}{1-e}$$

$\boxed{\text{オ}}$ について
衝突の際、斜面と平行な方向の速度成分は変化しないから、小球の速度の x 方向成分が 0 となる時刻を T とすると、

$$-v_0\sin\alpha + (g\sin\theta)T = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad T = \frac{v_0\sin\alpha}{g\sin\theta}$$

$\boxed{\text{カ}}$ について

衝突後の小球の速度の y 成分が 0 になったとき、小球の速度の x 成分が負であるときに限り、弾みながら上がった後に、さらに滑り上がる。重力加速度の x 成分は正なので、小球の速度の x 成分は単調に 0 に近づく。そのため、$t = t_\infty$ における小球の速度の x 方向成分が負でないと滑り上がることはない。そうなるには、$t_\infty < T$ であればよい。つまり、

$$\frac{2v_0 \cos\alpha}{g \cos\theta} \cdot \frac{e}{1-e} < \frac{v_0 \sin\alpha}{g \sin\theta}$$

であればよい。今回は $\tan\alpha$ に関する条件を考えるので[3]、

$$\tan\alpha > \frac{2e\tan\theta}{1-e}$$

□

[3] $\theta,\ \alpha$ はともに鋭角である。

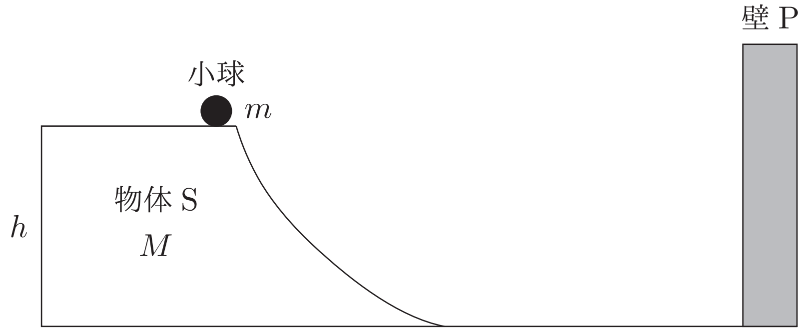
3.3　演習問題 (運動量保存則を使って問題を解く)

2019 年夏の改訂で、運動量保存則とエネルギー保存則を組み合わせて解く問題を新たに加えることにしました。以下の問題は『2016 物理重要問題集』の 39 番の問題を一部変更したものです。

問題 6

図に示すような断面をもつ質量 M の物体 S が滑らかな基準水平面上に静止している。ここで上面は底面から高さ h の水平面であり、右の曲面は滑らかなスロープである。さらに物体 S の上面に質量 $m(< M)$ の小球がはじめ静止して置かれている。また、物体 S のスロープから離れた位置には基準水平面に垂直に固定された壁 P がある。

空気抵抗は無視できるとし、重力加速度の大きさは g とする。また、図の左向きを正の向きとする。以下の問いに答えよ。



(1) 小球をスロープに沿って静かに落下させたら、物体 S も動き始めた。小球が S から離れた直後の物体 S と小球のそれぞれの速度 V_0, v_0 を求めよ。

(2) 小球が壁と反発係数 e で衝突した場合、衝突直後の小球の物体 S に対する相対速度を e, m, M, g, h を用いて表せ。

(3) 衝突後、小球が物体 S に追いつくためには、反発係数 e はどのような条件を満たす必要があるか答えよ。

以下では、反発係数 e が (3) の条件を満たしているとする。壁との衝突後小球は物体 S に追いつき、スロープ上を上昇し水平面からの高さ ℓ まで達して上昇がとまった。その時の物体の速さは V であった。

(4) 小球の上昇がやんだ瞬間と小球が物体 S に追いつく直前では運動量と力学的エネルギーが保存する。この 2 つの時点での運動量と力学的エネルギーの保存の関係を式で表せ。ここまでに登場していない文字を使用して良いが、その際はその文字が何を表すかを記すこと。

(5) V と ℓ を求めよ。

(1) 小球がスロープを滑り降りている間、力学的エネルギーと運動量が保存する。曲線的な斜面は微小な直線的な斜面の組み合わせの結合であるとみなせる。そのため、微小な直線部分では次の 3 つの式が成立する。

$$\begin{cases} ma_x &= N\sin\theta \\ ma_y &= mg - N\cos\theta \\ MA &= -N\sin\theta \end{cases}$$

加速度が速度の微分であることから、左右方向については次の式が成立する。

$$\frac{d}{dt}(mv_x + MV) = 0$$

これは左右方向の運動量保存則を表す式である。垂直抗力は経路に垂直であることから仕事はしない。重力は保存力である。空気抵抗などはないので、力学的エネルギー保存則も成立する。

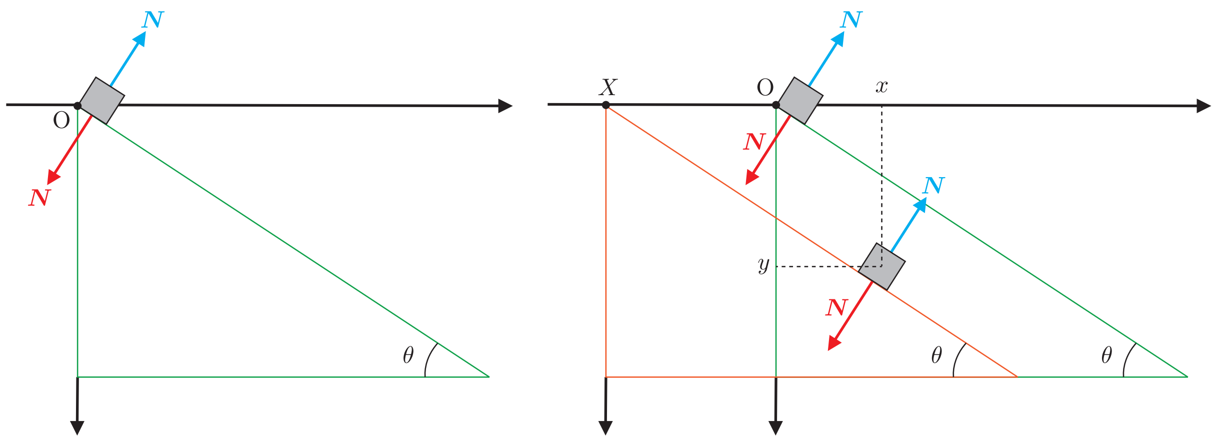


図 3.5: 曲線的な斜面は直線的な斜面の組み合わせの結合である

ということで、力学的エネルギーと運動量が保存するという関係式を立てる。

$$\text{(力学的エネルギー保存則)} \qquad mgh = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + \frac{1}{2}M{V_0}^2 \tag{3.15}$$

$$\text{(運動量保存則)} \qquad 0 = mv_0 + MV_0 \tag{3.16}$$

式 (3.16) より $V_0 = -(m/M)v_0$ なので、式 (3.15) より、

$$mgh = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + \frac{1}{2}M\left(-\frac{m}{M}v_0\right)^2 \iff mgh = \frac{1}{2}m{v_0}^2\left(1 + \frac{m}{M}\right)$$
$$\iff {v_0}^2 = 2gh \cdot \frac{M}{M+m}$$

となる。左向きが正であることに注意すると、$V_0 > 0,\ v_0 < 0$ である。従って、$V_0,\ v_0$ は以下のようになる。

$$V_0 = \sqrt{2gh \cdot \frac{m^2}{M(M+m)}} \quad v_0 = -\sqrt{2gh \cdot \frac{M}{M+m}}$$

(2) 小球が S を離れてから壁で衝突するまでは、小球と物体 S の速度は一定。そのため、物体 S の速度は上で求めた V_0 に等しい。小球が物体で衝突した後の速度は $-ev_0$ である。よって、相対速度は

$$-ev_0 - V_0 = \left(-e + \frac{m}{M}\right)v_0 = \left(e - \frac{m}{M}\right)\sqrt{2gh \cdot \frac{M}{M+m}}$$

と求められる。

(3) 小球が物体 S に追いつくためには、小球が左方向に進む速さが物体 S が左方向に進む速さより速いことが必要である。これは (2) で求めた相対速度が正であることと等価。従って、$e - m/M > 0$ が成立することが必要である。また、反発係数の性質から $e \leqq 1$ である。以上より、求める e の範囲は

$$\frac{m}{M} < e \leqq 1$$

である。

(4) (1) と同様に力学的エネルギーと運動量が保存することを式に表す。

$$\text{(力学的エネルギー保存則)} \qquad \frac{1}{2}m(-ev_0)^2 + \frac{1}{2}M{V_0}^2 = mg\ell + \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}MV^2 \tag{3.17}$$

$$\text{(運動量保存則)} \qquad m(-ev_0) + MV_0 = mV + MV \tag{3.18}$$

式 (3.18) と V_0 が $V_0 = -(m/M)v_0$ であることから、

$$V = \frac{m(-ev_0) + MV_0}{M+m} = -\frac{m}{M+m}v_0(1+e) = \frac{m}{M+m}(1+e)\sqrt{2gh \cdot \frac{M}{M+m}}$$

さらに、式 (3.17) と $V_0 = -(m/M)v_0$ より、

$$\begin{aligned}
mg\ell &= \frac{1}{2}m{v_0}^2\left(e^2 + \frac{m}{M}\right) - \frac{1}{2}(M+m)\left\{-\frac{m}{M+m}v_0(1+e)\right\}^2 \\
&= \frac{1}{2}m{v_0}^2\left\{e^2 + \frac{m}{M} - \frac{m}{M+m}(1+e)^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}m\left(2gh \cdot \frac{M}{M+m}\right)\left\{e^2 + \frac{m}{M} - \frac{m}{M+m}(1+e)^2\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \ell &= h \cdot \frac{M}{M+m}\left\{\frac{M(M+m)e^2 + m(M+m) - mM(1+e)^2}{M+m}\right\} \\
&= h \cdot \frac{M}{M+m}\frac{M^2e^2 + m^2 - 2mMe}{M(M+m)} \\
&= \left(\frac{eM - m}{M+m}\right)^2 h
\end{aligned}$$

3.4 行列に関する基本事項 (発展)

現在の高校数学では行列を扱わないので、section の名前に「発展」とつけた。旧課程では行列の簡単な計算を取り扱っていたそうだ。特に連立方程式を解く際は、行列を使うと、かなり楽に解くことができる。この後の「2 体問題」の Section で、早速行列を利用して計算したいので、ここで、行列の基本的なことを導入する。この Section の内容は、東京大学の理系 1 年生が春学期の最初に習う「数理科学基礎」のテキスト(4) の内容を参考にしながら、今後の話で必要だと思われる内容のみ取り上げる。

3.4.1 行列とは何か

まず、押さえておきたいのが、高校の教科書では、ベクトルの成分を (a, b) のように書くが、大学では、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

のように書くことも<u>も</u>ある。状況に応じて使い分ける。書くこと「も」あると記したが、大学の線形代数学で登場する「ベクトル」は多くの場合、式 (3.19) のような**列ベクトル**のことをいう。この section では、ベクトルといえば、上記のような列ベクトルのことを表すことにする。

さて、平面ベクトル $\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ の係数 $a,\ b,\ c,\ d$ を抜き出して、以下のように書いたものを考える。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

このように実数(5) を縦横に並べてカッコで括ったものを**行列**(6) という。

さらに、行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

と約束する。これを**行列とベクトルの積**という。

例 3.1

(行列とベクトルの積の計算)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times(-1)+(-1)\times 3 \\ 1\times(-1)+0\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

---

(4) 私が初めてこの行列に関する section を作成した時は、大学内でのみ配布されていた補助資料を利用した。その補助資料が書籍化されたものが、付録編 194 ページの『大学数学ことはじめ』です。『大学数学ことはじめ』の第 1 部の第 8 章と第 14 章§4 の内容をもとに作成した。

(5)「複素数」でも良いが、この TEX ノートでは、虚数の場合を使わないので、実数と書いた。また、この次の subsection で書くが、一次変換を二次元平面上の点から点へと移す対応関係として、この TEX ノートでは捉えることにする都合で、「複素数」とは書かなかった。

(6) この TEX ノートでは「行列」と記したら、4 個の数が縦に 2 個、横に 2 個並んだ式 (3.20) のようなものを指すことにする。大学で習う数学で登場する「行列」は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と縦に m 個、横に n 個の計 mn 個の数が並んだものをさす。

3.4.2　一次変換と行列

平面上の点 (x, y) に対して、点 $(ax+by, cx+dy)$ を対応させること

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

を (平面上の) **一次変換**という。ここで、式 (3.21) より、一次変換は次のように書くこともできる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

これより、一次変換とは、ベクトルに左からある行列をかける操作でもあるといえる。特に、行列 A を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ としたとき、ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、式 (3.23) のように対応させることを**行列 A の定める一次変換**という。

3.4.3　一次変換の行列表示

前の subsection で書いた通り、一次変換とは、ベクトルに行列を左から作用させることである。行列 A を左からかける一次変換 (行列 A の定める一次変換) を F_A とする。すると、ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して、$F_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と書ける。

線型性

平面上の一次変換 F と、ベクトル $\boldsymbol{v_1}$ と $\boldsymbol{v_2}$、および実数 k に対して、次の 2 つの式が成り立つとき、F は**線型性**を持つといい、一次変換 F は**線型変換**であるという。

$$F(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) = F(\boldsymbol{v_1}) + F(\boldsymbol{v_2}) \tag{3.24}$$

$$F(\lambda \boldsymbol{v_1}) = \lambda \cdot F(\boldsymbol{v_1}) \tag{3.25}$$

命題 1 (線形変換の行列表示) (7) (8)

行列の定める平面の一次変換は線型性をもつ。つまり、その行列を A としたとき、以下の 2 つの式が成立する。

$$A(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) = A(\boldsymbol{v_1}) + A(\boldsymbol{v_2}) \tag{3.26}$$

$$A(\lambda \boldsymbol{v_1}) = \lambda \cdot A(\boldsymbol{v_1}) \tag{3.27}$$

(7) 命題 2 の証明を修正する時に、この命題を TEX ノートに追加した。(2019 年 8 月 16 日)

(8) 行列 A とベクトル $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ を以下のようにおいて、あとは頑張って計算することで示すことができる。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

命題 **2** (線形変換の行列表示) [9]

平面上の一次変換 F が線型性を持つならば、変換 F はある行列 A の定める一次変換に一致する。この行列 A は、

$$A = [F(\boldsymbol{e_1})\ F(\boldsymbol{e_2})] \tag{3.28}$$

と表され、変換 F の**表現行列**という。ただし、$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

証明[10]

$F(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ と行列 A を用いてかけたとする。ここで、$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と表すことにすると、

$$F(\boldsymbol{e_1}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad F(\boldsymbol{e_2}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

となる。そのため、$F(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ と書けるなら、

$$A = [F(\boldsymbol{e_1})\ F(\boldsymbol{e_2})]$$

である。そこで、(逆に) 行列 A を上記のように定めると、任意のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は、$\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2}$ と書けるので、F の線型性より、

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{v}) = F(x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2}) &= xF(\boldsymbol{e_1}) + yF(\boldsymbol{e_2}) \\ &= x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = A\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

となり、任意の $\boldsymbol{v}$ に対して、$F(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ となる。 □

命題 **3** (線形変換の合成)

線型変換を組み合わせて得られる変換も線型性を持つことが知られている (証明は省略)。つまり、

1. ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し、行列 B で定まる変換 F_1 を行い、ベクトル $B\boldsymbol{v}$ に変換。
2. この $B\boldsymbol{v}$ に、行列 A で定まる変換 F_2 を行い、ベクトル $A(B\boldsymbol{v})$ に変換

の 2 つの変換をまとめて、一気にベクトル $\boldsymbol{v}$ を $A(B\boldsymbol{v})$ に変換する一次変換 G を考えたとき、この G が線型性を持つということが知られている。

[9] この命題の証明は『大学数学ことはじめ』の 84 ページの説明をもとに当初は作成した。しかし、私はこの説明は分かりづらいと考えたので、『線型代数学』(足助太郎・東京大学出版会) の 100 ページに記されている 定理 3.5.4 の証明をもとにわかりやすいようにした。

[10] この証明は $\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ という特別な場合を考えて、行列 A がどのような条件を満たせば良いかをまず考える。つまり、必要性から攻めていく。その後、導いた条件は実は任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対しても正しいことを確認する (十分性の check) という論法をこの証明では採用している。

3.4.4　行列の積

前のページの最後で書いた通り、行列 $A,\ B$ とベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、

$$\boldsymbol{v} \longrightarrow A(B\boldsymbol{v}) \tag{3.29}$$

は線型性を持つ。したがって、この変換の行列表示を考える際は、前のページの $\boxed{\text{命題 2}}$ より、この変換の行列表示は、$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がどう移るかを考えれば良い。$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br \\ cp+dr \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aq+bs \\ cq+ds \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

となるので、式 (3.29) の線型変換の行列表示は、$\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$ となる。

ここで、行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と行列 $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ の積 AB を

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

と約束する。

例 3.2

(行列と行列の積の計算)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times1+2\times2 & 1\times0+2\times2 \\ 0\times1+2\times2 & 0\times0+2\times2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

3.4.5　逆行列

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と行列 $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ の積 AB が

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たすとする。このとき、右辺の行列を**単位行列**といい、E と表す。2 つの行列 $A,\ B$ に対して、

$$AB = BA = E \tag{3.33}$$

が成立するとき、B を A の**逆行列**といい、A^{-1} と表す。ここで逆行列について次の命題が成立する。

<u>命題 4 (2×2 行列の逆行列)</u> [11]

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、$AB = BA = E$ を満たす B、すなわち A の逆行列 A^{-1} は、

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

と表される。このとき、$ad - bc$ を行列 A の**行列式**といい、$\det A$ と表す。行列 A が逆行列を持つには、$\det A \neq 0$ であることが必要である。

例 3.3

(逆行列を求める) $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求める。行列式 $\det A$ を求めると、

$$\det A = 5 \times 2 - 6 \times (-3) = 28$$

となるから、逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{14} & \dfrac{3}{28} \\ -\dfrac{3}{14} & \dfrac{5}{28} \end{pmatrix}$$

である。

3.4.6 行列と連立一次方程式

連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$$

を、ある点 $\boldsymbol{v} = (x, y)$ に対して、行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を左から作用させると、点 (m, n) にうつるとみなせば、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

と、連立方程式を行列を用いて書くことができる。

これは $A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ と書けるので、A の逆行列を左からかけると、

[11] この命題の証明は、

$$\begin{cases} ap + br = 1 \\ aq + bs = 0 \\ cp + dr = 0 \\ cq + ds = 1 \end{cases}$$

を満たす p, q, r, s を求めて、行列の形で表すと、式 (3.34) のようになることを確認すれば良い。

$$\begin{aligned}
\underbrace{A^{-1}A}_{E}\boldsymbol{v} &= A^{-1}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A^{-1}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \\
\therefore \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A^{-1}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

となる。このように逆行列をベクトルに作用させることで、連立方程式を解くことができる。

さて、この計算過程から単位行列 E に関する重要な性質がわかった。最後に、その性質を書いて、行列の説明は終わりにしよう。

単位行列の性質

単位行列 E と任意のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、$E\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ である。
つまり、E を左からかけてもベクトルは変化しない。

例 3.4

(逆行列を用いて連立方程式を解く)

$$\begin{cases} 5x - 3y = 7 \\ 6x + 2y = 5 \end{cases}$$

この連立方程式を行列を使って表すと、$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ として、

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

とかける。よって、A の逆行列 A^{-1} を使って、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} &= \frac{1}{28}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{28}\begin{pmatrix} 29 \\ -17 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3.5　2 体問題

この section では複数の物体からなる系の性質を解析する方法を記す。その中でも、特に 2 つの物体からなる系の性質を調べる「**2 体問題**」について記す。2 体問題の解析手法は、太陽系の惑星の運動や惑星どうしの相互作用など天体の運動を理解する基礎にもなっている。大学入試問題を解く上ではマスターしなくても大丈夫かもしれないが、理解しないのはとても損であるといえる。

3.5.1　重心運動方程式

2 体問題を解く際は、重心運動と相対運動に分離して考える。まず、n 個の物体の**重心**の位置 $\boldsymbol{r_G}$ を以下のように定義する。

重心の位置

$$\boldsymbol{r_G} = \frac{m_1\boldsymbol{r_1} + m_2\boldsymbol{r_2} + \cdots + m_n\boldsymbol{r_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \tag{3.37}$$

また、**重心速度** $\boldsymbol{v_G}$ は上の重心の位置の微分により定義される。

重心速度

$$\boldsymbol{v_G} = \frac{d\boldsymbol{r_G}}{dt} = \frac{m_1\boldsymbol{v_1} + m_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + m_n\boldsymbol{v_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \tag{3.38}$$

ここで、$M = \sum_{k=1}^{n} m_k = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ とすると、上の式より、

$$M\boldsymbol{v_G} = \sum_{k=1}^{n} m_k\boldsymbol{v_k} = m_1\boldsymbol{v_1} + m_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + m_n\boldsymbol{v_n} \tag{3.39}$$

となり、n 個の物体の全運動量が全質量と重心速度の積であることがわかる。

さらに、n 個の物体の運動方程式の和を考える。個々の物体に働く外力を $\boldsymbol{F_k}$ とすると、

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\boldsymbol{v_k}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F_k} \tag{3.40}$$

となる(12)。これは上の式 (3.39) より、

$$M\frac{d\boldsymbol{v_G}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F_k} \tag{3.41}$$

という式になり、**n 個の物体の重心の運動を考える時は、あたかも重心に全質量が集まり、また、n 個の物体に働く外力の総和が、重心一点に集中していると考えた仮想的な状況を考えれば良いことがわかる**。つ

(12) 個々の物体に働く外力は、系の外から働く力と、他の物体との間に働く内力に分けられるが、そのため、物体 i が物体 j から受ける内力を $\boldsymbol{F_{ij}}$($i = j$ のとき $\boldsymbol{F_{ij}} = \boldsymbol{0}$ とする。) と書くと、式 (3.28) は

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\boldsymbol{v_k}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F_k} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F_{kj}}\right)$$

と書くのが厳密には正しい。$\boldsymbol{F_{ij}} = -\boldsymbol{F_{ji}}$(作用・反作用の法則) を考えると、右辺第 2 項は 0 になるので、式 (3.40) で十分である。ここで重要なのは、式 (3.40) の $\boldsymbol{F_k}$ は系の外から働く外力のことであり、物体間の内力は含まれないということである。

まり、**複雑なように見えるが、重心の運動を考える際は質量 M の物体のみの運動を考えるだけで十分**なのである。

この性質は非常に有益な性質である。大きさを持つ物体を質点の集まりとみなしたとき、第 7 章で取り上げるような「各質点間の位置関係が変化しない」とみなせる状況下ならば、重心の運動を考えるだけで良いことと関係している。小球の運動を考える際に、質点でもないのに、普通に運動方程式を立てて解いたのは、重心の運動を追いかけるだけなら、質点の運動と同等であるということを前提に考えていたからである。

ここまでは n 個の物体について考えたが、ここからは $n = 2$ の時についてのみ考える。入試でも $n = 2$ の時が重要であるのは確かだが、それ以上に $n = 2$ の場合は重要視される。その理由は、 $n = 1, 2$ のときだけは運動を数学的に解くことが可能だからである。n が 3 以上の時は、特別な制約がない限り、数学的に解くのは不可能であることがポアンカレによって示されている。現在ではコンピュータの進歩により、n が十分大きくても、制約をかければ、n 個の物体の運動がどのようになるか推測できる。(第 3 章の残りは $n = 2$ の時について考える。)

重心の位置と重心速度 (2 物体)

$$\boldsymbol{r_G} = \frac{m_1\boldsymbol{r_1} + m_2\boldsymbol{r_2}}{m_1 + m_2} \tag{3.42}$$

$$\boldsymbol{v_G} = \frac{m_1\boldsymbol{v_1} + m_2\boldsymbol{v_2}}{m_1 + m_2} \tag{3.43}$$

前のページと同様に $M = m_1 + m_2$ とすると、$M\boldsymbol{v_G} = m_1\boldsymbol{v_1} + m_2\boldsymbol{v_2}$ であり、

$$M\frac{d\boldsymbol{v_G}}{dt} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} \tag{3.44}$$

となる。そのため、2 物体に一切外力が働けれぱ、重心速度は一定であるといえる。このことより、2 体問題を考える上でとても大切な 3 つのことがわかる。

重心と運動量の関係

1. 2 物体に常に外力が働かない状況下では、$t = 0$ の時、重心が静止していれば、2 物体の運動によらず、重心は不動。
2. 重心が静止している、または、重心が等速運動をしている時、2 物体の運動量の和は 0 である。
3. 重心系で 2 物体の運動を見る時、2 物体の運動量の和は 0 である。

(**重心系**とは、重心が常に静止している座標系、つまり、重心を原点とする座標系である。)

さて、重心系で運動を見たときどうなるか考える。重心系における 2 物体の速度を $\boldsymbol{V_1}, \boldsymbol{V_2}$ とすると、上に記した通り、

$$m_1\boldsymbol{V_1} + m_2\boldsymbol{V_2} = \boldsymbol{0} \tag{3.45}$$

となる。そのため、

$$\boldsymbol{V_2} = -\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{V_1} \tag{3.46}$$

となる。これより、$\boldsymbol{V_1}$ と $\boldsymbol{V_2}$ は向きが反対のベクトルであることがわかるから、**重心系で 2 物体の運動を見ると、同一直線上を互いに逆向きに運動することがわかる。**

3.5.2　2 体系の相対運動方程式

2 物体の運動方程式の運動方程式は、

$$m_1 \frac{d\boldsymbol{v_1}}{dt} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{f_{12}} \tag{3.47}$$

$$m_2 \frac{d\boldsymbol{v_2}}{dt} = \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{f_{21}} \tag{3.48}$$

である。$\boldsymbol{F_1}$ と $\boldsymbol{F_2}$ は 2 物体に働く外力で、$\boldsymbol{f_{12}}$ と $\boldsymbol{f_{21}}$ は 2 つの物体の間に働く相互作用を表す項である[13]。この 2 式の和をとることで重心の運動方程式がかける。

$$\frac{d}{dt}(m_1 \boldsymbol{v_1} + m_2 \boldsymbol{v_2}) = M \frac{d\boldsymbol{V_G}}{dt} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2}$$

ここで、2 物体の位置 $\boldsymbol{r_1}$ と $\boldsymbol{r_2}$ に対して、$\boldsymbol{r_R} = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}$ (相対位置) により定められる座標を考える。つまり、**物体 1 から見た物体 2 の相対運動**を考える。

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r_R} = \frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r_2} - \frac{d}{dt^2}\boldsymbol{r_1} = \frac{1}{m_2}(\boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{f_{21}}) - \frac{1}{m_1}(\boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{f_{12}})$$

作用・反作用の法則より、$\boldsymbol{f_{12}} = -\boldsymbol{f_{21}}$ が成立することを使うと、

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r_R} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\boldsymbol{f_{21}} + \frac{m_1\boldsymbol{F_2} - m_2\boldsymbol{F_1}}{m_1 m_2} \tag{3.49}$$

となる。ここで、$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ となるように、μ を定める。つまり、

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{3.50}$$

と定める。この μ は質量と同じ次元をもつ値であることがわかる。この μ を**換算質量**という。μ を使うと、式 (3.49) は次のように書き直せる。

$$\mu \frac{d^2\boldsymbol{r_R}}{dt^2} = \boldsymbol{f_{21}} + \frac{m_1\boldsymbol{F_2} - m_2\boldsymbol{F_1}}{m_1 + m_2} \tag{3.51}$$

この式より、相対運動は、重心運動と異なり、内力と外力の両方に依存することがわかる。

2 体系の重心運動と相対運動

$$\text{(重心運動)} \qquad M\frac{d^2\boldsymbol{r_G}}{dt^2} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2}$$

$$\text{(相対運動)} \qquad \mu\frac{d^2\boldsymbol{r_R}}{dt^2} = \boldsymbol{f_{21}} + \frac{m_1\boldsymbol{F_2} - m_2\boldsymbol{F_1}}{m_1 + m_2}$$

[13] $\boldsymbol{f_{12}}$ は物体 1 が物体 2 から受ける力を表す。69 ページの脚注 (12) と同様の記法を用いた。

3.5.3　重心運動と相対運動に分離する

2 物体の位置 $\boldsymbol{r_1}$ と $\boldsymbol{r_2}$ は以下のように定義されるが、これから逆に、$\boldsymbol{r_1}$ と $\boldsymbol{r_2}$ を重心座標 $\boldsymbol{r_G}$ と相対座標 $\boldsymbol{r_R}$ で表すことができる。

- 重心座標 $\boldsymbol{r_G} = \dfrac{m_1\boldsymbol{r_1} + m_2\boldsymbol{r_2}}{m_1 + m_2}$
- 相対座標 $\boldsymbol{r_R} = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}$

重心座標と相対座標の式を行列を用いて書くと、

$$\begin{pmatrix} r_G \\ r_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{m_1}{m_1+m_2} & \dfrac{m_2}{m_1+m_2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

となる。2×2 行列の行列式 det は 1 なので、2×2 行列に逆行列が存在し、

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{m_2}{m_1+m_2} \\ 1 & \dfrac{m_1}{m_1+m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_G \\ r_R \end{pmatrix}$$

と求められる。

$$\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{r_G} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r_R} \tag{3.53}$$

$$\boldsymbol{r_2} = \boldsymbol{r_G} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r_R} \tag{3.54}$$

連立方程式や行列を使えば、$\boldsymbol{r_1}$ と $\boldsymbol{r_2}$ を重心座標と相対座標で表すことができる。このことを図形的に表すと、図 3.6 のようになる。重心は 2 点 $\boldsymbol{r_1}$ と $\boldsymbol{r_2}$ を結ぶ線分を $m_2 : m_1$ に内分する点である。

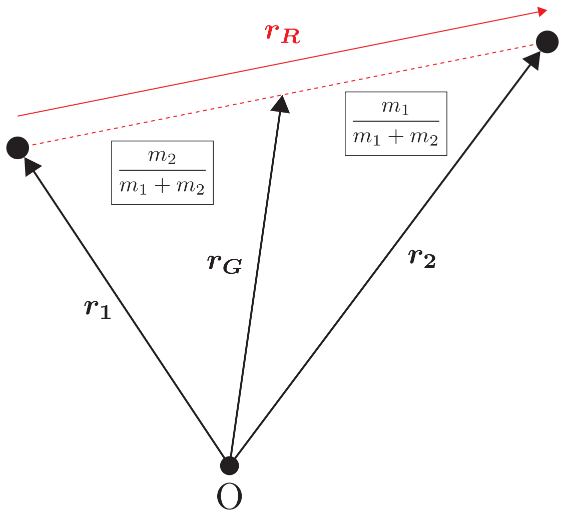


図 3.6: 重心座標と相対座標の図形的関係

両辺を時間 t で微分することで、$\boldsymbol{v_1}$ と $\boldsymbol{v_2}$ を重心速度 $\boldsymbol{v_G}$ と相対速度 $\boldsymbol{v_R}$ を使って表せることができる。

$$\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{v_G} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v_R} \tag{3.55}$$

$$\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{v_G} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{v_R} \tag{3.56}$$

ここで、2 物体の運動エネルギーについて考える。1 次元なら、$K = \dfrac{1}{2}mv^2$ の形でかける物体の運動エネルギーも 3 次元になると、$x,\ y,\ z$ の 3 方向の運動エネルギーの和

$$K = \frac{1}{2}m\left\{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2\right\}$$

となる。これは、速度ベクトル $\boldsymbol{v} = (v_x,\ v_y,\ v_z)$ を用いると、

$$K = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 = \frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})$$

とかける。よって、2 物体の運動エネルギーの和は

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m_1(\boldsymbol{v_1}\cdot\boldsymbol{v_1}) + \frac{1}{2}m_2(\boldsymbol{v_2}\cdot\boldsymbol{v_2}) \\ &= \frac{1}{2}m_1\left(\boldsymbol{v_G} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v_R}\right)\cdot\left(\boldsymbol{v_G} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v_R}\right) \\ &\qquad + \frac{1}{2}m_2\left(\boldsymbol{v_G} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{v_R}\right)\cdot\left(\boldsymbol{v_G} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{v_R}\right) \\ &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)|\boldsymbol{v_G}|^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}|\boldsymbol{v_R}|^2 \end{aligned} \tag{3.57}$$

とかけて、運動エネルギーも重心速度と相対速度で書けることがわかった。

運動エネルギーの分解

- 重心運動エネルギー：　$K_G = \dfrac{1}{2}(m_1+m_2)|\boldsymbol{v_G}|^2$
- 相対運動エネルギー：　$K_R = \dfrac{1}{2}\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}|\boldsymbol{v_R}|^2 = \dfrac{1}{2}\mu|\boldsymbol{v_R}|^2$

3.5.4　2 物体の衝突とエネルギー変化

反発係数の式は、相対速度を使って書かれている。そのため、2 物体の衝突の解析では、相対速度や相対運動エネルギーが役に立つと予想できる。

反発係数 e

2 つの物体の衝突前の速さを $v_1,\ v_2$、衝突後の 2 つの物体の速さを $v_1',\ v_2'$ とすると、反発係数 e は相対速度 $v_R = v_2 - v_1,\ v_R' = v_2' - v_1'$ を用いて次のように定義される。

$$e = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} = -\frac{v_R'}{v_R}$$

「3.1.3 反発係数」の所でも記したが、**衝突の際は、撃力が外力に比べて圧倒的に大きく、外力を無視できる**。衝突の際は、重心系を使うと便利なことがある。重心系で見ると、**2 物体は重心に関して対称的な運動をする**。そして、それは式 (3.46) のように、

$$\boldsymbol{V_2} = -\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{V_1}$$

と書ける。($\boldsymbol{V_1}, \boldsymbol{V_2}$ は重心系で見た 2 物体の速度。) そのため、重心系で見た時、2 物体が衝突するのは原点である。つまり、**静止系からみると、2 物体は重心で衝突する**。

次に、外力が働かないから、重心速度 $\boldsymbol{v_G}$ は一定である。重心速度は衝突の前後で変化することはない。前の Subsection で書いた通り、運動エネルギーは、重心運動エネルギーと相対運動エネルギーの和でかける。そのため、衝突の前後で、重心運動エネルギーは変化しない。もし、衝突により、運動エネルギーが変化したなら、それは相対運動エネルギーの変化分に等しい[5]。

衝突による 2 物体の運動エネルギーの和の変化 ΔK を求めると、

$$\begin{aligned}\Delta K &= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left\{(v_R')^2-(v_R)^2\right\} \\ &= -\frac{1-e^2}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_R)^2 \end{aligned} \tag{3.58}$$

となる。これより、$e=1$(弾性衝突) の時、2 物体の運動エネルギーの和は変化しないことがわかる。

[5]反発係数を、衝突の前後の相対速度の比率で定義したので、このことは明白なことである。

3.6 重心系で捉える 2 物体の運動

3.6.1 2 物体の衝突と重心系

3.1.3「反発係数」の部分で、次の 2 つの式から v_1' と v_2' を求めた。これを重心系を利用して求めよう。

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$
$$e = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$$

まず、衝突直前の重心速度を V_G とすると、

$$V_G = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} \tag{3.59}$$

とかけて、これは衝突の前後で不変である。衝突前の重心から見た 2 物体の速度を V_1, V_2 とすると、

$$V_1 = v_1 - V_G \quad V_2 = v_2 - V_G \tag{3.60}$$

となる。すると、重心系で見た時の 2 物体の全運動量は、

$$m_1V_1 + m_2V_2 = m_1(v_1 - V_G) + m_2(v_2 - V_G) = 0 \tag{3.61}$$

となる。これは、3.5.1 の「重心と運動量の関係」(68 ページ) に記した通り、重心系では絶対に成り立つ性質である。式 (3.59) からもわかる。

ここで、反発係数の式の分子と分母を次のように変形すると、

$$e = -\frac{(v_1' - V_G) - (v_2' - V_G)}{(v_1 - V_G) - (v_2 - V_G)} = -\frac{V_1' - V_2'}{V_1 - V_2} \tag{3.62}$$

となり、重心系で見たときも、衝突前後の相対速度の比は反発係数に等しいことがわかる。また、衝突の際に外力は作用しないので、運動量は保存する。それは静止系でも重心系でも同じである。そのため、

$$0 = m_1V_1 + m_2V_2 = m_1V_1' + m_2V_2' \tag{3.63}$$

が成立する。式 (3.62) と式 (3.63) から V_1' と V_2' を求めよう。

式 (3.62) より、$V_2 = -\dfrac{m_1}{m_2}V_1,\ V_2' = -\dfrac{m_1}{m_2}V_1'$ が成立するので、

$$e = -\frac{V_1' - (m_1/m_2)V_1}{V_1 - (m_1/m_2)V_1} \quad \Longleftrightarrow \quad V_1' = -eV_1 \tag{3.64}$$

が成立する。同様に $V_2' = -eV_2$ が成立する。重心系で考える利点の 1 つは、この式からわかるように、衝突後の速度が $-e$ 倍になるという点である。重心系を使うと、衝突後の 2 物体の速度を容易に求めることができるのである。

衝突後の物体 1 の速度 v_1' は $V_1 = v_1 - V_G$ より、

$$\begin{aligned} v_1' = V_1' + V_G = -eV_1 + V_G &= (1+e)V_G - ev_1 \\ &= (1+e)\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - ev_1 \\ &= \frac{(m_1 - em_2)v_1 + (1+e)m_2v_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \tag{3.65}$$

と計算できる。同様に、v_2' も計算できて、以下のようになる。

$$v_2' = (1+e)V_G - ev_2 = \frac{(1+e)m_1v_1 + (m_2 - em_1)v_2}{m_1 + m_2} \tag{3.66}$$

3.6.2　重心系で見た運動エネルギー

2 物体の運動エネルギーの和 K について、3.5.3「重心運動と相対運動に分離する」では重心座標と相対座標という観点で見たが、今度は重心系で見てみよう。重心座標と相対座標で見たときは、

$$K = \underbrace{\frac{1}{2}(m_1+m_2)|\boldsymbol{v_G}|^2}_{K_G} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}|\boldsymbol{v_R}|^2}_{K_R}$$

と書ける。

物体 1 と 2 の重心系での速度を次のように定義する。

$$\boldsymbol{V_1} = \boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{v_G}, \quad \boldsymbol{V_2} = \boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_G} \tag{3.67}$$

なお、重心速度 V_G は、

$$\boldsymbol{V_G} = \frac{m_1\boldsymbol{v_1} + m_2\boldsymbol{v_2}}{m_1+m_2}$$

である。前の subsection と同様に考えると、重心系で見た時の 2 物体の全運動量は、

$$m_1\boldsymbol{V_1} + m_2\boldsymbol{V_2} = m_1(\boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{V_G}) + m_2(\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{V_G}) = \boldsymbol{0} \tag{3.68}$$

となる。すると、2 物体の運動エネルギーの和 K は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}m_1(\boldsymbol{v_1}\cdot\boldsymbol{v_1}) + \frac{1}{2}m_2(\boldsymbol{v_2}\cdot\boldsymbol{v_2}) \\
&= \frac{1}{2}m_1\{(\boldsymbol{V_1}+\boldsymbol{v_G})\cdot(\boldsymbol{V_1}+\boldsymbol{v_G})\} + \frac{1}{2}m_2\{(\boldsymbol{V_2}+\boldsymbol{v_G})\cdot(\boldsymbol{V_2}+\boldsymbol{v_G})\} \\
&= \frac{1}{2}m_1\{|\boldsymbol{V_1}|^2 + 2\boldsymbol{V_1}\cdot\boldsymbol{v_G} + |\boldsymbol{v_G}|^2\} + \frac{1}{2}m_2\{|\boldsymbol{V_2}|^2 + 2\boldsymbol{V_2}\cdot\boldsymbol{v_G} + |\boldsymbol{v_G}|^2\} \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}(m_1+m_2)|\boldsymbol{v_G}|^2}_{K_G} + \boldsymbol{v_G}\cdot\underbrace{(m_1\boldsymbol{V_1}+m_2\boldsymbol{V_2})}_{\boldsymbol{0}} + \frac{1}{2}m_1|\boldsymbol{V_1}|^2 + \frac{1}{2}m_2|\boldsymbol{V_2}|^2 \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}(m_1+m_2)|\boldsymbol{v_G}|^2}_{K_G} + \frac{1}{2}m_1|\boldsymbol{V_1}|^2 + \frac{1}{2}m_2|\boldsymbol{V_2}|^2
\end{aligned} \tag{3.69}$$

さて、式 (3.69) において、後ろの 2 項は何を表すか考える。$K = K_G + K_R$ なので、後ろの 2 項は K_R である。したがって、重心運動エネルギーと相対運動エネルギーについては、以下のように書くこともできる。特に、相対運動エネルギーについては 2 通りの書き方があることがわかった。状況に応じてうまく利用したい。

運動エネルギーの分解 (2)

- 重心運動エネルギー：　$K_G = \dfrac{1}{2}(m_1+m_2)|\boldsymbol{v_G}|^2$
- 相対運動エネルギー：　$K_R = \dfrac{1}{2}m_1|\boldsymbol{V_1}|^2 + \dfrac{1}{2}m_2|\boldsymbol{V_2}|^2$

3.6.3 演習問題 (重心系での議論)

この section では、2 体問題を重心系を導入した時にどのように問題を解くことができるかを考える。問題はとてもシンプルなもので、重心系を導入しなくても難なく解くことができる。

問題 7

図に示すように、鉛直な壁と、その右側に摩擦のない水平な床を考える。床上に、壁と垂直に x 軸をとる。その原点 O は壁の左端とし、右向きを正とする。今、x 軸上に、半径を無視できる 2 つの小球 P、Q がある。質量 m の小球 P は、$x = L$ の位置 (点 A) に、質量 $2m$ の小球 Q は、$x = L/4$ の位置 (点 B) にある。小球 P が、点 A より、左向きに一定の大きさ v_0 の速度で進み。点 B で静止している小球 Q へ右側より、第 1 回目の衝突をする。2 つの小球の衝突は完全弾性衝突であるとし、2 つの小球 P、Q は常に x 軸上を動くものとする。

<u>まず、小球と壁の衝突が、完全弾性衝突である場合を考える。</u>
第 1 回目の衝突後、小球 P は右側へ進み、小球 Q は左へ進んだ。小球 Q は壁と衝突して反射され、小球 P を追い再衝突を起こした。

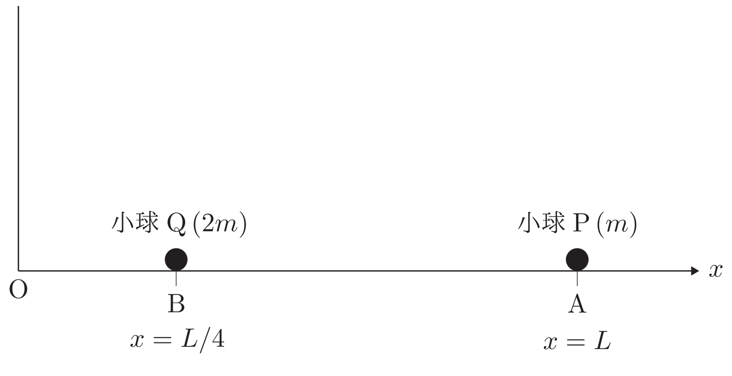
(1) 第 1 回目の衝突後の 2 つの小球の速度を求めよ。(右向きを正とする)

(2) 第 2 回目の衝突後の 2 つの小球の速度を求めよ。(右向きを正とする)

<u>次に、小球と壁の衝突が、非弾性衝突である場合を考える。</u>
第 1 回目の衝突後、小球 P は右側へ進み、小球 Q は左へ進んだ。小球 Q は壁と衝突して反射され、ちょうど $x = L$ の点 A で小球 P と再衝突を起こした。小球 Q と壁との反発係数を e とする。

(3) 第 1 回目の衝突後、2 つの小球が点 A に到達するのに要する時間を求めよ。

(4) ちょうど $x = L$ の点 A で 2 つの小球が再衝突を起こしたことから、e の値を求めよ。



<u>通常の方法で解く</u>[6]

(1) 運動量保存則の式と反発係数の式を連立させて考える。衝突後の P,Q の速度を v_P, v_Q とする。

$$\begin{cases} m(-v_0) = mv_P + 2mv_Q & \text{(運動量保存則)} \\ 1 = -\dfrac{v_P - v_Q}{(-v_0)} & \text{(反発係数の式)} \end{cases} \tag{3.70}$$

[6] 高校物理なのに行列を使う時点で「通常」ではないかもしれないと思う人がいるだろう。ただ、それは連立方程式を解くという数学の話において、行列という道具を使っているだけで、物理的な議論においては、一切特別なことは考えていない。

これより、行列を用いて表し、連立方程式を解く。

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_P\\ v_Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-v_0\\ v_0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}v_P\\ v_Q\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-v_0\\ v_0\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-v_0\\ 2v_0\end{pmatrix}$$

よって、衝突後の P の速度は $\frac{1}{3}v_0$、Q の速度は $-\frac{2}{3}v_0$ である。

(2) 2 度目の衝突の後の P と Q の速度を v'_P, v'_Q とする。1 回目の衝突後の Q の速度は負なので、小球 Q は壁と衝突する。小球と壁の衝突は弾性衝突なので、壁と衝突後の Q の速度は $\frac{2}{3}v_0=-v_Q$ である。

$$\begin{cases}mv_P+2m(-v_Q)=mv'_P+2mv'_Q & (\text{運動量保存則})\\ 1=-\dfrac{v'_P-v'_Q}{v_P-(-v_Q)} & (\text{反発係数の式})\end{cases}\tag{3.71}$$

運動量保存則の左辺は (1) の結果より、$\frac{5}{3}mv_0$ である。また、$v_P-(-v_Q)=-\frac{1}{3}v_0$ である。よって、式 (3.71) は次のように書くことができる。

$$\begin{cases}\dfrac{5}{3}mv_0=mv'_P+2mv'_Q & (\text{運動量保存則})\\ 1=-\dfrac{v'_P-v'_Q}{-v_0/3} & (\text{反発係数の式})\end{cases}\tag{3.72}$$

これを行列を用いて表し、連立方程式を解く。

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v'_P\\ v'_Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}v_0\\ \frac{1}{3}v_0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}v'_P\\ v'_Q\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{3}v_0\\ \frac{1}{3}v_0\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-\frac{7}{3}v_0\\ -\frac{4}{3}v_0\end{pmatrix}$$

よって、2 回目の衝突後の P の速度は $\frac{7}{9}v_0$、Q の速度は $\frac{4}{9}v_0$ である。

(3) 1 回目の衝突後、小球 P が点 A に到達するまでの時間 t_P は

$$t_P=\frac{3L/4}{v_0/3}=\frac{9L}{4v_0}\tag{3.73}$$

である。一方、小球 Q が点 A に到達するまでの時間 t_Q は

$$t_Q=\frac{L/4}{2v_0/3}+\frac{L}{e\times 2v_0/3}=\frac{3L}{8v_0}+\frac{3L}{2ev_0}=\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{2e}\right)\frac{L}{v_0}\tag{3.74}$$

と書ける。

(4) 再衝突を起こすためには、$t_P=t_Q$ が成立する必要がある。

$$\frac{9L}{4v_0}=\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{2e}\right)\frac{L}{v_0}\iff\frac{15}{8}=\frac{3}{2e}\iff e=\frac{4}{5}\tag{3.75}$$

重心系を導入して解く

(1)(2) の問題は重心系を利用して解くことができる。重心系では衝突後の速度は $-e$ 倍 (e : 小球と小球の間の反発係数) になるだけである。今回は小球と小球の間の反発係数は 1 であるので、ただ -1 倍すればよい。

(1) 衝突の直前の重心速度 V_G は

$$V_G=\frac{m(-v_0)+2m\cdot 0}{m+2m}=-\frac{1}{3}v_0\tag{3.76}$$

である。衝突直前の重心系での P と Q の速度 V_P, V_Q は

$$\begin{cases} V_P = (-v_0) - \left(-\dfrac{1}{3}v_0\right) = -\dfrac{2}{3}v_0 \\ V_Q = 0 - \left(-\dfrac{1}{3}v_0\right) = \dfrac{1}{3}v_0 \end{cases} \tag{3.77}$$

と書ける。よって、v_P, v_Q は以下のようになる。

$$v_P = V'_P + V_G = \frac{2}{3}v_0 + \left(-\frac{1}{3}v_0\right) = \frac{1}{3}v_0$$

$$v_Q = V'_Q + V_G = -\frac{1}{3}v_0 + \left(-\frac{1}{3}v_0\right) = -\frac{2}{3}v_0$$

(2) 2 回目の衝突の直前の重心速度 V'_G は

$$V_G = \frac{m(v_0/3) + 2m \cdot (2v_0/3)}{m + 2m} = \frac{5}{9}v_0 \tag{3.78}$$

である。2 回目の衝突直前の重心系での P と Q の速度 V''_P, V''_Q は

$$\begin{cases} V''_P = \dfrac{1}{3}v_0 - \dfrac{5}{9}v_0 = -\dfrac{2}{9}v_0 \\ V''_Q = \dfrac{2}{3}v_0 - \dfrac{5}{9}v_0 = \dfrac{1}{9}v_0 \end{cases} \tag{3.79}$$

と書ける。よって、v'_P, v'_Q は以下のようになる。

$$v'_P = (-V''_P) + V'_G = \frac{2}{9}v_0 + \frac{5}{9}v_0 = \frac{7}{9}v_0$$

$$v'_Q = (-V''_Q) + V'_G = -\frac{1}{9}v_0 + \frac{5}{9}v_0 = \frac{4}{9}v_0$$

第 4 章　円運動と慣性力

これまで扱った 2 次元運動は、軌道が複雑な場合は、保存力だけが働いているという理想状態のみを考えた。その他に考えたのは、ただ運動方程式を立てて、加速度がどう記述できるか、どのような関係を満たすかだけを考えた。具体的に考えた軌道は放物線軌道ぐらいだろう。この Chapter の前半では、軌道が円の場合についてみていく。円の場合も高校レベルの数学で十分分析ができる。

後半では、「運動をどこから見るか」ということについて触れる。入試問題を含めて、物理ではいつも静止系から運動を観測するのが良いとは限らない。重心系については前の Chapter で触れたが、今回は等速度運動する観測者や、加速度運動する観測者、回転運動する観測者から見た相対的な運動はどのようなものかを考える。

4.1　速度・加速度の極座標表示

4.1.1　極座標の導入

物体の運動を把握するときは、状況に応じて適切な座標系をとる必要がある。極座標はその 1 つである。以下の図 4.1 や図 4.2 のように、原点からの距離 r と角度を用いて位置を表す座標系を**極座標**という。

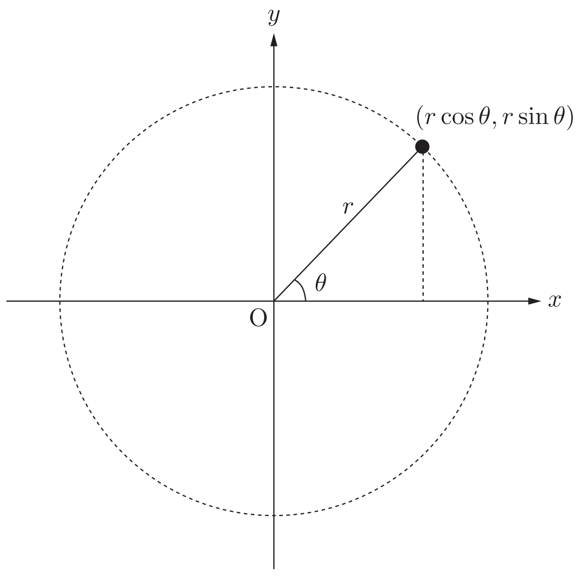


図 4.1: 2 次元極座標

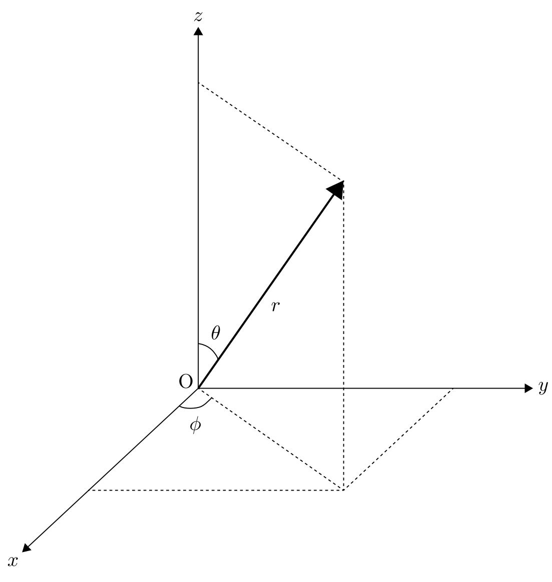


図 4.2: 3 次元極座標

2 次元座標 (x, y) は、2 つのパラメーター r(原点からの距離) と x 軸の正の方向とのなす角 θ を使って、

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{4.1}$$

と書くことができる。

また、3 次元座標 (x, y, z) は、3 つのパラメーター r(原点からの距離) と θ、ϕ を使って、

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{4.2}$$

と書くこともできる[1]。

4.1.2 座標変換

この section では 2 次元平面における座標変換について考える。

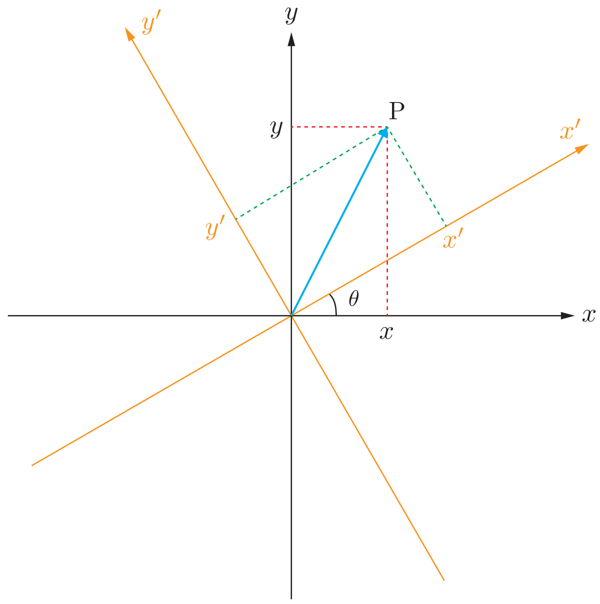


図 4.3: 原点のまわりに座標系を回転させる

xy 座標系を原点のまわりに反時計回りに θ 回転させた座標系を $x'y'$ 座標系とする。(つまり、原点は不動である。) この subsection では、ある指定した点を P と呼ぶことにしよう。座標系が変わっても、P の位置は変わらない (原点の位置も変わらない)。では、何が変わるのか。それは、座標軸に対応する基本単位ベクトル (大学で習う言葉を使うと「**基底**」) である。普段当たり前のように使っている xy 座標系の基底は、$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と、$\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。この二つの基底[2]を使うと、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2}$ と書けて、私たちは、$\boldsymbol{e_1}$ と $\boldsymbol{e_2}$ の係数の組み合わせを**座標**と呼んでいる。座標系が変わると、点 P 自身は変わらなくても、$\boldsymbol{e_1}$ と $\boldsymbol{e_2}$、つまり基底が変わり、指定した点を表現する座標が変わる。

基底の変化を捉える時、行列による一次変換が使える。$\boldsymbol{e_1}$ が $\boldsymbol{e'_1}$ に、$\boldsymbol{e_2}$ が $\boldsymbol{e'_2}$ に写ったとする。今回は、$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と、$\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を、大きさを保ったまま写すことを考える。原点のまわりに反時計回りに θ 回転

(1) この TEX ノートでは 3 次元極座標を用いる機会は一切ないので、覚えなくても大丈夫だが、大学入試の数学の問題を解くときに役に立つかもしれない。

(2) 2 次元座標系における 2 つの単位ベクトル $\boldsymbol{e_1}$ と $\boldsymbol{e_2}$ が、$\boldsymbol{e_1} \cdot \boldsymbol{e_2} = 0$ を満たすとき、二つのベクトル $\boldsymbol{e_1}$ と $\boldsymbol{e_2}$ は**直交**するという。特に、$\boldsymbol{e_1}$ と $\boldsymbol{e_2}$ が基底で直交し、かつ、$\|\boldsymbol{e_1}\| = \|\boldsymbol{e_2}\| = 1$ を満たすとき、この 2 つのベクトル $\boldsymbol{e_1}$ と $\boldsymbol{e_2}$ を 2 次元の**正規直交基底**という。

させると、

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

なので、$\boldsymbol{e'_1} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ と、$\boldsymbol{e'_2} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$ である。

新しい基底 $\boldsymbol{e'_1}$ と $\boldsymbol{e'_2}$ の下での点 P の座標を (x', y') とすると、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= x'\boldsymbol{e'_1} + y'\boldsymbol{e'_2} = x'\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.3}$$

が成立するはずである。この式 (4.3) より、(a, b) を求める。

式 (4.3) の右辺の 2×2 行列の行列式は、

$$\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix} = \cos\theta\times\cos\theta - (-\sin\theta)\times\sin\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{4.4}$$

となる[3]ので、この 2×2 行列の逆行列を左からかけると

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}}_{\text{逆行列}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\cos\theta + y\sin\theta\\ -x\sin\theta + y\cos\theta\end{pmatrix} \tag{4.5}$$

となって、新しい基底 $\boldsymbol{e'_1}$ と $\boldsymbol{e'_2}$ の下での点 P の座標が求められた。

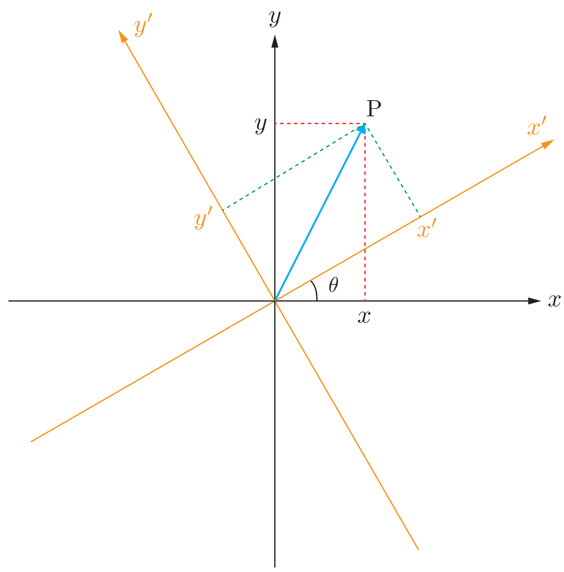


図 4.4: 原点のまわりに座標系を θ 回転させる

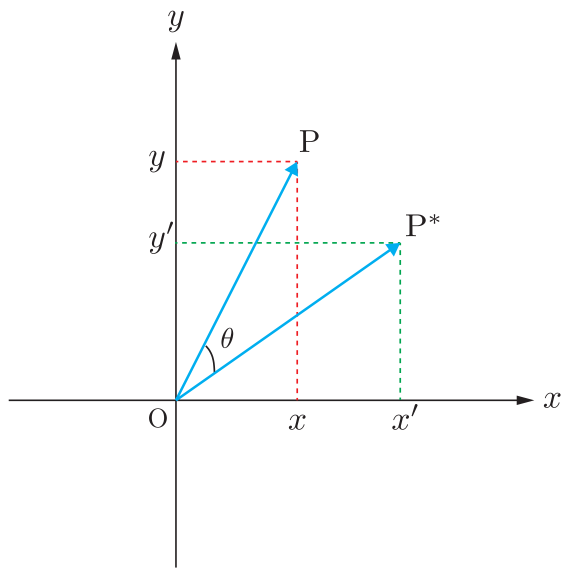


図 4.5: 座標系と連動させて点 P を $-\theta$ 回転させる

---

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ の行列式 det A を

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$$

と表すことがある。この記法は、大学の線形代数学では一般的に使用される記法である。

さて、図 4.4 に $x'y'$ 座標系を原点のまわりに $-\theta$ 回転させて、x 軸と x' 軸、y 軸と y' 軸が一致するようにする。このとき、$x'y'$ 座標系と一緒に点 P も原点のまわりに $-\theta$ 回転させて、点 P^* に移動させる。すると、図 4.5 のようになる。

このとき、$\|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{OP}^*}\|$ であり、$\angle \mathrm{POP}^* = \theta$ である。そのため、点 (x', y') を原点のまわりに θ 回転させせると、点 (x, y) に一致する。図 4.5 における点 P^* の作り方から、図 4.5 における x', y' の値は、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ -x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

とかける。x' と y' の値が式 (4.5) のようにかけるので、図 4.5 において、$(x.y)$ と (x', y') は式 (4.3) によって結びつけられる。つまり、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

の関係が図 4.5 でも成立する。

回転行列 $R(\theta)$ [4]

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

に対して、

$$R(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

は、原点のまわりに点 (x, y) を θ 回転させて得られる点を表す。

[4] 式 (4.6) より、$R(-\theta)$ を求めると、以下のようになる。

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

これは、$R(\theta)$ の逆行列でもある。原点のまわりに θ 回転させる行列の逆行列が原点のまわりに $-\theta$ 回転させる行列になっているというのが、回転行列の美しい性質の 1 つである。

4.1.3 速度・加速度の極座標表示

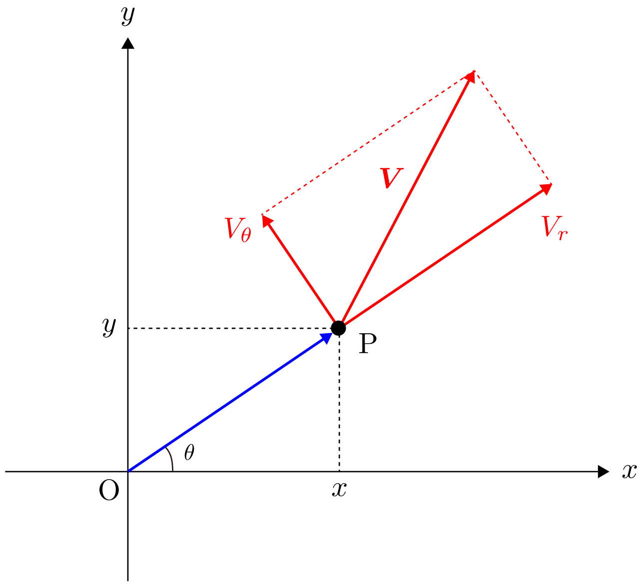


図 4.6: 極座標系における速度ベクトル

点 P の座標が $\boldsymbol{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ であるとし、点 P における速度ベクトルを $\boldsymbol{V}$ で表すとする。

極座標系では、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 方向 (**向心方向**) 成分 V_r と、これと垂直な方向で、原点 O の周りを反時計回りに 90° 回した方向 (**接線方向**) の成分 V_θ を用いて $\boldsymbol{V}$ を表す。それぞれの方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e_r}$、$\boldsymbol{e_\theta}$ とすると、これらは、$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と、$\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を原点のまわりに反時計回りに θ 回転したベクトルである。そのため、速度の極座標表示は、<u>元の xy 座標系を原点のまわりに反時計回りに θ 回転した座標系における表示</u>である。

したがって、xy 座標系で $\boldsymbol{V} = (V_x, V_y)$ とすると、

$$\begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x\cos\theta + V_y\sin\theta \\ -V_x\sin\theta + V_y\cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

と書ける。ここで、$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とかける。<u>r と θ がともに時刻 t の関数である</u>ことに注意すると、

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\cdot\dot{\theta} \tag{4.9}$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\cdot\dot{\theta} \tag{4.10}$$

となる[5]。これを式 (4.8) に代入すると、

$$V_r = \dot{r}(\cos\theta)^2 - r\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\theta} + \dot{r}(\sin\theta)^2 + r\cos\theta\sin\theta\cdot\dot{\theta} = \dot{r}$$

$$V_\theta = -\dot{r}\cos\theta\sin\theta + r(\sin\theta)^2\cdot\dot{\theta} + \dot{r}\sin\theta\cos\theta + r(\cos\theta)^2\cdot\dot{\theta} = r\dot{\theta}$$

[5] 変数の時間微分を $\dot{r}$ のように表すことがある。また、変数の時間に関して 2 階微分したものを $\ddot{r}$ のように表す。$\dot{r} = \dfrac{dr}{dt}$ である。$\ddot{r} = \dfrac{d^2r}{dt^2}$ である。

と計算することができる。ここで、**角速度** ω を $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ で定義する。すると、速度の極座標表示は次のようにまとめられる。

速度の極座標表示

速度 $\boldsymbol{V}$ を極座標系で表す。原点から遠ざかる方向 (向心方向) の成分 V_r と、それに垂直な方向 (接線方向) 成分 V_θ は次のように表せる。

$$V_r = \dot{r} = \frac{dr}{dt} \tag{4.11}$$
$$V_\theta = r\dot{\theta} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega \tag{4.12}$$

続けて、次に加速度の極座標表示を考える。速度と同様に加速度にも次の関係が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x\cos\theta + a_y\sin\theta \\ -a_x\sin\theta + a_y\cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

まず、a_x, a_y を r, θ で表す。式 (4.9) と式 (4.10) の両辺を時間 t で微分すると、

$$\begin{aligned} a_x = \frac{dV_x}{dt} &= \ddot{r}\cos\theta - \dot{r}\sin\theta\cdot\dot{\theta} - \dot{r}\sin\theta\cdot\dot{\theta} - r\cos\theta\cdot(\dot{\theta})^2 - r\sin\theta\cdot\ddot{\theta} \\ &= \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\sin\theta\cdot\dot{\theta} - r\cos\theta\cdot(\dot{\theta})^2 - r\sin\theta\cdot\ddot{\theta} \qquad (4.14) \\ a_y = \frac{dV_y}{dt} &= \ddot{r}\sin\theta + \dot{r}\cos\theta\cdot\dot{\theta} + \dot{r}\cos\theta\cdot\dot{\theta} - r\sin\theta\cdot(\dot{\theta})^2 + r\cos\theta\cdot\ddot{\theta} \\ &= \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\cos\theta\cdot\dot{\theta} - r\sin\theta\cdot(\dot{\theta})^2 + r\cos\theta\cdot\ddot{\theta} \qquad (4.15) \end{aligned}$$

よって、a_r と a_θ は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r}(\cos\theta)^2 - 2\dot{r}\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\theta} - r(\cos\theta)^2\cdot(\dot{\theta})^2 - r\sin\theta\cos\theta\cdot\ddot{\theta} \\ &\quad + \ddot{r}(\sin\theta)^2 + 2\dot{r}\cos\theta\sin\theta\cdot\dot{\theta} - r(\sin\theta)^2\cdot(\dot{\theta})^2 + r\cos\theta\sin\theta\cdot\ddot{\theta} \\ &= \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 \\ a_\theta &= -\ddot{r}\sin\theta\cos\theta + 2\dot{r}(\sin\theta)^2\cdot\dot{\theta} + r\sin\theta\cos\theta\cdot(\dot{\theta})^2 + r(\sin\theta)^2\cdot\ddot{\theta} \\ &\quad + \ddot{r}\sin\theta\cos\theta + 2\dot{r}(\cos\theta)^2\cdot\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\cdot(\dot{\theta})^2 + r(\cos\theta)^2\cdot\ddot{\theta} \\ &= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ &= \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \end{aligned}$$

加速度の極座標表示

加速度 $\boldsymbol{a}$ を極座標系で表す。原点から遠ざかる方向の成分 a_r と、それに垂直な方向 (接線方向) 成分 a_θ は次のように表せる。

$$a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 = \ddot{r} - r\omega^2 \tag{4.16}$$
$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}(r^2\omega) \tag{4.17}$$

($\dot{\theta} = \omega$ を用いた。)

4.2 円運動

前の Section で、速度と加速度の極座標表示を扱った。この Section では極座標表示が大いに役立つ運動として、円運動を取り扱う。(楕円軌道については、第 6 章の万有引力の部分で扱う。)

4.2.1 円運動の速度と加速度

83 ページから始まる subsection で求めた速度と加速度の極座標表示を円運動に適用させる。円運動の特徴は極座標表示した時、中心からの距離 r が一定であるということである。つまり、円運動では $\dot{r}=0$ が成立する。そのため、円運動の場合は速度や加速度の極座標表示がより簡単に書ける。

円運動における速度と加速度

円運動における速度

$$V_r = 0 \tag{4.18}$$

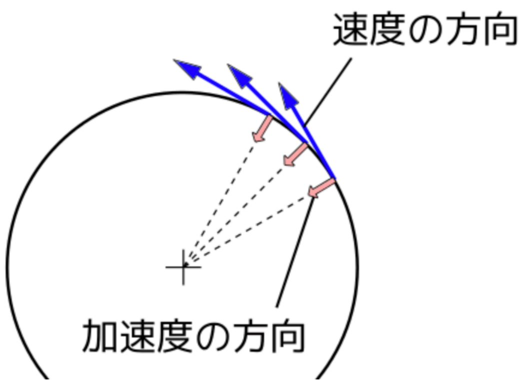
$$V_\theta = r\dot{\theta} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega \tag{4.19}$$

円運動における加速度

$$a_r = -r(\dot{\theta})^2 = -r\omega^2 \tag{4.20}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} = r\dot{\omega} \tag{4.21}$$

また、$v = v_\theta = r\omega$ より、$a_r = -\dfrac{v^2}{r}$, $a_\theta = \dfrac{dv}{dt}$ と書くこともできる。



(https://commons.wikimedia.org/wiki/File:円運動の加速度の方向.svg)

円運動の加速度にマイナスがついているのは、円運動の加速度は、中心に向く方向に働くことを表す。その理由は、上の図をみるとわかる。もし、加速度が中心を向く方向に向かなければ、円軌道を描かない。

4.2.2　円運動の演習問題 (1)

この Subsection では、問題演習を通して、円運動について考える。扱う問題は、難系の 82 ページの例題 26 である (一部変更している箇所あり)。円軌道の位置は極座標を使えば簡単に書けるが、速度や加速度は簡単に時間の関数として書くはかけない[(6)]。そこで、活躍するのが**エネルギー保存則**である。

(5) については、難系の解説を参考にしました。この問題の KeyPoint について私なりに良い解答は見出せませんでした。何か良いアイデアがありましたら、Twitter アカウント `@fgl48` までお願いします。

問題 8

長さ r の軽くて伸び縮みしない糸の上端を図のように支点 O に固定し、下端に質量 m の小球を付ける。小球が鉛直面内を運動するとき、重力加速度の大きさを g として次の問いに答えよ。ただし、空気抵抗や浮力などは無視し、糸は切れないものとする。

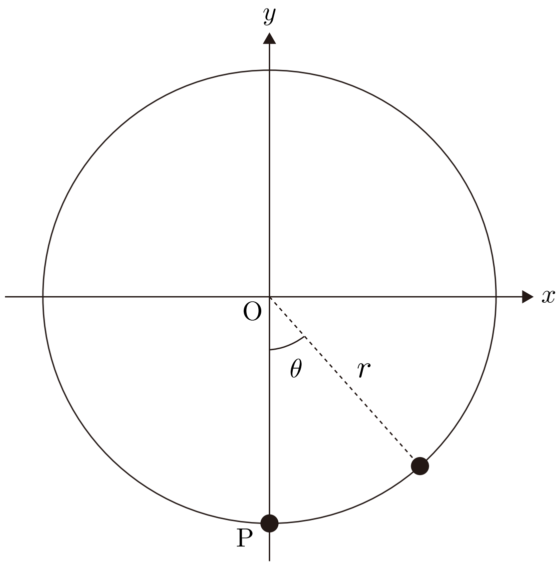
(1) 図の最下点 P で静止していた小球に水平方向右向きの速さ v_0 を与えると、小球は振り子運動を始める。糸の鉛直下方に対してなすふれの角度を θ として、θ が $90°$ をこえないとき、v_0 のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) (1) の場合で θ が最大値をとる瞬間の糸の張力の大きさを求めよ。

(3) 小球が O を中心とする完全な円を描く運動をするとき、v_0 のとりうる値の範囲を求めよ。

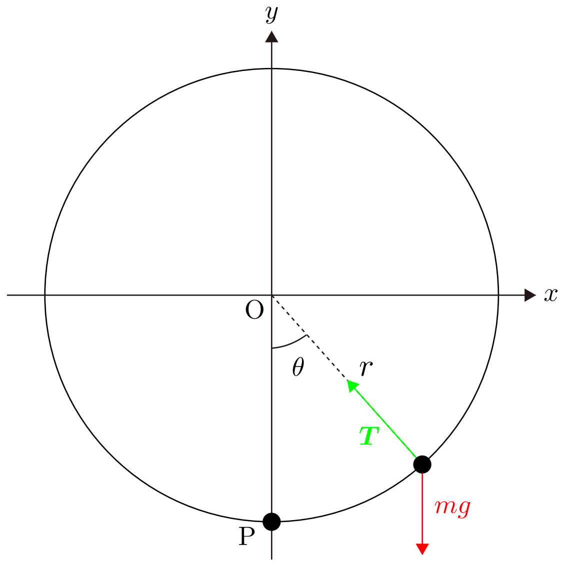
(4) $v_0 = \sqrt{\dfrac{7}{2}gr}$ のとき、小球が円運動から離脱する位置を求めよ。また、その時の小球の速さを求めよ。

(5) (4) の場合、小球が円運動から離脱すると糸はたるむ。そして、再び糸が張るまで小球は放物線運動を行う。円運動より離脱してから、再び糸が張るまでの時間を求めよ。さらに、糸が張る瞬間の小球の位置を求めよ。



(6) <u>速度が一定の円運動</u>(**等速円運動**) は時間 t の関数として書くのは容易だが、非等速円運動では難しい。

運動状態を把握するために、まず運動方程式を書く。円軌道なので、極座標系を用いる。
($\boldsymbol{v}$ を下の図の θ の増加する方向で、かつ円の接線方向にとる。)



$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{r} = T - mg\cos\theta & \text{(向心方向)} \qquad (4.22) \\ m\dfrac{dv}{dt} = -mg\sin\theta & \text{(接線方向)} \qquad (4.23) \end{cases}$$

接線方向の式に $v = r\dfrac{d\theta}{dt}$ をかけると、

$$mv\frac{dv}{dt} = -mgr\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -mgr\cdot\frac{d}{d\theta}(-\cos\theta)\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(mgr\cos\theta)$$

エネルギー保存則

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 - mgr\cos\theta\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 - mgr\cos\theta = \text{const.} \qquad (4.24)$$

以上の運動方程式およびエネルギー保存則を使って、問題を解く。

(1) 「θ が 90° をこえない　$\Longleftrightarrow$　$\cos\theta$ が 0 より大きい」を利用する。θ が最大の時、つまり、最高点に到達した時、小球の速度は 0 になる。よって、エネルギー保存則より、

$$-mgr\cos\theta_{\max} = \frac{1}{2}m(v_0)^2 - mgr$$
$$\therefore \quad \cos\theta_{\max} = -\frac{(v_0)^2}{2gr} + 1 > 0$$
$$\therefore \quad v_0 < \sqrt{2gr}$$

□

(2) (1) より θ が最大となる時、$\cos\theta_{\max} = -\dfrac{(v_0)^2}{2gr} + 1$ である。式 (4.22) と $\cos\theta_{\max}$ の値、および θ が最大の点で小球の速度が 0 となることを使うと、

$$T = mg\cos\theta_{\max} = mg\left\{1 - \frac{(v_0)^2}{2gr}\right\}$$

□

(3) <u>小球が **O** を中心とする完全な円を描くとき、円運動中に糸がたるむことはない</u>。よって、張力の最小値が 0 以上であればよい[7]。エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_0)^2 - mgr(1-\cos\theta)$$

なので、

$$\begin{aligned} T = \frac{mv^2}{r} + mg\cos\theta &= \frac{m(v_0)^2}{r} - mg(2 - 3\cos\theta) \\ &\geq \frac{m(v_0)^2}{r} - 5mg \geq 0 \end{aligned} \tag{4.25}$$

となればよく、これより、$v_0 \geq \sqrt{5gr}$ と v_0 が満たすべき条件が求められる。 □

(4) $v_0 = \sqrt{\dfrac{7}{2}gr}$ のとき、ある点で張力が負になり、糸がたるむということである。よって、求める位置は張力が正から負に変わる境界、つまり、張力が 0 となる位置である。式 (4.25) を使うと、その境界点 $(\theta = \theta_b)$ について、次の式が成立する。

$$0 = \frac{7}{2}mg - mg(2 - 3\cos\theta_b)$$

したがって、$\cos\theta_b = -\dfrac{1}{2}$ で、$\theta_b = 120^\circ$ である。
次に、この境界点における速度 v_b は、$T = 0$ なので、式 (4.22) より

$$v_b = \sqrt{-gr\cos\theta_b} = \sqrt{\frac{1}{2}gr}$$

である。 □

(5) この問題では、「再び糸が張る」という条件をどう数式で記述するかが重要である。糸が張るということは張力 T が 0 以上ということであるが、張力に関する関係式は何か。そこで、前のページの図のように、O を原点とする x, y 座標系を導入する。

- 小球の位置 (x, y) が領域 $x^2 + y^2 < r^2$ にあると、糸はたるんでしまう。
- 小球の位置 (x, y) が領域 $x^2 + y^2 > r^2$ にあることはない。(その領域にあるには、糸が切れるしかない)

---

[7] (1) や (2) の問題のように考えるなら、速度が 0 となる点がなければ良いことがわかる。なぜなら、もし $0 \leq \theta \leq \pi$ で速度が 0 となったら、そこで折り返すので円軌道を描かない。速度と運動エネルギーの関係から、「速度が 0 より大きい」ならば、「運動エネルギーは 0 より大きい」なので、エネルギー保存則より、

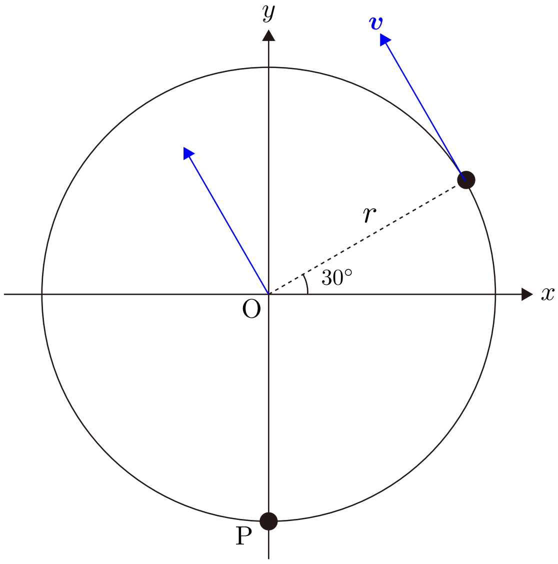
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_0)^2 - mgr(1-\cos\theta) \geq \frac{1}{2}m(v_0)^2 - 2mgr > 0$$

となり、$v_0 > 2\sqrt{gr}$ である。

この考え方は、正解のように思えるが正しくない。なぜなら、速度を持っていても、糸がたるんでいては円軌道を描くことはないからである。よって、この問題は速度の最小値が 0 より大きいことと、張力の最小値が 0 以上であることの 2 つを本当は考えるべきである。しかし、計算すればわかるように、張力の最小値が 0 という条件を満たす初速度は、運動中の速度が常に正という条件も満たしているので、張力についてのみ考えればよい。

よって、糸が張るのは、小球と原点の距離が r のとき、つまり、小球の位置 (x, y) が、$x^2 + y^2 = r^2$ を満たす時である。$\theta_b = 120°$ より、糸がたるむ瞬間の位置は、$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}r,\ \dfrac{1}{2}r\right)$ である。

また、この時の小球の速度について、初速度の向きが水平右向きなので、小球は反時計回りに動く。そのため、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を原点のまわりに 90° した方向が速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の向きである。x 軸の正の方向と位置ベクトルのなす角は 30° なので、x 軸の正の方向と速度ベクトルのなす角は 120° である。



糸がたるんだ瞬間の速度は、

$$\begin{cases} (x\ \text{成分}) & v_b \cos 120° = -v_b \sin 30° = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}gr} \\ (y\ \text{成分}) & v_b \sin 120° = v_b \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}gr} \end{cases}$$

である。糸がたるんだ瞬間を $t = 0$ とすると、小球には重力のみが働くので、

$$x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}r - \frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{2}gr}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}r + \frac{t}{2}\sqrt{\frac{3}{2}gr} - \frac{1}{2}gt^2$$

と書ける、よって、

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r - \frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{2}gr}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}r + \frac{t}{2}\sqrt{\frac{3}{2}gr} - \frac{1}{2}gt^2\right)^2 = r^2$$

$$\frac{3}{4}r^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{1}{2}gr} \cdot rt + \frac{t^2}{4} \cdot \frac{1}{2}gr + \frac{1}{4}r^2 + \frac{t^2}{4} \cdot \frac{3}{2}gr + \frac{1}{4}g^2t^4 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}gr} \cdot rt - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}gr} \cdot gt^3 - \frac{1}{2}grt^2 = r^2$$

$$\frac{1}{4}g^2t^4 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}gr} \cdot gt^3 = 0$$

$$\frac{1}{4}gt^3(gt - \sqrt{6gr}) = 0$$

以上より、小球の位置が $x^2 + y^2 = r^2$ を満たすのは、$t = 0,\ \sqrt{\dfrac{6r}{g}}$ の時である。

したがって、再び糸が張るまでに要する時間は $\sqrt{\dfrac{6r}{g}}$ である。 □

この時、

$$x\left(\sqrt{\frac{6r}{g}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}r-\frac{1}{2}\sqrt{3}r=0$$
$$y\left(\sqrt{\frac{6r}{g}}\right)=\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}\sqrt{9r^2}-\frac{1}{2}g\cdot\frac{6r}{g}=-r$$

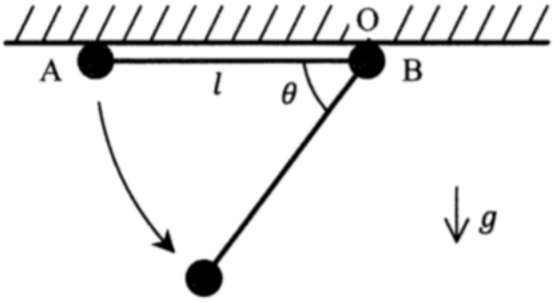
である。よって、<u>再び糸が張るのは点 $\mathrm{P}(0,-r)$ である</u>。 □

4.2.3 円運動の演習問題 (2)

次に、もう 1 題円運動に関する問題を考えよう。題材は、2015 年の東大の物理の問題である。

問題 9

質量 m の小球 A.B が長さ l のひもの両端につながれている。以下の図のように水平な天井に小球 A,B を l だけ離して固定した。小球 B を固定した点を O とし、重力加速度の大きさを g とする。小球 A,B の大きさ、ひもの質量、および空気抵抗は無視できるものとする。



1 小球 B を固定したまま小球 A を静かに放した。

(1) ひもと天井がなす角度を θ とする。小球 A の速さを θ を用いて表せ。ただし、$0 \leq \theta \leq 90°$ とする。

(2) 小球 A が最下点 ($\theta = 90°$) に達したときのひもの張力の大きさを求めよ。

(3) 小球 A が最下点 ($\theta = 90°$) に達したときの小球 A の加速度の大きさと向きを求めよ。

2 小球 A が初めて最下点 ($\theta = 90°$) に達したときに小球 B を静かに放した。この時刻を $t = 0$ とする。

(1) 2 個の小球の重心を G とする。小球 B を放した後の重心 G の加速度の大きさを求めよ。

(2) 時刻 $t = 0$ における、重心 G に対する小球 A,B の相対速度の大きさと向きを求めよ。

(3) 時刻 $t = 0$ における、ひもの張力の大きさを求めよ。

(4) 時刻 $t = 0$ における、小球 A,B の加速度の大きさと向きを求めよ。

(5) 小球 B を放してから、初めて小球 A と小球 B の高さが等しくなる時間を求めよ。

(6) 小球 B を放した後の時刻 t における小球 A の水平位置を求めよ、ただし、点 O を原点とし、右向きを正とする。

1

(1) エネルギー保存則を考える。位置エネルギーの基準を $\theta = 0$ の時の高さとすると、

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgl\sin\theta \quad \Longleftrightarrow \quad v(\theta) = \sqrt{2gl\sin\theta}$$

(2) 運動方程式 (円運動の式) を立てる。張力を T とすると、中心方向の運動方程式[(8)]は、

$$m\frac{v(\theta)^2}{l} = T - mg\sin\theta$$

である。(1) より、$v(90^\circ) = \sqrt{2gl}$ なので、

$$T = m\frac{2gl}{l} + mg = 3mg$$

□

(3) $\theta = 90^\circ$ のとき、接線方向 (水平方向) には一切力が働かない。向心方向 (鉛直方向) には、大きさ $\dfrac{v(90^\circ)^2}{l} = 2g$ の加速度が上向きに働く。

2[(9)]

(1) 重心の加速度を $\boldsymbol{a_G}$ とすると、A と B の質量は等しいので、

$$\boldsymbol{a_G} = \frac{\boldsymbol{a_A} + \boldsymbol{a_B}}{2} \tag{4.26}$$

となる。上記より、A には鉛直上向きに大きさ $2g$ の加速度が働く。一方、B には重力が働くので、鉛直下向きに大きさ g の加速度が働いていることになる。よって、重心に働く加速度は鉛直方向で、鉛直上向きを正とすると、

$$a_g = \frac{2g - g}{2} = \frac{g}{2}$$

となる。 □

(2) 式 (4.26) と同様に、重心の速度を $\boldsymbol{v_G}$ とすると、

$$\boldsymbol{v_G} = \frac{\boldsymbol{v_A} + \boldsymbol{v_B}}{2} \tag{4.27}$$

である。$t = 0$ のとき B は静止していたが、A は右向きに $\sqrt{2gl}$ の速度を持っていたので、$t = 0$ における重心の速度は水平方向で、水平右向きを正とすると、

$$v_g = \frac{\sqrt{2gl}}{2} \tag{4.28}$$

である。よって、求める相対速度を $v_a,\ v_b$ とすると、

$$v_a = \sqrt{2gl} - v_g = \frac{1}{2}\sqrt{2gl} \tag{4.29}$$

$$v_b = 0 - v_g = -\frac{1}{2}\sqrt{2gl} \tag{4.30}$$

となる。 □

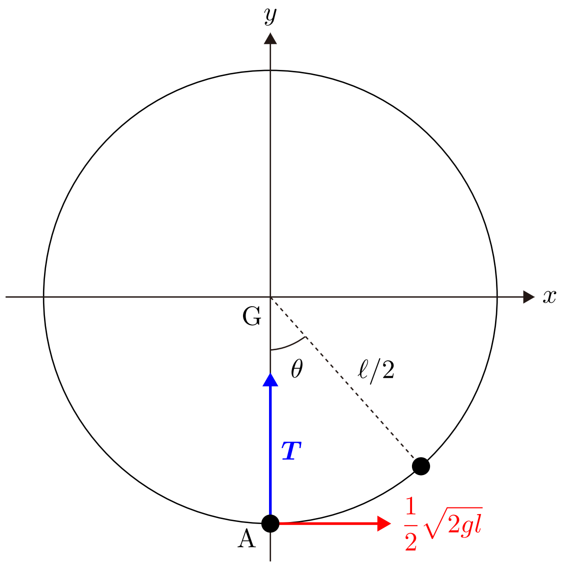
---

(8) 接線方向の運動方程式は $m\dfrac{dv}{dt} = mg\cos\theta$ だが、これを変形すると、エネルギー保存則が出てくるだけである。

(9) (3) 以降の問題は少し難しい。しかし、落ち着いて考えることで「重心系」での運動の見方をマスターすることができる。

(3) この 2 体系の重心は、A と B の質量が等しいので、2 つの小球の中央となる。その重心から見ると、$t=0$ の時に、A は右向きに、B は左向きに動こうとしている。また、**重心から見ると、重力は働いているようには見えないが、張力は静止系と同じように働いているように見える。**なぜなら、Section3.5(67 ページ〜) にも記したが、系に働く外力全てが重心に一点に集中していると考えても良いので、重心に全重力が働いているとすれば良い。ただし、このとき、張力は重心に働いているとは見なせない。張力は系の外部から働く力ではないからである。

さて、重心系で見ると、A の状況は以下と同じ。重心系で見ているので重心 G は不動である。よって、G に糸が固定されていて、糸の長さが $\dfrac{l}{2}$、初速度が右向きに大きさ $\dfrac{1}{2}\sqrt{2gl}$ の状況で円運動を開始するように見える。



よって、$t=0$ において、張力を T' とすると、重心系における中心方向の運動方程式は、

$$m\frac{\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{2gl}\right)^2}{\dfrac{l}{2}} = T' \quad \Longleftrightarrow \quad T' = mg$$

□

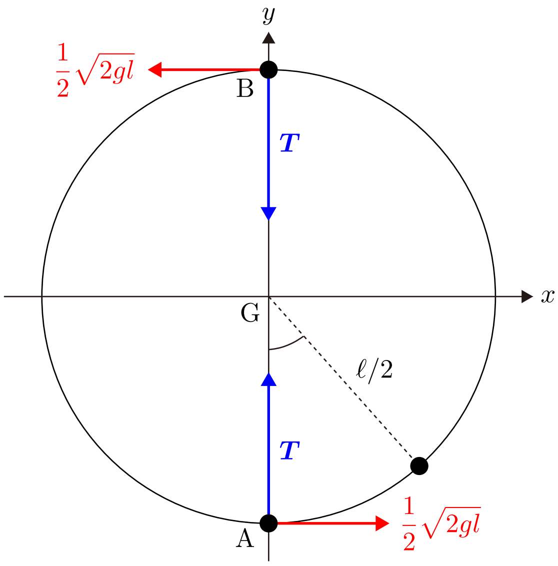
(4) 糸で繋がれているので、A と B に働く張力は等しい。A も B も下向きに重力 mg が働き、さらに張力が働く。A には上向きに大きさ mg の張力が働き、重力とつりあう。一方、B には下向きに大きさ mg の張力が働くので、合計で鉛直下向きに $2mg$ の力が働いている。
よって、A の加速度は 0、B の加速度は鉛直下向きに大きさ $2g$である。 □

(5) 小球 A と小球 B の位置を時間 t の関数として表すことを考える。
重心系から見ると、A と B には中心方向の張力しか働かない。接線方向に力が働かないので、重心系から見たときの接線方向の方程式を考えると、$\dfrac{dv_a(t)}{dt} = \dfrac{dv_b(t)}{dt} = 0$ となり、A と B は等速円運動をする。

よって、等速円運動の角速度を ω とすると、重心から見た A と B の座標は、

$$\overrightarrow{\mathrm{GA}} = \left(\frac{l}{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),\ \frac{l}{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{l}{2}\sin\omega t,\ -\frac{l}{2}\cos\omega t\right) \tag{4.31}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{GB}} = \left(\frac{l}{2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),\ \frac{l}{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(-\frac{l}{2}\sin\omega t,\ \frac{l}{2}\cos\omega t\right) \tag{4.32}$$



となる。これらに、$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を足すことで、静止系での座標が求められる。そのため、結局、重心 G から見た A と B の y 座標が同じになれば良い。その条件は、

$$-\frac{l}{2}\cos\omega t = \frac{l}{2}\cos\omega t$$

である。よって、$\cos\omega t = 0$ であれば良い。
ここで、円運動の (接線方向の) 速度は、$v = r\omega$(r は円運動の半径) なので、次の式が成立する。

$$\frac{1}{2}\sqrt{2gl} = \frac{l}{2}\omega \quad \Longleftrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

よって、$\cos\omega t = \cos\left(\sqrt{\frac{2g}{l}}\right)t = 0$ が成立すればよい。これを満たす最小の t は、$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{2g}}$ である。

(6) 式 (4.26) の加速度の部分を、A と B の運動方程式 ($m\boldsymbol{a_A} = \boldsymbol{F_A},\ m\boldsymbol{a_B} = \boldsymbol{F_B}$) を使って次のように書き直す。

$$\boldsymbol{a_G} = \frac{\boldsymbol{F_A} + \boldsymbol{F_B}}{2m}$$

A に働く張力と B に働く張力は、大きさが等しく、向きが互いに反対向きなので、打ち消しあう。$\boldsymbol{a_G}$ に関与するのは、A と B に働く重力のみで、共に $m\boldsymbol{g} = (0, -mg)$ である。よって、

$$\boldsymbol{a_G} = \frac{m\boldsymbol{g} + m\boldsymbol{g}}{2m} = (0, -g)$$

である。$t = 0$ の時の、重心速度は式 (4.28) より $\boldsymbol{v_g(0)} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2gl},\ 0\right)$ なので、

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2gl}\cdot t,\ -\frac{1}{2}gt^2\right)$$

これに $\overrightarrow{\mathrm{GA}}$ を足して、

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2gl}\cdot t + \frac{l}{2}\sin\omega t,\ -\frac{1}{2}gt^2 - \frac{l}{2}\cos\omega t\right)$$

である。 □

4.3 慣性力

満員電車。想像するだけでイライラしてしまう。そんな満員電車に関する記事[(10)]にこんなものがある。2018 年 4 月 12 日に投稿されたこんなツイートが話題になったらしい。

> 満員電車でサラリーマンに「てめぇ押してんじゃねーぞ！」って罵声浴びせられたんで「てめぇが押されたって感じてたらな、俺も同じ力でてめぇに押されてんだよ !! これが作用反作用の法則じゃ !!! 」って言い返したら拍手起きた。ありがとう高校の担任。人生で初めて物理が実世界に役立ったよ。

満員電車の中で、高校で習う物理の内容が起きていることを伝える記事である。満員電車の中で起きるのは、この記事でも取り上げられている「作用・反作用の法則」だけではない。この Section では、3 つのことについて考える。

- 電車が停止しようと減速を始めるときや、電車が発進しようとしている時に、私たちがつい前や後ろに倒れそうになってしまう現象。
- 回転座標系から見た運動。「遠心力」とは何かを考える。
- 慣性力の視点を導入して、これまでに見た問題を解き直す。

ここで、非常に厄介な言葉、「**慣性系**」について定義しよう。慣性系について、『新・物理入門』ではこのように書かれている。

> 運動方程式 $m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$ が成立する系、つまり物体に力を加えたときそれに比例した加速度の生じる座標系を**慣性系**と呼ぶ。

ただ、『理論物理への道標』と『はじめて学ぶ物理学 学問としての高校物理』では、次のように定義されている。

> 慣性の法則が成り立つ座標系を**慣性系**と呼ぶ。

この TEX ノートでは、1.2.2「慣性の法則の裏の意味」(7 ページ) で、慣性の法則の主張を説明している。慣性の法則は直感的には運動方程式と同じことしか主張していないように見える。しかし、その裏では座標系によって、加速度の見え方が変わるけれど、この宇宙には「力 $\boldsymbol{F}$ が $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$ の時に、加速度 $\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ となる」座標系が少なくとも 1 つは存在することを慣性の法則は主張しているということを記した。わかるようでわからないのが「慣性」という概念である。

---
(10) `https://grapee.jp/484995`

4.3.1　互いに並進運動している 2 つの座標系

Prologue

物体の運動は、基準点に対する座標がどう変化したかを記述することで初めて把握できる。この際、基準点は運動の前後で不動でなければ、物体の運動を正確に把握することは困難である。そこで、私たちは通常、座標系として地面に固定した座標系で選ぶことが多い。

地上の物体の運動を考える際は、地球を不動と考えて、電車に座標系を固定することはあまりしない。それは、運動の記述が静止しているものの上に固定した**静止座標系**で考える方が圧倒的に楽だからである。ただ、時には電車など動いている物体に座標系を固定した方が楽な場合がある。この subsection では、電車などに座標系を固定した時は、物体の運動はどのように見えるのかを考える。

質量 m の 1 つの質点の運動を 2 つの座標系で観測する。この 2 つの座標系は互いに並進運動[(11)]している。ここで、簡単にするために、一方の座標系は固定されているもので慣性系とする。固定されている方を S_0 とし、動いている方を S とする。S は S_0 (静止系) に対して速度 $\boldsymbol{V}$(この $\boldsymbol{V}$ は時刻 t の関数) で動いているとする。

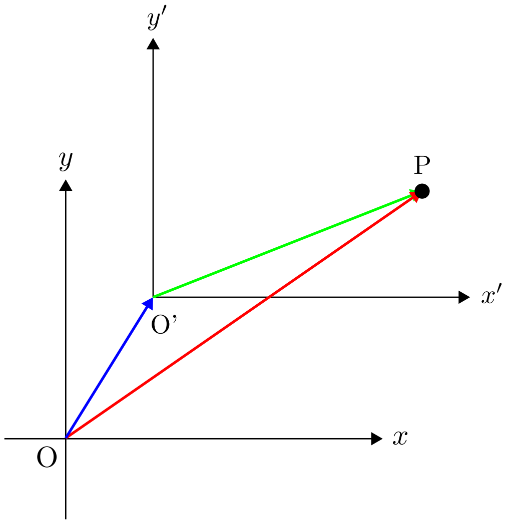


図 4.7: 2 つの座標系で物体の位置を把握する

点 P を 2 つの座標系からみる。

- 座標系 S_0 で見た時の点 P の位置ベクトルは、$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$
- 座標系 S で見た時の点 P の位置ベクトルは、$\boldsymbol{r'} = \overrightarrow{\mathrm{O'P}}$
- 座標系 S_0 から見た、座標系 S の原点の位置ベクトルを $\boldsymbol{R} = \overrightarrow{\mathrm{OO'}}$ とする。

すると、(上の図より、)

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r'}$$

が成り立つ。この式を時間 t で一回微分すると、

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{V} + \frac{d\boldsymbol{r'}}{dt}$$

(11) 座標系の**並進運動**とは、x, y, z 軸の方向が変わらず、ただ原点の位置が変化する運動のことをいう。

となり、さらにもう一回時間 t で微分すると、

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{\alpha} + \frac{d^2\boldsymbol{r'}}{dt^2} \tag{4.33}$$

となる。ただし、$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{V}}$ である。

さて、ここまでは簡単な計算をしただけだが、このような計算ができたのは、以下のような仮定を自明のこととして認めているからである。

絶対時間の仮定

時間の流れは絶対的なもので観測者や座標系によらない。

では、点 P にある質点の運動方程式を考えよう。座標系が並進運動しているとき、座標軸の方向が変わらないので、座標系 S_0 と座標系 S のどちらで見ても、外力のベクトルは同じである(12)。座標系が変わると、普通、ベクトル (矢印) 自体は変わらないが、その成分表示が変化する。しかし、並進運動で座標軸の方向が不変なら、ベクトルの成分表示も不変である。

(1) **Galilei 変換 (ガリレイ変換)**
$\boldsymbol{V}$ が定ベクトルの時、$\dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$ である。そのため、式 (4.33) は以下のように書き換えられる。

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{r'}}{dt^2} \tag{4.34}$$

そのため、座標系 S で観測している場合の運動方程式は、

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r'}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \tag{4.35}$$

となる。この式より、これは静止座標系 S_0 で観測している場合の運動方程式と同一である。

Galilei の相対性原理 (相対律)

Galilei 変換によって結ばれるあらゆる慣性系において物理法則は不変である。すなわち、互いに一様に並進運動している 2 つの慣性系では運動方程式は共通である。

(2) 慣性力が生じる場合
$\boldsymbol{V}$ が定ベクトルでない時は、式 (4.33) より、座標系 S_0 で観測している場合の運動方程式は以下のようになる。

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = m\left(\boldsymbol{\alpha} + \frac{d^2\boldsymbol{r'}}{dt^2}\right) = \boldsymbol{F}$$

この式を変形すると、

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r'}}{dt^2} = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{\alpha} \tag{4.36}$$

となり、これは座標系 S で観測した時の運動方程式に他ならない。しかし、$\boldsymbol{V} = \mathrm{const.}$ の時と異なり、右辺に $-m\boldsymbol{\alpha}$ の項がある。つまり、静止系に対し、加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ で動く座標系 S で運動を観測すると、$-m\boldsymbol{\alpha}$ という**仮想的な**力が外力と一緒にかかっているように見える。この仮想的な力のことを**慣性力**という。マイナスがついていることからわかるように、慣性力は $\vec{\alpha}$ の向きと反対向きにかかっているように見える。

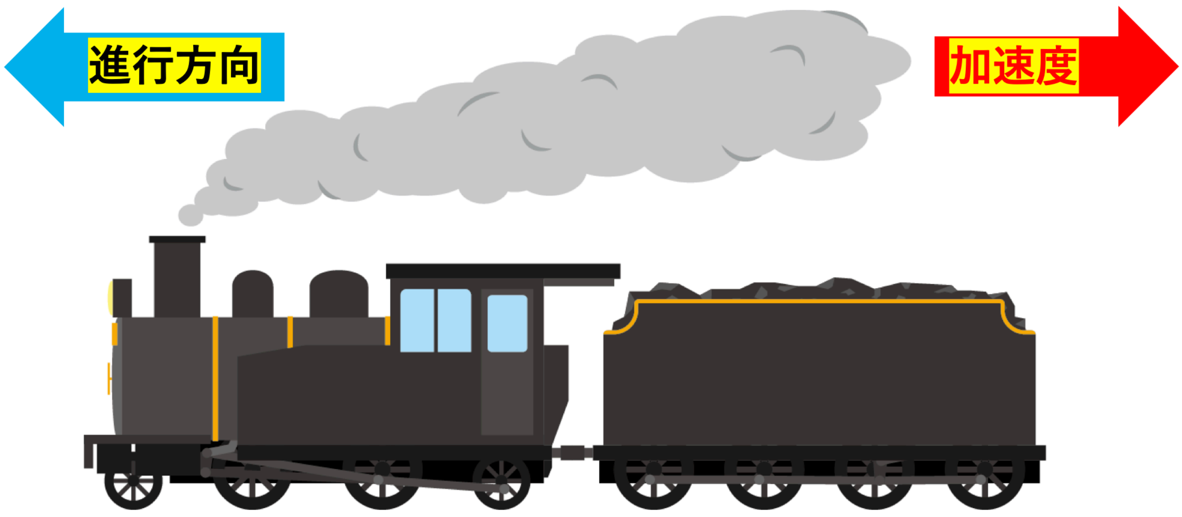


図 4.8: 慣性力のイメージ

駅で電車が止まろうとすると、進行方向の方に倒れそうになるのは、この慣性力を使うと説明できる。電車が止まろうとしているときは、(静止座標系から見た) 電車の加速度は進行方向と反対向きなので、電車の中の乗客は、進行方向の向きに慣性力を受ける。

4.3.2　回転座標系

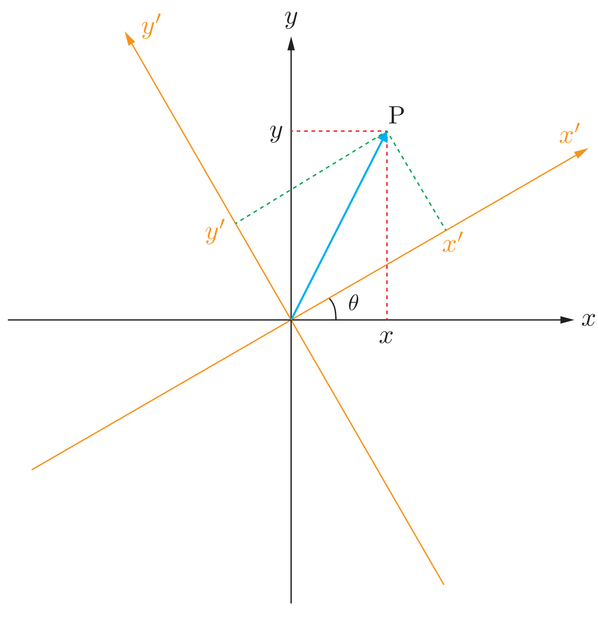


図 4.9: 回転座標系のイメージ ($\theta = \omega t$)

(12) 物体に働く力は、重力のようにどの位置でも一定のものや、距離に依存するもの (2 物体間の作用)、時間に依存するものなどがある。時間に依存するものについては、「絶対時間の仮定」より座標系 S_0 と S のどちらで見ても、力は同一であることがわかる。距離に依存するものは、座標系が変わることで 2 物体の座標は変わるが、絶対的な距離自体は変わっていないので、距離に依存する力も座標系によらず同一に見える。

今度は慣性系に対して座標系が回転している場合について考える。この subsection では物体の運動を原点のまわりに角速度 $\omega(=$ 一定$)$ で反時計回りに回転している回転座標系で見る。時刻 $t=0$ のときは、元の慣性系と回転座標系が完全に一致しているとする。

この Chapter の最初に取り上げた「座標変換」の時と同じように考える。小物体を回転座標系で見たときの位置 (x', y') と慣性系における位置 (x, y) の対応関係は以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'\cos\omega t - y'\sin\omega t \\ x'\sin\omega t + y'\cos\omega t \end{pmatrix} \tag{4.37}$$

この式を時間で 1 回微分すると、

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}'\cos\omega t - \omega x'\sin\omega t - \dot{y}'\sin\omega t - \omega y'\cos\omega t \\ \dot{x}'\sin\omega t + \omega x'\cos\omega t + \dot{y}'\cos\omega t - \omega y'\sin\omega t \end{pmatrix}$$

もう一度時間 t で微分する。

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} \\ &= \ddot{x}'\cos\omega t - \omega\dot{x}'\sin\omega t - \omega\dot{x}'\sin\omega t - \omega^2 x'\cos\omega t - \ddot{y}'\sin\omega t - \omega\dot{y}'\cos\omega t - \omega\dot{y}'\cos\omega t + \omega^2 y'\sin\omega t \\ &= \ddot{x}'\cos\omega t - 2\omega\dot{x}'\sin\omega t - \omega^2 x'\cos\omega t - \ddot{y}'\sin\omega t - 2\omega\dot{y}'\cos\omega t + \omega^2 y'\sin\omega t \end{aligned}$$

同様に加速度の y 成分を計算すると、

$$\begin{aligned} a_y &= \frac{dv_y}{dt} \\ &= \ddot{x}'\sin\omega t + \omega\dot{x}'\cos\omega t + \omega\dot{x}'\cos\omega t - \omega^2 x'\sin\omega t + \ddot{y}'\cos\omega t - \omega\dot{y}'\sin\omega t - \omega\dot{y}'\sin\omega t - \omega^2 y'\cos\omega t \\ &= \ddot{x}'\sin\omega t + 2\omega\dot{x}'\cos\omega t - \omega^2 x'\sin\omega t - \ddot{y}'\cos\omega t - 2\omega\dot{y}'\sin\omega t - \omega^2 y'\cos\omega t \end{aligned}$$

よって、加速度については次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} &= \cos\omega t \begin{pmatrix} \ddot{x}' - \omega^2 x' - 2\omega\dot{y}' \\ 2\omega\dot{x}' - \ddot{y}' - \omega^2 y' \end{pmatrix} + \sin\omega t \begin{pmatrix} -2\omega\dot{x}' - \ddot{y}' + \omega^2 y' \\ \ddot{x}' - \omega^2 x' - 2\omega\dot{y}' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}' - \omega^2 x' - 2\omega\dot{y}' \\ 2\omega\dot{x}' - \ddot{y}' - \omega^2 y' \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.38}$$

慣性系での運動方程式は、

$$m\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

と書ける。式 (4.38) を代入すると、

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}' - \omega^2 x' - 2\omega\dot{y}' \\ \ddot{y}' - \omega^2 y' + 2\omega\dot{x}' \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

となる。

あとは f_x, f_y を変換することで、回転座標系における方程式を導くことができる。座標系が並進移動している時は座標軸の向きが変わらないので、外力ベクトルの成分表記は不変であった。しかし、回転座標系では、式 (4.5)(81 ページ) のような変換を外力ベクトルも受ける。

$$\begin{pmatrix} f_x{}' \\ f_y{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x\cos\omega t + f_y\sin\omega t \\ -f_x\sin\omega t + f_y\cos\omega t \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

式 (4.39) と式 (4.40) を使って、回転座標系における方程式を導こう。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_x{}' \\ f_y{}' \end{pmatrix} &= m \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}}_{R(-\omega t)} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}}_{R(\omega t)} \begin{pmatrix} \ddot{x}' - \omega^2 x' - 2\omega \dot{y}' \\ \ddot{y}' - \omega^2 y' + 2\omega \dot{x}' \end{pmatrix} \\
&= m \begin{pmatrix} \ddot{x}' - \omega^2 x' - 2\omega \dot{y}' \\ \ddot{y}' - \omega^2 y' + 2\omega \dot{x}' \end{pmatrix} \\
&= m \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \end{pmatrix} - m\omega^2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 2m\omega \begin{pmatrix} \dot{y}' \\ -\dot{x}' \end{pmatrix} \qquad (4.41)
\end{aligned}$$

この式を変形することで、回転座標系から見たときの運動方程式が得られる。

回転座標系から見たときの運動方程式

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_x{}' \\ f_y{}' \end{pmatrix}}_{\text{外力}} + \underbrace{m\omega^2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{\text{遠心力}} + \underbrace{2m\omega \begin{pmatrix} \dot{y}' \\ -\dot{x}' \end{pmatrix}}_{\text{コリオリ力}} \qquad (4.42)$$

式 (4.42) は、回転座標系から見たときの運動方程式である。回転座標系の場合、外力に加えて 2 つの成分が登場する。この 2 つの成分は回転座標系でみたときにのみ現れる仮想的な力である。右辺の第 2 項を**遠心力**、第 3 項を**コリオリ力**という。

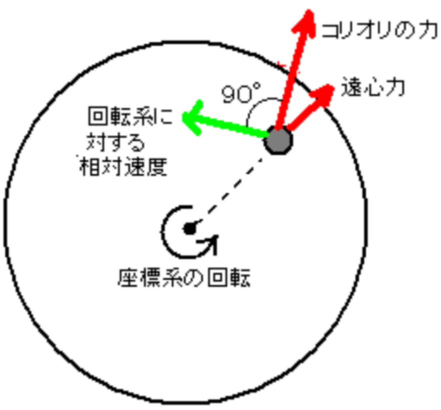


図 4.10: 遠心力とコリオリ力
(`http://www.wind.sannet.ne.jp/nakahiro/coriolis/cori.html`)

$\boldsymbol{V'} = (\dot{x}',\ \dot{y}')$ に対して、$(\dot{y}',\ -\dot{x}')$ は $\boldsymbol{V'}$ に対して右向きのベクトルである(13)。そのため、遠心力とコリオリ力は以下のような力であることがわかる。

- **遠心力**: 中心 (回転の中心) から遠ざかる方向に働く力。
- **コリオリ力**: 速度ベクトルに直交する方向 (進行方向に対して右向き) に働く力。

(13) まず、一般に点 (a, b) を考える。

$$R(-90^\circ) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

なので、点 $(b, -a)$ は点 (a, b) を原点のまわりに -90° させて得られる点である。

このSubsectionの後半は、特に高校物理で重要な「**遠心力**」について考える[14]。私は、このパートを(最初に)作成する2ヶ月前まで自動車学校[15]に通っていた。学科教本に「**カーブなどでは常に遠心力が働くことを考え、カーブの手前で十分に速度を落とすことが大切です**」と書いてある。車の速度が速いと急カーブを曲がりきれなくなるからである。なぜ、車の速度が速いと曲がりきれなくなるかもしれないのか。

式(4.42)より、遠心力は、

$$m\omega^2\boldsymbol{r} = m\omega^2\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

と書ける。そのため、原点と物体の距離をrとすると、遠心力の大きさは$mr\omega^2$とかける。でも、原点はいったいどこにあるのか？それに、円軌道でもないのに、回転座標系をどう利用することができるのか。ここで、登場するのが「**曲率円**」という概念を導入しよう。

曲率円

(平面上の)曲線を局所的に円弧とみなすことで、曲線の曲がり具合を評価しよう。曲線を局所的に、すなわち、ある点Pの近傍で、円弧とみなした時のその円のことを**曲率円**といい、曲率円の半径を点Pにおける**曲率半径**という[16]。

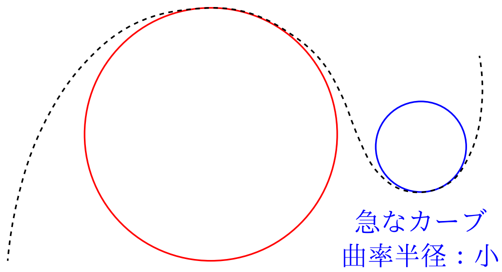


図4.11: 曲率円の大きさとカーブの緩急

カーブの軌道の一部分を円軌道で近似することにカーブの緩急を評価することができる。緩やかなカーブは、半径の大きな円の弧で、急なカーブは、半径の小さな円の弧で、一部分が近似できる。さて、近似的に円軌道とみなせるので、円運動の式で運動を予想・解析することが可能になる。上に書いた通り、遠心力の大きさは$mr\omega^2$と書けるが、円運動の場合、$v = r\omega$なので、mv^2/rと書くこともできる。

すると、**速度が同じならば、円軌道の半径が小さいほど、遠心力は大きくなる**。そのため、急カーブを通過するときに、ドライバーは外向きの強い遠心力を感じて、適切に車を操作できなくなる可能性が高くなるのである。だから、遠心力も考慮して、カーブの手前でスピードを落とす必要があるのである。

---

[14] youtubeでも遠心力やコリオリ力を説明している動画が見つかる。以下のyoutube動画では遠心力やコリオリ力をうまく説明している。

- 遠心力: `https://youtu.be/lOV_uHi2_EI`
- コリオリ力: `https://youtu.be/uIicLKeDrfY` `https://youtu.be/xtk8PPE2CxM`

「コリオリ力」の方の動画でも説明しているが、回転座標系の場合は、コリオリ力の扱いを考えなければならないので、入試問題で回転座標系を自ら導入するのは危険であるだろう。

[15] 運転免許を取得する前に行く「自動車学校」の呼び方は地域によって違うらしい。私は「教習所」と呼んでいた。地域ごとの呼び方については下記のページなどをみて欲しい。
`https://www.ai-menkyo.jp/column/designation-of-driving-school.html`

[16] 曲率半径Rの逆数を曲率κという。曲率が大きいほど、曲線の曲がり具合が急であることを表す。

4.3.3　慣性力とは何か？

先ほどまで自動車を運転するときはカーブの直前でスピードを落とす必要がある理由を考えた。自動車学校では遠心力がかかるからスピードを落とす必要があると習うこともふれた。でも、前の subsection の式 (4.42) を記した直後に、遠心力については、回転座標系でみたときにのみ現れる仮想的な力であるとふれた。

『新・物理入門』の「2-13 動く座標系」の section には遠心力に関して以下の記述がある。

> 座標系の回転によって純粋に数学的に生じたもの — 実体的起源をもたない見かけの力 — であることがわかる。

また、『はじめて学ぶ物理学』では遠心力について以下のように記されている。

> 遠心力は物体の回転ではなく、観測する座標系の回転によって現れる。物体の円運動を遠心力で説明することは概念的に本質的な誤りである。

仮想的な力で議論しようとするのは本来は間違っているのである。静止系から見ると、カーブを通過するからといって、自動車に遠心力はかかっていない。実際、カーブの前に速度を落とす必要がある理由については、遠心力を考える必要はないと言い切れる。カーブ、特に急なカーブの直前で速度を落とすのは、mv^2/r の v が原因である。

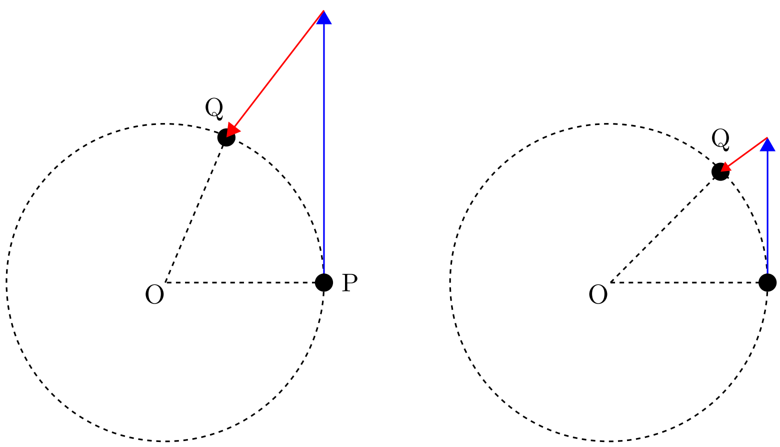


図 4.12: 円軌道を維持するにはどうすればよいか？

図 4.12 のように、物体が点 P にあり青矢印のような速度ベクトルを持つとしよう。速さが大きいと、大きく円軌道からそれる可能性があるので、円軌道を保とうとするなら中心方向に大きな加速度を持つ必要がある。つまり、カーブの直前で速度を落とす必要がある理由は、遠心力とは関係なく、スピードを持っていると、カーブを曲がり切れないからである。

物体が円軌道をしている時の中心方向の加速度は、4.2.1「円運動の速度と加速度」(85 ページ) に記した通り、v^2/r なので、r が一定ならば、v が大きいときは、大きな加速度が必要である。運動方程式 $ma = F$ から、大きな加速度を発生させるには、大きな力が必要である。大きな力に相当するのが、急ハンドルによる短時間での大きな方向転換に相当するのだろう。ただ、急ハンドルは非常に危険な操作である。だから、カーブの直前でスピードを落とす必要がある。

4.3.4 慣性力を用いて再度考える

再び、座標系が並進運動する場合について考えよう。加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ で動く座標系 (非慣性系) では、

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r'}}{dt^2} = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{\alpha} \tag{4.36}$$

のように $-m\boldsymbol{\alpha}$ が付け加わった式が成立する。この $-m\boldsymbol{\alpha}$ は慣性力であり、遠心力と同様に「**数学的に生じた実体的起源をもたない見かけの力**」である。しかし、座標系が並進運動する場合は、非慣性系、つまり、動く物体の上に設定した座標系で議論し、見かけの力である慣性力を導入して議論した方が楽であることが知られている。

第 1 章の 1.5「運動方程式を解く (3)」を慣性力の視点から考えよう。状況設定はこんな感じであった。

- 斜面は固定されていない。
- 斜面の一番上から物体が滑り落ちる。
- 小物体と台の質量をそれぞれ $m,\ M$ とする。
- $a_x,\ a_y$ を小物体の x 方向、y 方向の加速度、A を台の x 方向の加速度とする。ただし、x 方向は右向き。y 方向は下向きとする。

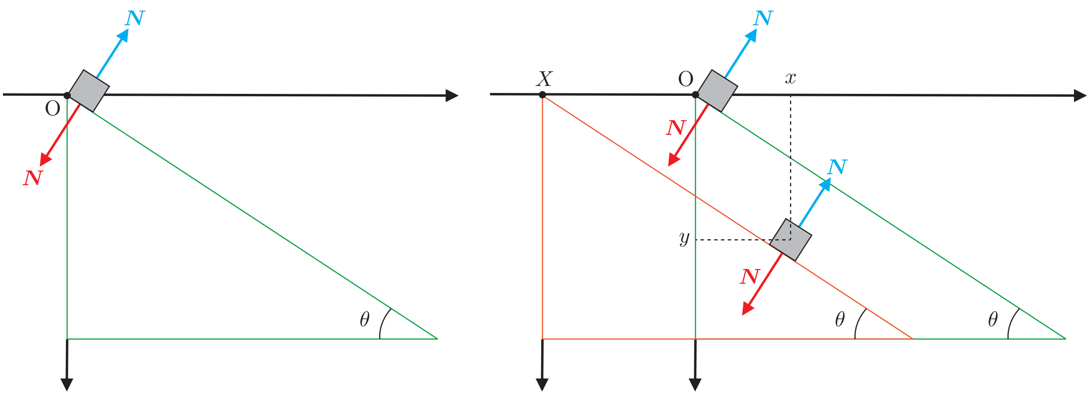


図 4.13: 第 1 章の 1.5「運動方程式を解く (3)」で考えた状況

今回は静止系からではなく、台上の観測者から運動をみることにする。台上の観測者から見た時は図 4.14 のように見える。

静止系から見た時、斜面には図 4.13 の右側の図の赤矢印のように垂直抗力が働く。そのため、台は水平左方向に力を受ける。つまり、水平左方向に加速度を持つ。この加速度の大きさは、

$$MA = -N\sin\theta \quad\Longleftrightarrow\quad |A| = \frac{N\sin\theta}{M}$$

となる。

ここで、斜面上の観測者から見た小物体の斜面に垂直な方向と平行な方向の運動方程式は、慣性力の効果が加わって以下のようになる。α は斜面を滑り降りる方向を正とする。

$$\begin{cases} 0 = N + m|A|\sin\theta - mg\cos\theta & (\text{斜面に垂直な方向}) \\ m\alpha = mg\sin\theta + m|A|\cos\theta & (\text{斜面に平行な方向}) \end{cases} \tag{4.43}$$

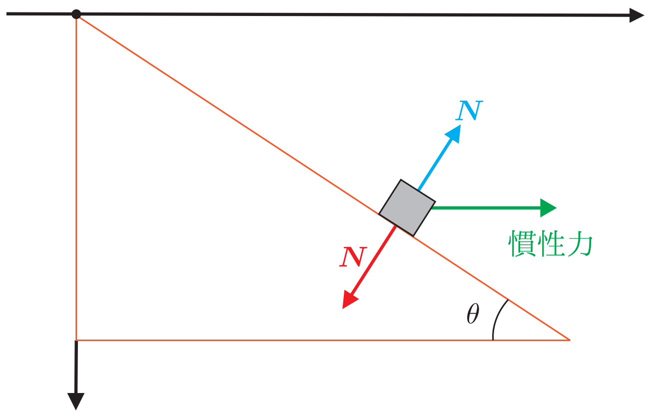


図 4.14: 第 1 章の 1.5「運動方程式を解く (3)」の状況を台上の観測者から見ると？

となる。上のつりあいの式に $|A|$ の値を代入することで、

$$N\left(1+\frac{m\sin^2\theta}{M}\right)=mg\cos\theta \quad\Longleftrightarrow\quad N=mg\cos\theta\cdot\frac{M}{M+m\sin^2\theta}$$

と容易に求められる。このように必要に応じて静止系以外からの視点を利用することで問題を解きやすくなることがある。

第 5 章　単振動

この世界ではたくさんの振動現象が起きている。この Chapter では、振動現象の中で最も単純な振動である単振動について考える。単振動は最も単純であるが、極めて考察する価値が高い。なぜなら、複雑な振動は、Fourier 級数展開という数学的技法により、理想化された単純な振動の重ね合わせでみなすことができるからだ。そのため、単純な振動さえわかれば、後は重ね合わせればよい。

考察の価値がある単振動だが、この Chapter では、1 次元の場合を中心に考える[1]。この Chapter では次の順番で見ていく。

1. 質点の位置を時間の関数 $f(t)$ で表した時、$f(t)$ が単純な sin 関数であるとき、この質点がどのような運動方程式にしたがっているかを考える。
2. 逆に、質点に働く力が位置 x のみに依存して、$-kx$ と書ける時に、位置 x が三角関数で書けることを調べる。
3. 単振動の簡単な応用例として、鉛直につるしたバネにつながれた物体の運動と単振り子について考える。
4. 単振動の応用編として、「バネでつながれた 2 物体の運動」や「連成振動 (物体は 2 個)」を取り扱う。
5. 安定な平衡点、平衡点周りの振動といった高校物理の教科書では絶対に出ないけど、入試では (丁寧な) 誘導付きで出てくる話の理論を少しだけ見る。
6. 電磁気分野の「交流」で登場する減衰振動と強制振動の予習をする。[2]

この Chapter は半分以上が高校物理の範囲[3]を逸脱するだろうが、読者の皆さんはぜひついてきて欲しい。

5.1　質点はどのような運動方程式に従っているのか

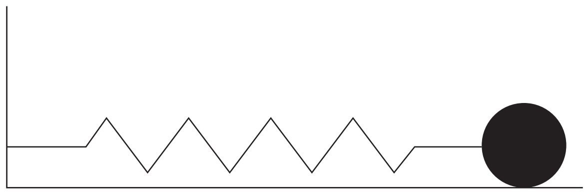


図 5.1: バネにつながれた物体

バネに物体をつなぎ、手でバネを伸ばし、手をはなすと、物体は往復運動をする。この往復運動の軌跡は sin 関数で書くことができる。さて、質点の位置が $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ と書かれるとき、質点はどのよう

[1] 2 次元の場合は、物体は楕円軌道 or 線分を描く。このことを示し、運動を正確に把握するには、角運動量や行列の対角化の知識が必要なので、この TEX ノートでは扱わない。一応、この TEX ノートは高校物理についてまとめたものなので。

[2] 高校数学の範囲内では、減衰振動と強制振動は厳密には解析できない。減衰振動については、「ファインマン物理学」の方法をもとに、微分方程式の解の振る舞いを見ていく。なお、付録編の 191 ページ以降で、(理系の大学生の多くが必ず習う) 解析手法を紹介する。

[3] 高校物理で用いて良い数学の知識は、数学 1、数学 A、数学 2(微分・積分を除く)、数学 B(ベクトル) だったと思う。ここでいう「高校物理の範囲を逸脱する」とは、議論に用いる数学的知識のレベルが高校物理で OK とされている範囲を逸脱することを超え、大学で習う数学的知識を用いていることをさす。

な運動方程式に従うのか考える。簡単のために、原点をバネが伸びたり縮んだりしていない時の質点の位置を $x = 0$ とした。

一般的に、運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F \tag{5.1}$$

と書かれる。これまでは、F がわかっている時に、x を求めるための式が運動方程式だと考えていた。つまり、**右辺から左辺の方向**だけを考えていた。しかし、等式なので逆方向、**左辺から右辺の方向**を考えても、何も問題はない。言い換えると、$x(t)$ がわかっているのなら、式 (5.1) の左辺に代入することで、時刻 t で、物体に働く力 $F(t)$ がわかるということも、運動方程式は表しているのである。

$$\frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi) \tag{5.2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi) \tag{5.3}$$

となるので、

$$F(t) = -m\omega^2 A\sin(\omega t + \phi) = -m\omega^2 x(t) \tag{5.4}$$

と物体に働く力が時間とともに変化することがわかる。ここで、式 (5.4) の $m\omega^2$ は定数なので、これを k とおく。この定数 k のことを**バネ定数**という。

$x(t)$ の原点はどこにとるべきなのか。先ほど、バネが伸びたり縮んだりしていない時の質点の位置を原点にしたけど良いのか。

結論をかくと OK である。その理由を一言で書くと、バネに働く力が 0 となる点を原点にとると取り扱いが楽になるからである。前のページの図 5.1 のようなバネに繋がれた物体の振動の中心は、バネが全く伸びていない点である。$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ の中心は、$x = 0$ である。$x(t) = 0$ のとき、式 (5.2) より、$F(t) = 0$ となる。つまり、$x = 0$ ではバネに力が働いていない。

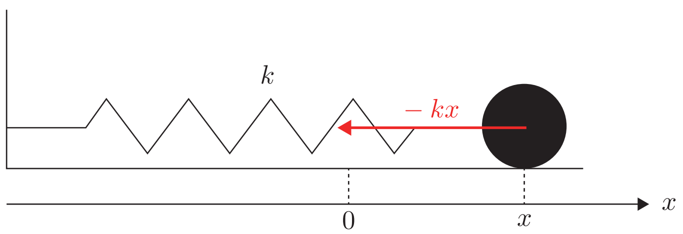
ここで、座標を次のように導入する。$x = 0$ は力が釣り合う平衡点とする。位置 x が原点の右側 $x > 0$ のとき、バネに繋がれた物体は原点に戻ろうとして、バネは左側に動こうとする。逆に、位置 x が原点の左側 $x < 0$ の時、バネに繋がれた物体は原点に戻ろうとして、バネは右側に動こうとする。そのため、バネに働く力の正負と位置の正負は逆であると考えられる。

バネに繋がれた物体に働く力 (復元力)

原点を自然長の位置 (バネが伸び縮みしていない位置) とする。以下の図のように x 軸を定めると、バネに繋がれた物体に働く力は、バネ定数を k として、

$$F = -kx \tag{5.5}$$

と表される。



5.2 質点の位置が三角関数で表される理由 (1)

今度は、物体に働く力が $-kx$ であることを既知として、位置 $x(t)$ が三角関数で表されることを考える。この section は 2 つの方法で、位置 $x(t)$ が三角関数であることを示す。

- 「物理入門」にも載っている方法。エネルギー保存則の式を変形すると、$v-x$ 平面における楕円の方程式になることを使う[4]。
- エネルギー保存則の式を積分する

5.2.1 エネルギー保存則の導出

質点の速度を v とすると、運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -kx \tag{5.6}$$

となる。2.1.3「仕事率」と同様に、両辺に $v = \dfrac{dx}{dt}$ をかけると、**エネルギー保存則**が導ける。左辺に v を、右辺に $\dfrac{dx}{dt}$ をかけるとうまく変形できる。

$$\begin{aligned} mv\frac{dv}{dt} &= -kx\frac{dx}{dt} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) \\ \therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

となるから、$\dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kx^2$ は一定である。この一定値を E とすると、**エネルギー保存則**は次のようにかける。

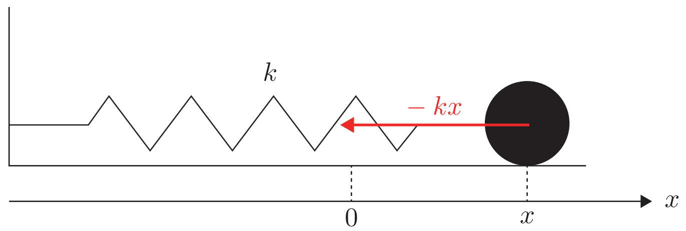
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E \tag{5.7}$$

バネに繋がれた物体に働く力 (復元力)

原点を自然長の位置 (バネが伸び縮みしていない位置) とする。バネに働く復元力は $F = -kx$ と書ける。このとき、バネが持つエネルギー (**バネの弾性エネルギー**) は

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \tag{5.8}$$

弾性エネルギーは、バネが $|x|$ 伸びている、あるいは $|x|$ 縮んでいる時に、自然長に戻ろうとする復元力からきている。



[4] $v-x$ 平面で考えるかわりに、大学で習う物理学では運動量 $p = mv$ と位置 x を用いた $p-x$ 平面を考えることが多い。これを**相空間**という。速度のかわりに運動量を用いるという考え方は、量子力学などでは当たり前の考え方である。

5.2.2　エネルギー保存則を楕円の方程式と見る

エネルギー保存則の式の右辺が 1 になるように、両辺を E で割って整理すると、

$$\frac{v^2}{\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}\right)^2}+\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{2E}{k}}\right)^2}=1$$

となり、これは $v-x$ 平面における楕円の方程式である。そのため、v と x はパラメーター θ を用いると、次のようになる。

$$x=\sqrt{\frac{2E}{k}}\sin\theta \tag{5.9}$$

$$v=\sqrt{\frac{2E}{m}}\cos\theta \tag{5.10}$$

ここで、$v=\dfrac{dx}{dt}$ なので、式 (5.9) を時間 t で微分すると、

$$v=\sqrt{\frac{2E}{k}}\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dt} \tag{5.11}$$

となるので、式 (5.10) と式 (5.11) を比較することで、

$$\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

となり、これを積分することで、$\theta=\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\delta$ (ただし、δ は積分定数) となる。これを式 (5.9) に代入すると、

$$x=\sqrt{\frac{2E}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\delta\right) \tag{5.12}$$

となる。従って、$A=\sqrt{\dfrac{2E}{k}}$, $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおくと、$x=A\sin(\omega t+\delta)$ となり、以上より、式 (5.6) で表される運動方程式に従う質点の位置は三角関数で表されることがわかった。

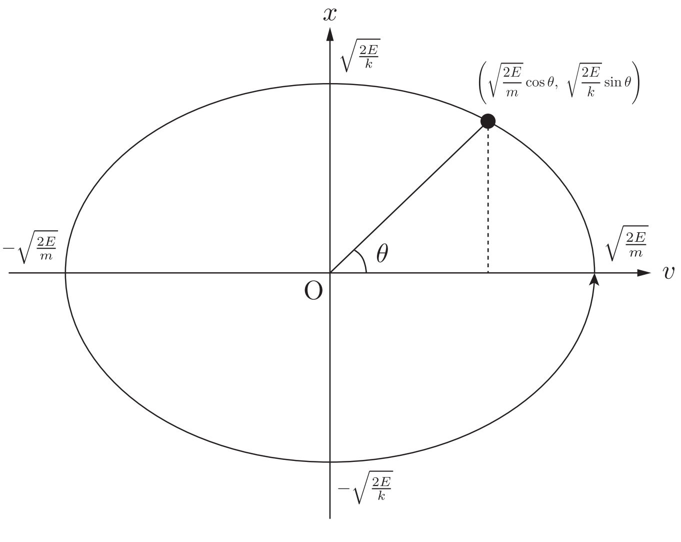


図 5.2: 相空間上で単振動を見る

ちなみに、相空間 ($v-x$ 平面) で単振動を見てみると、v と x のパラメーター表示が式 (5.9) や式 (5.10) のように書けるので、図 5.2 のようになる。質点の速度 (v) と位置 (x) の時間変化を考える。x が最大のと

き、v は正から 0 になり負に変わる。逆に、x が最小のとき、v は負から 0 になり正に変わる。このことから、相空間 ($v-x$ 平面) 上での質点の時間変化を追跡すると、楕円上を反時計回りに動くことがわかる。

5.2.3 エネルギー積分

今度は、エネルギー保存則からアプローチする。$v=\dfrac{dx}{dt},\ k=m\omega^2$ であることから、エネルギー保存則は次のようにかける。

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2=E$$

この式を変形すると、

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2&=\frac{2E}{m}-\omega^2x^2\\ \frac{dx}{dt}&=\pm\sqrt{\frac{2E}{m}-\omega^2x^2}\\ &=\pm\omega\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}-x^2}\\ &=\pm\omega\sqrt{\frac{2E}{k}-x^2}\end{aligned}$$

となる。$A^2=\dfrac{2E}{k}$ とおくと、

$$\frac{dx}{dt}=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$$

となり、後は**変数分離法**を用いて、この微分方程式をとけばよい。

$$\int\frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}dx=\pm\omega\int dt$$

左辺を $x=A\sin\theta$ で置換すると、

$$\begin{aligned}\int\frac{A\cos\theta}{|A\cos\theta|}d\theta&=\pm\omega\int dt\\ \int d\theta&=\pm\omega\int dt\\ \therefore\theta&=\pm\omega t+c\end{aligned}$$

となる。そのため、$x=A\sin(\pm\omega t+c)$ となる。ただ、これは、$A,\ c$ をうまくとることで、$x=A\sin(\omega t+c)$ の形で統一できる。

5.3 質点の位置が三角関数で表される理由 (2)(発展)

5.3.1 テイラー展開とは何か

ここからは、高校数学の内容を逸脱した方法で、運動方程式 $m\ddot{x} = -kx$ の解 $x(t)$ を考える。ここからの内容は、私が東大の 1 年生の時に、力学の先生が行った方法を参考にしている。その方法は、ベキ級数解を仮定し、運動方程式 (2 階の微分方程式) に代入することで、微分方程式を解く方法であり、次の順番で説明していく。

1. テイラー展開とは何かを理解する。
2. 指数関数 e^x、三角関数 $\sin x,\ \cos x$ のテイラー展開を求める。
3. オイラーの公式を導く。
4. ベキ級数解を運動方程式に代入して、運動方程式の解が三角関数であることを確認する。

テイラーの定理とテイラー展開の導出は、高校レベルでは知っている必要はない。ここでは、こんな数学的公式があるんだなぁと思うだけで十分である。一応、テイラー展開の導出については、付録編の 181 ページから数ページかけて扱う。

テイラーの定理

n を 1 以上の整数とする。区間 $I = [a, x]$ で n 回微分可能な実数値関数 f に対して、

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^n + R_n(x) \tag{5.13}$$

により、$R_n(x)$ を定義する時、

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{5.14}$$

となる c で、$a < c < x$ を満たすものが存在する。ただし、$f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の第 k 階導関数を表す。

テイラー展開

$f(x)$ が a を含む区間 I で、何回でも微分可能[4]で、I 上の任意の点 x で

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

を満たすならば、$f(x)$ は I 上で、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned} \tag{5.15}$$

と表される。これを $x = a$ を中心とする**テイラー展開**という。

[5]厳密には微分して出てくる関数の連続性も要求される。しかし、高校物理の内容を扱っている限り、テイラー展開したい関数が、微分すると連続でない関数になることはないので、今回は省略する。

5.3.2 指数関数と三角関数のテイラー展開

前の Subsection で、テイラー展開について紹介したので、ここからは具体的な関数のテイラー展開を求める。求めるのは、e^x と $\sin x,\ \cos x$ である。特に、$x=0$ を中心とするテイラー展開を考える。(これを**マクローリン展開**ということもある)

(1) e^x のテイラー展開
テイラー展開できるかどうか調べるために、$R_n(x)$ の $n\to\infty$ の極限が 0 になるかどうかを調べる。$f(x)=e^x$ とし、$0\le|x|<a(<+\infty)$ とする。e^x は何回微分しても e^x なので、

$$0\le|R_n(x)|=\left|\frac{e^c}{n!}x^n\right|\le\frac{|e^c|}{n!}|x|^n<\frac{e^a}{n!}a^n\to 0\ \ (n\to\infty)$$

となる[(6)]。よって、$n\to\infty$ で、$R_n(x)\to 0$ となる。したがって、e^x は $x=0$ を中心にテイラー展開できる。テイラー展開の公式を使うと、$-a<x<a$ において、

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \tag{5.16}$$

となる。

(2) $\sin x$ のテイラー展開
$f(x)=\sin x$ とし、$0\le|x|<a(<+\infty)$ とする。$\sin x$ を微分すると、

$$\sin x\to\cos x\to-\sin x\to-\cos x\to\sin x\to\cdots$$

となる。そのため、任意の x に対して、$0\le|f^{(n)}(x)|\le 1$ となる。e^x の場合と同様に $R_n(x)$ を考える。

$$0\le\left|\frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n\right|\le\frac{1}{n!}|x|^n<\frac{a^n}{n!}\to 0\ \ (n\to\infty)$$

したがって、$\sin x$ は $x=0$ を中心にテイラー展開できる。$f^{(n)}(0)$ は、

$$0\to1\to0\to-1\to0\to\cdots$$

となるから、テイラー展開の公式を使うと、$-a<x<a$ において、

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots \tag{5.17}$$

となる。

(3) $\cos x$ のテイラー展開
$\sin x$ と同じように考えると、$\cos x$ のテイラー展開は以下のようになる。

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots \tag{5.18}$$

ここで、$\sin x$ と $\cos x$ のテイラー展開を見ると、$|x|$ が非常に小さいなら、$|x^n|\ (n\ge 2)$ は十分小さく無視できる。そのため、

$$\sin x\to x\quad \cos x\to 1 \tag{5.19}$$

---

(6) $a>0$ の時、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ が成立することを使った。

と近似できることがわかる[7]。この近似は、物理現象の概形を把握する時や物理の入試問題を解くときに使われる。では、$\sin x$ と x の差がどれぐらいか調べてみよう。$\sin x$ と x のグラフは以下の図 5.3 のようになる。緑の直線が x のグラフで、紫の曲線は $\sin x$ のグラフである。両者のグラフは、$x=0$ の近くでは一致しているように見える。

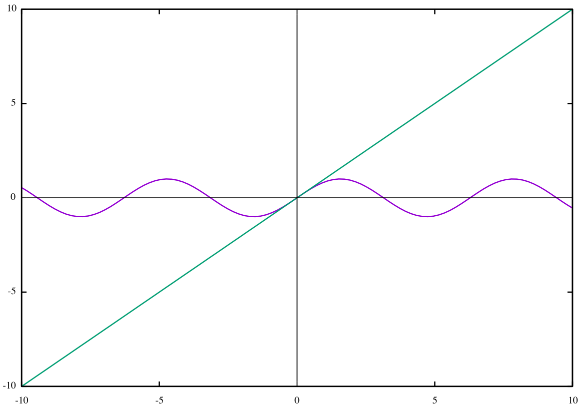


図 5.3: $\sin x$ と x のグラフ (1)

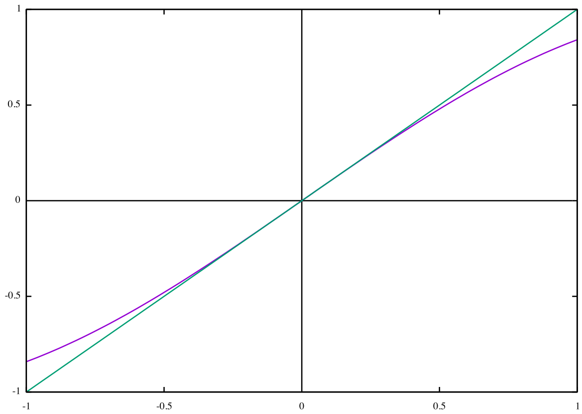


図 5.4: $\sin x$ と x のグラフ (2)

これを $x=0$ の周りだけに注目して拡大すると、図 5.4 のようになる。さらに、$\sin x$ と x の差、$\sin x - x$ について、$|x| \leq 0.3$ の範囲でグラフを書くと、図 5.5 のようになる。

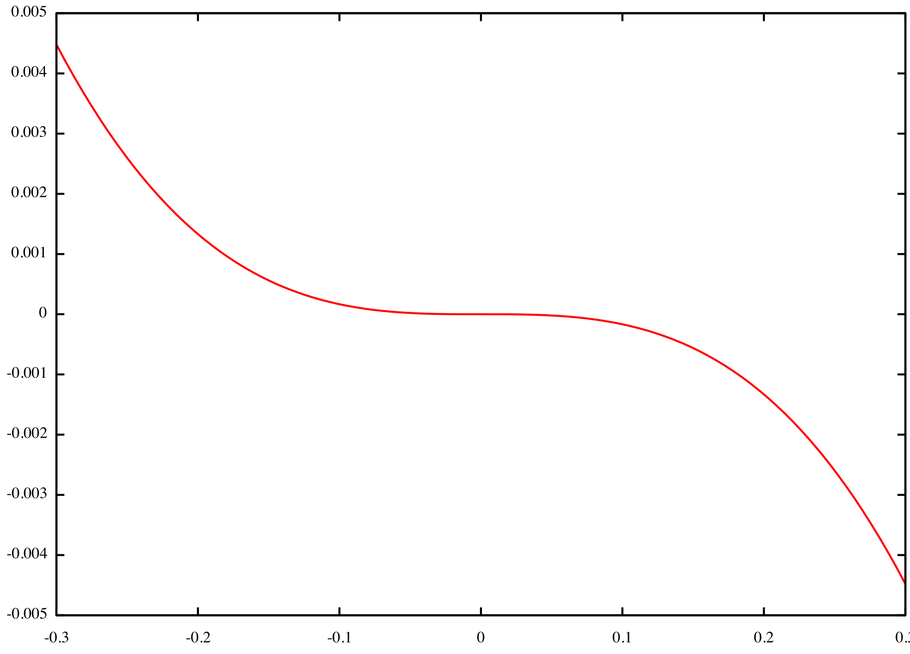


図 5.5: $\sin x$ と x のグラフ (2)

図 5.5 から分かるように、$-0.3 \leq x \leq 0.3$ の範囲内で、$\sin x$ と x の差の絶対値は $0.005(=1/200)$ より小さいことが分かる。これだけ小さければ、$|x|$ が非常に小さい時、$\sin x$ を近似的に x とみなしても良いだろう。

[7] $\cos x$ については定数 1 と近似する場合が不適切な場合があり、そのような時は、$\cos x \approx 1 - \dfrac{1}{2}x^2$ と近似することがある。

テイラー展開の話の最後に、数学 3 で習うあの極限の式について考える。$x \neq 0$ でかつ $|x|$ が非常に小さい時、

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

と $\sin x$ をテイラー展開できることは既に確認した。この式の両辺を x で割ると、

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \cdots \tag{5.20}$$

となるので、

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{5.21}$$

私は、テイラー展開を知るまで、数学 3 でこの式を習うから、x が 0 に近い時、$\sin x$ が x に近似できると考えていた。実際は、$\sin x$ のテイラー展開を考えた時、$|x|$ が非常に小さいなら、x の 2 次以上は非常に小さく無視できる。だから、$\sin x$ を x と近似できると考えるのが適切であろう。

5.3.3 オイラーの公式

今まで x が実数の場合を考えてきた。これを複素数に拡張できるかどうかについては、改めて考え直すのが適切であるが、ここではその手順を飛ばして先に進む。この Subsection では、次の「**オイラーの公式**」を示す。

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{5.22}$$

<u>証明</u>

e^x のテイラー展開の式に $x = i\theta$ を代入する。(i は $i^2 = -1$ を満たす複素数である。)

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

□

5.3.4 ベキ級数解を仮定して運動方程式を解く

「冪級数解」の「冪」はとても難しい漢字なので、「ベキ級数解」とカタカナで表記する。さて、そろそろ運動方程式を解こう。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

の解として、

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots \tag{5.23}$$

とベキ級数解を仮定する。この式を 2 回微分すると、

$$x''(t) = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 \cdot t + 4 \cdot 3 \cdot a_4 \cdot t^2 \cdots + n(n-1) \cdot a_n \cdot t^{n-2} + \cdots \tag{5.24}$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
&2a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3\cdot t + 4\cdot 3\cdot a_4\cdot t^2\cdots + n(n-1)\cdot a_n\cdot t^{n-2} + \cdots \\
&\qquad = -\omega^2(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots)
\end{aligned} \tag{5.25}
$$

となる。定数項、$t,\ t^2,\ t^3,\ \cdots$ の係数を比較すると、

$$
\begin{aligned}
-\omega^2 a_0 &= 2a_2 \\
-\omega^2 a_1 &= 3\cdot 2\cdot a_3 \\
-\omega^2 a_2 &= 4\cdot 3\cdot a_4 \\
&\vdots \\
-\omega^2 a_n &= (n+2)(n+1)\cdot a_{n+2} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

すると、

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{\omega^2}{2!}a_0 \\
a_3 &= -\frac{\omega^2}{3!}a_1 \\
a_4 &= -\frac{\omega^2}{4\cdot 3}a_2 = \frac{\omega^4}{4!}a_0 \\
a_5 &= -\frac{\omega^2}{5\cdot 4}a_3 = \frac{\omega^4}{4!}a_1 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

なので、k が 1 以上の整数の時、

$$
\begin{cases}
a_{2k} = \dfrac{(-1)^k\omega^{2k}}{k!}\cdot a_0 \\
a_{2k+1} = \dfrac{(-1)^k\omega^{2k}}{k!}a_1 = \dfrac{1}{\omega}\dfrac{(-1)^k\omega^{2k+1}}{k!}\cdot a_1
\end{cases} \tag{5.26}
$$

となるから、式 (5.23) は次のようにかける。

$$
\begin{aligned}
x(t) &= a_0 + \frac{a_1}{\omega}(\omega t) - \frac{(\omega t)^2}{2!}a_0 - \frac{(\omega t)^3}{3!}\frac{a_1}{\omega} + \frac{(\omega t)^4}{4!}a_0 + \frac{(\omega t)^5}{5!}\frac{a_1}{\omega} + \cdots \\
&= a_0\left(1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} + \cdots\right) + \frac{a_1}{\omega}\left((\omega t) - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \frac{(\omega t)^5}{5!}\cdots\right) \\
&= a_0\cos\omega t + \frac{a_1}{\omega}\sin\omega t \\
&= A\sin(\omega t + \phi)
\end{aligned}
$$

ゆえに、$x(t)$ は三角関数を用いてかけることが分かる。ただし、$A = \sqrt{(a_0)^2 + \left(\dfrac{a_1}{\omega}\right)^2}$, $\tan\phi = \dfrac{\omega a_0}{a_1}$ である。

5.4　単振動の具体例 (基礎)

5.4.1　鉛直バネ振り子 (1)

単振動の具体例として、鉛直に吊るしたバネの振動を考える。まずは、理論編。この Subsection では、「**単振動の位置エネルギー**」といわれるものを導くことを考える。

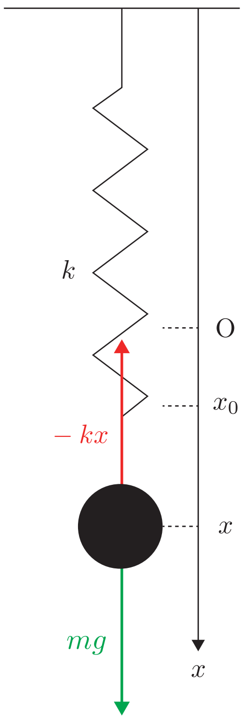


図 5.6: 鉛直バネ振り子

鉛直方向に x 軸 (下向きを正) をとる。O を自然長の位置、x_0 をつりあいの位置とする。物体には、上方向に弾性力、下方向に重力が働く。すると、運動方程式は、

$$m\frac{dv}{dt} = -kx + mg = -k\left(x - \frac{mg}{k}\right) \tag{5.27}$$

となる。この式より、x_0 はすぐに求められる。釣り合いの位置なので、$\dfrac{dv}{dt} = 0$ だから、

$$0 = x_0 - \frac{mg}{k} \iff x_0 = \frac{mg}{k}$$

である。

「鉛直バネ振り子」の問題では、たいてい鉛直下向きを正として座標系をとる。これはなぜか。考え方は、section1.7(25 ページ〜) と同じで、鉛直上向きを正にしても良いが、下向きを正にした方が楽であることがわかっているので、暗黙の前提として、鉛直バネ振り子の場合は、鉛直下向きを正の向きとする。

さて、運動方程式 (5.27) を解くことを考えよう。mg という余分な項がついているからどうにかしないといけない。どうすれば良いか。答えは、$X = x - x_0 = x - \dfrac{mg}{k}$ と変数変換することである。なぜなら、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(X + x_0) = \frac{dX}{dt}$$
$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2X}{dt^2}$$

となるため、式 (5.27) が

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX \tag{5.28}$$

と変形できるからである。この微分方程式より、$X(t)$ は、$X(t) = A\sin(\omega t + \delta)$ と書けることがわかる。$x(t) = X(t) + x_0$ なので、

$$x(t) = \frac{mg}{k} + A\sin(\omega t + \delta) = x_0 + A\sin(\omega t + \delta) \tag{5.29}$$

と求められる。ただし、ω は、$k = m\omega^2$ を満たす。

この式より、物体は、**釣り合いの点を中心に**単振動をすることがわかる。鉛直にバネが吊るされているときは、重力の影響を受けて、振動中心は少し下方にずれて、自然長の位置ではないことがわかる。

次に、メインテーマである「**単振動の位置エネルギー**」の話をしよう。とりあえず、運動方程式からエネルギー保存則を導く。運動方程式 (5.27) の両辺に、$v = \dfrac{dx}{dt}$ をかけると、

$$
\begin{aligned}
mv\frac{dv}{dt} &= -kx\frac{dx}{dt} + mg\frac{dx}{dt} \\
\therefore\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right) + \frac{d}{dt}(mgx) \\
\therefore\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx\right) &= 0
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

となる。

鉛直バネ振り子のエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx = E\ (\text{const.}) \tag{5.31}$$

この式より、バネの弾性エネルギーは、自然長からの伸び縮みに依存するのであって、振動中心 (釣り合いの位置) からの変位に依存するのではないことがわかる。このことが、バネの弾性エネルギーの重要な性質である。前に見た通り、物体に働く弾性力も、自然長からの伸び縮みに依存するというのが、バネの重要な性質である。

式 (5.31) で表されるエネルギー保存則の式を変形しよう。x について平方完成すると、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(x - \frac{mg}{k}\right)^2 = E + \frac{(mg)^2}{2k}\ (= \text{const.})$$

となる。$X = x - \dfrac{mg}{k}$ と変数変換すると、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kX^2 = E + \frac{(mg)^2}{2k} = E'\ (= \text{const.}) \tag{5.32}$$

となる。

式 (5.32) に出てくる $\dfrac{1}{2}kX^2$ は、バネの弾性エネルギー $\dfrac{1}{2}kx^2$ によく似た形をしている。これも「ジュール (J)」の単位を持つ量である。この $\dfrac{1}{2}kX^2$ は、「**単振動の位置エネルギー**」と言われる。

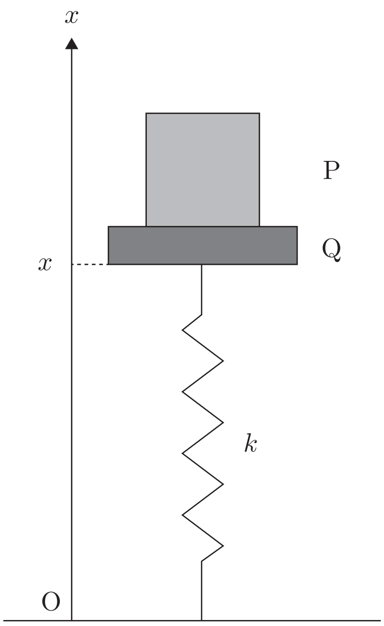
この単振動の位置エネルギーは、$X = x - \dfrac{mg}{k}$ と、X が重力の情報を含んでいるので、式 (5.32) の関係式では、重力の位置エネルギーの効果が見えないようになっていると考えても良いだろう。とにかく、**「単振動の位置エネルギー」を利用するときは、X が振動中心からの距離であることと、重力の位置エネルギーの項が見えないことに注意すれば良い。**

5.4.2 鉛直バネ振り子 (2)

この Subsection では、「鉛直バネ振り子」に関する問題を扱う。題材は、名問の森の 102 ページの問題である。(一部変更した箇所がある)

問題 10

床に固定された、自然長 l、ばね定数 k のばねに、質量 M の薄い台 Q を取り付け、その上に質量 m の小さなおもり P をのせ静止させた。そして、台を押し下げ、静かに放したところ、全体は運動を始めた。重力加速度の大きさを g とし、床を原点として、鉛直上向きに x 軸をとる。



(1) 初めの静止位置で、ばねの自然長からの縮み d を求めよ。

(2) おもり P をのせて上昇運動をしている台 Q の座標が x のとき、P が Q から受ける垂直抗力を N、加速度を a として、P と Q の運動方程式をそれぞれ書け。

(3) P と Q が一体となって単振動をする場合の振動の中心座標と周期を求めよ。

(4) P と Q が一体となって単振動を行うためには、初めの静止位置から押し下げる距離をいくら以下にしておく必要があるか。

(5) 初めの静止位置から台を $2d$ だけ押し下げ静かに放す。P が達する最高点の床からの高さを l と d で表せ。また、P が離れた後の、Q の単振動の振幅を $d,\ m,\ M$ で表せ。

(3) で、振動の**周期**を求める問題が出てくるのに、ここまでに周期の話をしていないので、ここで「周期」について考える。この TEX ノートでは、次のように周期を定義することにしよう。

単振動の周期

T を正の数とする。単振動をする物体の位置が、$x(t) = x_0 + A\sin(\omega t + \delta)$ の形で書けるとする。このとき、0 以上の任意の実数 t に対して、

$$x(t+T) = x(t)$$

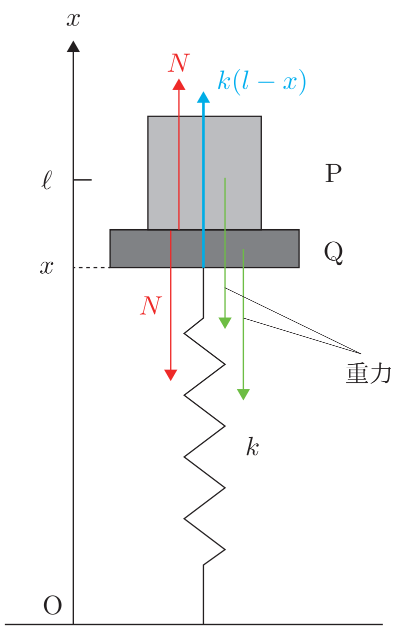
つまり、

$$x_0 + A\sin\{\omega(t+T)+\delta\} = x_0 + A\sin(\omega t + \delta) \tag{5.33}$$

を満たす最小の T を、振動の**周期**という。このような T は式 (5.33) より、$\omega T = 2\pi$ を満たすので、周期 T は次の式で与えられる。

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{5.34}$$

(解答)
では、各問題を考えよう。脚注[8]に書いたような考えを私は持っているので、私は (2) から考える。



(2) 物体に働く力は、左の図のようになる。P と Q が一体で動くということは、

「P と Q の加速度は等しい」

という**束縛条件**を満たしながら、P と Q は運動していることになる。**垂直抗力の反作用に注意すると**、P と Q の運動方程式は以下のようになる。

$$\begin{cases} ma &= N - mg \\ Ma &= k(l-x) - N - Mg \end{cases} \tag{5.35}$$

図は、$x \leq l$ の時について考えたが、$x > l$ のときは、バネに働く復元力の向きが反対になり、その大きさは $k(x-l)$ で表される。x 軸の向きも考慮すると、$x > l$ の時も、復元力は $k(l-x)$ で良い。以上より、(2) の解答は、上の 2 つの式である。　□

[8] この問題には重大な問題点がある。それは、運動方程式を書く問題が (1) ではなく、(2) になっていることだ。運動の解析は運動方程式を使うことで始まるのである。そのため、運動方程式を書かせる問題を出すなら、それは一番最初になければ意味がない。「名問の森」では、各問題のレベルが次のように書かれている。

- (1) 基本
- (2) 標準
- (3) 基本
- (4),(5) 応用

この問題は、(「名問の森」によると、静岡大学の入試問題らしいが、) 点取り問題を最初に置いていて、物理現象の解析の本質を見失っているように私には思える。

(1) 初めの静止位置 ($x = l - d$) では、P と Q の加速度は 0 である。P と Q の加速度の部分に 0 を代入して、式 (5.35) の 2 つの式の辺々を足すと、

$$0 = kd - (m+M)g \quad\Longleftrightarrow\quad d = \frac{(m+M)g}{k} \tag{5.36}$$

(3) P と Q の運動方程式の辺々を足す。$kd = (m+M)g$ に注意すると、

$$(m+M)a = k(l-x) - \underline{(m+M)g} \tag{5.37}$$

$$= k(l-x) - \underline{kd}$$

$$= -k\{x - (l-d)\} \tag{5.38}$$

となる。この式は P と Q が一体となった質量 $m+M$ の物体が、$x = l - d$ を中心に単振動をすることを表している。これより、$k = (m+M)\omega^2$ を満たす ω を使って、

$$x = (l-d) + A\sin(\omega t + \delta) \tag{5.39}$$

の形で、振動状態を表せる。ゆえに、振動の周期 T は、$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m+M}{k}}$ である。

(4) P と Q が一体となって運動するのは、お互いに垂直抗力を及ぼし、及ぼされる関係にある時である。つまり、運動中に P と Q の間に働く垂直抗力の最小値 $N_{\min}$ が $N_{\min} \geq 0$ の時である。式 (5.35) と式 (5.38) より、垂直抗力 N は

$$N = m(a+g) = m\left\{\frac{k}{m+M}(l-x) - g\right\} + mg$$

$$= \frac{km}{m+M}(l-x) \tag{5.40}$$

とかける。N は x に関して一次関数の関係であり、x の係数は負であることから、x が最も大きくなる $x = x_{\max}$ において、$N \geq 0$ であれば良い。$x = x_{\max}$ の時、

$$N = \frac{km}{m+M}(l - x_{\max})$$

なので、$l - x_{\max} \geq 0$、つまり、$x_{\max} \leq l$ であれば良い。

振動状態は式 (5.39) のように表せるから、振幅を A とすると、$x_{\max} = l - d + A$ なので、

$$l - d + A \leq l \quad\Longleftrightarrow\quad A \leq d$$

であれば良い。振幅 A は、初めの静止位置から押し下げた量に等しいので、求める答えは、

「初めの静止位置から押し下げる距離を $d = \dfrac{(m+M)g}{k}$ 以下にしておく必要がある」

である。 □

(5) の前半

初めの静止位置から $2d$ も押し下げたので、(4) の結果より、P と Q がずっと一体になって単振動をすることはない。P と Q が離れるのは、垂直抗力が初めて 0 となる位置である。運動を始めると、$x = l - 3d$ から $x = l + d$ へと x が単調に増加するように振動を始めるので、P と Q が離れるのは $x = l$ である。つまり、バネが自然長の長さになった時である。

P と Q が離れる瞬間、P と Q の速度は等しいので、その瞬間における P の速度を v_P とすると、エネルギー保存則 (「単振動の位置エネルギー」を使わない[9]) より、

$$\frac{1}{2}(m+M)(v_P)^2 = \frac{1}{2}k(3d)^2 - (m+M)g \times (3d)$$

となる。(点 P を重力の位置エネルギーの基準点とした。)

$$\begin{aligned}\therefore \quad (v_P)^2 &= \frac{9kd^2}{m+M} - 6gd \\ &= \frac{9k}{m+M}\left(\frac{(m+M)^2g^2}{k^2}\right) - 6g \cdot \frac{(m+M)g}{k} \\ &= \frac{3(m+M)g^2}{k}\end{aligned}$$

$x = l$ からのおもり P の上昇距離を L とすると、分離した後のおもり P の運動は、加速度 $-g$ の等加速度運動なので、次の式が成立する。

$$0 - (v_P)^2 = 2(-g)L \quad \Longleftrightarrow \quad L = \frac{{v_P}^2}{2g}$$

ゆえに、P が達する最高点の床からの高さは、

$$x_{\mathrm{P_{max}}} = l + L = l + \frac{3}{2}\frac{(m+M)g}{k} = l + \frac{3}{2}d$$

である。 □

(5) の後半

まず、P がなくなることで、振動中心は $x = l - \dfrac{Mg}{k}$ に変わる。求める振幅を A' とすると、Q の座標が最大となるとき、その座標は、$l - \dfrac{Mg}{k} + A'$ である。また、Q の x 座標が最大となる点では、$\dfrac{dx}{dt} = v = 0$ である。さらに、P と Q が分離した時の Q の速度 v_Q は、それまでは、P と Q が一体になって運動していたので、v_P と等しい。よって、重力の位置エネルギーの基準を $x = l$ とすると、エネルギー保存則より[10]、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M(v_P)^2 &= \frac{1}{2}k\left(A' - \frac{Mg}{k}\right)^2 + Mg\left(A' - \frac{Mg}{k}\right) \\ \frac{1}{2}M \cdot \frac{3(m+M)g^2}{k} &= \frac{1}{2}k\left(A' - \frac{Mg}{k}\right)^2 + Mg\left(A' - \frac{Mg}{k}\right) \\ \left(A' - \frac{Mg}{k}\right)^2 + \frac{2Mg}{k}\left(A' - \frac{Mg}{k}\right) - \frac{3M(m+M)g^2}{k^2} &= 0 \\ \therefore\ A' - \frac{Mg}{k} &= -\frac{Mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{Mg}{k}\right)^2 + \frac{3M(m+M)g^2}{k^2}} \\ \therefore\ A' &= \sqrt{\frac{Mg^2(4M+3m)}{k^2}} = d\sqrt{\frac{M(4M+3m)}{(M+m)^2}}\end{aligned}$$

(最後の変形は、$k = \dfrac{(m+M)g}{d}$ であることを使った。) □

[9] 私は「単振動の位置エネルギー」を使うのはあまり好きではない。なぜなら、重力による位置エネルギーが見えないことをうっかり忘れてしまう危険性が高いからだ。それに加えて、答案に書くとき、何の式か説明するのが難しい。「単振動の位置エネルギー」と書くのは適切なのか不明である。以上の理由により、計算量はやや増えるかもしれないが、正攻法のエネルギー保存則は使うのが安全だと私は考える。

[10] 計算式の 3 行目から 4 行目の変形において、$A' \geq 0$ となることを考慮して、複号 ($\pm$) は $+$ の方だけを取った。

5.4.3 単振り子 (1)

この Subsection では、振り子運動が近似的に単振動と同等であることについて書いていく。私は、たまたま時間があったので、東大の図書館の地下の書庫をブラブラしていたら、昔 (戦前や終戦直後) に書かれた物理の本を見つけた。中でも、坂井卓三先生が書かれた「初等力学」(1951 年) は、私が初めて見るアプローチで単振り子について書かれていて、とても面白かった。

この Subsection では、2 通りの方法で、振り子運動の軌跡を数式で表すことを考える。1 つ目は、運動方程式から攻めていく。2 つ目は、エネルギー保存則から攻めていく。後者は、坂井先生の本に書かれている解法である。

運動方程式からアプローチする

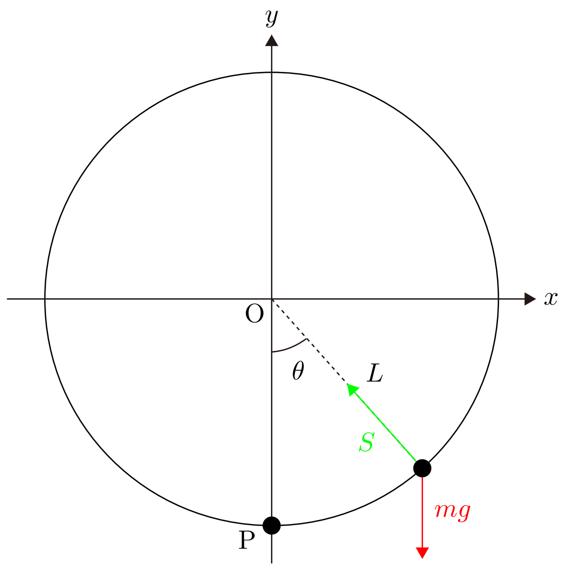


図 5.7: 単振り子

4.2.2「円運動の演習問題 (1)」で扱った $\boxed{\text{問題 8}}$ の (3) で、O を中心とする完全な円を描く (円軌道上をぐるっと 1 周する) 運動をするためには、最下点 P で小球に $\sqrt{5gL}$ 以上の速さを加える必要があることを触れた。

単振り子の問題は、最下点で加える速度が十分小さい時である。そのため、単振り子の運動の解析のスタートは、円運動と同じである。そのため、運動方程式は次のようになる[11]。

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{L} = S - mg\cos\theta & (\text{向心方向}) \quad (5.41) \\ mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta & (\text{接線方向}) \quad (5.42) \end{cases}$$

さて、θ が微小なら、$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ と近似することができるので、式 (5.42) は、

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta \tag{5.43}$$

[11] 周期で T を使うので、張力は S とした。また、糸の長さを L としたので、4.2.2 の r が L となっている。さらに、後の議論を楽にするため、4.2.1 の「円運動における速度と加速度」の式 (4.21) を使って、接線方向の加速度を、4.2.2 とは異なる書き方で書いた。

と変形することができる。これより、$\omega^2 = \dfrac{g}{L}$ となる正の数 ω や最大振れ角 θ_0 を用いて、

$$\theta(t) = \theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + c\right) \tag{5.44}$$

と振れ角が近似的に sin 関数で書けることがわかる。そのため、周期運動の周期は、

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{5.45}$$

である。この式より、単振り子の周期は振幅や質量に依存しないことがわかる。これを等時性という。

エネルギー保存則からアプローチする

運動方程式からのアプローチが、単振り子の王道といえる。でも、実は、それ以外のアプローチもあるらしい。それが「エネルギー保存則」からアプローチする方法である。

エネルギー保存則

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 - mgL\cos\theta\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 - mgL\cos\theta = \mathrm{const.} \tag{5.46}$$

これに、$v = L\dfrac{d\theta}{dt}$[12] を代入して、式を整理する[13] と、

$$\underbrace{L^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}_{v^2} = 2gL\cos\theta + c \tag{5.47}$$

となる。

まず、定数 c を決定する。$\theta = 0$ の時の速度を v_0 と書くことにすると、式 (5.47) より、

$$v_0{}^2 = 2gL + c \quad \Longleftrightarrow \quad c = v_0{}^2 - 2gL$$

となる。よって、式 (5.47) は、

$$L^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = (v_0)^2 + 2gL(\cos\theta - 1) \tag{5.48}$$

となる。ここで、$|\theta|$ が十分小さい時を考えることから、$\cos\theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$ と近似する[14]。すると、式 (5.48) は、

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{L}\left\{\frac{(v_0)^2}{gL} - \theta^2\right\} \tag{5.49}$$

と変形できる。この微分方程式をどう解けば良いか。

---

[12] 4.2.1 の「円運動における速度と加速度」(85 ページ) を参照。
[13] 定数を質量 m(定数) で割っても定数であり、この定数を c とした。
[14] 5.3,2「指数関数と三角関数のテイラー展開」の脚注 (7) を参照。$\cos\theta \approx 1$ と近似すると都合が悪いので、$\cos\theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$ と近似する。都合が悪い理由は、$\cos\theta - 1$ の部分を (Non-0 の) 多項式で近似したいのに、$\cos\theta \approx 1$ と近似すると、$\cos\theta - 1 \approx 0$ となるからである。

結論をかくと[15]、答えは、$\theta = \dfrac{v_0}{\sqrt{gL}}\cos\varphi$ とおけば良い。すると、

$$\left(-\frac{v_0}{\sqrt{gL}}\sin\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{L}\cdot\frac{(v_0)^2}{gL}(\sin\varphi)^2$$

となるが、$\sin\varphi$ は常に 0 ではないので、両辺を $\dfrac{(v_0)^2}{gL}(\sin\varphi)^2$ で割ると、

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{L}$$

という関係式が導ける。これを解くと、c' を定数として、

$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{g}{L}}t + c'$$

となるから、$\theta_0 = \dfrac{v_0}{\sqrt{gL}}$ とおくと、

$$\theta(t) = \theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + c'\right)$$

となる (c' が任意定数であることに注意)。「エネルギー保存則」からアプローチしても、振れ角は sin カーブとなることが確認できた。ただ、運動方程式から導く方法がはるかに楽であることがよくわかる。

---

(15) 式 (5.49) で表される微分方程式も**変数分離法**で解くことが可能である。式 (5.49) より、

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{g}{L}}\sqrt{\frac{(v_0)^2}{gL} - \theta^2}$$

となる。θ が十分小さいという仮定のもとでは、$\dfrac{(v_0)^2}{gL} - \theta^2 \geq 0$ としてよいだろう。以下、$\pm$ が $+$ の場合だけを考える。

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{g}{L}}\sqrt{\frac{(v_0)^2}{gL} - \theta^2}$$

変数分離法の王道ルートをいつも通り考えると、

$$\int\frac{1}{\sqrt{\dfrac{(v_0)^2}{gL} - \theta^2}}d\theta = \int\sqrt{\frac{g}{L}}dt$$

となる。この積分を実行するためにはどうするか？ arcsin, arccos を知っている人はそれを使えばよいだろう。でも、凡人は普通、$\theta = \dfrac{v_0}{\sqrt{gL}}\cos\varphi$ など三角関数を使って置換するだろう。

5.5 単振動の具体例 (応用)

このsectionでは、「バネでつながれた2物体の運動」と「連成振子」の話をする。2016年の入試において、早稲田大学の基幹理工学部の入試では、「バネでつながれた2物体の運動」が出た。しかし、現役時代の私は十分な対策をしていなかったために、全く歯が立たなかった。そして、東大でも「ゴム紐でつながれた2物体の運動」の話が出て、全く歯が立たず、その年の東大受験は不合格であった。確かに、「バネでつながれた2物体の運動」と「連成振子」の話は難しい。しかし、1回でも、その内容を自分なりに噛み砕けば、少しは問題を解けるだろう。

メインテーマは、「バネでつながれた2物体の運動」と「連成振子」であるが、その前に時間的に変動する関数 $f(t)$ のある区間 $a \leq t \leq b$ における時間平均の求め方をまず考える。

5.5.1 関数の時間平均

関数の時間平均の求め方を、$f(t) = \sin t$ の $0 \leq t \leq \pi$ を例に考えることにする。$f(t) = \sin t$ のグラフは以下の通りである。なんとなく、時間平均は0.5であると予想しないだろうか。

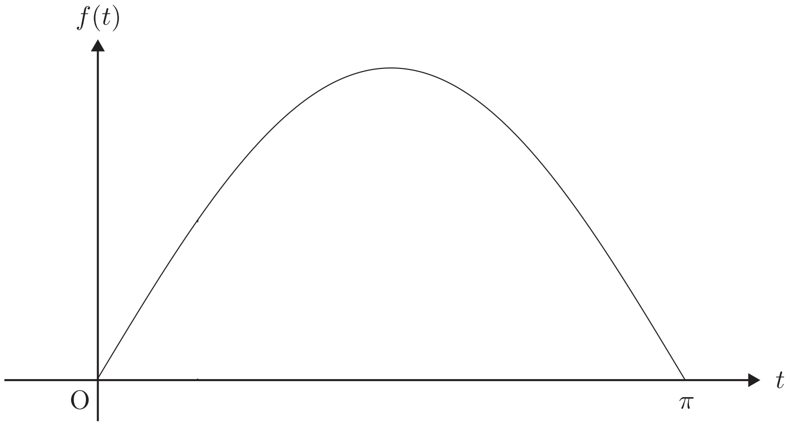


図 5.8: $f(t) = \sin t$ のグラフ

でも、$\sin t$ の平均はどう求めれば良いのか。私たちは、離散的な値の平均値の求め方は小学校で習う。n 個のデータ $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の平均 $\overline{a}$ は、

$$\overline{a} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

である。

そこで、離散的な値の平均値の求め方を拡張する。$0 \leq t \leq \pi$ からいくつかの値を取り出す。今回は、$f\left(\frac{n\pi}{32}\right)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots, 32)$ の計33個の値を取り出し、その平均を求めてみよう。プログラムを作成してPythonで平均を求めると、

$$\overline{a} = \frac{1}{33}\sum_{n=0}^{32} \sin\left(\frac{n\pi}{32}\right) \approx 0.6361388927695623$$

となる。この0.6361388927695623は、以下の棒グラフの高さの平均値である。

$f(t) = \sin t$ という関数の時間平均を求めるために、$f\left(\frac{n\pi}{32}\right)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots, 32)$ の33個の代表的な値を利用して、近似値を求めた。33個の値は選び方は等間隔である方が良い。代表値をとった場所がある箇

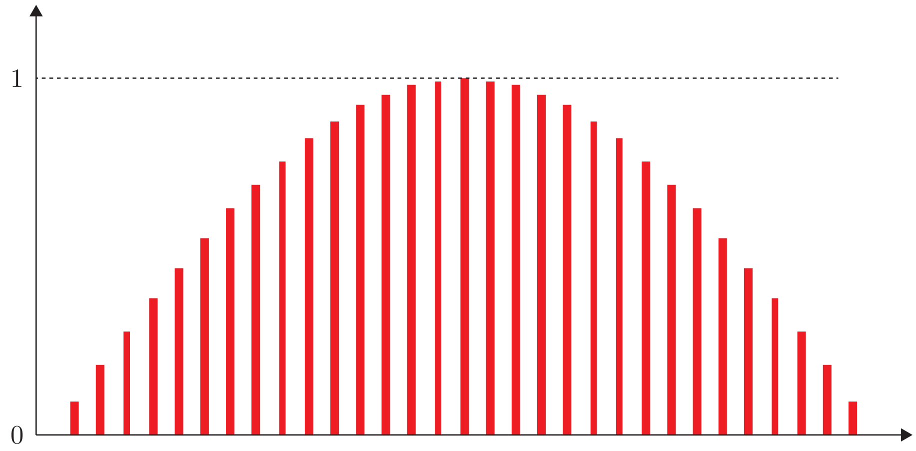


図 5.9: $f(n\pi/32)$ の値を棒グラフで表現する

所に集中していると、全体の傾向を把握できない。でも、33 個より、等間隔に 100 個、1000 個と取ったほうがより正確な値に近い値で評価できる。

この考えをもとに考える。区間 $0 \leq t \leq \pi$ を n 等分する。$t_k = \dfrac{k\pi}{n}$ とする。データ $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ を、$a_k = f(t_k) = \sin(t_k)$ により定めると、

$$\overline{a} = \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \sum_{k=0}^{n} f(t_k) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\pi}$$

である。区分求積法の考え方より、$n \to \infty$ の極限を考えると、

$$\overline{a} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\ dx$$

となる。$f(t) = \sin t$ の場合は、

$$\overline{a} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t\ dt = \frac{2}{\pi}$$

である(16)。

上記の考え方を拡張すると、一般に、関数 $f(t)$ の時間平均を求める公式が得られる。

関数の時間平均

関数 $f(t)$ の $t_1 \leq t \leq t_2$ の平均は以下の式で求められる。

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\ dt \tag{5.50}$$

(16) プログラムを書いて Python で計算を実行させると、以下のようになった。

n	$\sin t$ の平均
32	0.6361388927695623
100	0.6365684433587646
1000	0.6366192498143484
10000	0.6366197671326413

ちなみに、$\dfrac{2}{\pi} \approx 0.6366197723675814$ である。n が大きくなるほど、真の値 $\dfrac{2}{\pi}$ に近づくことがわかる。

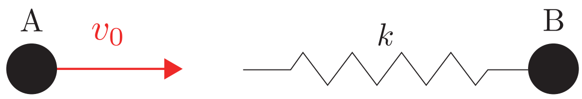
5.5.2　バネでつながれた 2 物体の運動 (1)

この subsection では、2016 年度「ハイパー物理 自習用テキスト」にのっている問題を通して、バネでつながれた 2 物体の運動の解析を行う。そこで、第 3 章で紹介した 2 体問題の知識を利用する。

この subsection で考える状況

質量 m_1 の小球 A と質量 m_2 の小球 B とバネ定数 k、自然長 l の軽いバネがある。これらの 1 直線上の運動について考える。ただし、ばねの質量は無視して良い。

- 時刻 $t = 0$ に、静止している B のばねの先端に、A が速度 v_0 で衝突したとする。
- $t \geq 0$ の A、B の速度と位置を時間の関数として求めることを考える。
- 座標系を、$t = 0$ での A、B の位置がそれぞれ $x_{\mathrm{A}} = -l/2$、$x_{\mathrm{B}} = l/2$ となるように設定する。



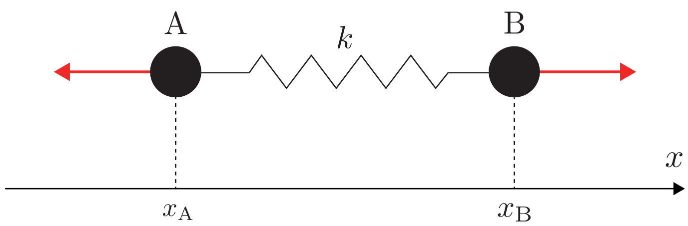
(1)：運動方程式の立式

運動の解析の第一歩は、物体にかかっている力を把握して、運動方程式を立てることである。その運動方程式、つまり微分方程式を見て、微分方程式が解けそうなら解く。解けなさそうなら、エネルギー保存則からアプローチするなど別の方法を検討すればよい。

ということで、A と B の運動方程式を立てる。2 つの物体がバネでつながれていないときの運動方程式は簡単に書ける。

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_{\mathrm{A}} &= 0 \\ m_2\ddot{x}_{\mathrm{B}} &= 0 \end{cases} \tag{5.51}$$

2 つの物体がバネでつながっている時、つまり、A がバネの影響を受けるときは、以下のように力が働く。(以下の図は、バネの長さが自然長より縮んでいる状態を表している。バネが縮んでいるときは、元の長さに戻ろうとして、外向きに力が働く。)



バネの長さが $x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} (< l)$ のとき、バネに働く力の大きさは、$k\{l - (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})\}$ である。バネは縮んでいるので自然の長さに戻ろうと外向きに力が働く。よって、2 つの物体がバネでつながっている時の、A と B の運動方程式は、

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_{\mathrm{A}} = -k\{l - (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})\} & (5.52) \\ m_2\ddot{x}_{\mathrm{B}} = k\{l - (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})\} & (5.53) \end{cases}$$

である ($x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} (> l)$ の場合も同様の式になる)。さて、この運動方程式を解く上で厄介なのは、x_{A} と x_{B} が混在しているところである。どうすれば良いか。

(2)：重心座標の導入

上の 2 つの式をみると、両辺を足すと、右辺が 0 になることに気づく。そこで、両辺を足す。

$$m_1 \ddot{x_{\mathrm{A}}} + m_2 \ddot{x_{\mathrm{B}}} = 0$$

この式で、$\ddot{x_{\mathrm{A}}} = \dot{v_{\mathrm{A}}},\ \ddot{x_{\mathrm{B}}} = \dot{v_{\mathrm{B}}}$ であることを使うと、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1 v_{\mathrm{A}} + m_2 v_{\mathrm{B}}) = 0 \tag{5.54}$$

となり、運動量保存則が導ける。この式を $m_1 + m_2$ で割ることで、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_1 v_{\mathrm{A}} + m_2 v_{\mathrm{B}}}{m_1 + m_2}\right) = \frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{G}}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{5.55}$$

と重心速度が一定であるという結果がすぐに導ける。

とりあえず、式 (5.54) を使おう。$t = 0$ のとき、$v_{\mathrm{A}} = v_0,\ v_{\mathrm{B}} = 0$ なので、運動量保存則が導ける。

$$m_1 v_{\mathrm{A}} + m_2 v_{\mathrm{B}} = m_1 v_0 \tag{5.56}$$

これより、バネの影響を受けている時の重心速度は、

$$v_G = \frac{m_1 v_{\mathrm{A}} + m_2 v_{\mathrm{B}}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 \tag{5.57}$$

となる。次に、式 (5.56) を時間 t で積分する。$t = 0$ で $x_{\mathrm{A}} = -l/2,\ x_{\mathrm{B}} = l/2$ より、

$$m_1 \left\{x_{\mathrm{A}} - \left(-\frac{l}{2}\right)\right\} + m_2 \left(x_{\mathrm{B}} - \frac{l}{2}\right) = m_1 v_0 t$$

$$\therefore\quad m_1 x_{\mathrm{A}} + m_2 x_{\mathrm{B}} = m_1 v_0 t + \frac{l}{2}(m_2 - m_1) \tag{5.58}$$

という関係式が導ける。これを $m_1 + m_2$ でわることで、重心座標が求められる。

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{m_1 x_{\mathrm{A}} + m_2 x_{\mathrm{B}}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 t + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{l}{2} \tag{5.59}$$

(3)：相対座標の導入

2 つの運動方程式、式 (5.52) と式 (5.53) の右辺には、$(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})$ というカタマリがある。そこで、2 つの運動方程式を次のように変形する。

$$\ddot{x_{\mathrm{A}}} = -\frac{k}{m_1}\{l - (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})\}$$
$$\ddot{x_{\mathrm{B}}} = \frac{k}{m_2}\{l - (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})\}$$

すると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}) = \ddot{x_{\mathrm{B}}} - \ddot{x_{\mathrm{A}}} &= \frac{k}{m_2}\{l - (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})\} + \frac{k}{m_1}\{l - (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})\} \\ &= -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\{(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}) - l\}\end{aligned} \tag{5.60}$$

となる。鉛直バネ振り子の場合と同様に考えると、$\omega = \sqrt{k\left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)}$ として[17]、

$$x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} = l + C\sin(\omega t + \delta) \tag{5.61}$$

[17] 換算質量 μ の定義は、$\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}$ なので、$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$ と書くことができる。大学入試問題で、バネにつながれた 2 物体の運動の振動を求めるときは、換算質量が登場することを覚えておくと検算などで役に立つ。

と表せる。また、この式を微分すると、

$$v_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{A}} = C\omega\cos(\omega t + \delta) \tag{5.62}$$

である。式 (5.61) と式 (5.62) の未定係数 $C,\ \delta$ を、初期条件 $x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} = l,\ v_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{A}} = -v_0$ をもとに決定する。$C > 0$ とすると、$C = v_0/\omega,\ \delta = \pi$ となるので、

$$x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} = l - \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \tag{5.63}$$

$$v_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{A}} = -v_0\cos\omega t \tag{5.64}$$

である。

(4)：重心座標と相対座標のドッキング

式 (5.58) と式 (5.63) を行列を使ってまとめると、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{A}} \\ x_{\mathrm{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 v_0 t + \dfrac{l}{2}(m_2 - m_1) \\ l - \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t \end{pmatrix} \tag{5.65}$$

2×2 行列の det は $m_1 + m_2 (\neq 0)$ なので、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_{\mathrm{A}} \\ x_{\mathrm{B}} \end{pmatrix} &= \frac{1}{m_1 + m_2}\begin{pmatrix} 1 & -m_2 \\ 1 & m_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 v_0 t + \dfrac{l}{2}(m_2 - m_1) \\ l - \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{m_1 + m_2}\begin{pmatrix} m_1 v_0 t + \dfrac{l}{2}(m_2 - m_1) - m_2\left(l - \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t\right) \\ m_1 v_0 t + \dfrac{l}{2}(m_2 - m_1) + m_1\left(l - \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t\right) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{m_1 + m_2}\begin{pmatrix} m_1 v_0 t - \dfrac{l}{2}(m_1 + m_2) + m_2 \cdot \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t \\ m_1 v_0 t + \dfrac{l}{2}(m_1 + m_2) - m_1 \cdot \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.66}$$

と $x_{\mathrm{A}},\ x_{\mathrm{B}}$ が求められる。これを時間 t で微分すると、

$$\begin{pmatrix} v_{\mathrm{A}} \\ v_{\mathrm{B}} \end{pmatrix} = \frac{1}{m_1 + m_2}\begin{pmatrix} m_1 v_0 + m_2 v_0\cos\omega t \\ m_1 v_0 - m_1 v_0\cos\omega t \end{pmatrix} \tag{5.67}$$

と速度 $v_{\mathrm{A}},\ v_{\mathrm{B}}$ も求められる。

(5)：2 物体がバネから離れた後の運動の軌跡

今回の状況設定では、バネと A、B は接着剤か何かでくっついていない。最初は、そのため物体 A がバネから全く力を受けなくなってしまうと、A と B は分離してしまう。

小球 A は、バネとくっついているのではなく、一時的にバネを押しているので、バネの力を受けているのである。バネを押さなくなったら、バネから力 (復元力) を受けることはない。ここで、A に働く力 F_{A} は、式 (5.63) を使うと、

$$F_{\mathrm{A}} = -kl + k(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}) = -k \cdot \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \tag{5.68}$$

なので、$t = \dfrac{\pi}{\omega}$ において、$F_{\mathrm{A}} = 0$ となる。この時、式 (5.67) より、$v_{\mathrm{A}}\left(t = \dfrac{\pi}{\omega}\right) = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_0$ と速度を持つので、$t = \dfrac{\pi}{\omega}$ でバネから力を受けなくなったあと、2 つの小球 A と B は分離して、小球 A は $\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_0$ の速度をもって、運動を続ける。分離した後、小球 A は力を受けないので等速度運動をする。

そのため、$t \geq \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)k}}$ における小球 A の速度 $v_{\mathrm{A}}(t)$ は、

$$v_{\mathrm{A}}(t) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \qquad \left(t \geq \frac{\pi}{\omega}\right) \tag{5.69}$$

であり、位置 $x_{\mathrm{A}}(t)$ は、式 (5.66) より、

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{A}}(t) &= -\frac{l}{2} + \frac{m_1}{m_1+m_2} v_0 \cdot \frac{\pi}{\omega} + \frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2} v_0 \left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \\ &= -\frac{l}{2} + \frac{m_2}{m_1+m_2} v_0 \cdot \frac{\pi}{\omega} + \frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2} v_0 t \end{aligned} \tag{5.70}$$

となる。

同様に、小球 B の運動の $t \geq \frac{\pi}{\omega}$ における運動について。$v_{\mathrm{B}}\left(t = \frac{\pi}{\omega}\right) = \frac{2m_1}{m_1+m_2} v_0$ なので、

$$v_{\mathrm{B}}(t) = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0 \qquad \left(t \geq \frac{\pi}{\omega}\right) \tag{5.71}$$

であり、位置 $x_{\mathrm{B}}(t)$ は、式 (5.66) より、

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{B}} &= \frac{l}{2} + \frac{m_1}{m_1+m_2} v_0 \cdot \frac{\pi}{\omega} + \frac{2m_1}{m_1+m_2} v_0 \left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \\ &= \frac{l}{2} - \frac{m_1}{m_1+m_2} v_0 \cdot \frac{\pi}{\omega} + \frac{2m_1}{m_1+m_2} v_0 t \end{aligned} \tag{5.72}$$

となる。

(6)：重心の運動の軌跡

最後に、重心の運動の軌跡を見てみよう。重心座標 $x_{\mathrm{G}}(t)$ は、

$$x_{\mathrm{G}}(t) = \frac{m_1 x_{\mathrm{A}}(t) + m_2 x_{\mathrm{B}}(t)}{m_1 + m_2}$$

と書ける。バネとつながっている間も、つながっていない間も、式 (5.51) と式 (5.52)、式 (5.53) より、

$$m_1 \ddot{x_{\mathrm{A}}} + m_2 \ddot{x_{\mathrm{B}}} = 0$$

が成立するので、「(2)：重心座標の導入」の議論で書いた式 (5.59)

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{m_1 x_{\mathrm{A}} + m_2 x_{\mathrm{B}}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 t + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{l}{2} \tag{5.59}$$

は、ずっと成立する。

5.5.3　バネでつながれた 2 物体の運動 (2)

この subsection では、前の subsection で扱った状況設定についてもう少し掘り下げて調べていく。

(1)：2 つの物体の位置の可視化

まず、2 つの物体の位置と速度の可視化を行い、物体の運動の軌跡を把握しよう。ここで、簡単化のために、各種パラメータを $m_1 = 2,\ m_2 = 1,\ k = 1,\ l = 1,\ v_0 = 1$ としよう。

すると、ω は、$\omega = \sqrt{1 \times \left(\frac{1}{2} + 1\right)} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ となる。よって、$x_{\mathrm{A}}(t)$ は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
x_{\mathrm{A}}(t) &= \begin{cases} \dfrac{1}{3}\left\{2t - \dfrac{1}{2}\cdot 3 + \dfrac{2}{\sqrt{6}}\sin\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}t\right)\right\} & \left(0 \le t \le \dfrac{2\pi}{\sqrt{6}}\right) \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2\pi}{\sqrt{6}} + \dfrac{1}{3}t & \left(t \ge \dfrac{2\pi}{\sqrt{6}}\right) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{2}{3}t - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{9}\sin\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}t\right) & \left(0 \le t \le \dfrac{\sqrt{6}\pi}{3}\right) \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{6}\pi}{9} + \dfrac{1}{3}t & \left(t \ge \dfrac{\sqrt{6}\pi}{3}\right) \end{cases}
\end{aligned}
$$

同様に $x_{\mathrm{B}}(t)$ を計算すると、

$$
x_{\mathrm{B}}(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}t + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2\sqrt{6}}{9}\sin\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}t\right) & \left(0 \le t \le \dfrac{\sqrt{6}\pi}{3}\right) \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{2\sqrt{6}\pi}{9} + \dfrac{4}{3}t & \left(t \ge \dfrac{\sqrt{6}\pi}{3}\right) \end{cases}
$$

となる。最後に、重心の位置 $x_{\mathrm{G}}(t)$ の位置は、2 物体がつながっているか、分離しているかに関係なく、式 (5.59) で表されるので、

$$
x_{\mathrm{G}}(t) = \frac{2}{3}t - \frac{1}{6}
$$

である。今求めた $x_{\mathrm{A}}(t),\ x_{\mathrm{B}}(t),\ x_{\mathrm{G}}(t)$ をグラフ化すると図 5.10 のようになる。

(2)：もし小球 A と小球 B が分離しなかったら?

今度は 2 つの小球がバネでつながっていて、小球 A はバネから離れないものとする。左側の小球 A にのみ初速度 v_0 を与えた時の運動を考えると、運動方程式は、前の subsection で立てた

$$
\begin{cases} m_1\ddot{x_{\mathrm{A}}} = -k\{l - (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})\} \\ m_2\ddot{x_{\mathrm{B}}} = k\{l - (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})\} \end{cases}
$$

と同じであり、その解の形も同じになる。ただ、小球 A がバネから離れることはないので、$t \ge 0$ でずっと、式 (5.66) が成立する。

$$
\begin{pmatrix} x_{\mathrm{A}} \\ x_{\mathrm{B}} \end{pmatrix} = \frac{1}{m_1 + m_2}\begin{pmatrix} m_1 v_0 t - \dfrac{l}{2}(m_1 + m_2) + m_2 \cdot \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t \\ m_1 v_0 t + \dfrac{l}{2}(m_1 + m_2) - m_1 \cdot \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t \end{pmatrix} \tag{5.66}
$$

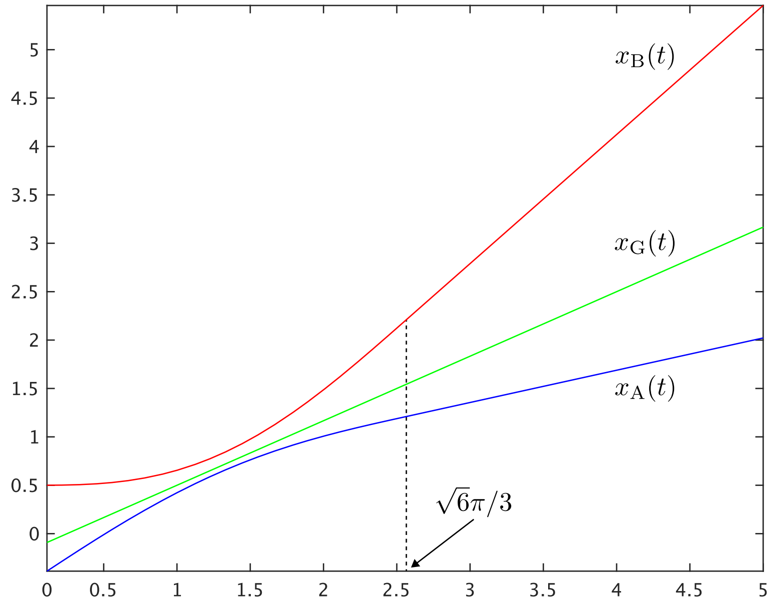


図 5.10: $x_A(t)$, $x_B(t)$, $x_G(t)$ の時間軌跡

今度は、<u>パラメータを $m_1 = m_2 = 1,\ k = 1,\ l = 1,\ v_0 = 1$ としよう</u>。すると、ω は $\omega = \sqrt{2}$ となるから、

$$\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} t - 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ t + 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}$$

となる。また、重心の位置 $x_G(t)$ は、式 (5.59) より、

$$x_G(t) = \frac{1}{2}t$$

となる。今求めた $x_A(t)$, $x_B(t)$, $x_G(t)$ をグラフ化すると図 5.11 のようになる。

今回の場合、重心から見たときの 2 物体の見え方が対称的になる。

$$x_A - x_G = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\sin(\sqrt{2}t)$$
$$x_B - x_G = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\sin(\sqrt{2}t)$$

より、$\underbrace{x_A - x_G}_{\text{重心から見た A の位置}} = -(\underbrace{x_B - x_G}_{\text{重心から見た B の位置}})$ の関係が成立することがわかる。

一般の場合について考える。式 (5.59) と式 (5.66) より、重心から見た A、B の座標 (重心系における A、B の座標) を求めると、以下のようになる。

$$x_A - x_G = -\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\cdot\frac{l}{2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \tag{5.73}$$
$$x_B - x_G = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\cdot\frac{l}{2} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \tag{5.74}$$

この 2 式から、$x_A - x_G = -\dfrac{m_2}{m_1}(x_B - x_G)$ の関係が成立することがわかる。

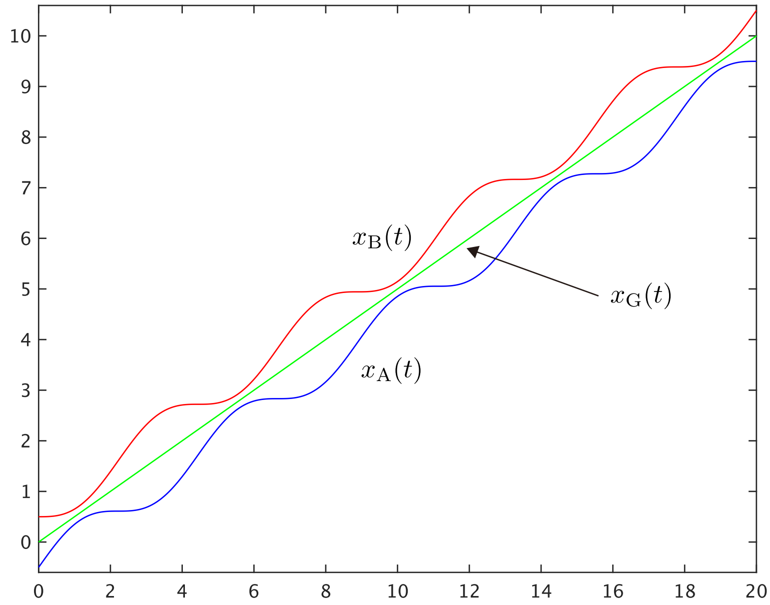


図 5.11: $x_{\mathrm{A}}(t)$, $x_{\mathrm{B}}(t)$, $x_{\mathrm{G}}(t)$ の時間軌跡 (2)

(3)：弾性衝突との関係

話を元に戻す。前の subsection で考えた状況では $t = \dfrac{\pi}{\omega}$ における A と B の速度は、

$$v_{\mathrm{A}}\left(t = \frac{\pi}{\omega}\right) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_0, \quad v_{\mathrm{B}}\left(t = \frac{\pi}{\omega}\right) = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_0$$

である。この式を見て、私は思った。この答えは、運動量保存則と反発係数を連立させた次の式の計算結果と同じではないか？

$$\begin{cases} m_1 v_0 = m_1 v_{\mathrm{A}} + m_2 v_{\mathrm{B}} \\ 1 = -\dfrac{v_{\mathrm{A}} - v_{\mathrm{B}}}{v_0} \end{cases} \tag{5.75}$$

実際、この連立方程式をとくと、$v_{\mathrm{A}} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_0$, $v_{\mathrm{B}} = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}v_0$ という解が得られる。

式 (5.75) は、速度 v_0 で運動している物体 A が物体 B と衝突した後の、両物体の速度を求める問題で書く連立方程式である。ただし、物体 A と物体 B の間の反発係数が 1 の場合である。つまり、前の subsection で考えていた問題と、弾性衝突の問題は、結論は同じになる。

弾性衝突は、「衝突の前後で 2 物体の運動エネルギーの和が保存する衝突」のことである。そんな衝突は現実に起こりうるのか？衝突に伴い、エネルギーが熱という形で系の外に出てしまわないのか？弾性衝突が現実に起こりえないことだとしたら、どのように想像すれば良いのか？その答えを与えてくれるのが、前の subsection で考えていたモデルであると、私は考える。

ここからは私の考えであって、絶対に正しいとは (私は) 断言できない。弾性衝突の直前で、質点どうしの距離が十分近いときは、(この後で述べる) 万有引力やクーロン力などの引力の効果を強く受ける。その効果はまるでバネに類似する効果といえよう。衝突をする直前と直後はバネでつながれた 2 物体のような振る舞いをするから、運動エネルギーの総和が減少しないのである。運動エネルギーの一部がバネの弾性エネルギー (に相当するエネルギー) という形で保持された後、2 物体に再分配されるのではないか？弾性衝突の直前、直後は実はバネでつながれた 2 物体のモデルと等価になっているのかもしれないと、私は思った。

5.5.4 連成振動

次は、このような系における 2 物体の振動を考える。

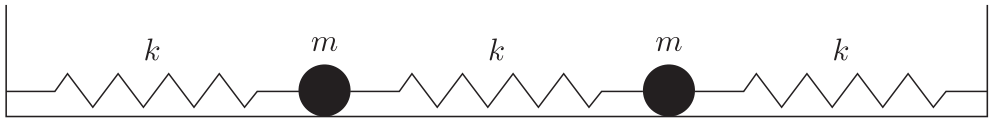


図 5.12: 連成振動 (1)

さて、この subsection のタイトルにある「**連成振動**」とは何か。「**連成振動**」は、2 つ以上の振動子 (バネなど) が何かの機構で互いに影響を及ぼしながら行う振動のことである。連成振動は、分子や結晶の熱振動のモデルに応用することができる。原子を質点とみなし、分子や結晶を、数個あるいは無数の質点が互いに隣り合うもの同士で、影響を及ぼしながら、平衡点を中心に連成振動をしていると考える。図 5.12 のモデルが最も簡単なモデルであるが、それに少し手を加えた次の系をこの subsection で考えることにする。

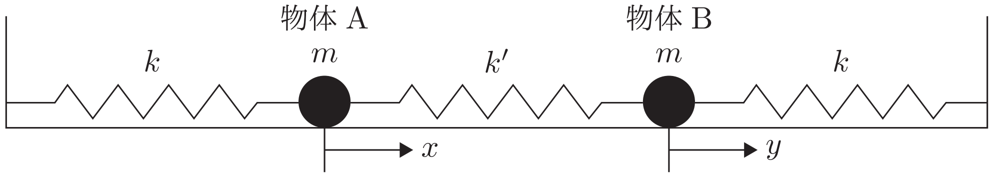


図 5.13: 連成振動 (2)：この subsection で考えるモデル

今回の連成振動の変位の取り方はいつもと異なる。図 5.13 の左の物体を A、右の物体を B と呼ぶことにしよう。さて、今回は A と B の物体に一切力が働かないとき、つまり、3 つのバネが全て自然長の長さの時の A と B の位置をそれぞれ 0 としている。x, y はその位置、つまり、3 つのバネの長さが自然長の時から、右方向にどれだけ動いたかを表すものとする。さらに、A と B の質量はともに m であるとする。

すると、A と B の運動方程式は以下のようになる[18]。

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= -kx - k'(x-y) \\ m\ddot{y} &= -ky + k'(x-y) \end{cases} \tag{5.76}$$

今回も、「バネでつながれた 2 物体の運動」と同様に、x と y が混在している。そこで、「バネでつながれた 2 物体の運動」と同様に、両辺を足したり、引いたりすることを考える[19]。すると、

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x+y) = -k(x+y) \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x-y) = -(k+2k')(x-y) \end{cases} \tag{5.77}$$

となる。

これより、$\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k+2k'}{m}}$ として、

$$\begin{cases} x+y = A_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) \\ x-y = A_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) \end{cases} \tag{5.78}$$

[18] 真ん中のバネは、A が右に x 動いたことで、x 縮んだが、B が右に y 動いたことで、y 伸びている。そのため、結果として、$x-y$ だけ縮んでいると見ることができる。$x-y>0$ なら、真ん中のバネは縮んでいるので、復元力は真ん中のバネが広がるように働く。そのため、A には左向きに、B には右向きに復元力が働く。$x-y \leq 0$ なら、真ん中のバネは伸びているので、逆に、A には右向きに、B には左向きに復元力が働く。以上のことから、運動方程式は式 (5.76) のようになる。

[19] この操作が、重心座標と相対座標の導入に近いといえる。

となる。この 2 式より、

$$x(t) = \frac{1}{2}\{A_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2)\}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\{A_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) - A_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2)\}$$

となるから、定数 $A_1,\ A_2$ をうまく取り直すことで、

$$\begin{cases} x(t) &= A_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) \\ y(t) &= A_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) - A_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) \end{cases} \tag{5.79}$$

とすることができる。

さて、次は具体的な数値を導入して、少し掘り下げる。$\underline{x(0) = 2A,\ y(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 0}$ という場合を考えよう (ただし、$A > 0$ とする)。つまり、物体 A を平衡状態から右に $2A$ 動かしたあと、静かに (初速度を加えることなく)、2 物体を離した場合を考える。初期条件を式 (5.79) に代入すると、

$$\begin{aligned} 2A &= A_1 \sin\delta_1 + A_2 \sin\delta_2 \\ 0 &= A_1 \sin\delta_1 - A_2 \sin\delta_2 \\ 0 &= \omega_1 A_1 \cos\delta_1 + \omega_2 A_2 \cos\delta_2 \\ 0 &= \omega_1 A_1 \cos\delta_1 - \omega_2 A_2 \cos\delta_2 \end{aligned}$$

となる。すると、この 4 つの式より、

$$\begin{aligned} 2A &= 2A_1 \sin\delta_1 \\ 2A &= 2A_2 \sin\delta_2 \\ 0 &= 2\omega_1 A_1 \cos\delta_1 \\ 0 &= 2\omega_2 A_2 \cos\delta_2 \end{aligned}$$

が得られる。

3 つ目の式より、$A_1 = 0$ あるいは $\delta_1 = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}$ となるが、$A_1 = 0$ なら、$A = 0$ となってしまう。よって、$\delta_1 = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}$ である。同様にして、$\delta_2 = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}$ である。あとは、$\delta_1,\ \delta_2$ を 4 通りの中から決定すれば良い。

(1) $\delta_1 = \delta_2 = \dfrac{\pi}{2}$ の時、または、$\delta_1 = \delta_2 = \dfrac{3\pi}{2}$ の時は、$A_1 = A_2$ である。

(2) $\delta_1 = \dfrac{\pi}{2},\ \delta_2 = \dfrac{3\pi}{2}$ の時、または、$\delta_1 = \dfrac{3\pi}{2},\ \delta_2 = \dfrac{\pi}{2}$ の時は、$A_1 = -A_2$ である。

(1)：$\delta_1 = \delta_2$ のとき

$\delta_1 = \delta_2 = \pi/2,\ 3\pi/2$ のどちらでも、$x(t),\ y(t)$ は次の形で書ける。

$$x(t) = A(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \tag{5.80}$$

$$y(t) = A(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) = -2A\sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \tag{5.81}$$

(1-a) $k' = 4k$ の時
この時、$\omega_2 = 3\omega_1$ となる。すると、

$$x(t) = 2A\cos(\omega_1 t)\cos(2\omega_1 t)$$
$$y(t) = 2A\sin(\omega_1 t)\sin(2\omega_1 t)$$

となる。簡単にするため、$A = 1,\ \omega_1 = 1$ とすると、$x(t)$ と $y(t)$ のグラフは図 5.14 のようになる。

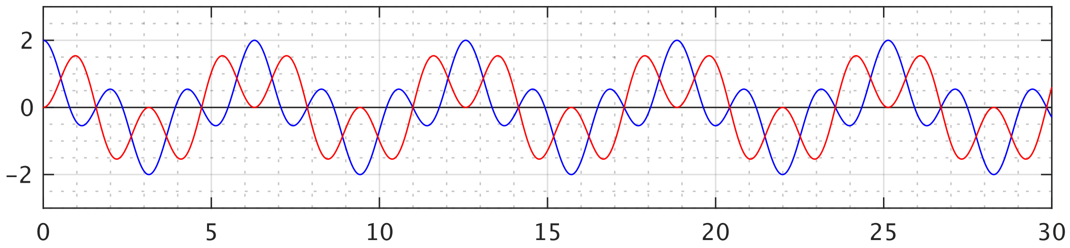


図 5.14: $k' = 4k$ の時のグラフ (1)：青色が $x(t)$、赤色が $y(t)$

(1-b) $k' = 0.0404k$ の時
この時、$\omega_2 = 1.02\omega_1$ となる。すると、

$$x(t) = 2A\cos(0.01\omega_1 t)\cos(1.01\omega_1 t)$$
$$y(t) = 2A\sin(0.01\omega_1 t)\sin(1.01\omega_1 t)$$

となる。簡単にするため、$A = 1,\ \omega_1 = 100$ とすると、$x(t)$ と $y(t)$ のグラフは図 5.15 のようになる。

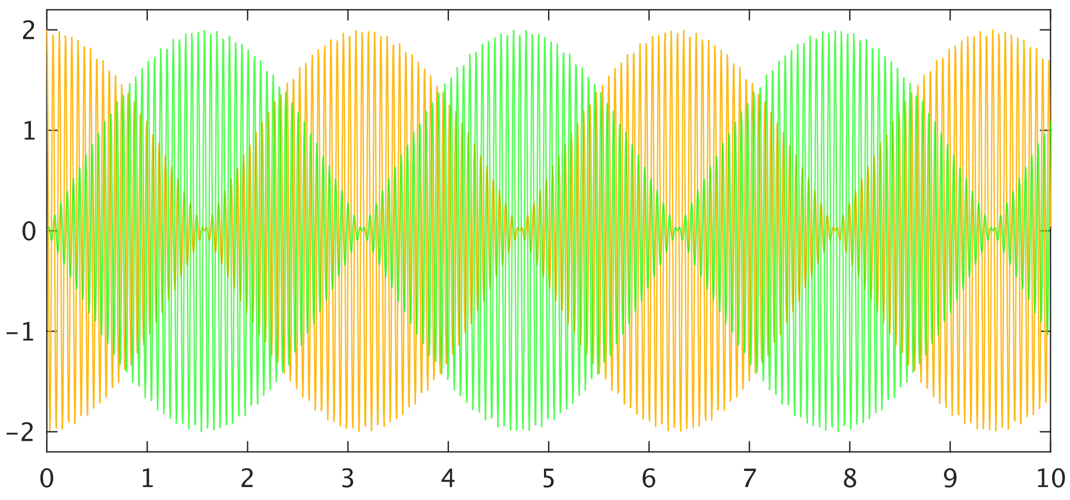


図 5.15: $k' = 0.0404k$ の時のグラフ (1)：黄色が $x(t)$、緑色が $y(t)$

$k' = 0.0404k$ の時の $x(t),\ y(t)$ の挙動の特徴を図 5.15、図 5.16、図 5.17 をもとにまとめる。

- $|x(t)|$ が大きい時、$|y(t)|$ は小さい。逆に、$|y(t)|$ が大きい時、$|x(t)|$ は小さい。
- $x(t),\ y(t)$ の振幅の変化はとても緩やか。少しずつ増えたり、減ったりする。結果として、$x(t)$ のグラフは、$-2\cos t$ のグラフと $2\cos t$ のグラフの間に収まっている。また、$y(t)$ のグラフは、$-2\sin t$ のグラフと $2\sin t$ のグラフの中に収まっている。

この 2 つの事実を、物理的に説明しよう。まず、前者は、A と B の間で、バネを媒介してエネルギーのやりとりが行われていることを、図 5.15 が表していると言い換えることができる。系全体では、力学的エ

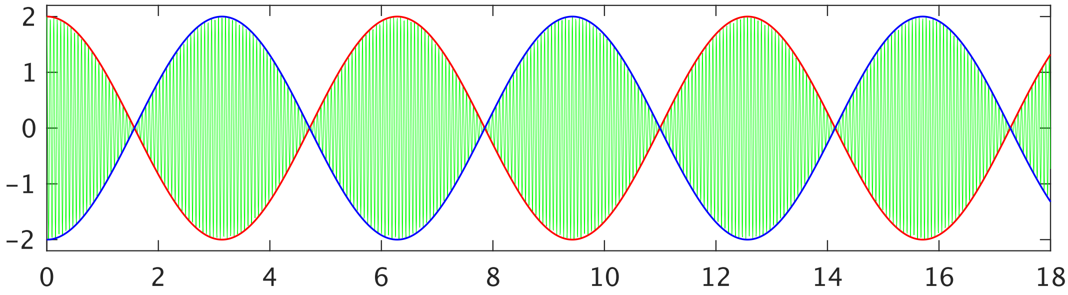


図 5.16: $k' = 0.0404k$ の時のグラフ (2) ($x(t)$ のみ)

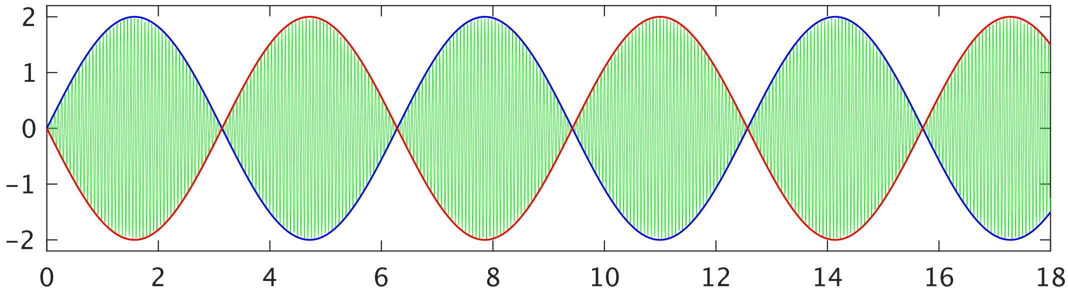


図 5.17: $k' = 0.0404k$ の時のグラフ (3) ($y(t)$ のみ)

ネルギーは保存している。ここで、中央のバネの変位 $x - y$ の時間平均[20]は、

$$\overline{x-y} = 2A \cdot \overline{\cos\omega_2 t} = 0$$

なので、平均的に、中央のバネは伸び縮みしていないとみなせる。すると、系が持つエネルギーは、「一番左のバネに蓄えられた弾性エネルギー」と「一番右のバネに蓄えられた弾性エネルギー」の和であるとみなせる。そのため、$|x|$ が大きい時、$|y|$ が小さいのは、左のバネの弾性エネルギーが大きくなり、右のバネの弾性エネルギーが小さくなることにうまく対応している。エネルギー保存則の観点から見ると、とても自然なことといえる。

後者は、$x(t),\ y(t)$ の式から説明できる。図 5.15、図 5.16、図 5.17 の場合、

$$x(t) = 2\cos t\cos(101t)$$

であるが、$\cos(101t)$ の方が、$\cos t$ に比べて早く振動する。そのため、$x(t)$ の振動は、事実上、$\cos(101t)$ に

(20) 周期的な運動をしている場合、運動の周期を T とすると、

$$\overline{\cos\omega t} = \frac{1}{T}\int_0^T \cos\omega t\,\mathrm{d}t = 0 \tag{5.82}$$

となる。これは、T ではなく、n を自然数として、nT としても同じである。ここで、時間平均を考える時間が、$nT+\Delta T$ $(0 \leq \Delta T < T)$ であったとする。すると、

$$\begin{aligned}\overline{\cos\omega t} &= \frac{1}{nT+\Delta T}\int_0^{nT+\Delta T}\cos\omega t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{nT+\Delta T}\left\{n\underbrace{\int_0^T \cos\omega t\ \mathrm{d}t}_{} + \int_{nT}^{nT+\Delta T}\cos\omega t\,\mathrm{d}t\right\}\end{aligned}$$

波線部の定積分は 0 であることと、$\cos\omega t$ が周期的に振動する関数であることから、

$$\overline{\cos\omega t} = \frac{1}{nT+\Delta T}\int_0^{\Delta T}\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

となり、$nT+\Delta T$ が十分大きければ、$\dfrac{1}{nT+\Delta T} \to 0$ となるので、$\overline{\cos\omega t} = 0$ とみなせる。

依存し、$\cos t$ は振幅の時間変化を示しているとみなせる。そのため、$\cos(101t)$ にしたがって、$x(t)$ は上下するものの、$\cos t$ に従って、振幅が時間変化するという結果になり、これを図示すると、図 5.16 や図 5.17 のようになる。

$\boxed{\textbf{(2)}：\delta_1 \neq \delta_2 \text{ のとき}}$

次に、$\delta_1 = \pi/2,\ \delta_2 = 3\pi/2$ のときを考えよう。このときは、$x(t),\ y(t)$ は次の形で書ける。

$$x(t) = A(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t)$$
$$y(t) = A(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$$

逆に、$\delta_1 = 3\pi/2,\ \delta_2 = \pi/2$ のときは、

$$x(t) = A(\cos\omega_2 t - \cos\omega_1 t)$$
$$y(t) = -A(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$$

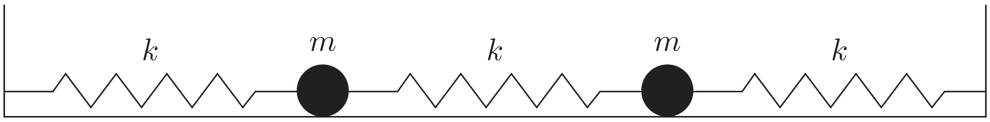
となる。$\delta_1 \neq \delta_2$ のとき、$t = 0$ を代入すると、$x(0) = 0$ となり、初期条件に反する。そのため、今回考えている初期条件 $x(0) = 2A,\ y(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 0$ の解ではない。

$k' = 0.0404k$ の時など、$k' << k$ ならば、ω_1 と ω_2 はとても近い値になる。2 つの三角関数の角振動数がとても近い時、その重ね合わせの結果は、図 5.16 や図 5.17 のようになる。とても早く振動する項と、とてもゆっくり振動する項の積で表される関数のグラフは特徴的なものになる。この現象は**うなり**と言われる。

5.5.5　連成振動 (演習問題)

この subsection では、名問の森の 108 ページの問題を取り扱う。名問の森とは違うアプローチで問題を解く。まあ、前の section と同じように解くだけだが。

問題 11



質量 m の等しい 2 つの球 A と B(上図の左を A、右を B とする) がバネ定数 k の 3 個の同じばねで直線状に結ばれて、摩擦のない水平面上に置かれている。バネの両端は固定されていて、はじめ、どのばねも自然長 l になっている。

(1) B に外力を加えて、右に d だけ静かに変位させる。この時、A は右にどれだけ変位するか。また、B に加えている外力の大きさはいくらか。

(2) B を初めの位置に固定したまま、A に外力を加えて大きさ d の変位を与えてから、静かに放す。A の振動の周期を求めよ。また、A が初めの位置 (変位 $= 0$) を通る時の速さを求めよ。

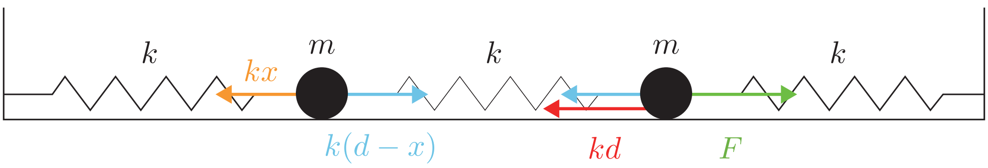
(3) A と B の両方に外力を加えて、同じ向きに等しい大きさ d の変位を与えてから同時に放す。A の振動の周期を求めよ。

(4) A と B の両方に外力を加えて、互いに逆向きに等しい大きさ d の変位を静かに与える。

(4-a) この時、外力がした仕事の和を求めよ。

(4-b) 次に、2 つの球を同時に静かに放す。A の振動の周期を求めよ。

$\boxed{\textbf{(1)}}$[21]



静かに右に動かすので、B を右に動かしている途中、またはその後も、A と B に働く力は常につり合う。B を右に d 動かした時に、A が右に x 動いたとする。また、B に加わっている力を F (右向きを正) とする。A と B に働く力は図のようになるから、B を右に動かした後の A と B の運動方程式 (つりあいの式) は、以

(21)

「静かに」変位させる

物体を変位させるには、外力を働かせる必要がある。ここで、2.2.3「位置エネルギー」の説明を思い出そう。

$$U = \int_0^A (-\boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

で位置エネルギーは求められる。位置エネルギーは、保存力 $\boldsymbol{F}$ とつり合う力 $-\boldsymbol{F}$ を働かせて、基準点 O から A まで移動させるのに要する仕事で定義される。この時、O から A に至るまでの任意の点において、保存力 $\boldsymbol{F}$ と常につり合うように外力を働かせるのである。このような移動方法を「**静かに**」移動させると呼ぶ。

下のようになる。

$$\begin{cases} 0 &= k(d-x) - kx \\ 0 &= F - kd - k(d-x) \end{cases} \tag{5.83}$$

これより、$\boxed{x = \frac{d}{2},\ F = \frac{3}{2}kd}$ と求められる。 □

(2)

B が固定されている時は、物体 A にだけ注目すればよい。x_1 を自然長からの変位とすると、A の運動方程式は、

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - kx_1 = -2kx_1 \tag{5.84}$$

となる。よって、振動の角周波数は $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ であり、振動周期 T_1 は、$\boxed{T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}}$ である。 □

エネルギー保存則を考える。物体 A が x 変位した時のバネの弾性エネルギーは $\frac{1}{2}kx^2 \times 2 = kx^2$ なので、保存則は、

$$kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{const.}$$

となる。A が初めの位置を通る時、2 つのバネは自然長になっているので、エネルギー保存則を考えると、求める速さを v_A とすると、

$$kd^2 = \frac{1}{2}m{v_A}^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{v_A = d\sqrt{\frac{2k}{m}}} \tag{5.85}$$

となる。 □

(3)

A と B の運動方程式をかく。ただし、$x_1,\ x_2$ は自然長からの変位とする。

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2) = -2kx_1 + kx_2 \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 + k(x_1 - x_2) = kx_1 - 2kx_2 \end{cases} \tag{5.86}$$

これより、

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) = -k(x_1 + x_2) \qquad m\frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) = -3k(x_1 - x_2)$$

となる。そのため、$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}},\ \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ として、

$$x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) \qquad x_1 - x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2)$$

となり、

$$x_1 = \frac{A_1}{2}\sin(\omega_1 t + \delta_1) + \frac{A_2}{2}\sin(\omega_2 t + \delta_2) \tag{5.87}$$

$$x_2 = \frac{A_1}{2}\sin(\omega_1 t + \delta_1) - \frac{A_2}{2}\sin(\omega_2 t + \delta_2) \tag{5.88}$$

と $x_1,\ x_2$ が求められる。また、

$$v_1 = \frac{d}{dt}x_1 = \omega_1\frac{A_1}{2}\cos(\omega_1 t + \delta_1) + \omega_2\frac{A_2}{2}\cos(\omega_2 t + \delta_2) \tag{5.89}$$

$$v_2 = \frac{d}{dt}x_2 = \omega_1\frac{A_1}{2}\cos(\omega_1 t + \delta_1) - \omega_2\frac{A_2}{2}\cos(\omega_2 t + \delta_2) \tag{5.90}$$

では、(3) の場合を考えよう。
$t=0$ の時、$x_1=x_2=d$ なので、式 (5.87) から式 (5.90) より、

$$d=\frac{A_1}{2}\sin\delta_1+\frac{A_2}{2}\sin\delta_2 \qquad d=\frac{A_1}{2}\sin\delta_1-\frac{A_2}{2}\sin\delta_2$$
$$0=\omega_1\frac{A_1}{2}\cos\delta_1+\omega_2\frac{A_2}{2}\cos\delta_2 \qquad 0=\omega_1\frac{A_1}{2}\cos\delta_1-\omega_2\frac{A_2}{2}\cos\delta_2$$

となる。これより、

$$2d=A_1\sin\delta_1 \qquad 0=A_2\sin\delta_2$$
$$0=\omega_1A_1\cos\delta_1 \qquad 0=\omega_2A_2\cos\delta_2$$

となる。この 4 つの式より、$A_1=2d,\ A_2=0,\ \delta_1=\pi/2$ となることがわかる。よって、

$$x_1=x_2=d\cos\omega_1 t$$

と導ける。ゆえに、A の振動周期を T_1 とすると、$\boxed{T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$ である。 □

(4)-(a)

A を右に d 動かし、B を左に d 動かしたとすると、一番左のバネと一番右のバネはは d 伸びて、真ん中のバネは $2d$ 縮んでいることになる。そのため、外力を加えて変位を加えることで、系全体は

$$\frac{1}{2}kd^2\times2+\frac{1}{2}k(2d)^2=3kd^2$$

の弾性エネルギーを蓄える。よって、外力は系に対して合計で $\boxed{3kd^2}$ をした。 □

(4)-(b)

前のページの式 (5.87) から (5.90) に、今度は、$t=0$ のとき、$x_1=d,\ x_2=-d,\ v_1=v_2=0$ という条件を代入すれば良い。

$$d=\frac{A_1}{2}\sin\delta_1+\frac{A_2}{2}\sin\delta_2 \qquad -d=\frac{A_1}{2}\sin\delta_1-\frac{A_2}{2}\sin\delta_2$$
$$0=\omega_1\frac{A_1}{2}\cos\delta_1+\omega_2\frac{A_2}{2}\cos\delta_2 \qquad 0=\omega_1\frac{A_1}{2}\cos\delta_1-\omega_2\frac{A_2}{2}\cos\delta_2$$

これより、

$$0=A_1\sin\delta_1 \qquad 2d=A_2\sin\delta_2$$
$$0=\omega_1A_1\cos\delta_1 \qquad 0=\omega_2A_2\cos\delta_2$$

となり、この 4 つの式から、$A_1=0,\ A_2=2d,\ \delta_2=\pi/2$ となることがわかる。よって、

$$x_1=d\cos\omega_2 t \qquad x_2=-d\cos\omega_2 t$$

と導ける。ゆえに、A の振動周期を T_2 とすると、$\boxed{T_2=\frac{2\pi}{\omega_2}=2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}}$ である。 □

5.5.6 ポテンシャル曲線と安定なつりあい

大学の物理では、「位置エネルギー」という言葉の代わりに「**ポテンシャル**」という言葉を使う。なぜなら、「位置エネルギー」の英語表記が「potential energy」であるからである。この subsection 以降、「ポテンシャル」という言葉が出てきたら、「位置エネルギー」のことだと思ってほしい。

さて、位置エネルギーは保存力と非常に強い関係を持つことを 2.2.3「位置エネルギー」で確認した。以下、この subsection では、<u>保存力のみが物体に働くとし、</u>1 次元の場合を中心に考える。

位置エネルギーの基準点を $x = 0$ とすると、

$$U(x) = \int_0^x -F(x')\ \mathrm{d}x' \tag{5.91}$$

とかけて、微分積分学の基本定理より、

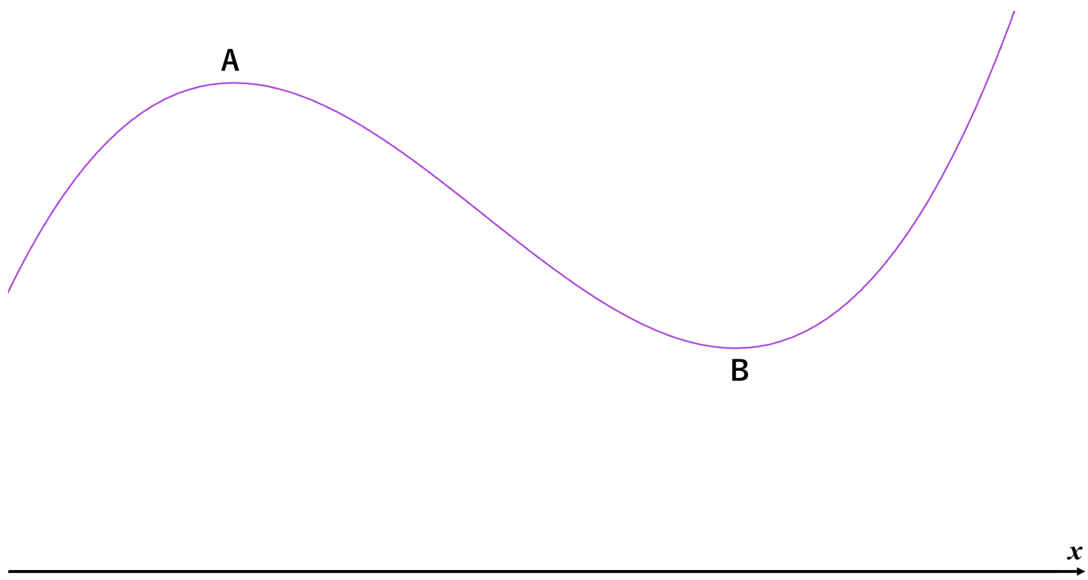
$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} \tag{5.92}$$

とかけることはすでにふれてある。

さて、式 (5.85) より、次のことがわかる。

- $F(x) > 0 \iff \dfrac{dU(x)}{dx} < 0$
- $F(x) < 0 \iff \dfrac{dU(x)}{dx} > 0$
- $F(x) = 0 \iff \dfrac{dU(x)}{dx} = 0$

式を見れば、すぐにわかる事実であるが、これはとても重要なことである。なぜなら、**保存力の場合、ポテンシャル曲線のカーブだけで、力の働く向きがわかる**からである。上の対応関係より、「**ポテンシャル曲線の接線の傾きの正負と、保存力の正負 (向き) は反対である**」ことがわかる。そして、「ポテンシャルが極大、または、極小となる点では保存力は 0、あるいは、複数の保存力が働いているなら、その総和が 0 の状態、つまり、つりあいの状態になる」ことがわかる。



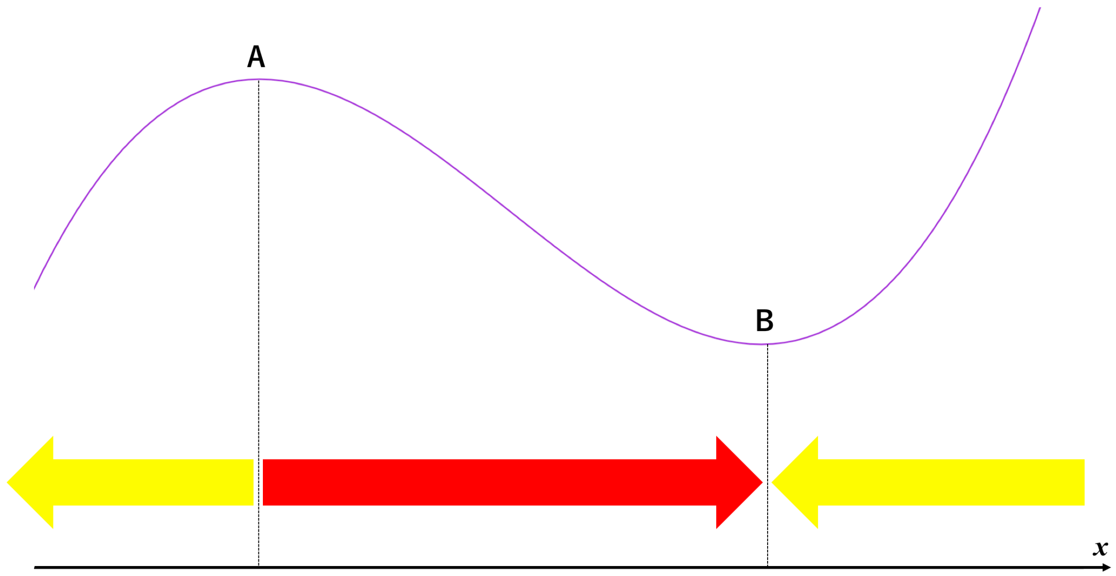
前のページのようなポテンシャル曲線に従うとき、A と B では、$U(x)$ は極値をとる。そのため、A と B においては、$U'(x)=0$ なので、物体に働いている保存力は $F(x)=0$ である。そのため、A と B では、働いている保存力が 0 か、つりあいの状態にある。

ここで、「つりあいの位置」には 2 種類あることにふれる。

- 安定なつりあい
  つりあい点 (平衡点) から少しずれた点に物体をおいた時、保存力により、その平衡点に戻ろうとする時、その平衡点は安定である。エネルギー的に見ると、安定な平衡点では、その近傍も含めて、位置エネルギーが最小で、これ以上小さくなることはできないので、安定となる。

- 不安定なつりあい
  つりあい点 (平衡点) から少しずれた点に物体をおいた時、保存力により、その平衡点に戻ろうとしない時、その平衡点は不安定である。

ポテンシャルカーブの接線の傾きと保存力の向きの関係より、各地点における保存力の向きは以下のようになる。



すると、安定な点は明らかに B である。安定なつりあい点は極小点である。逆に、不安定なつりあい点は極大点である。ここで、B における $U(x)$ の 2 階微分の傾きを考えると、数学 3 で習う曲線の凹凸の内容から、

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2}>0$$

である。そのため、安定なつりあい点は数学的には

$$\frac{dU(x)}{dx}=0 \qquad \frac{d^2U(x)}{dx^2}>0 \tag{5.93}$$

の両方を満たす点である。

安定なつりあい点から少しずれた位置に物体をおく。保存力のみが働くときは、これまでに見た通り、つりあい点のまわりを振動運動する。この振動運動は単振動ではない。しかし、ある条件を課すと、近似的に単振動と見なせる場合がある。

安定なつりあい点を $x = x_0$ とすると、Taylor 展開を使うと、

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}U''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}U'''(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots$$

となる。ここで、$\underline{|x - x_0| \text{ が十分小さい}}$範囲内では、$x - x_0$ の 3 次以上の項は無視できるので、

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}U''(x_0)(x - x_0)^2$$

となる。さらに、$x = x_0$ はつりあい点なので、$U'(x_0) = 0$ だから、

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2!}U''(x_0)(x - x_0)^2 \tag{5.94}$$

と近似できる。この式に式 (5.85) を適用させると、

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -U''(x_0)(x - x_0) \tag{5.95}$$

となる。$x = x_0$ は安定なつりあい点なので、$U''(x_0) > 0$ である。
よって、$\underline{|x - x_0| \text{ が十分小さい}}$範囲内では、$x = x_0$ のまわりに単振動するとみなすことができる。

5.6　減衰振動と強制振動

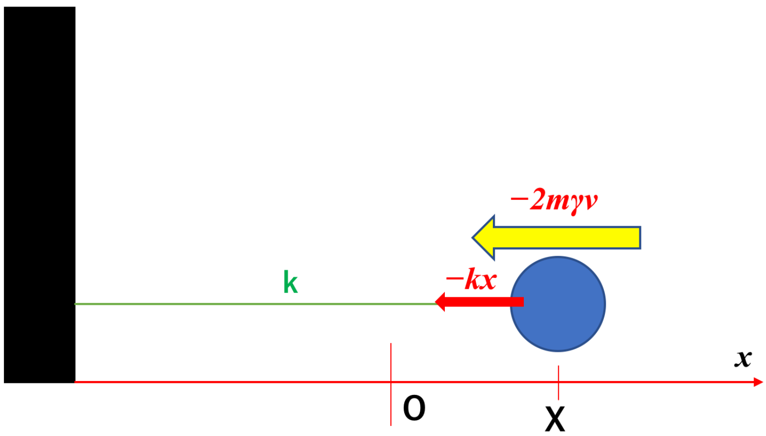
単振動は、この章の最初にも記した通り、最も単純な振動現象であり、大学受験の物理で頻出の分野という点でも重要である。ただ、それだけでなく、単振り子のように、近似的に単振動とみなすことができる現象も単振動の仲間として扱うことができるなど、単振動は基本的な振動であるが応用範囲は非常に大きい。

このsection では、高校物理のレベルを超えて、振動現象の 1 つである「**減衰振動**」と「**強制振動**」にふれる。実は、高校物理の電磁気学の交流の話で登場する回路方程式は、「**強制振動**」の方程式と同じタイプである。そのため、減衰振動や強制振動についてふれておくことは、交流の話を勉強するときに (きっと) 役に立つ。

まず、減衰振動についてふれる。減衰振動と強制振動については、高校物理および高校数学の範囲内では厳密に解析できない[(24)]。そこで、この section では、「ファインマン物理学」に載っている方法 (数値的解法) を利用して、どのようになるかを予想する。

5.6.1　減衰振動

単振動の系に抵抗が働いている場合を考える。



物体に働く抵抗を数式化するのは容易ではない。今回は、物体の速度に抵抗の大きさが比例する場合 (粘性抵抗) を考える。この速度に比例する抵抗を導入することで空気抵抗などがある場合を考えることができる。1.3.2「空気抵抗を受ける落体の運動」で既に速度に比例する抵抗を扱った。バネがついていなければ、高校数学の範囲内で処理できるが、残念なことにバネが付くと、そうはいかない[(23)]。この TEX ノートでは、厳密な解法は取り上げないで、解の時間的振る舞いの概略だけを取り上げる。

(運動方程式)[(24)]

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x - 2m\gamma v \tag{5.96}$$

(24) 私は、つい最近まで高校数学の範囲内では解析できないだろうと思っていた。確かに、オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

を使用しないと解析はできない。しかし、この TEX ノートではオイラーの公式を 5.3.3「オイラーの公式」(113 ページ) で導入している。オイラーの公式さえ認めてしまえば、後は高校数学 (教科書の発展編に書かれている微分方程式の最低限の知識も含む) で議論することができるらしい。付録編の付録 C で参考文献として紹介した『数学 微分方程式・複素整数 分野別 標準問題精構』(旺文社・木村光一) を読んで私は知った。

ただ、その議論は本編には記さず、付録編の付録 B の B.3「定数係数 2 階線形微分方程式」(191 ページ) と B.4「減衰振動と強制振動 (再考)」(191 ページ) で紹介する。

(23) この TEX ノートでは、オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を取り上げたので、減衰振動に必要な数学的な準備は整っている。(数学的に厳密に考えるなら、もっと準備は必要であるが。)

(24) この運動方程式を厳密に解くとき、バネ定数を $m\omega^2$、粘性抵抗の比例定数を $2m\gamma$ とおくと計算しやすい。そこで、この TEX ノートでも、このようにすることにした。

$v = dx/dt$ を利用して、この式を変形すると、$x(t)$ は、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \tag{5.97}$$

となる。

この方程式の解 $x(t)$ の挙動は、γ^2 と ω^2 の大小関係によりよって 3 種類に分けられることが知られている。ここでは、γ と ω が具体的に代入して、挙動の概形を把握することにしよう。
「ファインマン物理学」では以下のような方法が取られている[(25)]。
(1) まず、$x(t+\Delta t)$ の Taylor 展開を考える。

$$x(t+\Delta t) = x(t) + x'(t)\Delta t + \frac{1}{2}x''(t)(\Delta t)^2 + \cdots$$

となので、Δt が十分小さいとき、Δt の 2 次以上の項を無視できて、

$$x(t+\Delta t) = x(t) + x'(t)\Delta t$$

となる。$x'(t) = v(t)$ なので、Δt が十分小さいとき、

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t \tag{5.98}$$

と近似できる。同様にして、$v'(t) = a(t)$ より、

$$v(t+\Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t \tag{5.99}$$

と近似できる。

(2) 微分方程式 (5.92) は

$$a(t) + 2\gamma v(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

と書ける。すると、式 (5.94) は

$$v(t+\Delta t) = v(t) - \{2\gamma v(t) + \omega^2 x(t)\}\Delta t \tag{5.100}$$

となり、式 (5.93) と式 (5.95) から漸化式 (のような関係式) が作れる。そのため、$x(0)$ と $v(0)$ を決めると、$n\Delta t$ たった後の位置と速度が求められる。

今回は、**初期条件**として、$\underline{x(0) = 1,\ v(0) = 0}$ の場合を考える。微分方程式 (5.93) は、γ^2 と ω^2 の大小関係

[(25)]「ファインマン物理学」に載っている方法と書いたが、これは、ファインマン物理学だけの特殊な方法ではない。この方法は微分方程式が解析的に解くことができない時や、計算機で $x(t)$ の挙動を予測する時に使われる方法の 1 つである。$\dfrac{dx}{dt}$ を差分を使って近似するのだが、差分の書き方にはいくつかある。

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$
$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t) - x(t-\Delta t)}{\Delta t}$$
$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t) - x(t-\Delta t)}{2\Delta t}$$

また、微分方程式が $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \equiv f(t)$ と書けるとき、右辺の f を

$$f \simeq \frac{f(t+\Delta t) + f(t)}{2}$$

のように書くなど、コンピューターを使って計算するためにどのように表現する方法はたくさんある。今回取り上げた方法は、コンピュータによる計算 (数値計算) による常微分方程式の解法としては、一番シンプルな「陽的 Euler 法」と同等の解法である。

により、解が 3 種類に分けられることが知られている。そこで、以下の 3 パターンについて、「ファインマン物理学」の方法を実行してみる。

(A) $\gamma = 2,\ \omega = 1$ のとき

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + x = 0$$

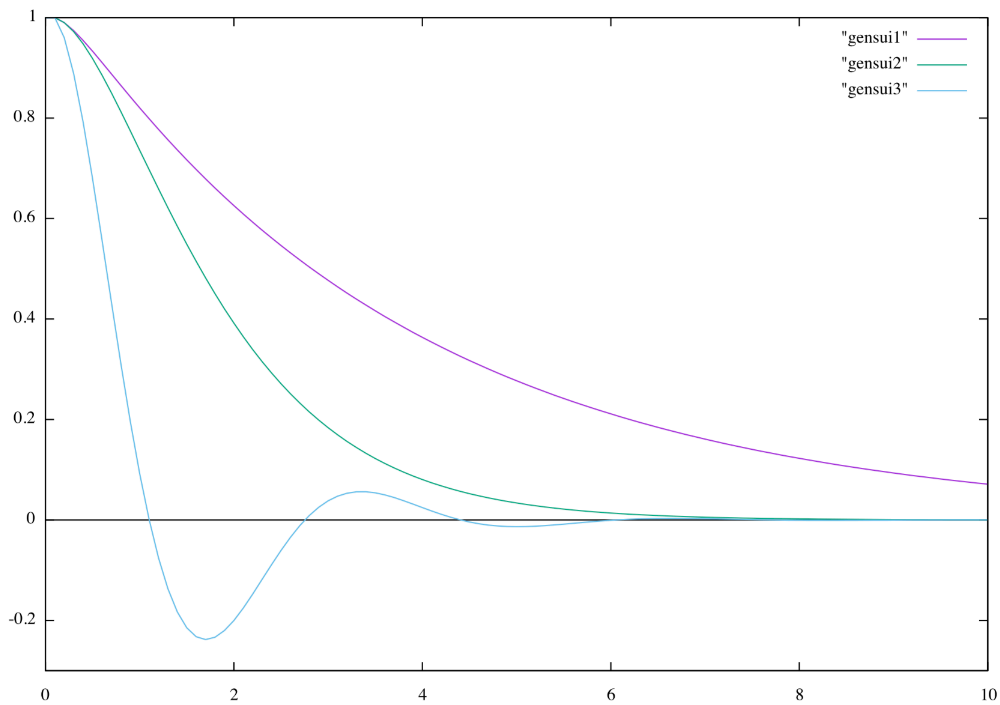
(B) $\gamma = 1,\ \omega = 1$ のとき

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 0$$

(C) $\gamma = 1,\ \omega = 2$ のとき

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

「ファインマン物理学」の方法を、$\Delta t = 0.10$ として(26)、$0 \leq t \leq 10$ の範囲で実行した結果は以下のようになる。gensui1 が (A)、gensui2 が (B)、gensui3 が (C) の場合に対応している。



(A)、(B)、(C) のどの場合においても、$|x(t)|$ は 0 に近づくことが上のグラフからわかる。実際、3 つの微分方程式を厳密に解くと、(A)、(B)、(C) の順に、

$$x(t) = c_1 e^{(-2+\sqrt{3})t} + c_2 e^{(-2-\sqrt{3})t}$$
$$x(t) = c_1 e^{-t}(at + b)$$
$$x(t) = c_1 e^{-t} \sin(\sqrt{3}t + b)$$

(c_1, c_2, a, b は定数) の形になることが知られている。

結論は、式 (5.92) の形をする微分方程式の解は、t が十分大きくなると、0 に近づくということである。

(26) $\Delta t = 0.10$ という精度は本当に妥当なのか。私は、減衰振動の方程式の解を知っている。最初は $\Delta t = 0.01$ で計算したが、私の知っている解を表現する曲線が得られなかった。$\Delta t = 0.01$ で計算すると、$0 \leq t \leq 1$ の範囲で挙動を知るだけでも 100 回の計算が必要である。そのため、Excel を使って、$\Delta t = 0.01$ の場合を計算したのだが、解析的に得られる結果と一致しなかった。おそらく、コンピュータで計算するときに生じる誤差によるものだろう。ここでは、誤差について詳しくはふれない。コンピュータに関する書物で確認して欲しい。

5.6.2 強制振動

次に、「強制振動」について考える。強制振動の考え方は、高校物理の電磁気学分野の「交流回路」のところで登場する。強制振動は、減衰振動と同じ状況に、さらに、物体に $F(t) = F_0 \cos\omega_0 t$ の外力が働く場合である。言葉でいうのは簡単だが、数学的に処理するのはとても面倒である。なお、この subsection では、外力の角振動数 ω_0 は $\omega_0 \neq \omega$ を満たすものとする。また、F_0 は定数とする。
まず、最初に強制振動の微分方程式の特徴を見ていこう。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x - 2m\gamma\frac{dx}{dt} + F_0\cos\omega_0 t$$

$f_0 = F_0/m$ で定義すると、この微分方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f_0\cos\omega_0 t \tag{5.101}$$

と変形できる。式 (5.92) の右辺が $f_0\cos\omega_0 t$ になっただけである。

「新・物理入門問題演習」の交流の部分では、式 (5.107) の右辺の形が $\cos\omega_0 t$ の定数倍なので、

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta)$$

というような内容が書かれている。私の高校時代の物理の先生も、$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta)$ とおけば良いというようなことを言っていた。高校時代の物理の先生は、単に山本義隆先生の書かれたことをパクっているだけだが。でも、なぜ、これで良いのか。数学的に厳密に考えるには、高校数学の範囲内では無理がある。だが、高校数学の内容とこの $\TeX$ ノートの「減衰振動」の内容をもとに少し考えよう。

まず、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

の解を $x_1(t)$ とし、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f_0\cos\omega_0 t$$

を満たす $x(t)$ のうち、容易にみつけられるものを $x_2(t)$ としよう。

この時、$x(t)$ として、$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ をとると、これも式 (5.107) を満たす。なぜなら、

$$\begin{aligned}
\text{式 (5.96) の左辺} &= \frac{d^2}{dt^2}\{x_1(t) + x_2(t)\} + 2\gamma\frac{d}{dt}\{x_1(t) + x_2(t)\} + \omega^2\{x_1(t) + x_2(t)\} \\
&= \left\{\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx_1(t)}{dt} + \omega^2 x_1(t)\right\} + \left\{\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx_1(t)}{dt} + \omega^2 x_1(t)\right\} \\
&= 0 + f_0\cos\omega_0 t \\
&= f_0\cos\omega_0 t
\end{aligned}$$

となるからである。ここで、この $\TeX$ ノートでは、次の数学的な事実を認めることにしよう。

2 階線型微分方程式の一般解

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f(t) \tag{A}$$

の解 $x(t)$ は、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \tag{B}$$

の一般解に、(A) を満たす解の 1 つ (特別解) を足したものである。

(B) の**一般解**とは、減衰振動の part で出てきた $x(t) = c_1 e^{(-2+\sqrt{3})t} + c_2 e^{(-2-\sqrt{3})t}$ のように、未定定数を 2 つ含んだ形の式で、c_1 と c_2 をうまく取ることで、あらゆる初期条件 ($t = 0$ のときの $x(t),\ v(t)$) に合う式を表現できるような解のことをいう。

このことを認めると、式 (5.96) の一般解は、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

の一般解に、式 (5.96) を満たす $x(t)$ のうち、容易に見つけられるものを $x_2(t)$ を足したものであることがわかる。

では、その容易に見つけられる $x_2(t)$ を見つけることにしよう。この方法は、前に書いた通り、

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta)$$

とおけば良い。 これを式 (5.96) に代入すると、

$$-A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \delta) - 2A\gamma\omega_0\sin(\omega_0 t + \delta) + A\omega^2\cos(\omega_0 t + \delta) = f_0\cos\omega_0 t$$

となり、両辺の cos, sin の位相が $\omega_0 t$ の式になる。この式を整理すると、

$$A(\omega^2 - \omega_0^2)\cos(\omega_0 t + \delta) - 2A\gamma\omega_0\sin(\omega_0 t + \delta) = f_0\cos\omega_0 t$$

となる。両辺を cos で統一するために、三角関数の合成をする。

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_0)^2}} = \cos\phi \tag{5.102}$$

$$\frac{2\gamma\omega_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_0)^2}} = \sin\phi \tag{5.103}$$

とおくと、

$$A\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_0)^2}\cos(\omega_0 t + \delta + \phi) = f_0\cos\omega_0 t$$

となる。これより、両辺の振幅と位相の部分を比較すると、A は、

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_0)^2}}$$

と求められる。また、ϕ は式 (5.97) と式 (5.98) を満たすような値で、

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2\gamma\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

と書ける。

ここで、$\tan^{-1}$ は $\tan$ の逆関数[27]のことである。つまり、

$$\tan\phi = \frac{2\gamma\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}$$

と同一のことを表している。

よって、式 (5.96) の一般解は、上の ϕ を使って、

$$(\text{減衰項}) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(2\gamma\omega_0)^2}}\cos(\omega_0 t+\phi) \tag{5.104}$$

と書ける。この「減衰項」は、

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0$$

の一般解であり、「減衰振動」の部分で書いた通り、t が十分大きくなると、0 に近づく。

そこで、t が十分大きくなり、「減衰項」が $\left|\dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(2\gamma\omega_0)^2}}\right|$ に比べて十分小さくなると、式 (5.96) の解は、最初においた $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\delta)$ であると言える。「新・物理入門問題演習」を含め、高校物理の交流の部分では、この「定数項」を無視できるぐらい時間がたってからのことを考える。「減衰項」を無視できるような状態を**定常状態**という。

[27] $\tan^2 x$ は $(\tan x)\times(\tan x)$ のことを表す。ただ、$\dfrac{1}{\tan x}$ は $\tan^{-1}x$ と表すことはない。$\dfrac{1}{\tan x}$ は $(\tan x)^{-1}$ とかく。これは、この TEX ノートだけのルールではなく、一般的なルールである。

第 6 章　万有引力

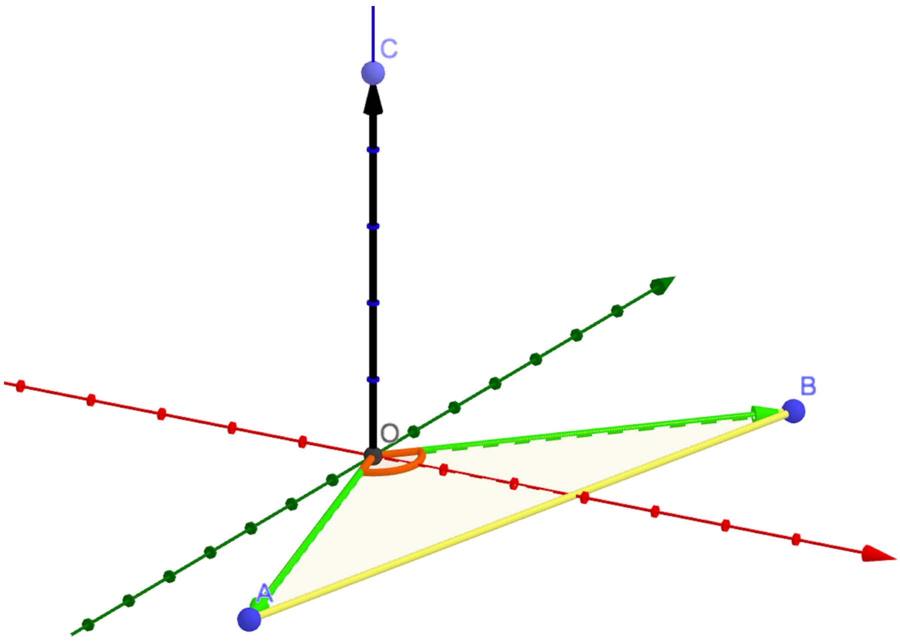
長い単振動の話の後に扱うのは、万有引力の話である。この宇宙にある全ての物体は相互作用しあっている。それは、小さな原子・分子のレベルから、地球と太陽・月といった大きなレベルまで当てはまることである。この section では、これまで扱った質点の話から離れて、惑星のレベルの話をする。具体的には、Kepler が発見した 3 つの法則と「万有引力」の関係性について見ていく。そこで、現在の高校物理には登場しない「角運動量」をこの TEX ノートに登場させる。まず、その準備として、「ベクトルの外積」の話をする。その後、高校物理では「剛体」の部分で登場する「力のモーメント」の話をしてから、「角運動量」に触れる。

この chapter の演習問題では、現在の高校物理では扱っていない中心力問題も考える。「中心力」という概念が高校物理では登場しないが、「角運動量」の話と同時に登場させる。惑星の運動も中心力問題であるが、「ケプラー問題」などと別物として考えられている。前の chapter のメインテーマである「単振動」も中心に向かって力が働いているので、中心力として考えられるが、別物として扱われる。

6.1　角運動量保存則

6.1.1　ベクトルの外積

まずは、ベクトルの**外積**の話をする。高校物理では、力学の「力のモーメント」で登場する。あと、電磁気学の「ローレンツ力」のところで、ベクトルの外積が根底にある内容が登場する。しかし、高校数学で、ベクトルの外積は扱わないので、高校物理でベクトルの外積は出てこない。この TEX ノートでは、ここでベクトルの外積を登場させる。



前のページの図の $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をそれぞれ $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ と書くことにする。この時、ベクトル $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を次の条件を満たすように定義する。

1. 向き: $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ の方向にネジを回したとき、ネジの進む方向。
   2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の張る平面[1]に垂直なベクトル。
2. 大きさ: $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とし、$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ の大きさを $a,\ b$ とした時、$ab\sin\theta$
   すなわち、$\underline{\boldsymbol{a}\text{ と }\boldsymbol{b}\text{ の張る平行四辺形の面積と }\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\text{ の大きさ }|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\text{ は等しい}}$。

ベクトルの内積と違って、ベクトルの外積は、2 つのベクトルから新しいベクトルを作る。ここで、上のベクトルの定義より、ベクトルの外積に関する次の重要な性質がわかる。

- $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$
- $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角が $\theta=0,\pi,-\pi$ のとき、つまり、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行[2]である時、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

ベクトルの内積の場合は、上の 2 つの性質に対応する性質として、以下の 2 つが成立するが、内積と異なるので、注意を要する[3]。

- $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$
- $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角が $\theta=\pi/2,-\pi/2$ のとき、つまり、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が垂直である時、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

次に、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の成分表示を考える。成分表示は、大学で習う行列式から導くことができるが、この TEX ノートでは行列式は扱わないので、成分表示については、ただ暗記して欲しい。
$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ と $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ の外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の成分表示は

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}\tag{6.1}$$

となる。この公式を認めると、内積と同様に分配法則が成立することが導かれる。つまり、

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\tag{6.2}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\tag{6.3}$$

が導かれる。

この公式は認めることにして先に進むが、その前に、$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ の時間微分を考える。
$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\ \boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ とおくと、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の時間微分は、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d}{dt}(a_2b_3-a_3b_2)\\\frac{d}{dt}(a_3b_1-a_1b_3)\\\frac{d}{dt}(a_1b_2-a_2b_1)\end{pmatrix}$$

となる。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の各成分が時間 t に依存する場合を考えよう。x 成分について、

$$\frac{d}{dt}(a_2b_3-a_3b_2)=\frac{da_2}{dt}\cdot b_3+a_2\cdot\frac{db_3}{dt}-\frac{da_3}{dt}\cdot b_2+a_3\cdot\frac{db_2}{dt}$$

[1]「2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の張る平面」とは、以下の集合に属する点の集まりである。

$$\{\boldsymbol{r}|\ \boldsymbol{r}=c_1\boldsymbol{a}+c_2b,\ \boldsymbol{r}\text{ は 3 次元ベクトル},\ c_1,c_2\text{ は任意の実数 }\}$$

[2] ここでいう「$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行である」とは、ある実数 k を用いて、$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$ と書けることである。
[3] 大学の線形代数学では、内積の性質として、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ は存在しない。というのも、この性質はベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が実ベクトルの時に限る。実ベクトルは全ての成分が実数のベクトルのことである。高校数学や高校物理で扱うベクトルは実ベクトルなので、内積計算が出てきたとき、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ の性質が成立すると考えて良い。

と計算できる・。同様に $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ の y, z 成分も考えると、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= \begin{pmatrix} \frac{da_2}{dt}\cdot b_3 + a_2\cdot\frac{db_3}{dt} - \frac{da_3}{dt}\cdot b_2 - a_3\cdot\frac{db_2}{dt} \\ \frac{da_3}{dt}\cdot b_1 + a_3\cdot\frac{db_1}{dt} - \frac{da_1}{dt}\cdot b_3 - a_1\cdot\frac{db_3}{dt} \\ \frac{da_1}{dt}\cdot b_2 + a_1\cdot\frac{db_2}{dt} - \frac{da_2}{dt}\cdot b_1 - a_2\cdot\frac{db_1}{dt} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{da_2}{dt}\cdot b_3 - \frac{da_3}{dt}\cdot b_2 \\ \frac{da_3}{dt}\cdot b_1 - \frac{da_1}{dt}\cdot b_3 \\ \frac{da_1}{dt}\cdot b_2 - \frac{da_2}{dt}\cdot b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2\cdot\frac{db_3}{dt} - a_3\cdot\frac{db_2}{dt} \\ a_3\cdot\frac{db_1}{dt} - a_1\cdot\frac{db_3}{dt} \\ a_1\cdot\frac{db_2}{dt} - a_2\cdot\frac{db_1}{dt} \end{pmatrix} \\
&= \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}
\end{aligned}$$

と計算できる。ただし、$\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \left(\dfrac{da_1}{dt}, \dfrac{da_2}{dt}, \dfrac{da_3}{dt}\right)$ とする。

ここまで、ベクトルの外積の性質を見てきたが、次々と説明をしていて、わかりにくい可能性があるので、この subsection の最後にまとめておく。

ベクトルの外積の性質

($\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の性質)

1. 向き: $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ の方向にネジを回したとき、ネジの進む方向。
   2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の張る平面に垂直なベクトル。
2. 大きさ: $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とし、$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ の大きさを $a,\ b$ とした時、$ab\sin\theta$
   (= $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積)
3. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$
4. $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行である時、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$
5. 成分表示

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

(計算法則)

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$$

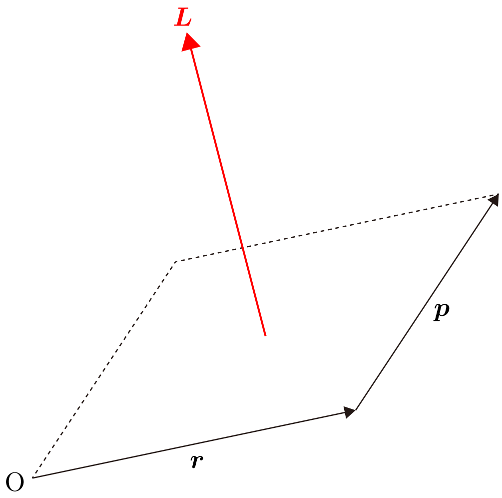
$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$$

6.1.2　ベクトルのモーメントと角運動量

ベクトルの外積に続いて、ベクトルの**モーメント**を定義し、それをもとに**角運動量**を定義する。空間のある点 P にベクトル $\boldsymbol{A}$ が与えられたとき、ある特定の点 O を定め、「点 O のまわりのベクトル $\boldsymbol{A}$ の**モーメント**」を

$$(\boldsymbol{r_P} - \boldsymbol{r_O}) \times \boldsymbol{A} \tag{6.4}$$

と定義する。角運動量は、この $\boldsymbol{A}$ が運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ の時の「点 O のまわりの運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ のモーメント」として定義される。



角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ は、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ を用いて、

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{6.5}$$

と書ける。$\boldsymbol{L}$ の大きさ $L = |\boldsymbol{L}|$ は、点 P($\boldsymbol{r}$) にある質点の原点 O のまわりの回転運動の勢いを表す指標である。$\boldsymbol{L}$ の向きは回転軸の向きを表し、$\boldsymbol{L}$ に対して、右ネジの回転方向 (反時計回り) が回転の向きを表す。

6.1.3　角運動量保存則

角運動量の時間微分を考えよう。運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ と書けることと、運動方程式 $m\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$ より、

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \\ &= \boldsymbol{v} \times (m\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}\end{aligned}$$

となる。第 1 項は、ベクトルの外積の性質から $\boldsymbol{0}$ である。第 2 項 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ は、点 O のまわりのベクトル $\boldsymbol{F}$ の**モーメント**を表す式である。ここで、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{F}$ の外積 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ は、回転を引き起こす能力の指標を表すベクトルで、$\boldsymbol{N}$ と表す(4)。すると、角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ の時間微分は、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N} \tag{6.6}$$

と表せる。この式は、$\boldsymbol{N}$ によって回転が生じ、勢い $\boldsymbol{L}$ が変化することを表している。

(4)次の chapter「剛体のつりあい」で特に重要なベクトルとして再度登場する。

さて、$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{0}$ となるのは、$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ より、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{F}$ が平行なとき、つまり、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{F}$ の向きが同じか反対のときに、$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$ となる。$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{F}$ の向きが同じか反対のとき、この力を特に**中心力**という。

$\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{0}$ となるとき、$\boldsymbol{L}=(L_x,L_y,L_z)$ と書くと、

$$\begin{pmatrix}\frac{dL_x}{dt}\\\frac{dL_y}{dt}\\\frac{dL_z}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

となるから、L_x,L_y,L_z は時間によらず一定となる。すなわち、<u>$\boldsymbol{L}$ は時間によらない定ベクトルである。</u>

角運動量保存則

物体に働く力 (or 合力) $\boldsymbol{F}$ が中心力のとき、角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ は一定である。

6.2 万有引力の性質

6.2.1 万有引力とは

アイザック・ニュートンの逸話といえば、リンゴの話だろう。Google で「ニュートン」と検索すると、サジェスト機能により、「ニュートン りんご」と出てくる。2018 年 11 月 6 日に「ニュートン りんご」と検索して、一番上に出てくるサイトは、`https://matome.naver.jp/odai/2143778201977202601` であった。NAVER のまとめサイトである。まとめのタイトルは、『「ニュートンがリンゴで万有引力の法則を閃いた」は、作り話』であった。「地球がリンゴを引っ張っている」とニュートンは考えたという感じのことを、小学生ぐらいの時に、小学生向けの偉人集で誰もが読んだことがあるだろう。

さて、地球がリンゴを引っ張っているという事実は、リンゴが木から落ちるということから認めるしかない。でも、リンゴが地球を引っ張っているとは誰も思わないだろう。しかし、これが物理学的に正しい statement である。上で紹介したまとめサイトでは、ニュートンは天体の運動の解析を通して万有引力の存在を見つけたと書かれている。なぜ、身の回りの現象から発見することはできなかったのか。The Feynman Lectures on Physics, Volume 2 にこんな記述がある。

If you were standing at arm's length from someone and each of you had one percent more electrons than protons, the repelling force would be incredible？ How great？

日本語訳版の訳は、「人体の中の電子が陽子より 1 パーセント多いとすると、あなたがある人から腕の長さの所に立つ時、信じられない位強い力で反発するはずである。」となっている。

この主張は簡単に確かめることができるが、そのための準備として、**万有引力**の大きさを求める式と**クーロンの法則**を定義する必要がある。

万有引力の法則

2 つの物体の間には、常に**両者の質量の積に比例し、距離の 2 乗に反比例する万有引力** $\boldsymbol{F_G}$ **を及ぼしあう**。この時、万有引力の大きさ F_G は

$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{6.7}$$

と表せる。ここに登場した G は**万有引力定数**で、$G = 6.67 \times 10^{-11}\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$ である。
ベクトルを使って表すと、2 つの物体の位置ベクトルが $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_2}$ なら、位置 $\boldsymbol{r_1}$ にある物体に働く万有引力 $\boldsymbol{F_{2\to1}}$ は、

$$\boldsymbol{F_{2\to1}} = G\frac{m_1 m_2}{\|\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}\|^2}\frac{(\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1})}{\|\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}\|} \tag{6.8}$$

と表せる。

Coulomb の法則

2 つの物体が電荷 q_1, q_2 を持つ時、2 つの物体の間には、常に**両者の電荷の積に比例し、距離の 2 乗に反比例するクーロン力** $\boldsymbol{F_C}$ **を及ぼしあう**。この時、クーロン力の大きさ F は

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1 q_2|}{r^2} \tag{6.9}$$

と表せる。ここに登場した ε_0 は**真空の誘電率**で、$\varepsilon = 8.85 \times 10^{-12}\mathrm{F/N}$ である。
ベクトルを使って表すと、2 つの物体の位置ベクトルが $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_2}$ なら、位置 $\boldsymbol{r_1}$ にある物体に働くクーロン力 $\boldsymbol{F_{2\to1}}$ は、

$$\boldsymbol{F_{2\to1}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\|\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}\|^2}\frac{(\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1})}{\|\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}\|} \tag{6.10}$$

と表せる。
クーロン力は 2 つの電荷の積が正なら斥力、負なら引力となる。

今、体重 60kg の 2 人の人が共に 1C の電荷を帯びているとする。腕の距離を今 1m とみなすと、2 人の間に働く万有引力 F_G と静電気力 F_C は、

$$F_G = 6.67 \times 10^{-11} \times 60^2 = 2.40 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}$$
$$F_C = \frac{1}{4 \times 3.14 \times (8.85 \times 10^{-12})} = 9.00 \times 10^9\ \mathrm{N}$$

となり、10^9 N のレベルの静電気力を受けることがわかる。もし、2 人の電荷が異なっているなら、お互いに 10^9 N の力で引き合っていて、離れることはできないだろう。それはさておき、万有引力は 10^{-7}N であり、十分小さいことがわかる。また、F_C を F_G でわると、10^{16} のオーダーなので、万有引力は静電気力に比べてとても小さく無視できることがわかる。従って、万有引力はとても小さく、日常生活で感じることはほとんどないと言える。

6.2.2　万有引力の位置エネルギー

万有引力の位置エネルギーを次に考えよう。位置エネルギーの定義を思い出そう。

> **位置エネルギー**
>
> 物体をある点 A から基準点 O まで移動させる時、保存力がする仕事を点 O を基準とした点 A における物体の**位置エネルギー**と定義する。

上の「位置エネルギー」の定義から、万有引力が保存力であることを確認する必要がある。

2 つの物体の一方が原点にあるとする。そして、図のように x 軸を取ることにする。$\|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\| = r$ なら、2 つの物体に働く万有引力の大きさは

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

となる。上の図のように軸を設定すると、右側の物体に働く万有引力は (正負も含めて書くと、)

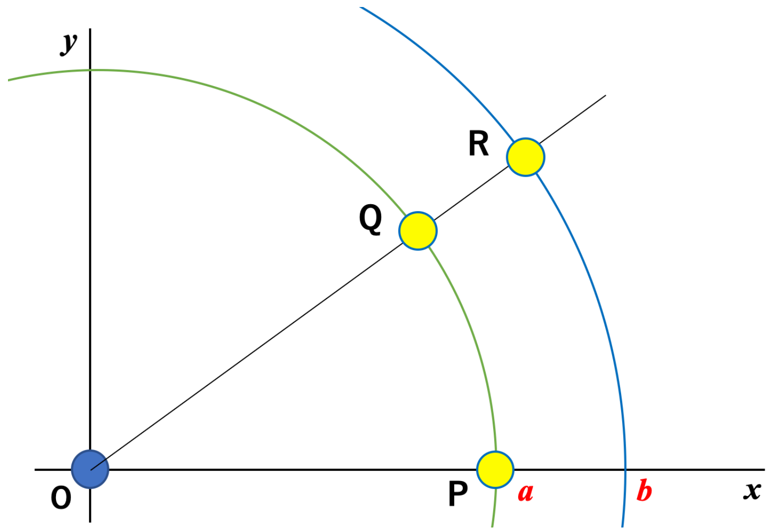
$$F = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

とかける。そのため、位置エネルギーの基準が $x = r_O$ であるとすると、位置エネルギーは万有引力が保存力なら、上の定義より、

$$U(r) = \int_r^{r_O} \left(-G\frac{m_1 m_2}{x^2}\right) dx \tag{6.11}$$

となる。

では、万有引力が保存力であるかどうか考えよう[5]。
以下の図のように、xy 平面の原点に質点 A(質量 M) があり、点 P$(a, 0)$ に質点 B(質量 m) があるとする。今回はこの物体の間に万有引力のみが働くとする。この状況下で、点 P から点 R$(b\cos\phi,\ b\sin\phi)$ に移動するときに要する仕事を考える。ただし、M は m に比べて十分大きく、また、$a < b\cos\phi$ とする。



[5] 厳密な証明は、grad や rot といった概念を導入しないとできない。ここでは、保存力ならランダムに 2 つのルートを選択した時に、保存力のした仕事は 2 つのルートの選び方に依存しないという性質を使い、考えやすい 2 つのルートを選択した時に保存力のした仕事が変わらないことを確認する。

「M は m に比べて十分大きい」とき、2 つの物体の相互作用に実際は動くが、原点 O にある質点 A の変位は小さく、質点 A は静止していると近似して良い。

(ルート 1)

点 P から点 Q$(a\cos\phi,\ a\sin\phi)$ へ円弧に沿って進み、その後、直線 QR に沿って、点 R へと移動する。

まず、PQ 間の移動に要した仕事 W_1 を考える。万有引力はその定義からもわかるように中心力である。そのため、円弧に沿って動くとき、万有引力の向きは動径方向となり、進行方向と垂直となる。そのため、$W_1 = 0$ である。
続けて、QR 間の移動に要した仕事 W_2 を考える。原点からの距離が r のとき、質点 B に働く力 $F(r)$ は

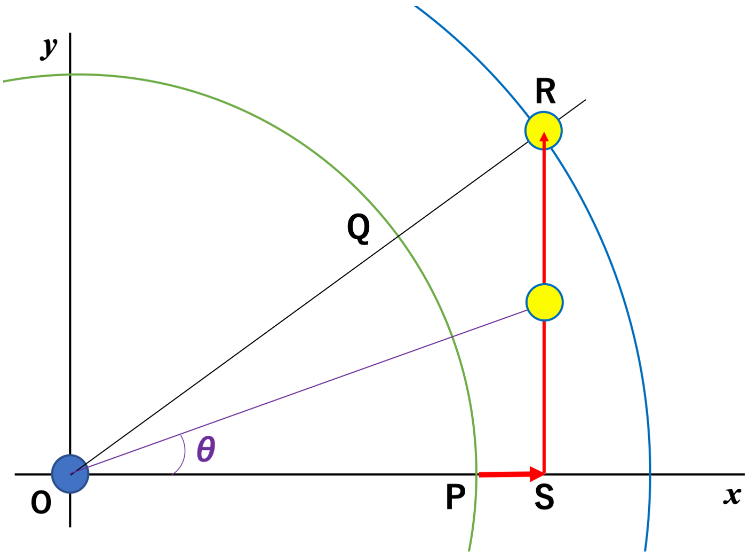
$$F(r) = -G\frac{Mm}{r^2}$$

である。(中心方向を向いているので、$-$ が付いている。) よって、W_2 は

$$\begin{aligned} W_2 = \int_Q^R \left(-G\frac{Mm}{r^2}\right) dr &= \int_a^b \left(-G\frac{Mm}{r^2}\right) dr \\ &= \left[G\frac{Mm}{r}\right]_a^b \\ &= GMm\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) \end{aligned} \tag{6.12}$$

(ルート 2)

点 P から点 S$(b\cos\phi,\ 0)$ へ x 軸上を進み、その後、y 軸に平行に点 S から点 R へと移動する。



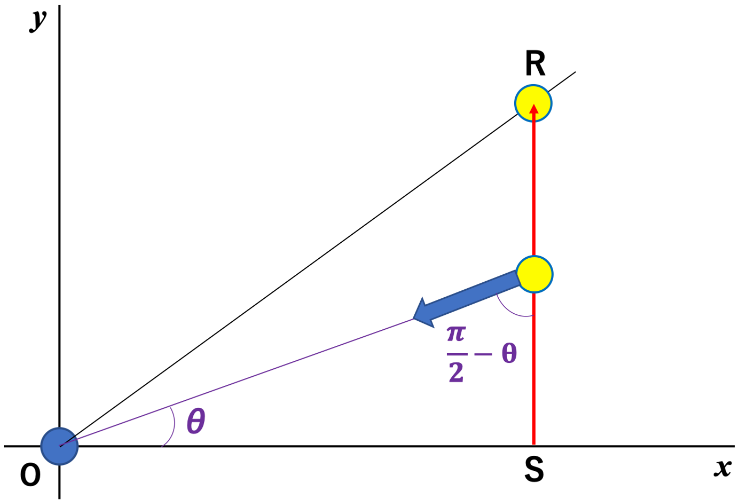
点 P から点 R への移動で保存力がした仕事は W_1' は[6]、

$$W_1' = \int_a^{b\cos\phi} \left(-G\frac{Mm}{x^2}\right) dx = GMm\left(\frac{1}{b\cos\phi} - \frac{1}{a}\right)$$

となる。

[6] x 軸上を物体が動くら積分変数を x とした。この後の S から R への移動は y 軸に平行に移動するので、積分変数を y とする。

次に、点 S から点 R へと移動する時に要する仕事を考える。



物体の位置を点 T の座標を $(b\cos\phi,\ y) = (b\cos\phi,\ b\cos\phi\tan\theta)$ とするとき、中心力の大きさ $|F(y)|$ は、

$$|F(y)| = G\frac{Mm}{(b\cos\phi)^2 + (b\cos\phi\tan\theta)^2} = G\frac{Mm}{(b\cos\phi)^2}\cos^2\theta$$

となる。よって、RS 間での仕事 W_2' は

$$\begin{aligned} W_2' &= \int_0^{b\sin\phi} -|F(y)|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)dy \\ &= \int_0^{b\sin\phi} -G\frac{Mm}{(b\cos\phi)^2}\cos^2\theta\sin\theta\ dy \end{aligned}$$

である。ここで、線分 RS 上の点の y 座標は $y = b\cos\phi\tan\theta$ と書けるから、$\dfrac{dy}{d\theta} = b\cos\phi\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ となる。よって、上の積分は、

$$W_2' = \int_0^{\phi} -G\frac{Mm}{b\cos\phi}\sin\theta d\theta$$

と書ける。この積分を計算すると、

$$W_2' = G\frac{Mm}{b}\left(1 - \frac{1}{\cos\phi}\right)$$

以上より、(ルート 2) の移動で保存力がした仕事 W' は、

$$W' = W_1' + W_2' = GMm\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) \tag{6.13}$$

と求められる。これは、W_2、すなわち、(ルート 1) の移動で保存力がした仕事と等しい。

さて、なんとなく万有引力が保存力である感じがしてきた。厳密には、$\nabla \times \boldsymbol{F}$ という量を評価する必要があるが、それは高校の範囲を逸脱するので、もう万有引力が保存力であることを認めることにして先に進もう。

万有引力は保存力であることがわかったので、この subsection の最初にも書いた通り、位置エネルギー $U(r)$ を

$$U(r) = \int_r^{r_O} \left(-G\frac{m_1 m_2}{x^2}\right)\, dx$$

により導入することができる。この積分を計算すると、

$$U(r) = Gm_1 m_2 \left(\frac{1}{r_O} - \frac{1}{r}\right)$$

となる。位置エネルギーは基準点の位置エネルギーを 0 とするのがとても扱いやすい。そこで、万有引力の場合、通常 $G\dfrac{m_1 m_2}{r_O}$ が 0 となるように位置エネルギーの基準 r_O を無限遠にとる。

万有引力の位置エネルギー

2 つの物体 (m_1, m_2) の距離が r のとき、無限遠を基準にした万有引力の位置エネルギー $U(r)$ は、

$$U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \tag{6.14}$$

と書ける。

6.2.3　万有引力の位置エネルギーを含むエネルギー保存則

2 つの物体 (M, m) の距離が r の時の万有引力の大きさは $G\frac{Mm}{r^2}$ であることはすでに説明した。今度は運動方程式を変形することで、万有引力の位置エネルギーの式 (式 (6.14)) が出てくることを確認しよう。

2 つの物体の質量を M, m とし、M は m に比べて非常に大きいとする。すると、質量 M の物体は静止しているとみなすことができるので、質量 m の物体の運動方程式だけを考えれば良い。

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{6.15}$$

この運動方程式の両辺のベクトルと $\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ の内積をとる。

$$m\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -G\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{6.16}$$

ここで、左辺のベクトルの内積は、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= v_x\frac{dv_x}{dt} + v_y\frac{dv_y}{dt} + v_z\frac{dv_z}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_x^2 + \frac{1}{2}v_y^2 + \frac{1}{2}v_z^2\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)
\end{aligned}$$

と変形できる。すると、式 (6.16) は、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -G\frac{Mm}{r^3}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\right)$$

となる。逆に、$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}r^2\right) = r\dfrac{dr}{dt}$ なので、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= -G\frac{Mm}{r^2}\frac{dr}{dt} \\ &= \frac{d}{dr}\left(G\frac{Mm}{r}\right)\cdot\frac{dr}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\left(G\frac{Mm}{r}\right)\end{aligned}$$

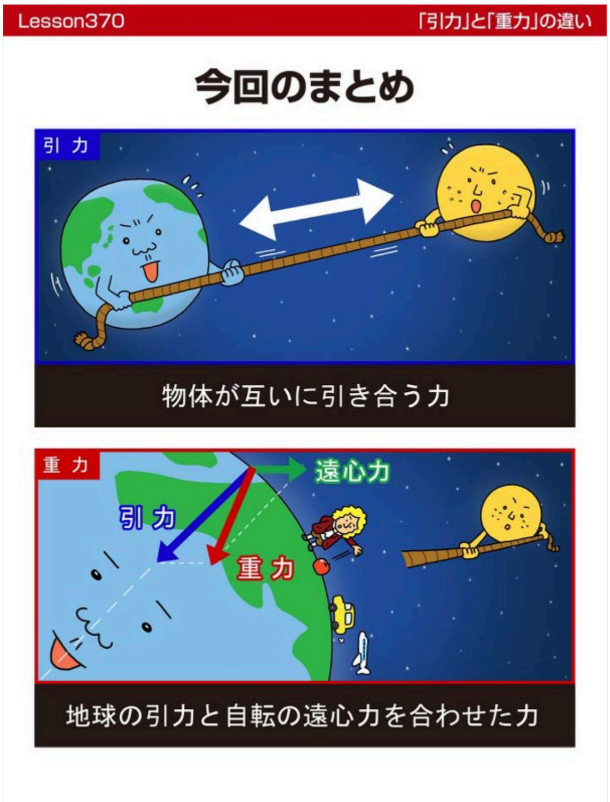
と変形できて、これより、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}\right) = 0 \tag{6.17}$$

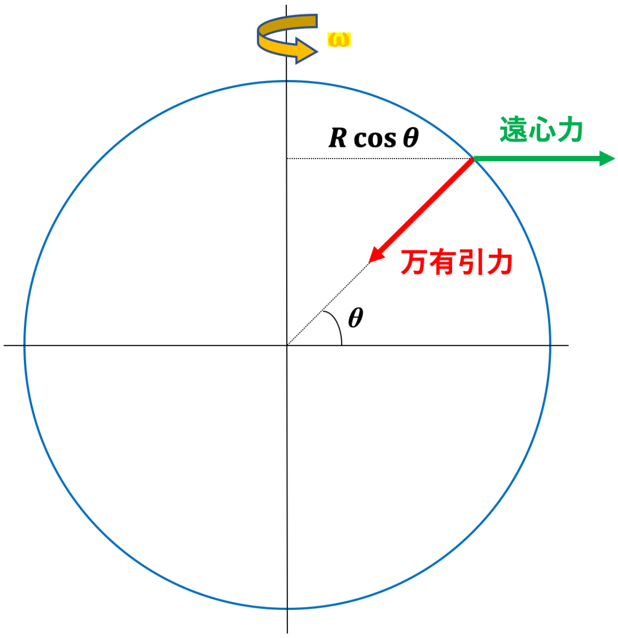
という式が導ける。この式は**エネルギー保存則**である。$\dfrac{1}{2}mv^2$ は運動エネルギーを表す項なので、$-G\dfrac{Mm}{r}$ は万有引力による位置エネルギーの項であると考えられる。以上より、運動方程式を変形することで、万有引力の位置エネルギーの式、式 (6.14) が得られることが確かめられた。

6.2.4 万有引力定数 G と重力加速度の大きさ g の関係

地球がリンゴを引っ張っている力は何か。この答えは「万有引力」である。いや、それ以外にも「重力」と答えることもできるだろう。では、万有引力と重力の間にはどんな関係があるのか。名前が違うのだから、もちろん違うものである。しかし、以下では「万有引力 = 重力」という式を立てる。`https://mainichi.jp/articles/20160425/mul/00m/040/00700sc` で、万人にわかりやすいように万有引力と重力の違いが説明されている。それをうまくまとめた図が以下の図である。重力は万有引力と自転の遠心力の合力である。そして、この遠心力は万有引力に比べてとても小さく無視できる。



万有引力定数 G と重力加速度の大きさ g の関係を見る前に、遠心力が万有引力に比べて十分小さいことを確認する。次のページの図のような位置における遠心力と万有引力の大きさを考える。



wikipedia(`https://ja.wikipedia.org/wiki/`地球の自転) によると、地球の自転周期は地球は 23 時間 56 分 4.098903691 秒 (86164.098903691 秒) らしい。まあ、ほぼ 24 時間である。もう一度、wikipedia の力を借りると (`https://ja.wikipedia.org/wiki/`地球質量) と、地球の質量 M は 5.97×10^{24}kg であるらしい。また、Google で「地球 半径」と入力して虫眼鏡ボタンをクリックすると、一番上に地球の半径 R は 6371km と表示される。(以下の議論では地球は完全な球体とみなして考える。)

まず、地球の自転の角速度 ω を求める。自転周期は、86164.098903691 秒なので、

$$\omega = \frac{2\pi}{86164.098903691} \approx 7.29 \times 10^{-5}/\mathrm{s}$$

である。すると、上の図の位置にある物体 (質量 m) が感じる遠心力の大きさ F_ω は、

$$\begin{aligned} F_\omega = m(R\cos\theta)\omega^2 &= m\cos\theta \cdot 6371 \times 10^3 \times (7.29 \times 10^{-5})^2 \\ &\approx m\cos\theta \cdot 3.39^{-2} \end{aligned}$$

と求められる。一方、万有引力の大きさ F_G は、万有引力定数 $G = 6.67 \times 10^{-11}\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2$ を使うと、

$$\begin{aligned} F_G = G\frac{Mm}{R^2} &= m \cdot \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24}}{(6371 \times 10^3)^2} \\ &\approx m \cdot 9.81 \end{aligned}$$

となる。よって、F_ω と F_G の比は、

$$\frac{F_\omega}{F_G} = \frac{3.39 \times 10^{-2}\cos\theta}{9.81} \approx 3.46 \times 10^{-3}\cos\theta \tag{6.18}$$

となる。つまり、θ がどんな値をとっても、遠心力の大きさは、万有引力の大きさの 3.46×10^{-3} 倍をこえることはない。よって、自転による遠心力が万有引力より十分小さいことがわかる。しかし、10^{-3} のオーダーというのは、なんとも言えない微妙な値であるように私は思ってしまう。

とにかく、遠心力は十分小さいことがわかったので、「重力 $\approx$ 万有引力」と考えよう。すると、この 2 つの量の大きさは近似的に等しいので、次の式が成立する。

$$mg = G\frac{Mm}{R^2} \tag{6.19}$$

これより、g と G は

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

という関係で結ばれることがわかる。そして、前のページの計算より、この g の値が 9.81m/s^2 であることもわかる。

万有引力定数 G と重力加速度の大きさ g の関係

地球の質量を M、半径を R とした時、G と g の間には、

$$g = \frac{GM}{R^2} \tag{6.20}$$

という関係が成立する。

6.3 Kepler の法則

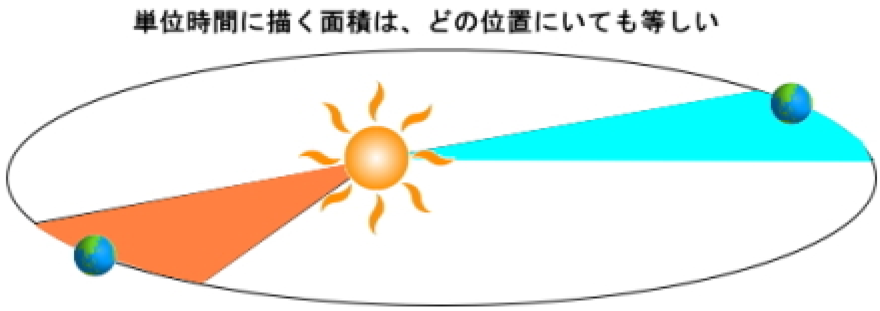
6.3.1 Kepler の法則とは?

Kepler の法則

1. 惑星は太陽を 1 つの焦点とする楕円上を動く。
2. 面積速度は一定。
3. 惑星の公転周期 T と軌道楕円の長半径 a の間には、

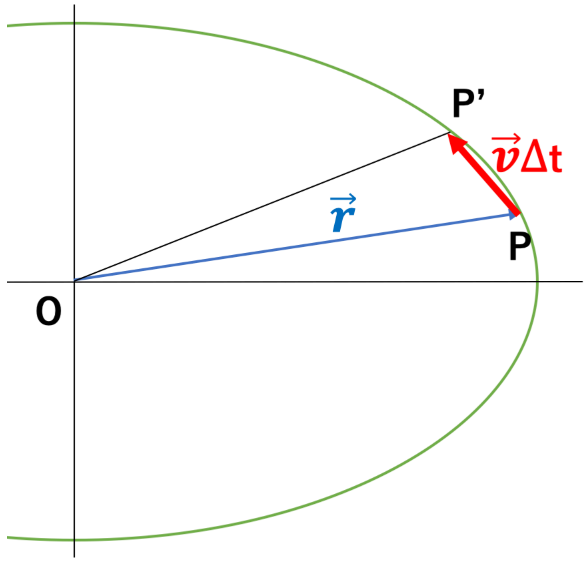
$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const.} \tag{6.21}$$

の関係がある。



(`http://www.geocities.jp/fukkunjpn/introduce/planet.htm`)

Kepler の法則について具体的に見ていこう。
まず、第 1 法則は公転軌道は楕円であることを表していて、それ以上のことはいっていない。
第 2 法則について。ここでは**面積速度**という言葉が出てくる。**面積速度**は、動径ベクトルが単位時間あたりに通過する面積により定義される。



点 P($\boldsymbol{r}$) から点 P'($\boldsymbol{r}+\boldsymbol{dr}=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}\Delta t$) まで動径ベクトルが動いた時に通過する面積を考える。Δt が十分小さい時、点 P と点 P' をつなぐ曲線を**近似的に**直線と近似できる。そのため、動径ベクトルが動いた時に通過する面積 ΔS は三角形 OPP' の面積で表される。三角形の面積は数学 1 で習うように、$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$ の公式で求められるが、これはベクトルの外積を使って書き直すことができる。三角形 OPP' の面積は、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$ が張る平行四辺形の面積の半分なので、

$$\Delta S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\Delta t|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|\Delta t$$

とかける。ここで、角運動量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ との関連を見ていくことにする。

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|$$

であり、$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{p}/m$ を使うと、

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{1}{2m}|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}|=\frac{|\boldsymbol{L}|}{2m}$$

が得られる。ここで、$\Delta t\to 0$ の極限をとると、

$$\frac{dS}{dt}=\frac{|\boldsymbol{L}|}{2m} \tag{6.22}$$

と書くことができる。この左辺は面積の時間微分であり、**面積速度**と言われる。この式 (6.22) より、面積速度は角運動量の大きさと結びつけられることがわかる。すると、角運動量が一定なら、面積速度も一定になる。6.1.3「角運動量保存則」で見た通り、物体に働く力が中心力だけならば、角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ は一定なので、その大きさも一定である。したがって、「**物体に働く力が中心力だけならば、面積速度は一定である**」ことがわかる。この性質を**面積速度保存則**という。

面積速度保存則

物体に働く力 (or 合力) $\boldsymbol{F}$ が中心力だけのとき、動径ベクトルが単位時間に通過する面積 (面積速度) は一定である。

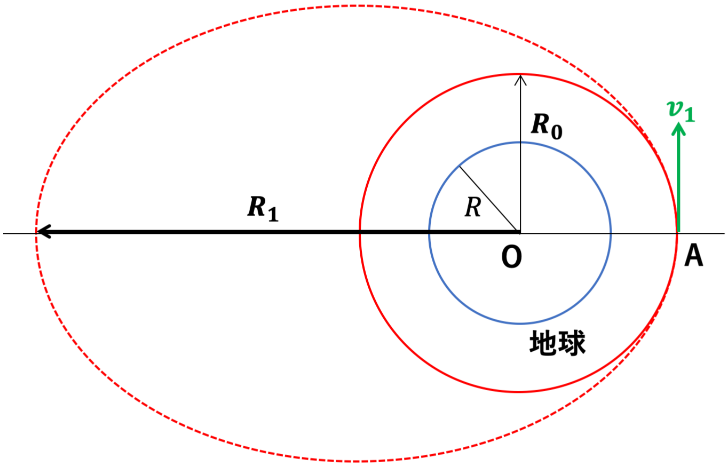
$$\frac{dS}{dt}=\frac{|\boldsymbol{L}|}{2m}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}| \tag{6.23}$$

6.3.2　万有引力とケプラーの法則 (演習)

Example 14 (2015・中央大・改題)

地球 (質量 M、半径 R) を周回する人工衛星 (質量 m) の運動を考える。空気抵抗はないものとする。初め、半径 R_0 の等速円運動をしていたとする。

(1) この時の人工衛星の速さ v_0 を求めよ。
(2) この時の無限遠方を基準とした位置エネルギーを U とした時、人工衛星のエネルギーを U を用いて表せ。



上の図のように、点 A で質量 αm $(0 < \alpha < 1)$ を持つ小物体を人工衛星から射出したところ、その小物体は初速度 0 で直線 AO にそって地球に落下した。

(3) この時、小物体射出直後の人工衛星の速さ v_1 を α, v_0 を用いて表せ。

小物体の射出後、人工衛星は短半径 R_0、長半径 R_1 の楕円軌道に入った。ここで、$\beta = \dfrac{R_0}{R_1}$ と定義する。

(4) β を α を用いて表せ。
(5) 楕円軌道が実現するためには、人工衛星の力学的エネルギーが負の値をとることが必要である。このことを用いて、α が満たさなければならない条件を求めよ。

次に、地球を周回する人工衛星 (質量 m) の運動について、大気 (密度 ρ) の影響を考える。この人工衛星は速さ v のとき速度ベクトルと反対の向きに $\rho v^2 S$ の大きさの空気抵抗による力を受ける。ここで S は空力面積と呼ばれ、空気抵抗に対する人工衛星の実効的な面積を表す。大気密度はここで考える高度の範囲では一定とする。抗力は地球からの引力に比べて十分に小さく、人工衛星が周回を重ねるごとに徐々に高度を下げる場合を考える。なお、任意の 1 周回において、人工衛星は等速円運動をしているとみなしてよい。

(6) 1 周回の間に人工衛星が大気にする仕事の大きさを求めよ。
(7) 半径 r_0 で周回していた人工衛星が、その n 周後に軌道半径 r_n(ただし $r_n > R$) まで落ちてきた。r_n を n, S, ρ, m, r_0 のうち必要な量を用いて表せ。

(1) 円運動の公式を使う。

$$m\frac{(v_0)^2}{R_0} = G\frac{Mm}{(R_0)^2} \iff v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}}$$

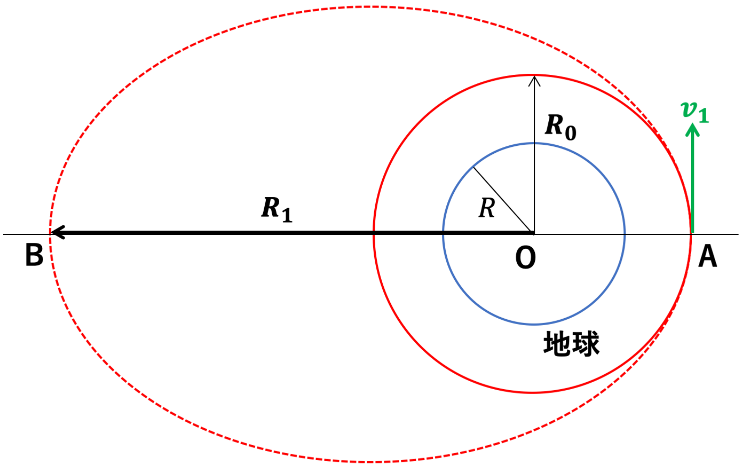
(2) 位置エネルギー U は $U = -G\dfrac{Mm}{R_0}$ である。運動エネルギー K については、(1) で使った式を変形して、

$$K = \frac{1}{2}m(v_0)^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(G\frac{Mm}{R_0}\right) = -\frac{1}{2}U$$

と書けるので、全エネルギーは、$K + U = \dfrac{1}{2}U$ と書ける。 □

(3) 運動量保存則を利用する。$mv_0 = (1-\alpha)mv_1 + \alpha m\cdot 0$ より、$v_1 = \dfrac{1}{1-\alpha}v_0$ である。 □

(4) 図のように点 B を設定する。今、小物体に働く力は万有引力 (中心力) だけなので面積速度保存則が成立する[7]。



点 B における速さを v_B とすると、面積速度保存則は

$$R_0 v_1 = R_1 v_B \tag{6.24}$$

である。また、力学的エネルギー保存則を考えると、

$$\frac{1}{2}m'(v_1)^2 - G\frac{m'M}{R_0} = \frac{1}{2}m'(v_B)^2 - G\frac{m'M}{R_1} \tag{6.25}$$

となる。ただし、$m' = (1-\alpha)m$ である。式 (6.24) と式 (6.25) より、R_1 を R_0 で表すことを考える。

- $v_B = \dfrac{R_0}{R_1}v_1 = \beta v_1$
- $R_1 = \dfrac{R_0}{\beta}$
- $v_0^2 = \dfrac{GM}{R_0}$
- $m' = (1-\alpha)m$

[7] 大学入試で、万有引力が関わってくる問題は、力学的エネルギー保存則と面積速度保存則の 2 つの式を利用して解くことが多い。

の 4 つを使って、式 (6.25) を整理すると、

$$\frac{1}{2}m(1-\alpha)(v_1)^2 - m(1-\alpha)v_0^2 = \frac{1}{2}m(1-\alpha)\beta^2(v_1)^2 - m(1-\alpha)\beta(v_0)^2$$

となる。ここで、さらに、$v_1 = \dfrac{1}{1-\alpha}v_0$ を使って整理すると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2(1-\alpha)}(v_0)^2(1-\beta^2) - (1-\alpha)(v_0)^2(1-\beta) = 0\\(1-\beta)\left\{\frac{1}{2(1-\alpha)}(1+\beta) - (1-\alpha)\right\}(v_0)^2 = 0\end{aligned}$$

となる。$\beta \neq 1$ より、$\alpha,\ \beta$ は以下の式を満たす。

$$\frac{1}{2(1-\alpha)}(1+\beta) - (1-\alpha) = 0$$

これより、$\beta = 2(1-\alpha)^2 - 1 = \underline{2\alpha^2 - 4\alpha + 1}$ と α の式でかける。 □

(5)[8]点 A における力学的エネルギー E_A を考える。運動エネルギーは $K = \dfrac{1}{2}m(1-\alpha)(v_1)^2$ で、位置エネルギーは、$-G\dfrac{Mm(1-\alpha)}{R_0}$ だから、

$$\begin{aligned}E_A &= \frac{1}{2}m(1-\alpha)(v_1)^2 - G\frac{Mm(1-\alpha)}{R_0}\\&= \frac{1}{2}m\cdot\frac{1}{1-\alpha}(v_0)^2 - m(1-\alpha)(v_0)^2\\&= \frac{1}{2}m(v_0)^2\left\{\frac{1}{1-\alpha} - 2(1-\alpha)\right\}\end{aligned}$$

となる。よって、$\alpha\ (0 < \alpha < 1)$ は、

$$\frac{1}{1-\alpha} - 2(1-\alpha) < 0 \quad\Longrightarrow\quad 2\alpha^2 - 4\alpha + 1 > 0$$

を満たせばよい。$0 < \alpha < 1$ より、求める α の条件は、$0 < \alpha < 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。 □

(6) この問題以降は、高校物理で扱わない内容を問題文の誘導をもとに、自分たちが習ってきた知識に落とし込んで解釈する問題であり、レベルは高くなる。第 2 章で取り扱った線積分の記号を使うと、仕事 W は、

$$W = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

と書ける[9]。今、空気抵抗による力 $\boldsymbol{F}$ は速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ と反対向きのベクトルであり、問題文から、$-\rho v^2 S\dfrac{\boldsymbol{v}}{v}$ と書ける。一方 $d\boldsymbol{r}$ を $d\boldsymbol{r} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt = \boldsymbol{v}dt$ と書くと、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\rho v^2 S\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{v}dt &= -\rho v^2 S\cdot v dt\\&= -\rho v^3 S\cdot dt\end{aligned}$$

[8] (5) の別解

この解答は、『2015 物理入試問題集』に載っている解答で私が素晴らしいなあと思った解答である。

楕円軌道を実現するとき、長半径 R_1 は有限の値をとる。逆に、楕円軌道を実現せず、無限遠方に飛び出す時は、$R_1 \to \infty$ である。これより、$\beta = R_0/R_1$ は楕円軌道を実現する時は、$\beta > 0$ を満たすから、α が満たすべき条件は、

$$\beta = 2\alpha^2 - 4\alpha + 1 > 0$$

である。

[9] $\oint$ は周回積分を表す記号で、積分する曲線 C が円のような始点と終点が一致する曲線の時に、その曲線 C に沿って、1 周分積分することを表す。

と書ける。すると、線積分は曲線 C 上の積分から時間 t の積分になり[10]、W は

$$W = \int_0^T -\rho v^3 S dt = -\rho v^3 S \int_0^T dt = -\rho v^3 ST$$

となる。ここで T は 1 周するのに要する時間で、円運動の半径を r とすると、$T = \dfrac{2\pi r}{v}$ である。さて、r は円運動の式より、

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{GM}{v^2}$$

となるから、

$$W = -\rho v^3 S \cdot \left(2\pi \frac{GM}{v^3}\right) = -2\pi\rho SGM$$

となる。(この $-$ は速度ベクトルと反対向きに力を受けることからきたものである。)
答えは、この絶対値をとって、$\underline{2\pi\rho SGM}$である。 □

(7) (6) で大気が人工衛星にする仕事が負であることがわかった。そのため、逆に人工衛星が大気にする仕事は正である。これはエネルギー保存則を考えると、1 周回するたびに、人工衛星が持つエネルギーが減少することを意味する。
力学的エネルギー保存則を考える。人工衛星のエネルギーは (2) より、$-\dfrac{1}{2}U$ と書けるから、

$$-\frac{1}{2}U_n - \left(-\frac{1}{2}U_0\right) = -n \cdot (2\pi\rho SGM)$$

ここで、U_n は軌道半径が r_n の時の人工衛星の位置エネルギーで $U_n = -G\dfrac{Mm}{r_n}$ である。よって、

$$-\frac{1}{2}GMm\left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_0}\right) = -2n\pi\rho SGM$$

これより r_n を求める。

$$\frac{1}{r_n} = -\frac{4n\pi\rho S}{m} + \frac{1}{r_0} = \frac{4n\pi\rho S r_0 + m}{m r_0}$$

$$\therefore \quad r_n = \frac{m r_0}{m + 4n\pi\rho S r_0} = \frac{r_0}{1 + \dfrac{4n\pi\rho S r_0}{m}}$$

---

[10] この辺の厳密な数学的議論は、高校物理の間は全然気にする必要はない。お気持ちとしては、(数学 3 で習う) 積分の変数変換である。こんな積分の計算で、$x = \tan\theta$ と変換して $\pi/4$ という答えを出すのと同じだと思えば、今は十分である。

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \quad \Longrightarrow \quad \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\pi/4} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

1 周分曲線 C 上で積分することは時間軸上では、0 から T まで積分することに等しい。(T は 1 周するのに要する時間)

6.3.3 逆 2 乗則から楕円軌道をとる理由を考える

6.2.1「万有引力とは」で、万有引力の大きさは距離の 2 乗に比例するという**逆 2 乗則**を紹介した。昔の人はどのように発見したのか。ニュートンをはじめとする偉大な研究者たちは実験を行い、逆 2 乗則を予想していたかもしれない。理論的に逆 2 乗則が正しいことを保証するのは、ケプラーが発見した 3 つの法則である。この 3 法則を利用することで逆 2 乗則が理論的に正しいのではないかと考えられ、数々の実験結果によって裏付けられていった。学問的な発展はこの順序である。

多くの教科書や参考書には逆 2 乗則を認めてケプラーの法則を導出することが書かれていて、逆のケプラーの法則を認めて逆 2 乗則を導出する記述は 0 である。このことは歴史的順序に反している。ただ、「逆 2 乗則 → ケプラーの法則」の流れはその導出過程を含めて得るものが多い。そこで、この TEX ノートでも、「逆 2 乗則 → ケプラーの法則」のアプローチをまずしようと思う。でも、「逆 2 乗則 → ケプラーの法則」はとても複雑なので、その一部だけに触れる。この subsection では、タイトルにもあるように、逆 2 乗則を認めた上で、楕円軌道をとる理由を考える。特に、前の subsection の例題に登場した

「楕円軌道が実現するためには、人工衛星の力学的エネルギーが負の値をとることが必要である」

という文について考えることにする。

まず、準備として、第 4 章で取り上げた「速度・加速度の極座標表示」を確認する。

速度の極座標表示

速度 $\boldsymbol{V}$ を極座標系で表す。原点から遠ざかる方向の成分 V_r と、それに垂直な方向 (接線方向) 成分 V_θ は次のように表せる。

$$V_r = \dot{r} = \frac{dr}{dt}$$
$$V_\theta = r\dot{\theta} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

加速度の極座標表示

加速度 $\boldsymbol{a}$ を極座標系で表す。原点から遠ざかる方向の成分 a_r と、それに垂直な方向 (接線方向) 成分 a_θ は次のように表せる。

$$a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 = \ddot{r} - r\omega^2$$
$$a_\theta = \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}(r^2\omega)$$

極座標系で惑星の運動方程式を考える。惑星に働く力は中心力の万有引力だけなので、運動方程式は以下のようになる。
(向心方向の運動方程式)

$$m\{\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2\} = -G\frac{Mm}{r^2} \tag{6.26}$$

(接線方向の運動方程式)

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \tag{6.27}$$

式 (6.27) は、$\dfrac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$ と書けるので、これより、$mr^2\dot{\theta} = \mathrm{const.}$ と書ける。この一定値を L とおく。すると、$\dot{\theta} = \dfrac{L}{mr^2}$ なので、式 (6.26) に代入すると、

$$m\ddot{r} - mr\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 + G\frac{Mm}{r^2} = 0$$

が成立する。この式を少し書き換える。$v = \dfrac{dr}{dt}$ とおくと、

$$m\frac{dv}{dt} - \frac{L^2}{mr^3} + G\frac{Mm}{r^2} = 0$$

となるから、これに $v = \dfrac{dr}{dt}$ をかけると、

$$mv\frac{dv}{dt} + \frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{2mr^2}\right)\cdot\frac{dr}{dt} + \frac{d}{dr}\left(-G\frac{Mm}{r}\right)\cdot\frac{dr}{dt} = 0$$

となる。これを変形すると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r}\right) = 0 \tag{6.28}$$

となる。これはエネルギー保存則のような式である。先ほど、$v = \frac{dr}{dt}$ と、速度を表さないにも関わらず、速度を表すのによく使う v を用いたのは、運動エネルギーと類似する項が導けるからである。ここでは、この項を「**形式的**運動エネルギー」と呼ぶことにしよう。エネルギー保存則は位置エネルギーと運動エネルギーの総和が一定になるという法則である。このことをふまえると、$\dfrac{L^2}{2mr^2} - G\dfrac{Mm}{r}$ は位置エネルギーに相当する項であるといえる。そこで、$\dfrac{L^2}{2mr^2} - G\dfrac{Mm}{r}$ を「**形式的**位置エネルギー」と呼ぶことにしよう。実際、$-G\dfrac{Mm}{r}$ は万有引力による位置エネルギーである。では、$\dfrac{L^2}{2mr^2}$ の項は何を意味するのか。

再び運動方程式に戻って考える。運動方程式を書き直すと、次のようになる。

$$m\ddot{r} = -G\frac{Mm}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3} \tag{6.29}$$

この式は何か。静止系から見た運動方程式は、

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = -G\frac{Mm}{r^2}$$

なので、式 (6.29) は<u>慣性系 (惑星とともに動く観測者) から見た運動方程式</u>といえる。すると、$\dfrac{L^2}{mr^3}$ は慣性力である。それも中心から遠ざかる向きに働くことが式 (6.29) からわかるので遠心力である。そのため、式 (6.28) の $\dfrac{L^2}{2mr^2}$ の項は遠心力に由来するポテンシャルといえる。

では、元に戻ろう。

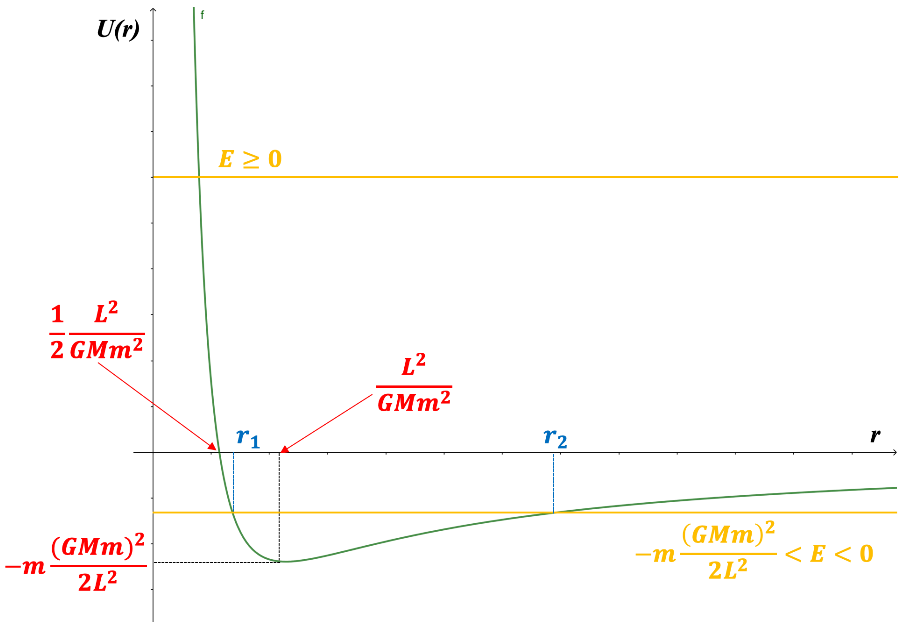
- 形式的運動エネルギー: $K = \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2$
- 形式的運動エネルギー: $U = \dfrac{L^2}{2mr^2} - G\dfrac{Mm}{r}$

とすると、式 (6.28) より $K + U = E(= \mathrm{const.})$ が成立する。なお、$K \geq 0$ である。この E は全力学的エネルギーである。極座標系で見ているので、とても変な感じがする。でも、この E は運動方程式を変形することで自然に出てきた E なので、全力学的エネルギーである。

$K \geq 0$ より、$E - U \geq 0$ である。つまり、初期条件により定まる E に対して、$E \geq U$ を満たすような r を惑星はとりうる。ここで U の r 依存性を調べる。U を r で微分して増減表を書くと以下のようになる。

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{L^2}{mr^3} + G\frac{Mm}{r^2} = \frac{1}{r^3}\left(-\frac{L^2}{m} + GMmr\right)$$

r	0	$\cdots$	$\frac{L^2}{GMm^2}$	$\cdots$	$+\infty$
$\frac{dU}{dr}$		$-$	0	$+$	
U	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{m}{2L^2}(GMm)^2$	$\nearrow$	0



$E \geq U$ を満たす r を取りうることから、r の範囲について以下のことがわかる。

- $E \geq 0$: $U(r) = E$ となる r 以上の全ての r を取りうる。($r \to \infty$ もありうる)
- $-m\frac{(GMm)^2}{2L^2} < E < 0$: r としては、上の図の $r_1 \leq r \leq r_2$ の部分が該当する。
- $E = -m\frac{(GMm)^2}{2L^2}$: r としては $r = \frac{L^2}{GMm^2}$ のみが当てはまる。
- $E < -m\frac{(GMm)^2}{2L^2}$: $E \geq U$ を満たす r は存在しない。

まず、$E = -m\frac{(GMm)^2}{2L^2}$ の時を考える。$r_0 = \frac{L^2}{GMm^2}$ とおく。r の値として取りうるものが 1 つしかないというのは、ずっとその r の値 $r = r_0$ を取るということを表す。これは、$E = -m\frac{(GMm)^2}{2L^2}$ の時は、原点からの距離が常に等しい状態を保つことを意味する。それはどんな状況か。答えは 2 パターンある。

- 惑星がずっと静止している状態。
- 惑星は、運動して位置を変えたとしても、半径 r_0 の円軌道上しか動かない。

前者の方を考えるのは無意味なので、一旦無視しよう。物理的に意味があるのは、後者の方で、エネルギーが最も安定になる時、惑星は円運動をすることがわかった。

続けて、$-m\dfrac{(GMm)^2}{2L^2} < E < 0$ のときを考える。r の値は、$r_1 \leq r \leq r_2$ をとる。まず、r_1 と r_2 を求めよう。

$$\frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r} = E \quad \Longleftrightarrow \quad Er^2 + GMmr - \frac{L^2}{2m} = 0$$

よって、2 次方程式の解の公式より、

$$r = \frac{-(GMm) \pm \sqrt{(GMm)^2 + \dfrac{2EL^2}{m}}}{2E}$$

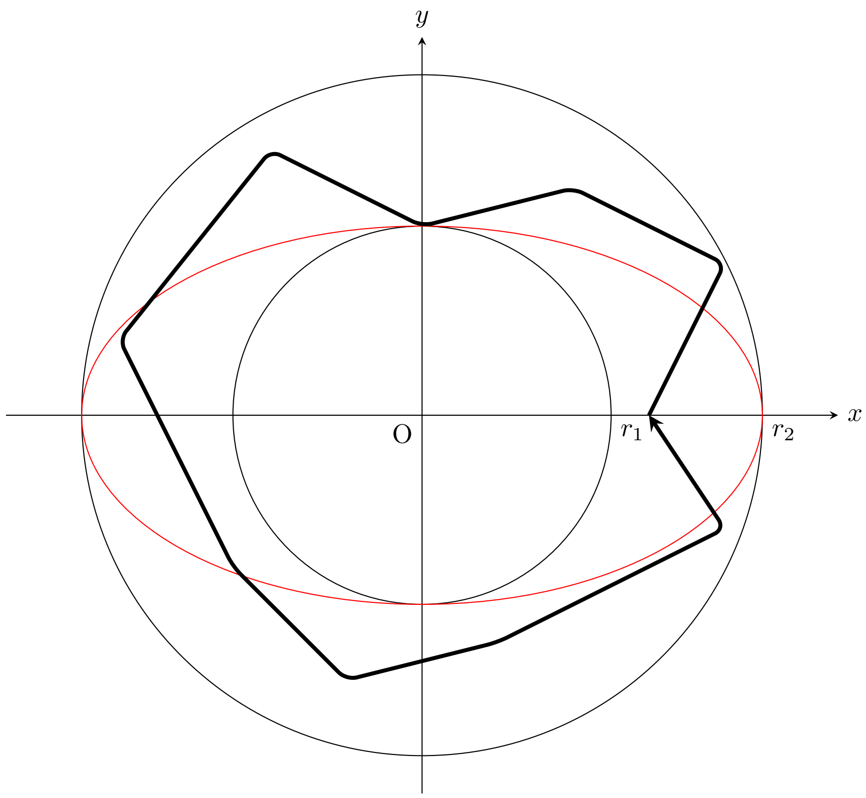
$E < 0$ に注意すると、

$$r_1 = \frac{-(GMm) + \sqrt{(GMm)^2 + \dfrac{2EL^2}{m}}}{2E}, \quad r_2 = \frac{-(GMm) - \sqrt{(GMm)^2 + \dfrac{2EL^2}{m}}}{2E}$$

となる。この E によって決まる r_1 と r_2 の間の値を r はとる。さて、本題に戻る。このことが意味することは何か。r が r_1 と r_2 の間をとるということは、下図の太線のように、ドーナツ型の領域を動く可能性があると考えられる。しかし、厳密に解析すると、赤線のような楕円上を動くことがわかる。この話もしたいが、さらにページが必要なことと、高校物理の範囲をさらに逸脱してしまうので、ここではふれない。ただ、$-m\dfrac{(GMm)^2}{2L^2} < E < 0$ の時は、長軸 r_2、短軸 r_1 の楕円軌道上を運動するということだけふれて、この section を終わりにする。もうここまでくれば、

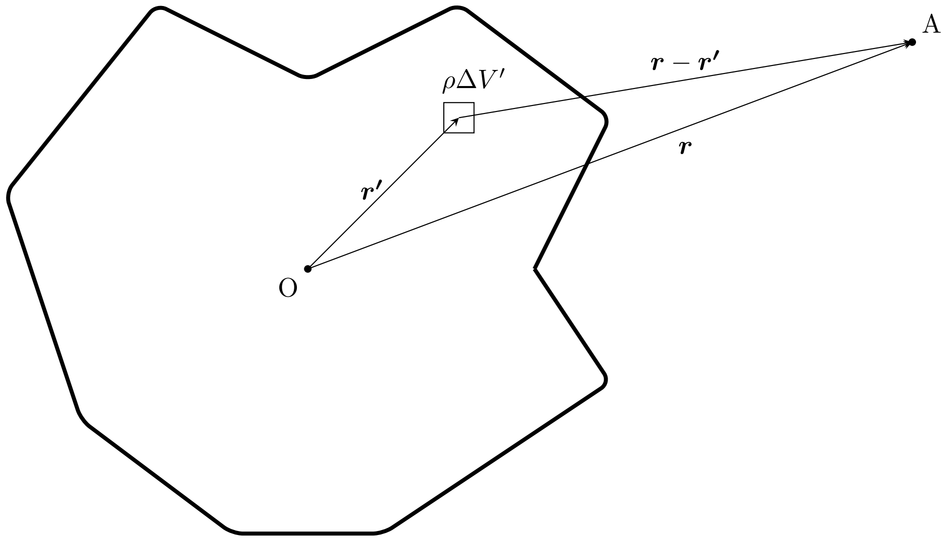
「楕円軌道が実現するためには、人工衛星の力学的エネルギーが負の値をとることが必要である」

の意味がわかるはずだ。



6.4 大きさのある物体の間の万有引力

ここまでに取り上げた万有引力の法則は、大きさが十分無視できる物体 (質点) にのみ適用できる。この subsection では、大きさが無視できない場合について考える。この subsection での考え方は、物理学の色々な場面へ応用できる。



大きさを無視できない物体を扱う時は、その物体を微小部分に分割することを考える。これを**質点近似**という。なぜ、質点近似をするのか。理由は 2 つある。

- 質点、あるいは、質点とみなせるぐらい十分小さくなければ、万有引力の法則が使用できない。
- 質点という<u>単純なモデルの合成</u>として全体を考えられる。
  (複雑な物体を<u>複雑なまま</u>考えることを避ける。複雑から単純へ。)

以上の 2 つの理由から、私たちは質点近似モデルを利用することがある。

では、2 つの物体のうちの一方が、上の図のような形をしているとする。点 A(位置ベクトル $\boldsymbol{r}$) にある質点 (質量 m) に働く力を考える。簡単のために、万有引力以外の力は働かないものとする。質点近似をすると、以下のようになる。

(1) 物体を微小部分に分割する。

(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r'}$ で表される微小部分を考える。 微小部分と点 A の間に働く万有引力を考える。**一般に物体の質量密度は位置によって異なる。**すなわち、質量密度は $\boldsymbol{r'}$ の関数である。**ただ、質点とみなせるぐらい小さい微小領域では、質量密度は一定であると近似できる。**

$$\Delta\boldsymbol{F} = G\frac{m(\rho(\boldsymbol{r'})\Delta V')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}\|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}\|}$$

(3) 微小部分すべての総和をとる。

$$\boldsymbol{F} = \sum_{\text{全ての微小部分}} \Delta\boldsymbol{F} = \sum_{\text{全ての微小部分}} G\frac{m(\rho(\boldsymbol{r'})\Delta V')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}\|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}\|}$$

ここで、微小部分の体積 $\Delta V'$ を、$\Delta^3\boldsymbol{r'}$ と書くことにする(11)。そうすると、

$$\boldsymbol{F} = \sum_{\text{全ての微小部分}} \Delta\boldsymbol{F} = \sum_{\text{全ての微小部分}} G\frac{m(\rho(\boldsymbol{r'})\Delta^3\boldsymbol{r'})}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}\|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}\|} \tag{6.30}$$

(11) この記法は、Σ 記号の中を動くのは、位置ベクトル $\boldsymbol{r'}$ が代表点の微小部分であることを明示する方法の 1 つである。「全ての微小部分」の合計をとることは、**変数** $\boldsymbol{r'}$ を (領域内全範囲をくまなく) 動かすことと等価である。

　ということで、質点近似の結果は式 (6.30) である。本当にそれでいいのか。何を言っているのかというと、微小部分の分割は細かければ細かいほど、(理想極限である) 質点に近づく。つまり、質点近似の正確な結果は式 (6.30) の $\Delta^3\boldsymbol{r'}$(体積要素の大きさ) が 0 に限りなく近づく極限である。この極限を表す方法が積分である。

$$\sum \quad \Longrightarrow \quad \int$$

(3) のように、Σ を使って表した後に、上のように $\int$ に変えればよい。そして、この時に一緒に $\Delta^3\boldsymbol{r'} \Longrightarrow d^3\boldsymbol{r'}$ と書き換えれば良い。その結果、質点に働く力は以下のようにかける。

(4) 積分 (体積積分) を使って表す。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \int G\frac{m\rho(\boldsymbol{r'})d^3\boldsymbol{r'}}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}\|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}\|} \\ &= Gm\int \frac{\rho(\boldsymbol{r'})}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}\|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}\|}\ d^3\boldsymbol{r'} \end{aligned} \tag{6.31}$$

こうして、点 A にある質点に働く力が求められた。

第 7 章　剛体の力学

私が高校時代に使った数研出版の教科書では、剛体に関する話は「運動量保存則」に関する話の前に書かれていた。しかし、私は剛体に関する話を力学編の一番最後に書くことにした。それは、剛体の話は運動量保存則や円運動、単振動とは (高校物理の範囲内では) 独立したものと考えているからだ。私が大学の力学の授業を受けている時に使った教科書、『物理学序論としての力学』(藤原邦男・東京大学出版会) では、剛体の話は一番最後に出てくる。高校物理という視点から考えると、剛体の話を最後に持ってくるのは変かもしれないが、実は全然普通のことであるのだ。

さて、剛体といえば、高校物理で重要なのは「**力のモーメント**」である。しかし、この TeX ノートでは、既に前の chapter では角運動量やモーメントという概念を導入しているので、特別新しい概念を導入する必要はないのだ。「**剛体**」とは何かを定義し、淡々と話を進めて、最後に例題を取りあげて、この chapter を終わりにしていこうと思う。

7.1　剛体とその重心

7.1.1　剛体とは何か

まず、「**剛体**」とは何かを定義する。

剛体

力を加えても変形しない理想的な物体を**剛体**という。剛体内の任意の 2 点を取ったとき、力が外部から加わっても、その 2 点間の位置関係は変化しない物体が剛体である。

剛体の特徴は力が加わっても変形しないことにある。そのため、剛体の運動をとらえる時は、図 7.1 のように、剛体を細かく分割した微小物体の運動をイチイチ考える必要はなく、剛体のある 1 点がどのような運動をするかが分かれば、後は位置関係が不変であることから、他の点がどのように動くかがわかる (図 7.2)。では、その特別な 1 点はどのように決めれば良いのか。

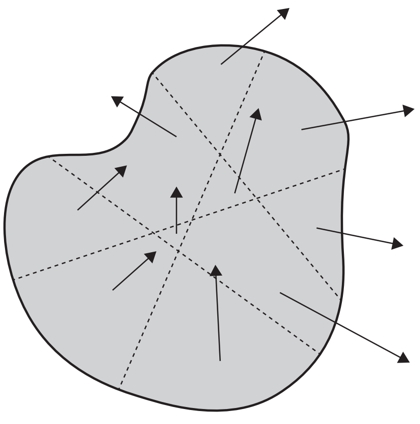


図 7.1: 剛体を細かく分割した微小物体の運動のイメージ

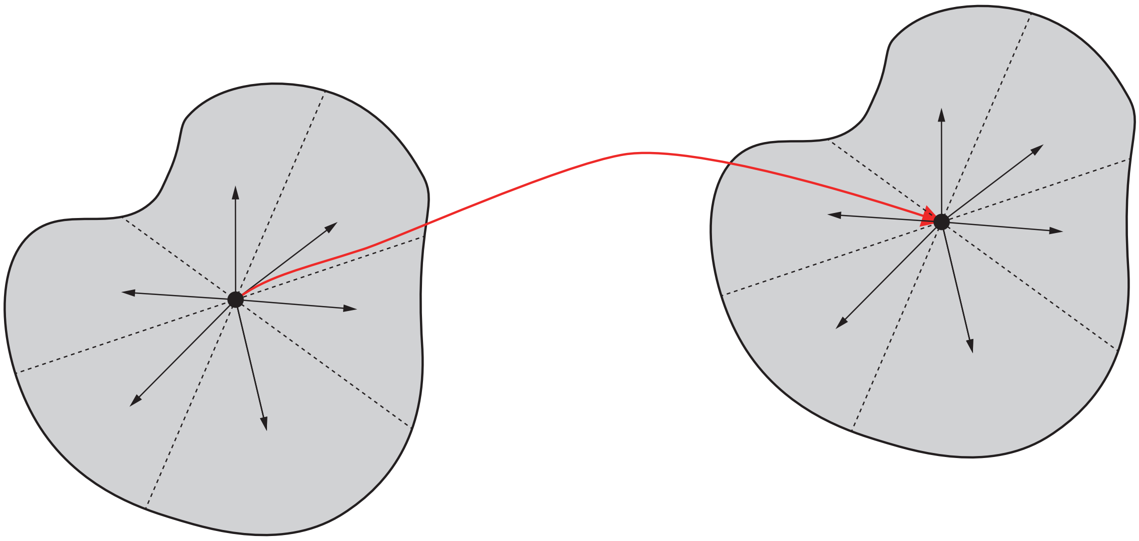


図 7.2: 剛体の運動の正しいイメージ　(赤線：特別な 1 点の軌跡)

結論をかくと、特別な 1 点は剛体の重心にすればよい。そこで、剛体の重心を質点系の重心の定義を拡張することで定義する。n 個の質点の**重心**の位置 $\boldsymbol{r_G}$ は 67 ページで次のように定義した。

$$\boldsymbol{r_G} = \frac{m_1\boldsymbol{r_1} + m_2\boldsymbol{r_2} + \cdots + m_n\boldsymbol{r_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \tag{7.1}$$

剛体を質点近似して、n 個の質点から集まるとすると、上の重心の定義式をそのまま使用できる。だが、6.4「大きさのある物体の間の万有引力」と同じように考えると、剛体の重心も積分を用いて表現できそうである。ということで、同じように考える。

(1) 剛体を微小部分に分割する。

(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表される微小部分を考える。 **一般に物体の質量密度は位置によって異なる。**すなわち、質量密度は $\boldsymbol{r}$ の関数である。**ただ、質点とみなせるぐらい小さい微小領域では、質量密度は一定であると近似できる。**この微小部分では、上の式の $m_k\boldsymbol{r_k}$ に相当する量は、

$$m_k\boldsymbol{r_k} \quad \Longrightarrow \quad (\rho(\boldsymbol{r})\Delta V)\,\boldsymbol{r}$$

と書ける。

(3) 微小部分すべての総和をとる。

$$\boldsymbol{r_G}\text{の分子} = \sum_{\text{全ての微小部分}} (\rho(\boldsymbol{r})\Delta V)\,\boldsymbol{r}$$

ここで、微小部分の体積 $\Delta V'$ を、$\Delta^3\boldsymbol{r}$ と書くことにする[(1)]。そうすると、

$$\boldsymbol{r_G}\text{の分子} = \sum_{\text{全ての微小部分}} \rho(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}\,\Delta^3\boldsymbol{r}$$

(4) 微小部分の分割が細かければ細かいほど正確になる。そこで、上の式の $\Delta^3\boldsymbol{r'}$(体積要素の大きさ) が 0 に限りなく近づく極限としての積分を考える。

$$\sum \quad \Longrightarrow \quad \int, \qquad \Delta^3\boldsymbol{r} \quad \Longrightarrow \quad d^3\boldsymbol{r}$$

(1) この記法については、第 6 章の脚注 (11) を参照。

と書き換えれば良くて、$\boldsymbol{r_G}$ の分子は以下のようになる。

$$\boldsymbol{r_G}\text{の分子} = \int \rho(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}\,d^3\boldsymbol{r} \tag{7.2}$$

分母は、剛体の全質量であり、これは $\displaystyle\int \rho(\boldsymbol{r})\,d^3\boldsymbol{r}$ と書ける。すると、$\boldsymbol{r_G}$ を積分を使って書くと以下のようになる。

$$\boldsymbol{r_G} = \frac{\int \rho(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}d^3\boldsymbol{r}}{\int \rho(\boldsymbol{r})\,d^3\boldsymbol{r}} \tag{7.3}$$

7.1.2 一様な剛体 (一様な円盤) の重心

高校物理と大学入試問題では、「**一様な剛体の重心はその物体の重心である**」ということを認めて議論することにしている。このことが本当かどうかを確かめたい。そこで、この subsection では、式 (7.3) を使って、一様な円盤の場合について、その重心が、円盤の中心であることを数学的に示す。

式 (7.2) の $\displaystyle\int \rho(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}\,d^3\boldsymbol{r'}$ は

$$\int \rho(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}\,d^3\boldsymbol{r} = \left(\int x\rho(\boldsymbol{r})\,d^3\boldsymbol{r},\ \int y\rho(\boldsymbol{r})\,d^3\boldsymbol{r},\ \int z\rho(\boldsymbol{r})\,d^3\boldsymbol{r}\right) \tag{7.4}$$

というベクトルである。

xyz 空間上で、$K = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq R,\ 0 \leq z \leq H\}$ という領域 K を考えると、これはまさに円盤形である。一様な剛体なので K 内の任意の点において、$\rho(\boldsymbol{r})$ は一定である。この一定値を ρ と書くことにする。

式 (7.4) のベクトルの第 1 成分を書くと以下のようになる。

$$\int x\rho(\boldsymbol{r})d^3\boldsymbol{r} = \rho\int x\,dx\,dy\,dz$$

この積分はどのように計算すれば良いのか。3 重積分の計算法を調べて実行しても良いだろう。しかし、積分は微小分割したものを足し合わせるという操作だということが分かれば、対称性がいいときは計算する必要がない場合が多い。今回の場合、K 内の点 (x,y,z) に対して、$(-x,y,z)$ も必ず K 内に存在する。そうすると、$x \leq 0$ の部分は、$x \geq 0$ の部分と相殺されるので、この積分は 0 である。

同様に考えて、$\displaystyle\int y\rho(\boldsymbol{r})d^3\boldsymbol{r} = 0$ である。

最後に、$\displaystyle\int z\rho(\boldsymbol{r})d^3\boldsymbol{r}$ を考える。$d^3\boldsymbol{r}$ と書いているが、これは dV と同じである。(ここからしばらく、とても厳密性を欠いたことを書く。) 円柱型なので、$dV = Sdz\,(S = \pi R^2)$ と見ればうまくいく。微小体積要素をわざわざ直方体でとる必要はないということである。

7.1.3 剛体の重心運動

剛体の重心の運動がどのような運動をするかを調べる。調べる際に、積分を使った式 (7.3) よりも式 (7.1) の方が使いやすいので、こちらを使うことにする。

- 剛体を構成する要素に $1, 2, \cdots, n$ という番号を振ることにする。
- 質量 m_k の要素 k に外力 $\boldsymbol{F_k}$ が働く。

- 要素 ℓ から要素 k に内力 $\boldsymbol{f_{\ell\to k}}$ が働く

という状況を考える。個々の要素 k の運動方程式は、

$$m_k\frac{d\boldsymbol{v_k}}{dt} = \boldsymbol{F_k} + \sum_{\ell\neq k}\boldsymbol{f_{\ell\to k}} \tag{7.5}$$

と書ける。ここで、Σ の下の $\ell \neq k$ は変数を ℓ とし、その変数 ℓ が $1, 2, \cdots, n$ のうち、k 以外を動くという意味である。要するに、

$$\sum_{\ell\neq k}\boldsymbol{f_{\ell\to k}} = (\boldsymbol{f_{1\to k}} + \boldsymbol{f_{2\to k}} + \cdots + \boldsymbol{f_{(k-1)\to k}}) + (\boldsymbol{f_{(k+1)\to k}} + \boldsymbol{f_{(k+2)\to k}} + \cdots + \boldsymbol{f_{n\to k}})$$

を表している。ここから、重心の運動方程式を求める。式 (7.1) の両辺を時間 t で 2 回微分すると、

$$\frac{d\boldsymbol{v_G}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k\frac{d\boldsymbol{v_k}}{dt}$$

となる。ただし、$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ である。よって、重心の運動方程式は、

$$M\frac{d\boldsymbol{v_G}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_k\frac{d\boldsymbol{v_k}}{dt} \tag{7.6}$$

となる。式 (7.1.3) より、この式は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} M\frac{d\boldsymbol{v_G}}{dt} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{F_k} + \sum_{\ell\neq k}\boldsymbol{f_{\ell\to k}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F_k} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\ell\neq k}\boldsymbol{f_{\ell\to k}}\right) \end{aligned} \tag{7.7}$$

さて、右辺の第 2 項について見ていこう。**作用・反作用の法則**より、$\boldsymbol{f_{\ell\to k}} = -\boldsymbol{f_{k\to\ell}}$ である。すると、第 2 項は $\boldsymbol{0}$ となることがわかる[(2)]。

以上より、重心の運動方程式について以下のことが言える。

剛体の重心運動

$$M\frac{d\boldsymbol{v_G}}{dt} = \sum\boldsymbol{F_k} \tag{7.8}$$

剛体の重心の運動は剛体に働く外力だけで決まる。その運動は、剛体の全質量と剛体に働く全外力が重心に集中したとみなした時の運動と同じであり、これまでの質点の運動と同じように議論することができる。

7.2 剛体の回転運動

剛体の運動を考える際は質点とは違う大きさを持った物体の運動を考えることになる。大きさを持った瞬間に空間上の運動を議論する際に、これまで考えてきた並進運動だけでは不十分になってしまう。重心が動かず、物体がある軸のまわりに回転するという運動など「回転」を考える必要が出てくるのである。その回転を考えるための道具の 1 つが「**力のモーメント**」である。

(2) 丁寧に展開していけば、全ての項が消えることがわかる。

7.2.1　力のモーメント

6.1.2「ベクトルのモーメントと角運動量」で、**ベクトルのモーメント**を定義した。

Remark

空間のある点 P にベクトル $\boldsymbol{A}$ が与えられたとき、ある特定の点 O を定め、「点 O のまわりのベクトル $\boldsymbol{A}$ のモーメント」を

$$(\boldsymbol{r_P} - \boldsymbol{r_O}) \times \boldsymbol{A} \tag{7.9}$$

と定義する。角運動量は、この $\boldsymbol{A}$ が運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ の時の「原点 O のまわりの運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ のモーメント」として定義される。つまり、**角運動量ベクトル** $\boldsymbol{L}$ は、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ を用いて、

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{7.10}$$

と書ける。

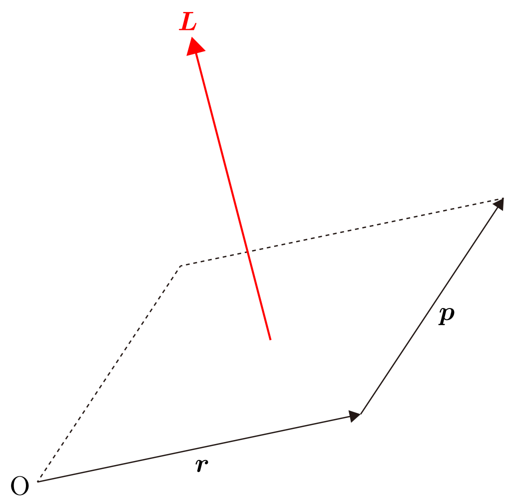


図 7.3: 角運動量と運動量の関係

力のモーメントは、Remark の式 (7.9) の $\boldsymbol{A}$ が力 $\boldsymbol{F}$ になったものである。

力のモーメント

力のモーメント $\boldsymbol{N}$ は次の式で定義される。

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{7.11}$$

この $\boldsymbol{N}$ の大きさ N はベクトルの外積の定義から、

$$N = rF\sin\theta \tag{7.12}$$

と書ける。ただし、θ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と力 $\boldsymbol{F}$ のなす角である。

上記のように改めて定義した「**力のモーメント**」は回転を引き起こす能力の指標であり、角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ との間に、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N} \tag{7.13}$$

の関係がある[3]。

7.2.2　剛体の回転運動方程式

[3] 6.1.3「角運動量保存則」を参照

付録 A　テイラー展開

Chapter5 では、**テイラーの定理**や**テイラー展開**を紹介しただけだった。付録編では、2019 年 5 月までは本編に記していたその導出過程を記す。まず、テイラーの定理とテイラー展開を確認する。

テイラーの定理

n を 1 以上の整数とする。区間 $I=[a,x]$ で n 回微分可能な実数値関数 f に対して、

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^n+R_n(x) \tag{A.1}$$

により、$R_n(x)$ を定義する時、

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{A.2}$$

となる c で、$a<c<x$ を満たすものが存在する。ただし、$f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の第 k 階導関数を表す。

テイラー展開

$f(x)$ が a を含む区間 I で、何回でも微分可能(1)で、I 上の任意の点 x で

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0 \tag{A.3}$$

を満たすならば、$f(x)$ は I 上で、

$$\begin{aligned} f(x)&=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^n+\cdots \\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned} \tag{A.4}$$

と表される。これを $x=a$ を中心とする**テイラー展開**という。

ここでは導出過程を記すが、この TEX ノートのタイトルが「高校物理を振り返る」であるため、大学で習う数学のような厳密性は気にしないで書くことにした。そうは言うけれど、私は「解析入門」という杉浦光夫先生が書かれた本をもとに作成する。

この TEX ノートでは厳密性をあまり気にしないので、いきなり**ロルの定理**を登場させることにする。

(1)厳密には微分して出てくる関数の連続性も要求される。しかし、高校物理の内容を扱っている限り、テイラー展開したい関数が、微分すると連続でない関数になることはないので、この TEX ノートでは省略する。

ロルの定理

$\mathbf{R}$ (実数全体の集合) の有界閉区間 $a \leq x \leq b$ で連続で、開区間 $a < x < b$ で微分可能な実数値関数 $f(x)$ が $f(a) = f(b)$ を満たすならば、次の 2 つの条件を満たす c が存在する。

- $f'(c) = 0$
- $a < c < b$

証明

ここではアバウトな (感覚的な) 証明をする。厳密な証明は探してください。

(1) $f(x)$ が定数関数の時は、任意の x に対して、$f'(x) = 0$ なので、OK。

(2) $f(x)$ が定数関数でない時は、図 A のように、a と b の間に、$f(a) = f(b)$ よりも大きい、または小さい値が存在する。両端 $(x = a, b)$ での $f(x)$ の値は等しいから、必ず、元に戻ろうとする。ゆえに、ある $c \in (a, b)$ で、極大あるいは極小となる。

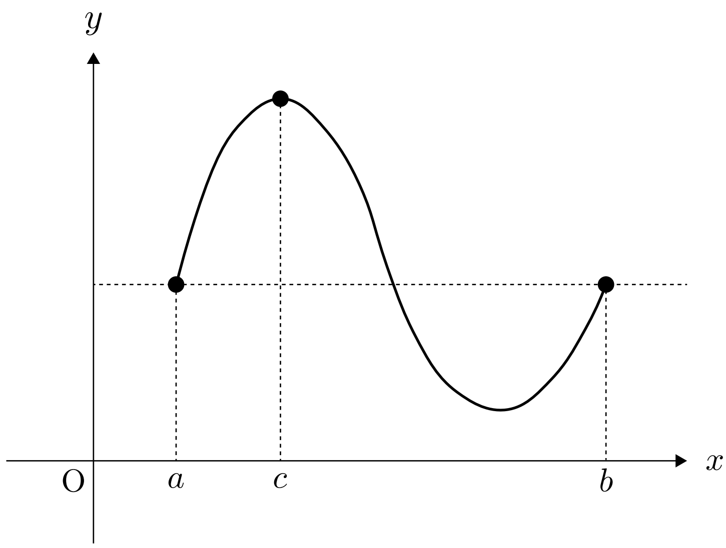


図 A.1: ロルの定理のイメージ

□

この「ロルの定理」を利用することで、高校数学で出てきた「**平均値の定理**」が証明できる。

平均値の定理

$a < b$ とする。$f(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続で、$a < x < b$ で微分可能ならば、次の 2 つの条件を満たす c が存在する。

- $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$
- $a < c < b$

証明

k を定数として、$g(x)$ を次のように 2 つを満たすように定める。

- $g(x) = f(x) - kx$
- $g(a) = g(b)$

つまり、$k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ と k を定めれば良い。$g(a) = g(b)$ より、ロルの定理から、$a < c < b$ を満たすある c が存在して、$g'(c) = f'(c) - k = 0$ が成り立つ。ゆえに、$k = f'(c)$ であり、主張が示された。 □

「ロルの定理」を使うと、次の「**コーシーの平均値の定理**」が示される。これがテイラー展開を導く上で重要である。

コーシーの平均値の定理

$a < b$ とする。$f(x), g(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続で、$a < x < b$ で微分可能とする。さらに、$g(a) \neq g(b)$ で、$f'(x)$ と $g'(x)$ が同時に 0 とならないならば、次の 2 つの条件を満たす c が存在する。

- $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$
- $a < c < b$

証明

$$\phi(x) = \{g(b) - g(a)\}f(x) - \{f(b) - f(a)\}g(x) \tag{A.5}$$

とおくと、$\phi(a) = \phi(b)$ となる。そのため、ロルの定理より、$\phi'(c) = 0 \ \ (a < c < b)$ である。つまり、

$$\{g(b) - g(a)\}f'(c) = \{f(b) - f(a)\}g'(c) \tag{A.6}$$

である。$g(b) - g(a) \neq 0$ なので、$g'(c) = 0$ である。
なぜなら、$g'(c) = 0$ ならば、$g(b) - g(a) \neq 0$ より、$f'(c) = 0$ となるからである。
ゆえに、両辺を $\{g(b) - g(a)\}g'(c)$ $(\neq 0)$ で割ることで主張が示される。 □

ここまで準備すると、本題の「**テイラーの定理**」を証明できる。もう一度、「テイラーの定理」を記す。

テイラーの定理

n を 1 以上の整数とする。区間 $I = [a, x]$ で n 回微分可能な実数値関数 f に対して、

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^n + R_n(x)$$

により、$R_n(x)$ を定義する時、

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - a)^n$$

となる c で、$a < c < x$ を満たすものが存在する。ただし、$f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の第 k 階導関数を表す。

<u>証明</u>

$R_n(x)$ を $\phi(x)$ と書くことにする。

$$\phi(x) = f(x) - \left\{ f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \right\} \tag{A.7}$$

とおくと、$\phi(x)$ は I 上で n 回微分可能で、

$$\phi^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - \sum_{p=k}^{n-1} \frac{f^{(p)}(a)}{(p-k)!}(x-a)^{p-k} \quad (1 \leq k \leq n-1) \tag{A.8}$$

となる。すると、

$$\phi(a) = \phi'(a) = \cdots = \phi^{(n-1)}(a) = 0 \tag{A.9}$$

$$\phi^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \tag{A.10}$$

となる。

コーシーの平均値の定理を $\phi(x)$ と $g(x) = (x-a)^n$ に適用する。$\phi(a) = g(a) = 0$ だから、a と x の間に、

$$\frac{\phi(x)}{(x-a)^n} = \frac{\phi'(x_1)}{n(x_1-a)^{n-1}} \tag{A.11}$$

となる x_1 が存在する。

次に、**コーシーの平均値の定理**を $\phi'(x)$ と $g'(x) = n(x-a)^{n-1}$ に適用する。$\phi'(a) = g'(a) = 0$ だから、a と x_1 の間に、

$$\frac{\phi'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \frac{\phi''(x_2)}{n(n-1)(x_2-a)^{n-2}}$$

となる x_2 が存在する。

これを繰り返すことで、

$$\frac{\phi(x)}{(x-a)^n} = \frac{\phi^{(n)}(c)}{n!} \tag{A.12}$$

となる c が a と x の間に存在することが示される。ここで、最初の $\phi(x)$ の定義より、$\phi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$ なので、

$$\phi(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{A.13}$$

となる。 □

「テイラーの定理」の $R_n(x)$ が $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ を満たすなら、$f(x)$ は無限級数でかけることがわかる。その無限級数が**テイラー展開**である。$\sin x,\ \cos x,\ e^x$ などのテイラー展開については Chapter5 で紹介している。

付録 B　連成振動と基準振動

第 5 章の 5.5.4「連成振動」で、2 物体の系の連成振動について紹介した。大学で振動波動論を習うときは、これを 3 物体、n 物体へと拡張して考える。3 物体までは手計算でもなんとか式を解いて解析することはできる。ただ、3 物体以上は高校数学だけでは解析ができないので、この TEX ノートでは紹介していない。

付録編では、大学で習う振動波動論で必ず登場する「基準振動」という考え方を紹介する。当初はこの TEX ノートでは書かない予定だったが、『理論物理への道標 (上)』にほんの少しだけ紹介されていたので、この TEX ノートの付録編で少しだけ紹介しようと思う。

B.1　連成振動のモデルを振り返る

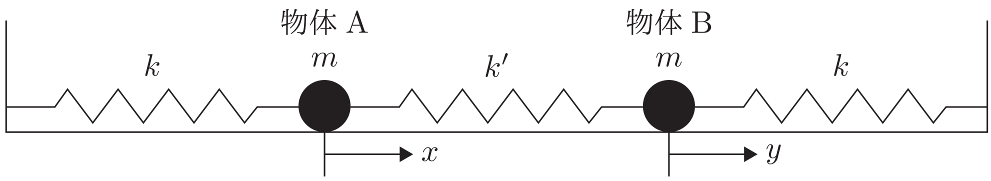


図 B.1: 第 5 章の 5.5.4「連成振動」で考えたモデル

5.5.4「連成振動」で考えたモデルでの運動方程式は式 (B.1) のようになる。

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= -kx - k'(x-y) \\ m\ddot{y} &= -ky + k'(x-y) \end{cases} \tag{B.1}$$

今回は、簡単のため、$\underline{m=1,\ k=1,\ k'=4}$として考えることにする。すると、式 (B.2) のようになる。

$$\begin{cases} \ddot{x} &= -5x + 4y \\ \ddot{y} &= 4x - 5y \end{cases} \tag{B.2}$$

この連立微分方程式の解き方は、5.5.4「連成振動」と同じである。2 つの式を足したものと、引いたものを考えればよい。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x+y) = -(x+y) \\ \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x-y) = -9(x-y) \end{cases} \tag{B.3}$$

この連立微分方程式の解は、式 (B.3) より、以下のように書ける。

$$\begin{cases} x+y = A_1\sin(t+\delta_1) \\ x-y = A_2\sin(3t+\delta_2) \end{cases} \tag{B.4}$$

この 2 式から、$x(t),\ y(t)$ を求める。うまく定数 $A_1,\ A_2$ を取り直すことで、

$$\begin{cases} x(t) = A_1\sin(t+\delta_1) + A_2\sin(3t+\delta_2) \\ y(t) = A_1\sin(t+\delta_1) - A_2\sin(3t+\delta_2) \end{cases} \tag{B.5}$$

となる。

B.2 関数の独立 (超・発展)

「超・発展」とつけたが、本当にこの section の内容は高校数学を逸脱する(1)。ここでは**独立**という概念について少しだけ書こうと思う。そもそも、ここから紹介する概念を厳密に取り扱うには**ベクトル空間**という数学的な概念が必要になる。この section は、お気持ちだけ理解してほしい(2)。

まず、関数の独立の話の土台になる事柄を 2 つ紹介する。

多項式全体のなす集合

- $K[t]$ で t を変数とする実係数多項式全体からなる集合を表す。

$$K[t] = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \mid a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \text{ は実数 }\}$$

- $K_n[t]$ で t を変数とする高々n 次の実係数多項式全体からなる集合を表す。

$$K_n[t] = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_m t^m \mid a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \text{ は実数}, m \leq n\}$$

線型結合

- $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を実数とする (複素数でもよい)。この時、

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

を $v_1, v_2, \cdots, v_n$ の**線型結合 (一次結合)** という。(v_i はベクトルや関数とする)

最低限の準備が整ったところで、**線型独立**について定義しよう。

線型独立

- $v_1, v_2, \cdots, v_n$ の線型結合について、

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0$$

が成り立つ時、$a_1, a_2, \cdots, a_n$ が全て 0 であるとき、$v_1, v_2, \cdots, v_n$ は**線型独立 (一次独立)** という。(v_i はベクトルや関数とする)

- $v_1, v_2, \cdots, v_n$ が線型独立でないときは、$v_1, v_2, \cdots, v_n$ は**線型従属 (一次従属)** であるという。

(1) この section で扱う数学の話は section3.4「行列に関する基本事項 (発展)」とも関連がある。大学の線型代数学の教科書にのっているので、興味のある人は読んでほしい。

(2) この section で扱う各種記号は、『線型代数学』(足助・東京大学出版会) と同一のものを使用する。ただ、意味合いはこの本の内容を本 TEX ノートに合わせて簡略化したものになっている。

命題 5 (線型独立と Wronski 行列式)

関数 $v_1(t)$ と $v_2(t)$ は恒等的に 0 でない関数、すなわち任意の t に対して 0 でない関数とし、微分可能な関数とする。このとき、任意の t に対して、次の命題が成立する[3]。

$$\text{Wronski 行列式 } W(v_1(t), v_2(t)) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{関数 } v_1(t) \text{ と } v_2(t) \text{ が線型独立}$$

ここで、Wronski 行列式 $W(v_1(t), v_2(t))$ は次のように定義する。

$$W(v_1(t), v_2(t)) = \det \begin{pmatrix} v_1(t) & v_2(t) \\ {v_1}'(t) & {v_2}'(t) \end{pmatrix}$$

証明

ここでは**背理法**を使用する。関数 $v_1(t)$ と $v_2(t)$ が線型独立でないなら、$a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t) = 0$ が成立するとき、$a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0$ である[4]。そのため、

$$v_2(t) = -\frac{a_1}{a_2} v_1(t)$$

が成立する。すると、Wronski 行列式は、

$$W(v_1(t), v_2(t)) = \det \begin{pmatrix} v_1(t) & v_2(t) \\ {v_1}'(t) & {v_2}'(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1(t) & -\dfrac{a_1}{a_2} v_1(t) \\ {v_1}'(t) & -\dfrac{a_1}{a_2} {v_1}'(t) \end{pmatrix} = 0 \text{ (恒等的に 0)}$$

となり、Wronski 行列式 $W(v_1(t), v_2(t))$ が任意の t に対して 0 にならないことに矛盾する。 □

[3] この命題の対偶として、任意の t に対して、

$$\text{関数 } v_1(t) \text{ と } v_2(t) \text{ が線型従属} \quad \Longrightarrow \quad \text{Wronski 行列式 } W(v_1(t), v_2(t)) = 0$$

という命題も成立する。

[4] もし、$a_1 = 0$ ならば、$a_2 = 0$ または $v_2(t) \equiv 0$($v_2(t)$ は恒等的に 0 である) となる。今、$v_2(t)$ は恒等的に 0 でない関数としているので、$a_2 = 0$ でなければならないが、これは関数 $v_1(t)$ と $v_2(t)$ が線型独立でないことに矛盾する。

付録 C　高校物理のための微分方程式論

理系の大学生の多くは常微分方程式について勉強する機会がある。微分方程式には多様な種類の微分方程式が存在する。その中でも、高校物理に登場する微分方程式の多くは「変数分離型」に分類される。「変数分離型」の微分方程式はとても簡単に解けるので、この chapter を読んだ方は必ずマスターしてほしい。一応、高校物理では「交流」の話のところで登場する「定数係数 2 階線形微分方程式」についてもまとめた。

C.1　微分方程式とは何か？ —自然法則と微分方程式—

Wikipedia における「微分方程式」の記述は以下の記述からスタートする。

> **微分方程式 (differential equation)** とは未知関数とその導関数の関係式として書かれている関数方程式である。
> 物理法則を記述する基礎方程式は多くが時間微分、空間微分を含む微分方程式であり、物理学からの要請もあり微分方程式の解法には多くの関心が注がれてきた。

自然界の様々な現象、マクロな現象からミクロな現象まで、ありとあらゆる現象を数学という道具を用いて理解しようとする学問は物理学と呼ばれる。いつか、高校物理の TEX ノートで「原子」編をまとめる時が来たら、必ず記す「放射性物質の崩壊過程」を例に考える。

放射性物質は、放射線を放出して崩壊する。原子の数 N は時間 t とともに減少する。短い時間間隔 Δt における原子の数の変化を ΔN とかく。原子の数を t の関数として、$N(t)$ と書くことにすると、

$$\Delta N = N(t+\Delta t) - N(t)$$

である。実験により、この ΔN は $N(t)$ と時間間隔 Δt に比例することが確かめられている。比例定数を k とかくと、

$$\Delta N = -kN(t)\cdot\Delta t \tag{C.1}$$

とかける (原子の数は減少するのでマイナスをつけた)。この式の両辺を Δt で割ると、

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = -kN(t)$$

となる。

時間間隔 Δt の間で、原子の数 N が一定とここまで勝手に考えてきたが、それが正しいとみなせるのは、Δt が十分小さい時である。そこで、$\Delta t \to 0$ の極限を考えてみよう。左辺の極限の形は**導関数**や**微分**と表現されるため、

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dN}{dt}$$

と書くことができる。

すると、原子の数 $N(t)$ については、

$$\frac{dN(t)}{dt} = -kN(t) \tag{C.2}$$

が成立するといえる。このように、自然現象を表現するには微分を利用する必要があり、この世界には、導関数を含む式で表現される現象がたくさんある。微分方程式は現実世界の現象を表現するのに欠かせない数学的道具なのである。

C.2 変数分離型—1 階の微分方程式—(1)

微分方程式に関する基本的な概念を把握するのに必要なキーワードとして以下のようなものがあげられる。

- 独立変数と従属変数
- 常微分方程式と偏微分方程式
- 微分方程式の階数
- 線形・非線形・正規形
- 解の初期条件

この TEX ノートは、「高校物理を振り返る」ノートであり、大学で習う数学の内容に深く突っ込むノートではない。そのため、これらのことは気にせず、とにかく微分方程式を解くことができればそれでよい。

さて、前の section で登場した

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

という微分方程式を満たす $N(t)$ はどのように求めればよいのか？あまり細かいことを気にせずにしないで受け入れてほしい。

(1) dN や dt は記号のように見えるが、元々は ΔN と Δt という微小量である。そこで、次のように式変形をする。

$$\frac{1}{N}dN = -kdt$$

(2) なんかインテグラル $\int$ をつけるといい感じになりそうなので、インテグラルをつけて積分計算を実行する。

$$\int \frac{1}{N}dN = -k\int dt \quad \Longrightarrow \quad \log|N| + C_1 = -kt + C_2$$

(3) いろいろと式をいじって $N(t) =\sim$ の形にする。

$$\begin{aligned} \log|N| &= -kt + C \qquad (C = C_2 - C_1 \text{ とおいた}) \\ |N| &= \pm e^C \cdot e^{-kt} \\ \therefore\ N &= Ae^{-kt} \qquad (\pm C = A \text{ とおいた}) \end{aligned}$$

(4) こうして求められた $N(t) = Ae^{-kt}$ が微分方程式の解である。

$\dfrac{1}{N}dN = -kdt$ と変形して、インテグラルをつけるというのがとても卑怯な方法に思えるが、問題ない。今は具体的な例で考えたがもう少し一般的な場合で考えよう。

微分の値が x だけの関数 $f(x)$ と y だけの関数 $g(y)$ の積の形で書かれている次のタイプの微分方程式は、**変数分離型**の微分方程式といわれる。

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{C.3}$$

この微分方程式を $g(y)$ でわり、x について積分すると、

$$\int \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}\,dx = \int f(x)\,dx \tag{C.4}$$

と書ける。左辺は数学 3 で登場する置換積分の形なので、

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx \tag{C.5}$$

となる。左辺は y だけの式で、右辺は x だけの式になっている。x で積分することで x だけの式と y だけの式に分離できたように思える。これは間違っていない。

ここで式 (C.5) の被積分関数に注目してみると、左辺は $\dfrac{1}{g(y)}\,dy$ で、右辺は $f(x)\,dx$ である。式 (C.5) はこれに積分がついてイコールで結ばれているだけとみることもできよう。これは、式 (C.3) を

$$\frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx$$

と変形してインテグラルをつけた結果と同じである。従って、都合よく $\dfrac{1}{N}dN = -kdt$ と変形したけど OK であるといえる。

C.3　変数分離型—1 階の微分方程式—(2)

前の section で変数分離型の微分方程式の解き方がなんとなくわかったと思うので、この section では例題を通して、解き方をマスターしていきたいと思う。

C.4　定数係数 2 階線形微分方程式

高校物理では「交流」の部分で登場する 2 回微分を含む微分方程式を考えよう。この TEX ノートでは、減衰振動の部分で

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

という微分方程式が登場した。この section では、このような微分方程式の解を『数学 微分方程式・複素整数 分野別 標準問題精構』(旺文社・木村光一) の内容に基づき、できるだけ高校数学の範囲内で導くことを考える。

C.5　減衰振動と強制振動 (再考)

付録 D　参考文献

この TEX ノートを作成する上で参考にした書物を記す。筆者がオススメする本ではないことだけ注意してほしい。

大学受験対策用の参考書

(1) 山本義隆『新・物理入門 (駿台受験シリーズ) 増補改訂版』 (駿台文庫)

(2) 山本義隆『新・物理入門問題演習 (駿台受験シリーズ) 改訂版』 (駿台文庫)

(3) 服部嗣夫『難問題の系統とその解き方 物理』 (ニュートンプレス)

(4) 浜島清利『名問の森 物理 力学・熱・波動 1 (河合塾シリーズ)』 (河合出版)

(5) 杉山忠男『理論物理への道標 (上)』(河合出版)

河合塾の浪人生のハイパー東大理類コース (2016 年度) の学生に配られたテキストの 1 冊に『物理 基礎理論』というものがあった。このテキストは、『理論物理への道標』と内容や記述のレベルにおいて類似している点が多かった。大学に合格してから、中古の『理論物理への道標』を読んだ。この TEX ノートの記述の一部は、『物理基礎理論』を参考にしている箇所がある。

(6) 吉田弘幸『はじめて学ぶ物理学 学問としての高校物理 (上)』(日本評論社)

この本は、タイトルにもあるように高校物理に関してまとめた参考書であるが、高校物理のテキストコーナーにはほとんど並べられていない。『東大の先生！文系の私に超わかりやすく数学を教えてください』という本を書店の「話題の本コーナー」で見かけるが、この吉田先生の本も、高校生用の参考書というより、この本のような「一般の人にわかりやすく物理を教えますよ」的な本と同種と勘違いされている。でも、実際は『新・物理入門』や『理論物理への道標』のように、著者が理想とする教え方を書物という形でまとめた参考書である。

(7) 鈴木健一『東大の物理 25 カ年 [第 5 版] (難関校過去問シリーズ)』(教学社)

(8) 2016 物理基礎・物理 重要問題集 (数研出版)

(9) 2014 物理入試問題集 (数研出版)

(10) 2015 物理入試問題集 (数研出版)

(11) 2018 物理入試問題集 (数研出版)

(12) 改訂版 物理基礎 (数研出版)

(13) 改訂版 物理 (数研出版)

(14) 高校物理の備忘録　(`https://physnotes.jp`)

(15) 木村光一『数学 微分方程式・複素整数 分野別 標準問題精構』(旺文社)

現在の高校数学の内容が、大学で習う数学や物理学とどのように結びつくのか、その橋渡し的存在として書かれた本である。内容は非常に難しい。この TEX ノートは高校数学や高校物理のレベルを十分逸脱しているが、その何十倍もこの本は難しい。高校数学の数学 3 の副読本として書いたと「はじめに」に記されているが、数学が

好きすぎて、大学生が使うような数学書を読んでいるような、本当に意欲のある高校生のためだけに書かれた本と言ってもよいだろう。

私が書けることはこれぐらいである。後は Amazon のレビューなどを読んでほしい。

大学生用参考書 (数学や物理の参考書)

(1) 東京大学教養学部前期課程数学部会『平成 29 年度 数理科学基礎 共通資料』

私が TEX ノートの力学編を作成する時には、大学で配布されたこの共通資料を参考にしましたが、どうやら、2019 年 4 月 15 日に、この共通資料の内容を書籍化した本が東京大学出版会から出たらしいです。表紙は図 D.1 のような感じらしいです。

(2) 杉浦光夫『解析入門 I』(東京大学出版会)

(3) 足助太郎『線型代数学』(東京大学出版会)

(4) 稲見武夫『常微分方程式 理工系の基礎数学 3』(岩波書店)

(5) 坂井卓三『初等力学』(岩波全書)

(6) 有山正孝『基礎物理学選書 8 振動・波動』（裳華房）

(7) 藤原邦男『基礎物理学 1 物理学序論としての力学』(東京大学出版会)

(8) 篠本滋・坂口英継『基幹講座物理学 力学』(東京図書)

(9) 山内恭彦『一般力学 増訂第 3 版』(岩波書店)

(10) ファインマン・レイトン・サンズ (著), 坪井忠二 (訳)『ファインマン物理学 1 力学』(岩波書店)

(11) ファインマン・レイトン・サンズ (著), 宮島龍興 (訳)『ファインマン物理学 3 電磁気学』(岩波書店)

(12) The Feynman Lectures on Physics, Volume 2
(http://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_toc.html)

図 D.1: 『大学数学ことはじめ』の写真　(Amazon のホームページより)