

## 駒場の電磁気学を振り返る 恋るん&にこるん

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{i} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$



## まえがき

東京大学の理系 1 年生は秋学期 (A セメスター) に必修科目として「電磁気学」の授業を受けなければならない。2017 年 A セメスターに、電磁気学 A のシケタイ (「試験対策委員」と思えばよい) だった私は、 $\text{\TeX}$  で文章を作成する練習として、授業の内容をまとめた資料 (東大内部で「シケプリ」と呼ばれている類の資料ではない) を作成した。

2 年生の春休みから始めたあるアルバイトの影響で、私は  $\text{\TeX}$  について理解する必要があった。その際に習得したテクニックを 1 年生の時に作った資料に反映させたいと思い、1 年生の時に作った電磁気学の資料を、2 年生の A セメスターで受講した「電磁気学第一」と「物理数学<sup>(1)</sup>」の内容に基づいて改良・加筆することにした。その結果がこの  $\text{\TeX}$  ノートであり、私は「駒場の電磁気学を振り返る」というタイトルをつけた。

今回、著者の名前が「恋るん& にこるん」となっているが、これは、 $\text{\TeX}$  ノートを作成する過程で見つけた画像のキャラクターの名前である。あの藤田ニコルとは無関係である。

### 本 $\text{\TeX}$ ノートの構成

電磁気学 A の授業は、電磁気学の基礎的な事を学ぶ授業であった。2 年生の A セメスターで受講した電磁気学第一の授業は、1 年生の時に習った電磁気学の内容を再確認するとともに、多少高度な数学的技術を使い、さらに高度で高級な電磁気学に突入する準備をする授業であった。従って、電磁気学 A と電磁気学第一では、電磁気学のイントロダクションしかふれていないと言っても良いだろう。そこで、この  $\text{\TeX}$  ノートでも電磁気学のイントロダクションしかふれない。

基本的には「電磁気学 A」「電磁気学第一」の講義ノートやレジュメ、1 年生の時に作った資料をもとに作成しているが、一部の section や subsection は講義ノートやレジュメではなく、参考文献 (155 ページ) に記した文献をもとに作成した。また、3 年生になって、より専門性の高い授業を受けた結果、2 年生の秋学期までに習わなかった数学的な知識、概念でも導入した方が良いと考えたことは十分な説明をつけて導入した。6 章の最初の 6.1 節の超関数の説明などがこれにあたる。

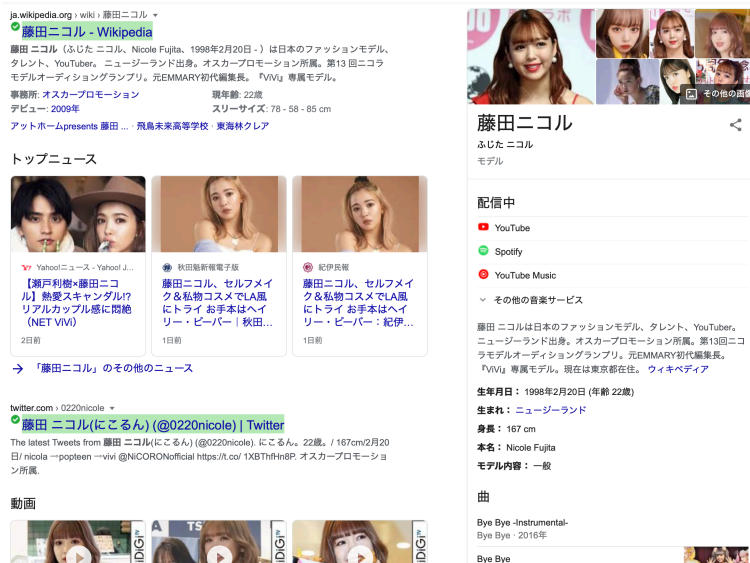
電磁気学のイントロを理解するためには、ベクトル解析の知識が必要である。必要になった時にその都度、ベクトル解析の内容を記すのでも良いが、そうはせずに Part1 で必要なベクトル解析の内容の大部分を確認することとした。ベクトル解析の説明をその都度ふれることにすると、本論の流れから何度も外れ

<sup>(1)</sup>「物理数学」という講義名だったが、ほとんど物理学演習だった。「物理数学」と Google 様で調べると、Wikipedia の「物理数学」のページが出てくる。このページの書き出しは以下のようなになる。

物理数学とは、物理学で用いられるいくつかの数学的手法を総称した呼び方であり、特定の数学分野を示すものではない。代表的な手法・分野は以下の通り。ある物理現象を扱う際にはこのうちいくつかの手法を複合的に用いることが多い。日本の大学の理学部物理学科ではこれらの分野を物理数学という科目名で教育されている。

- 線型代数
- ベクトル解析
- テンソル
- 微分方程式
- フーリエ変換
- ラプラス変換
- 微分幾何学
- 群論
- 特殊関数
- 複素解析

しかし、工学部理工学科が開講する「物理数学」では、これらのことは一切扱わない。担当の先生が問題を配って、レポートとして提出するか、前に出て発表するかという感じだった。「物理数学」というより、「物理学演習」だった。



(上の写真は、2020 年 7 月 20 日に、Google で「藤田ニコル」と検索した時に出てくる画面である。)

なければならないからだ。

ただ、そういう方針にすると、最初は電磁気学ではなく、数学の話が続いて、つまらないと感じてしまう可能性が高い。そこで、私は Part1 に「電磁気学の入口」というタイトルをつけて、ベクトル解析の話だけでなく、電磁気学の入口である「クーロンの法則」の話を書くことにした。ちょっとは、物理的な (電磁気学らしい) 話を入れることで、つまらなさを軽減させようと私は考えた。

## カラー box について

本  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  ノートではいくつかの枠が出てくる。特に、2020 年 7 月の改訂では 2 つの枠を新たに用意した。

テスト

テスト

テスト

テスト

赤枠は物理の内容に関する重要事項を表し、青枠は数学の内容に関する重要事項を表している。色分けしているがどちらも重要である。

最後に、この  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  ノートについて何かありましたら、Twitter アカアカウント「@alas56ike」まで連絡をお願いします。

恋るん and にこるん  
2020 年 7 月 20 日



# 目次

---

<b>第 I 部 電磁気学の入口</b>	<b>1</b>
<b>第 1 章 クーロンの法則</b>	<b>3</b>
1.1 電磁気力と 4 つの力	3
1.2 Coulomb の法則	3
1.2.1 Coulomb の法則	3
1.2.2 電気力と重力	4
1.3 重ね合わせの原理	6
1.4 静電場の導入	7
1.5 無限に長い一様な直線状の電荷が作る静電場	9
<b>第 2 章 ベクトル解析の基礎</b>	<b>11</b>
2.1 ベクトルの演算の基礎	11
2.1.1 ベクトルの内積	11
2.1.2 ベクトルの外積	12
2.1.3 ベクトル演算の公式 (1)	12
2.2 ナブラ演算子	14
2.2.1 ナブラ演算子と $\text{grad} \cdot \text{div} \cdot \text{rot} \cdot \text{Laplacian}$	15
2.2.2 2 階微分に関する性質	16
2.2.3 スカラー場の等高線と $\text{grad}$	17
2.3 線積分	19
2.3.1 線積分とは?	20
2.3.2 $\text{grad}$ の線積分	21
2.4 面積分	23
2.5 Gauss の発散定理	25
2.6 Stokes の定理	28
<b>第 3 章 直交曲線座標</b>	<b>29</b>
3.1 直交曲線座標とは	29
3.1.1 直交曲線座標とは	29
3.1.2 直交曲線座標とデカルト座標の関係	30
3.2 直交曲線座標における $\text{grad}, \text{div}, \text{rot}$ , ラプラシアン	32
3.2.1 勾配 ( $\text{grad}$ )	32
3.2.2 発散 ( $\text{div}$ )	33
3.2.3 回転 ( $\text{rot}$ )	34
3.2.4 ラプラシアン ( $\text{Laplacian}$ )	35
3.3 直交曲線座標の具体例	37
3.3.1 極座標の場合	37
3.3.2 円柱座標の場合	38

<b>第 II 部 静電場</b>	<b>41</b>
<b>第 4 章 静電場の基本法則</b>	<b>43</b>
4.1 スカラーポテンシャルの導入 . . . . .	43
4.1.1 $1/r$ の grad . . . . .	43
4.1.2 スカラーポテンシャルの式 . . . . .	44
4.1.3 スカラーポテンシャルの性質 . . . . .	45
4.1.4 電場は電位の grad . . . . .	46
4.2 Gauss の法則とその応用 . . . . .	49
4.2.1 立体角 . . . . .	49
4.2.2 Gauss の法則 (積分形) の導出 . . . . .	50
4.2.3 Gauss の法則の微分形 . . . . .	51
4.2.4 Gauss の法則を利用して電場・電位を求める . . . . .	52
4.3 導体の性質 . . . . .	59
4.3.1 導体と電場 . . . . .	59
4.3.2 同心球殻 (演習問題) . . . . .	61
4.3.3 導体内の空洞 . . . . .	63
4.4 Poisson 方程式 . . . . .	64
4.4.1 Poisson 方程式とは? . . . . .	64
4.4.2 Earnshaw の定理 . . . . .	65
4.4.3 Poisson 方程式を利用する . . . . .	65
4.5 電気双極子 . . . . .	69
4.5.1 電気双極子による電位と電場の特徴 . . . . .	69
4.5.2 電気双極子の一般的な取り扱い . . . . .	70
4.5.3 広義の電気双極子モーメント . . . . .	72
4.6 静電エネルギー . . . . .	74
4.6.1 電荷が集合した系の静電エネルギー . . . . .	74
4.6.2 平行平板コンデンサーに蓄えられる静電エネルギー . . . . .	76
4.6.3 静電場のエネルギー . . . . .	77
<b>第 5 章 静電場の応用問題</b>	<b>79</b>
5.1 Dirac のデルタ関数 . . . . .	79
5.1.1 デルタ関数とは? . . . . .	79
5.1.2 デルタ関数の近似 . . . . .	80
5.2 Poisson 方程式の解の一意性と鏡像法 . . . . .	81
5.2.1 Poisson 方程式の解の一意性 . . . . .	81
5.2.2 鏡像法 . . . . .	83
5.3 コンデンサー . . . . .	86
5.3.1 静電容量を求める . . . . .	86
5.3.2 複数の導体がある場合の静電容量 (容量係数と電位係数) . . . . .	88
5.3.3 相反定理と静電エネルギー . . . . .	90
5.4 誘電体中の静電場 . . . . .	92
5.4.1 誘電体中の電気分極とは? . . . . .	92
5.4.2 分極電荷 . . . . .	93
5.4.3 誘電体の Gauss の法則 . . . . .	94

5.4.4	異なる誘電体の境界面における接続の条件	95
5.4.5	誘電体とコンデンサー	97
5.5	Laplace 方程式の解	99
5.5.1	極座標における Laplace 方程式の解 (1)	99
5.5.2	極座標における Laplace 方程式の解 (2)	103
5.5.3	円柱座標における Laplace 方程式の解	103
5.5.4	一様な静電場の中の円柱導体	106
5.5.5	一様な静電場の中の誘電体球	107
<b>第 6 章</b>	<b>Poisson 方程式の解</b>	<b>111</b>
6.1	Dirac のデルタ関数 (発展)	111
6.1.1	超関数とは何か? (発展)	111
6.1.2	超関数の演算 (発展)	113
6.1.3	デルタ関数の種々の性質と超関数的な視点 (発展)	114
6.1.4	一般の関数の超関数への拡張 (発展)	115
6.2	$1/r$ の Laplacian	117
6.2.1	$r \neq 0$ のときを考える	117
6.2.2	$r = 0$ のとき — 3 次元のデルタ関数 —	117
6.2.3	超関数的視点から考える (発展)	119
6.2.4	湯川ポテンシャルについて再び考える	120
6.2.5	湯川ポテンシャルの下での電荷分布の全空間積分	121
6.3	Poisson 方程式の解 (1)	122
6.4	Green 関数	124
6.4.1	インパルス応答とは何か?	124
6.4.2	Green 関数とは何か?	125
6.5	Poisson 方程式の解 (2)	126
6.5.1	Poisson 方程式の解 — 数学的な結論 —	126
6.5.2	Poisson 方程式の解 — 電磁気学的な結論 —	127
<b>第 III 部</b>	<b>静磁場</b>	<b>129</b>
<b>第 7 章</b>	<b>静磁場の基本法則</b>	<b>131</b>
7.1	電流と電荷保存則	131
7.1.1	電流密度と電流の定義	131
7.1.2	電流密度と電荷の移動速度の関係	131
7.1.3	電荷保存則	132
7.2	電流に働く磁気力	133
7.2.1	ローレンツ力	133
7.3	Biot-Savart の法則	133
7.4	ベクトルポテンシャル	133
7.5	アンペールの法則	133
<b>第 8 章</b>	<b>静磁場の応用問題</b>	<b>135</b>
8.1	磁気双極子	135
8.2	定常電流の流れるコイルに作用する力	135

8.3	電磁場の相対性 . . . . .	135
8.4	静磁場に関する応用問題 . . . . .	135
<b>第 IV 部 時間変動する電場と磁場</b>		<b>137</b>
<b>第 9 章 静電場・静磁場の式の修正</b>		<b>139</b>
9.1	変位電流 . . . . .	139
9.2	電磁誘導 . . . . .	139
9.3	Maxwell 方程式 . . . . .	139
<b>第 10 章 コイルを含む回路の性質</b>		<b>141</b>
10.1	自己インダクタンスと相互インダクタンス . . . . .	141
10.2	磁気エネルギー . . . . .	141
<b>第 11 章 電磁波</b>		<b>143</b>
11.1	波動方程式 . . . . .	143
11.2	電気双極子放射 . . . . .	143
<b>第 V 部 付録編</b>		<b>145</b>
<b>付 録 A Fourier・Laplace 解析の基礎</b>		<b>147</b>
A.1	Fourier 級数展開 . . . . .	147
A.1.1	Fourier 級数展開とは何か? . . . . .	148
A.1.2	Fourier 級数展開の係数の決定 . . . . .	148
A.1.3	複素 Fourier 級数展開 . . . . .	151
A.2	Fourier 変換 . . . . .	153
A.2.1	Fourier 級数展開の特徴 . . . . .	153
A.2.2	Fourier 級数展開から Fourier 変換へ . . . . .	154
A.2.3	Fourier 変換の例 . . . . .	154
A.2.4	Fourier 変換の性質 . . . . .	154
A.2.5	デルタ関数と Fourier 変換 . . . . .	154
A.3	微分方程式と Fourier 変換 . . . . .	154
A.4	Laplacian がデルタ関数になる関数 . . . . .	154
A.5	Laplace 解析とは何か? — Fourier 解析との違い — . . . . .	154
<b>参考文献</b>		<b>155</b>



## 第I部

# 電磁気学の入口



# 第 1 章 クーロンの法則

第 1 章では電磁気学の基礎である「クーロンの法則」を紹介する。本 T<sub>E</sub>X ノートでは、電磁気学を展開していく上でクーロンの法則を公理のように認めることとする。力学で運動方程式  $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$  を認めて議論を展開しているのと同様に、本 T<sub>E</sub>X ノートでは Coulomb により発見された自然界の性質であるクーロンの法則を公理として先に進める。

## 1.1 電磁気力と 4 つの力

表 1.1 4 つの力

	力の強さ	到達距離	実例	荷量
強い力	1	$10^{-13}$	クオーク	カラー荷
電磁気力	$10^{-2}$	$\infty$	原子・分子・物質	電荷・磁荷
弱い力	$10^{-6}$	$10^{-16}$	放射線崩壊	ウィーク荷
重力	$10^{-39}$	$\infty$	天体	重力荷

力には 4 種類ある。強い力、電磁気力、弱い力、重力の 4 つである。本 T<sub>E</sub>X ノートでは、4 つの力の中でも**電磁気力**を扱う。電磁気的な力は物体が床から受ける摩擦力、分子を結びつける化学結合などに関係する。重力以外の日常生活で経験する力は全て電磁気力と結びついている。

### 電気・磁気の現象

電気に関する現象と磁気に関する現象は最初は独立な現象として発見された。歴史的には、紀元前 500 年代にコハクをこすると物体を引きつけることが確認されていることまで遡る。1800 年代になると、ファラデーが動く磁石が電流を発生させる**電磁誘導**を発見したことなど電氣的な現象と磁氣的な現象の間には密接な関係があることが徐々にわかってきた。そして、マクスウェルにより両者が統合された。この T<sub>E</sub>X ノートでは、静電場に関する議論と静磁場に関する議論を第 2 部、第 3 部で独立して議論して、第 4 部で時間変化を導入することで両者を統合して Maxwell 方程式を導出する。

## 1.2 Coulomb の法則

### 1.2.1 Coulomb の法則

Coulomb は帯電粒子間に作用する力を調べる実験を行い、その力が荷電粒子の電荷量の積に比例し、また両者の間の距離の 2 乗に反比例することを発見した<sup>(1)</sup>。Coulomb の発見を数式で書くと次のようになる。距離  $r$  だけ離れた 2 つの電荷  $Q_1, Q_2$  の間に働く力の大きさ  $F$  は、

$$F = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (1.1)$$

<sup>(1)</sup>厳密には 2 乗ではなく、 $F = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{r^{2+a}}$  と誤差がある。この誤差について、Cavendish(1731-1810) の実験では  $|a| < 0.02$  と結論づけられた。また、後に Maxwell(1831-1879) が行った実験では  $|a| < 5 \times 10^{-5}$  と結論づけられた。現在では  $a$  のオーダーは  $10^{-9}$  以下であることが確かめられている。

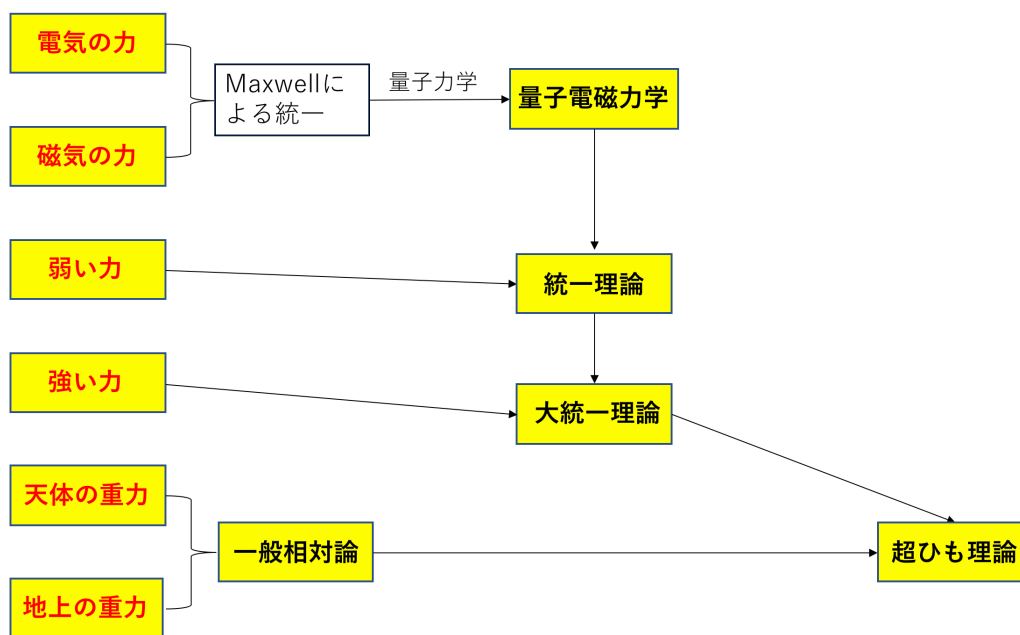


図 1.1 力が統合する方向に科学は発展する

下の図のように、点  $r_1$  と  $r_2$  に点電荷  $Q_1$  と  $Q_2$  がある。

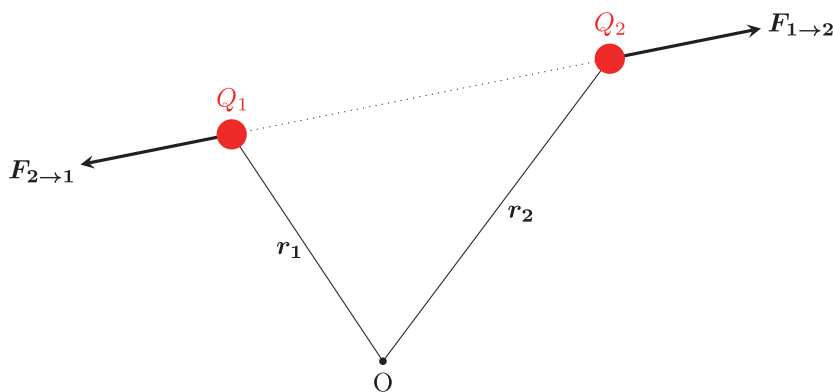


図 1.2 Coulomb の法則

$Q_2 \rightarrow Q_1$  の方向の単位ベクトルは、 $e_{2 \rightarrow 1} = \frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|}$  である。ここで、ベクトル  $r_1 - r_2$  を  $r_{12}$  と書くことにすると、

$$F_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|r_{12}|^2} e_{2 \rightarrow 1} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_{12}}{|r_{12}|^3} = -F_{1 \rightarrow 2} \quad (1.2)$$

となる。

### 1.2.2 電気力と重力

万有引力や重力は「神の摂理」。説明できない不思議な力。

- 万有引力

$$F_g = G \frac{mM}{r^2}$$

万有引力定数  $G$ :  $G = 6.67 \times 10^{-11} (\text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2)$

- クーロン力

$$F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}$$

真空の誘電率  $\epsilon_0$ :  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} (\text{C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2)$

ここで、陽子と電子の間の万有引力とクーロン力を比較する。

- 陽子の質量:  $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
- 電子の質量:  $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- 電子の電荷量:  $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$

を使う。陽子と電子の間の距離が  $10^{-10} \text{ m}$ 、つまり 1 オングストローム ( $1\text{\AA}$ ) の時を考えると、

$$F_g = 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{(1.67 \times 10^{-27}) \times (9.11 \times 10^{-31})}{(10^{-10})^2} = 1.01 \times 10^{-47} \text{ N}$$

$$F_c = \frac{1}{4 \times 3.14 \times (8.85 \times 10^{-12})} \frac{(1.60 \times 10^{-19})^2}{(10^{-10})^2} = 2.30 \times 10^{-8} \text{ N}$$

となり、 $\frac{F_g}{F_c} = 4.4 \times 10^{-40}$  となる。これより、万有引力はクーロン力に比べてとても小さいことがわかる。

あと、電気力の重要なポイントは以下の 4 つである。

- 電気には、正と負の電荷がある。
- 負の質量は存在しない。
- 全体的にみると中和している<sup>(2)</sup>。
- 電気力はとても強いのに、電子と陽子は中和してしまわないのか。

### 1.3 重ね合わせの原理

点  $r_1, r_2, \dots, r_n$  に点電荷  $q_1, q_2, \dots, q_n$  があるとき、電荷  $q_1$  に働く力  $F_1$  は、その他の電荷から受ける力のベクトル和で表せる。

$$F_1 = \sum_{i=2}^n F_{i \rightarrow 1} = \sum_{i=2}^n \frac{q_1 q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_1 - r_i}{|r_1 - r_i|^3} \quad (1.3)$$

2019 年 2 月 26 日、東大入試の 2 日目の夜、理科 3 類を受験する人以外は、もう入試が終わった夜、Google で「ドラマ 三角関係」と検索した。「画像」というボタンをクリックすると、一番最初に出てくるドラマは何か。答えは「花より男子」だ。Wikipedia のストーリー紹介<sup>(3)</sup>を読んでみよう。

名門の筋や素封家の子弟が入学する事で知られる英徳学園高校に、娘の玉の輿を願う母親の勧めで入学した一般庶民の牧野つくし。学校は、道明寺財閥の御曹司・司、花沢物産の御曹司・類、日本一の茶道の家元「西門流」の跡取り息子・総二郎、総合商社・美作商事の息子あきらの F4 (Flower 4—“花の四人組”) に牛耳られていた。学校は、F4 の親から多額の寄付を受けていたため、生徒達はもちろん教師達ですら彼らに逆らう事が出来なかった。つくしは、それに違和感を持ちながらも平凡な高校生活を送ろうとしていた。

<sup>(2)</sup> 「ファインマン物理学」にこのような記述がある。

「人体の中の電子が陽子より 1 パーセント多いとすると、あなたがある人から腕の長さの所に立つ時、信じられない位強い力で反発するはずである。」

ここで、体重 60kg の 2 人の人が共に 1C の電荷を帯びているとする。腕の距離を今 1m とみなすと、

$$F_g = 6.67 \times 10^{-11} \times 60^2 = 2.40 \times 10^{-7} \text{ N}$$

$$F_c = \frac{1}{4 \times 3.14 \times (8.85 \times 10^{-12})} = 9.00 \times 10^9 \text{ N}$$

となり、 $10^9 \text{ N}$  のレベルの静電気力を受けることがわかる。もし、2 人の電荷が異なっているなら、お互いに  $10^9 \text{ N}$  の力で引き合っていて、離れることはできないだろう。

<sup>(3)</sup> <https://ja.wikipedia.org/wiki/花より男子>

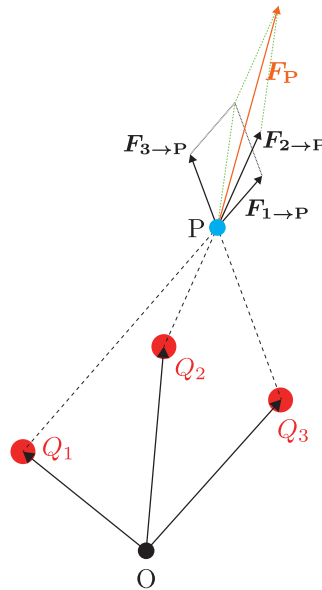


図 1.3 重ね合わせの原理のイメージ

ところがある日、つくしは F4 に花瓶の水をかけた事が原因で F4 に赤札を貼られ、学校全体からいじめのターゲットにされてしまう。しかし、正義感の強いつくしは彼らの性根を叩き直さんとばかりに立ち向かって行く。

そんな中、F4 のリーダーである道明寺はつくしのことを好きになってしまい、それから彼女一途でそればかり。いじめられ騙され続けたつくしの人生が、この F4 によって変わり始めた。次第に 2 人の思いは通じ合っていくが、様々な事情（司の母、楓が中心）が彼らの恋路を阻むようになる。

まあ、こんな環境にいたら、一般庶民の牧野つくしも何らかの影響を受けるはずだろう。人の場合、たくさんの人がいると、互いに影響を与えたり与えられたりするものだ。しかし、荷電粒子の場合、たくさんの荷電粒子があっても、電荷  $q_1$  に働く力  $\mathbf{F}_1$  は、その他の電荷 ( $q_2, \dots, q_n$ ) から受ける力のベクトル和で表せることが実験事実として確認されている。電荷  $q_3$  のせいで、 $\mathbf{F}_1$  は単純なベクトル和にならないということはない。言い換えると、**2 個の荷電粒子の間に働く力は、他の荷電粒子の影響を受けない**ということである。

## 1.4 静電場の導入

古代ギリシャでは、物体間に働く力は接触しているから働くのだと考えていて、天体の運動など「接触」という観点から説明できない事については「神様が操作している」などということでは理解していた。しかし、**遠隔作用**という考えが浸透してからは誰も神様のおかげということとはなくなったに違いない。

何年か経つと、電荷の間に働く力が本当に遠隔作用なのか疑う人が現れる。Faraday は、電荷の周りには、電荷から出ている目に見えないゴム棒のようなもの<sup>(4)</sup>があり、それを伝って電荷の間に力が働いているのではないかと考えた。つまり、電荷の間に働く力は**近接作用**的なものではないかと考えた。

- 遠隔相互作用：離れた点どうしの間で力が働く (Coulomb 力など)
- 近接相互作用：**場**から直接力を受ける (各点ごとに場が定義され途中の因果関係が連続する)

<sup>(4)</sup>このゴム棒のようなものを視覚化したものが**電気力線**である。電荷から出ているゴム棒が周囲の空間にゆがみを生じさせていると考えると、このゆがみこそ「**電場**」である。電場を含め、場は、空間上の任意の点において、ベクトルとして表現される。

では、Coulomb 力をこの場を用いて表すことを考える。点  $\mathbf{r}_0$  にある電荷  $q$  が周囲に及ぼす場を  $\mathbf{E}$  とする。このとき、点  $\mathbf{r}_0$  から距離  $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$  だけ離れた点  $\mathbf{r}$  にある電荷  $Q$  が電場  $\mathbf{E}$  から受ける力  $\mathbf{F}$  を

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (1.4)$$

と定める。 $\mathbf{F}$  自体は遠隔作用的に考えると、式 (1.2) のようにかけるから、式 (1.2) を次のように分解すれば、 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  が数式で表せる。

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Q\mathbf{E}(\mathbf{r}) = Q \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

なので、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (1.5)$$

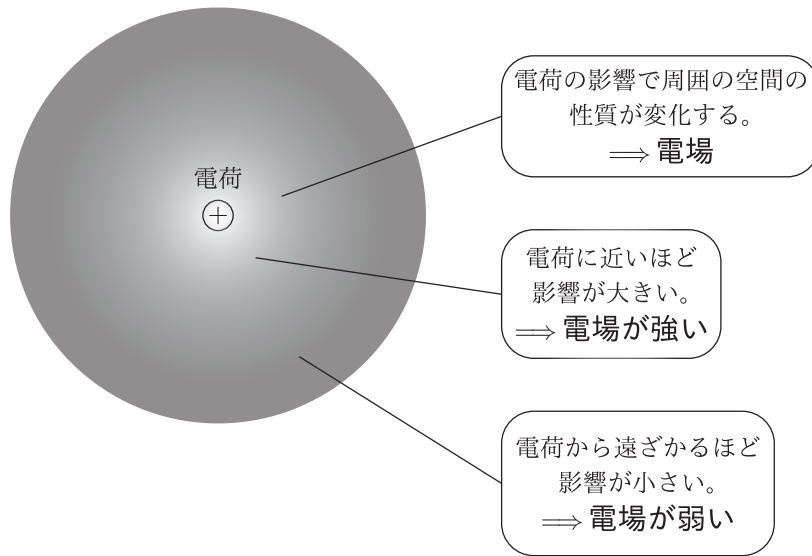


図 1.4 電場の性質

電荷が複数の場合は重ね合わせの原理を使えば良い。点  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$  に点電荷  $q_1, q_2, \dots, q_n$  があり、それらが周囲に及ぼす電場を  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$  とすると、点  $\mathbf{r}$  における合成電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  は以下ようになる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (1.6)$$

今度は、電荷が連続的な分布をしている場合を考える。

点  $(x, y, z)$  の周りの微小領域の電荷密度 (単位体積あたりの電荷量) が、位置  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  の関数  $\rho(\mathbf{r})$  で表されるとする。電荷が連続分布している領域  $K$  をたくさんの微小領域に分割する。点  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$  の微小領域 (体積  $\Delta V'$ ) を考える。この微小領域に含まれる全電荷量  $\Delta q'$  は、 $\Delta q' = \rho(\mathbf{r}')\Delta V'$ 。よって、この微小領域が点  $\mathbf{r}$  に作る電場は、 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  である。

$K$  中の全ての微小領域について足し合わせれば、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{\text{領域 } K} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}')\Delta V'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$



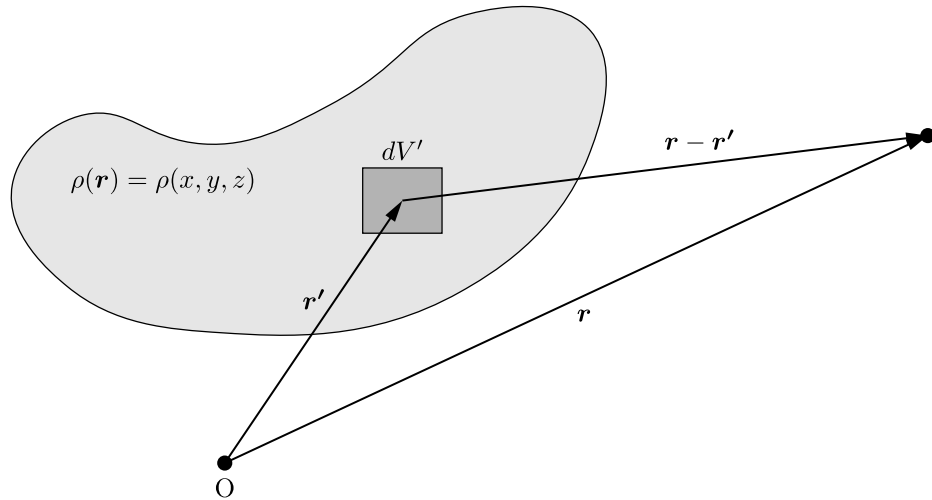


図 1.5 電荷が連続的に分布している場合のイメージ

$\Delta V_2 \rightarrow 0$  の極限をとると、

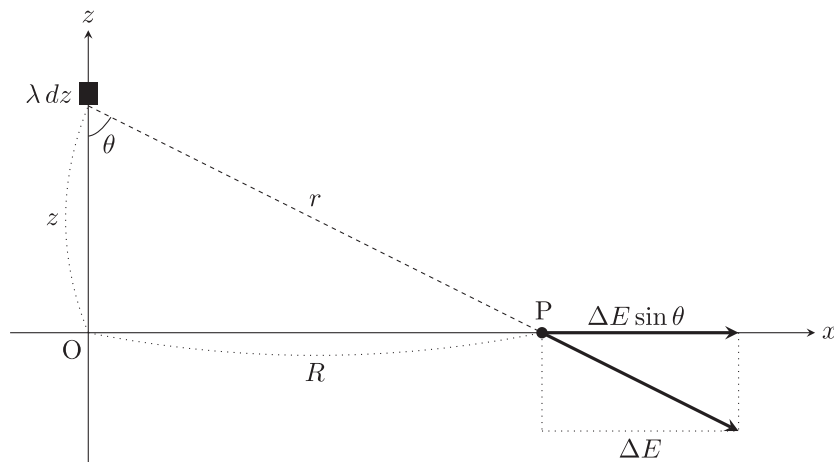
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_K \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (1.7)$$

となる。こうして、だいぶ天下りの的に「電場」を導入した。電磁気学のイントロとしては、この程度でいいのかもしれない。1 問、演習問題にふれて先に進む。

## 1.5 無限に長い一様な直線状の電荷が作る静電場

### 例題 1.1

$xyz$  空間内の、 $z$  軸にそって無限に長く細い針金があり、一様に帯電している。この針金が、単位長さあたり  $\lambda$  の電荷量を持つ時、点  $P(R, 0, 0)$  にできる電場を求めよ。



この問題は後述する Gauss の法則を使えばすぐに求められる。(電位を使った方法だとちょっとだけ楽になる。) だが、ここでは面倒な方法でとく。

**解答**

$z$  軸上の  $(0, 0, z)$  付近の微小部分  $dz$  に含まれる電荷  $\lambda dz$  を点電荷とみなすと、この電荷  $\lambda dz$  が点  $P$  に作る電場の大きさ  $\Delta E$  は次のようになる。

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{r^2}$$

そのうち、針金全体が作る電場に寄与するのは、 $\Delta E \sin \theta$  のみ<sup>(5)</sup>。よって、針金全体により、点  $P$  に作られる電場は  $x$  軸正方向の向きで、その大きさは

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \sin \theta dz \quad (1.8)$$

上の図より、 $r = \frac{R}{\sin \theta}$ ,  $z = \frac{R}{\tan \theta}$  なので、 $dz = -\frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta$  であり、積分範囲は、 $-\infty \rightarrow \infty$  から  $\pi \rightarrow 0$  と変わる。

$$E = - \int_{\pi}^0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \sin \theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \quad (1.9)$$

□

---

<sup>(5)</sup>  $\cos$  成分は原点に関して対称な位置  $(0, 0, -z)$  付近の微小部分が作る電場の  $z$  成分により相殺される。

## 第 2 章 ベクトル解析の基礎

電磁気学で登場する電場や磁場はベクトル量である。そのため、電磁気学を理解するためにはベクトルの(数学的な)性質を理解し、ベクトル演算を使いこなせるようにならなければならない。この chapter では、電磁気学に必要なベクトル解析の内容を説明していく。この T<sub>E</sub>X ノートは数学のノートではないので、数学的に厳密でない部分がいくらかある。

線型代数学の講義や教科書、ノートでは、「 $n$  次元ベクトル」や「ベクトル空間」など、初めて習うときは理解に苦しむような概念を考える。しかし、この T<sub>E</sub>X ノートでは、3 次元実ベクトルしか考えない。電磁気学を始め、実世界で起きている物理現象は、基本的なものなら 3 次元ベクトルと時間  $t$  という 4 つのパラメーターで記述できる。時間  $t$  を fix すれば、3 次元  $x, y, z$  の成分だけ考えることになる。従って、電磁気学で重要なのは、3 次元ベクトルの性質である。そのため、この chapter では、3 次元ベクトル、それも実ベクトルのみを考える。

### 2.1 ベクトルの演算の基礎

#### 2.1.1 ベクトルの内積

ベクトルの内積については、線型代数学で登場するような難しい定義を考える必要はない。電磁気学に必要なベクトルの内積の知識は、高校の数学 B で習ったアレである。

ベクトル  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$  と  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$  の内積を、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (2.1)$$

で定義する。

この他にも、ベクトル  $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|$  を

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (2.2)$$

で定義することや、 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$  としたとき、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \angle AOB \quad (2.3)$$

とも書けることをおさえておけば十分である。

### 2.1.2 ベクトルの外積

高校数学では登場しないベクトルの外積について確認する。『基礎と応用 ベクトル解析 [新訂版]』(清水勇二・サイエンス社)では、ベクトル  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^\top$  と  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^\top$  の外積  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  を、

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left[ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right]^\top$$

で定義しているが、行列式を使った定義であり、毛嫌いする人もいるのではないかな。私はこれで覚えたくない。好きな方法で覚えれば良い。

ベクトル  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^\top$  と  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^\top$  の外積  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  を、

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

で定義する。

この式 (2.4) から次の2つの性質が成立することがすぐわかる。式 (2.5) より、ベクトルの外積の場合は内積と違い、順番が大切であることがわかる。

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

### 2.1.3 ベクトル演算の公式 (1)

ベクトルの内積と外積は、 $3 \times 3$  行列の行列式によってつながっている。

3つのベクトル  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^\top$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^\top$ ,  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^\top$  に対して、次の式が成立する。

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

#### 証明

右辺の行列式を計算すると、左辺に一致することを確認すればよい。右辺第2項を余因子展開すると、

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となる。各行列式が  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  の  $(x, y, z)$  成分に対応するから、この式は  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  を表す。  $\square$

式 (2.7) を使うと、次の 3 つの式を導くことができる。

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0 \quad (2.8)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (2.9)$$

式 (2.8) より、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  は、 $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  に直交するベクトルであることがわかる。図 2.1 でいうと、 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$  としたとき、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  は緑色の矢印に対応する。図形的には  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  の大きさについて、次の式 (2.10) が成立する。

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \theta \quad (2.10)$$

ただし、 $\theta$  は 2 つのベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  のなす角 ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) を表す。

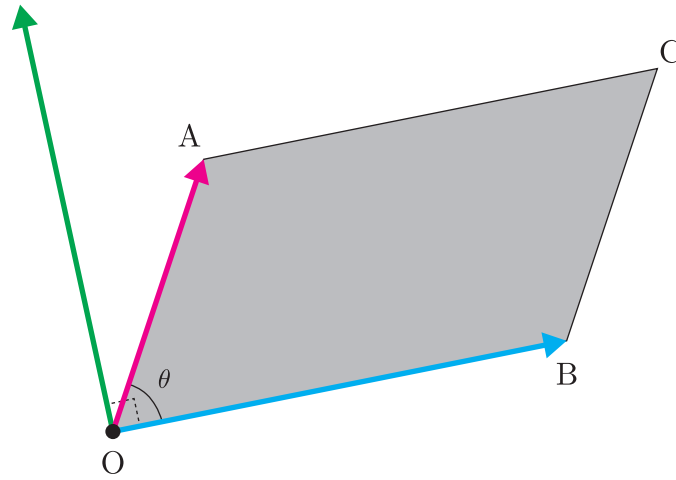


図 2.1  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

#### 証明

両辺の 2 乗が一致することを確認できればよい。左辺の 2 乗は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= (a_2b_3)^2 + (a_3b_2)^2 + (a_3b_1)^2 + (a_1b_3)^2 + (a_1b_2)^2 + (a_2b_1)^2 \\ &\quad - 2(a_2a_3b_2b_3 + a_1a_3b_1b_3 + a_1a_2b_1b_2) \end{aligned}$$

一方、右辺の 2 乗は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \theta &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \theta \\ &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \end{aligned}$$

これを展開して整理すると、上の式と一致することが確かめられる。  $\square$

そして、電磁気学でとても大事な公式が「グラスマンの恒等式」と呼ばれる、次の式 (2.11) である。式 (2.12) はヤコビの恒等式と呼ばれるらしい。

ベクトルの外積に関する恒等式

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

証明

まず、 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^\top$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^\top$ ,  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^\top$  において、式 (2.11) を示す。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_2c_2 + a_3c_3)b_1 + \underbrace{a_1c_1b_1 - a_1b_1c_1}_{=0} - (a_2b_2 + a_3b_3)c_1 \\ (a_3c_3 + a_1c_1)b_2 + \underbrace{a_2c_2b_2 - a_2b_2c_2}_{=0} - (a_3b_3 + a_1b_1)c_2 \\ (a_1c_1 + a_2c_2)b_3 + \underbrace{a_3c_3b_3 - a_3b_3c_3}_{=0} - (a_1b_1 + a_2b_2)c_3 \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \end{aligned}$$

式 (2.12) は、式 (2.11) を使うことで示される。

$$\begin{aligned} &\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

□

## 2.2 ナブラ演算子

2.2 節からはスカラー場やベクトル場について考える。両者の単純だがわかりづらい数学的な定義は以下のようになる。

- **ベクトル場**：空間上、あるいは空間上の領域に定義された、空間ベクトルを値としてとる関数
- **スカラー場**：空間上、あるいは空間上の領域に定義された、スカラーを値としてとる関数

このスカラー場やベクトル場に関する各種の演算を電磁気学では行っていく。第2章と第3章では、そのために必要な数学的な話を紹介していく。まず、**ナブラ演算子**を紹介する。

## 2.2.1 ナブラ演算子と grad・div・rot・Laplacian

## ナブラ演算子

微分作用素  $\nabla$ (ナブラ) を次のように定義する。

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^\top \quad (2.13)$$

この演算子ナブラ  $\nabla$  を使う演算として、**grad(勾配)**、**div(発散)**、**rot(回転)** と **ラプラジアン** がある。以下、 $T$  をスカラー、 $A$  をベクトルとする。(ただし、 $A = (A_x, A_y, A_z)^\top$  とする。)

(1) grad(勾配) : ベクトル

$$\text{grad}T = \nabla T = \left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)^\top \quad (2.14)$$

(2) div(発散) : スカラー

$$\text{div}A = \nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.15)$$

(3) rot(回転)<sup>(1)</sup> : ベクトル

$$\text{rot}A = \nabla \times A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

(4) ラプラジアン<sup>(2)</sup> :  $\nabla^2$

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.17)$$

$$\nabla \cdot (\nabla A) = \nabla^2 A = \begin{pmatrix} \nabla^2 A_x \\ \nabla^2 A_y \\ \nabla^2 A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_x \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_y + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_y \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_z + \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_z \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

<sup>(1)</sup>rot を行列を想起させるように書くのは適切でないかもしれない。ただ、rot の成分は 3 次元ベクトル  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^\top$  と  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^\top$  の外積  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  と似ている部分があり、私はベクトルの外積を計算する時に、

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

という図式を頭に思い浮かべるので、このような表記とした。

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  を  $\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  に変えて、 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  を  $(A_x, A_y, A_z)$  に変えれば良い。

<sup>(2)</sup>スカラーが作用するときと、ベクトルが作用する時で微妙に異なるので注意が必要である。あと、ラプラシアン<sup>(2)</sup>の記号としては、 $\Delta$  が使用されることもある。この TeX ノートでは、微少量を表す「デルタ」と区別するために、ラプラシアンを表す記号として  $\nabla^2$  を使用する。

### 2.2.2 2階微分に関する性質

上の4つがナブラ演算子を用いた基本的な演算の定義である。ここからは、いくつかの重要な定理を紹介していく。最初にベクトルの2階微分に関する性質を紹介する。以下の3つの式は電磁気学の議論でもたびたび登場するので、ここで必ず覚えておきたい。

なお、2.2.2ではスカラー  $T$  やベクトル  $A$  は  $C^2$  級であることを仮定する。実際、この後、電磁気学の議論が少しずつ展開されていくが、その際もスカラーやベクトルが  $C^2$  級であると仮定しても大抵の場合は問題ない。

#### ベクトルの2階微分

$$\nabla \times (\nabla T) = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0 \quad (2.20)$$

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A \quad (2.21)$$

#### 証明

式 (2.19) について

$x$  成分を計算する。 $\nabla T = \left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)^\top$  より、

$$(x \text{ 成分}) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0$$

となる<sup>(3)</sup>。残りの成分についても同様になるから、 $\text{rot}(\text{grad } T) = \mathbf{0}$  である。

式 (2.20) について

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times A) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &= \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} \right) + \left( \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} \right) + \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

式 (2.21) について

左辺の  $x$  成分を計算して、式変形をしていくことで、右辺の  $x$  成分と一致することを確認する。

$$\begin{aligned} (\text{左辺の } x \text{ 成分}) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial x} \right)}_{=0} - \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot A) - \nabla^2 A_x \end{aligned}$$

<sup>(3)</sup>  $C^2$  級と仮定したので、 $y$  微分と  $z$  微分の順序が逆でも同じ値になる。



残りの成分についても計算することで、 $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$  であることが示せる。□

式 (2.19) は grad の rot は 0 であることを表し、式 (2.20) は rot の div は 0 であることを表している。このことから、何かの rot が 0 なら、その「何か」はあるスカラー関数の grad で書けることが予想できる。また、何かの div が 0 なら、その「何か」はあるベクトル関数の rot で書けることが予想できる。

実際、ある条件下ではこの予想は正しい。電磁気学ではこのある条件は満足していると考えて問題ない。この予想が正しいことの証明は難しいので省略する。

### ベクトルの 2 階微分 (2)

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \implies \exists \phi : \mathbf{A} = \nabla \phi \quad (2.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \implies \exists \mathbf{C} : \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{C} \quad (2.23)$$

### 2.2.3 スカラー場の等高線と grad

まず、1次元の場合を考えよう。 $\Delta x$  を微小量とする。スカラー関数  $f(x + \Delta x)$  の Taylor 展開を考えると、

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}(\Delta x)^2 + \dots \quad (2.24)$$

となる。ここで、 $|\Delta x|$  が十分小さいとき、 $\Delta x$  の 2 次以上の項は無視できる。そのため、 $|\Delta x|$  が十分小さいとき、

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \quad (2.25)$$

と近似できる。

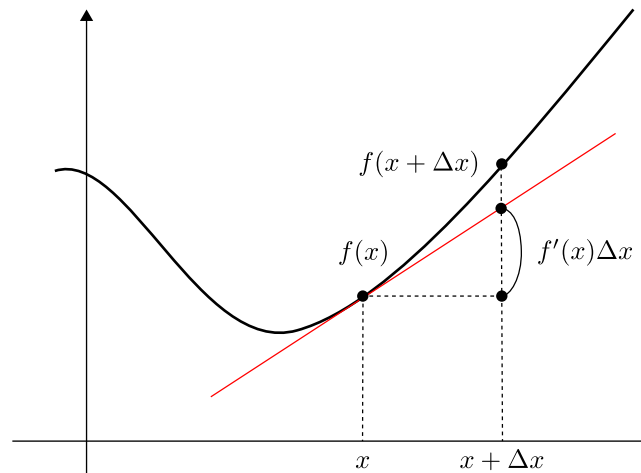


図 2.2 1次元の Taylor 展開を視覚的に捉える

この考えを拡張したものとして、スカラー関数  $T(\mathbf{r})$  について、 $|\mathbf{dr}|$  が十分小さいとき、

$$T(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) \approx T(\mathbf{r}) + \nabla T(\mathbf{r}) \cdot \Delta \mathbf{r} \quad (2.26)$$

と近似できることがいえる。

## 証明

1 変数の場合の近似を 3 変数に拡張すればよい。

$$\begin{aligned}
 & T(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - T(x, y, z) \\
 &= \{T(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - T(x, y + \Delta y, z + \Delta z)\} \\
 &\quad + \{T(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - T(x, y, z + \Delta z)\} + \{T(x, y, z + \Delta z) - T(x, y, z)\} \\
 &\approx \frac{T(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - T(x, y + \Delta y, z + \Delta z)}{\Delta x} \Delta x \\
 &\quad + \frac{T(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - T(x, y, z + \Delta z)}{\Delta y} \Delta y \\
 &\quad + \frac{T(x, y, z + \Delta z) - T(x, y, z)}{\Delta z} \Delta z \\
 &\xrightarrow{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} T(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - T(x, y, z) \approx \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z
 \end{aligned}$$

$\frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z$  の部分は、 $\text{grad } T$  と  $\Delta \mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  のベクトルの内積になっているので、

$$T(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) \approx T(\mathbf{r}) + \nabla T \cdot \Delta \mathbf{r}$$

と近似できることが示された。□

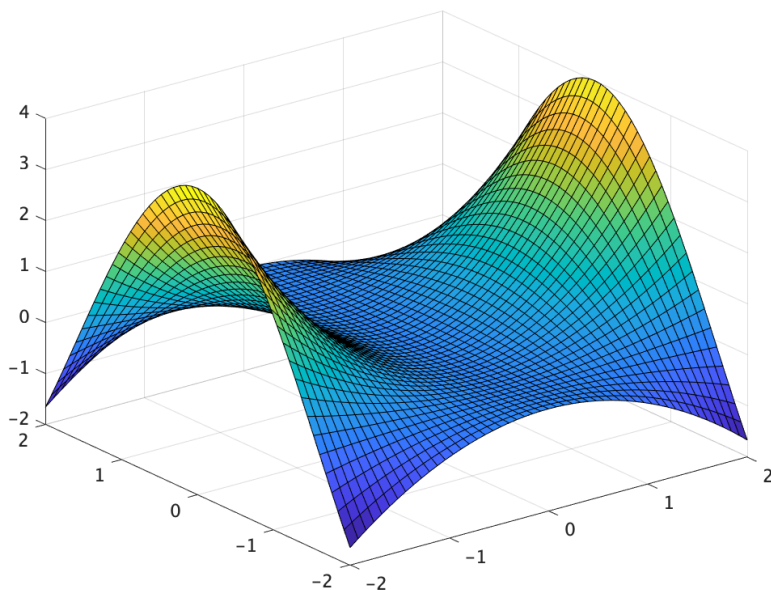


図 2.3 平面  $z = x^2 \cos y$  を表すグラフ

次に、 $\text{grad}$  の図形的な意味を考えよう。式 (2.26) より、等高線上に  $\Delta \mathbf{r}$  をとったとき、

$$T(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) \approx T(\mathbf{r}) + \nabla T(\mathbf{r}) \cdot \Delta \mathbf{r} = T(\mathbf{r})$$

が成立する必要がある。これより、 $\nabla T(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$  となることがわかり、 $\nabla T(\mathbf{r})$  は、等高線の法線を表すベクトルであることがわかる。

図 2.3 は 3 次元空間内の平面  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 \cos y\}$  を表している。図 2.4 は、図 2.3 に対応する等高線である。 $\text{grad}$  は  $z$  が増大する方向を向いているベクトルで、等高線の法線であることが、2 つの図を比較することでわかる。

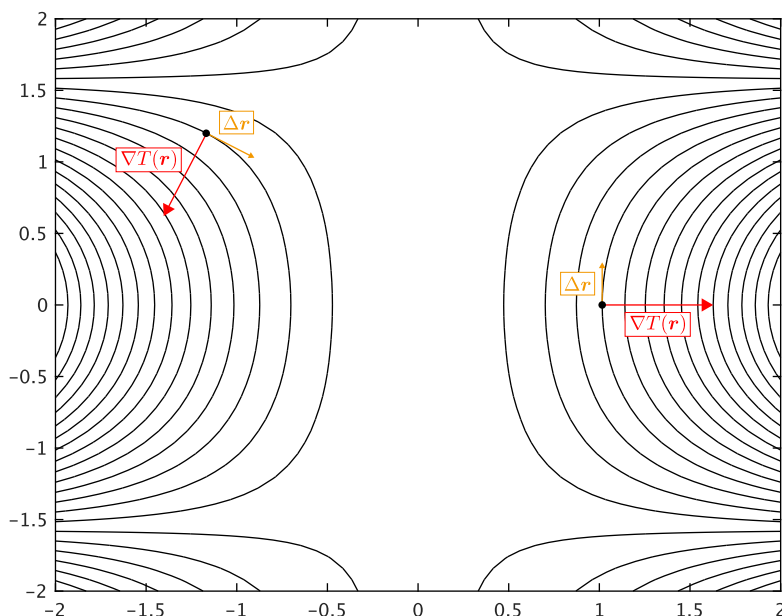


図 2.4 スカラー場  $T(\mathbf{r})$  の等高線と  $\text{grad}$ (勾配) の関係

## 2.3 線積分

2.3 節では、ベクトルを曲線上に沿って積分する手法について考える。線積分をする上で重要なことの一つに、空間上の曲線をどう表現するかということがある。

- 空間上の 2 つの曲面の交線
- 1 つのパラメーター  $t$  を用いて、曲線上の点を  $(x(t), y(t), z(t))$  と表現する。  
 数学的には「区間  $I = [a, b]$  から空間  $\mathbf{R}^3$  への写像  $\gamma$  のグラフ」ということもできる。これを使うと、 $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in I$  と書くことができる。

線積分では、この 2 つの表現法のうち、後者の方法を用いて、曲線を表現した時、線積分を次のように定義する。ここで、線積分の定義に向けて、次の記号を定義する。

向きを定めた曲線  $C$  上の点  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  に対して、ベクトル場

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

が定まっているとする。曲線  $C$  のパラメーター表示が、 $\mathbf{r} = (x(t), y(t), z(t))$  ( $a \leq t \leq b$ ) であるとき、 $F_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x(t), y(t), z(t)) \\ F_2(x(t), y(t), z(t)) \\ F_3(x(t), y(t), z(t)) \end{pmatrix}$$

を表すものとする。

## 2.3.1 線積分とは？

## 線積分

向きを定めた曲線  $C$  上の点  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  に対して、ベクトル場  $\mathbf{F} = (F_1(\mathbf{r}), F_2(\mathbf{r}), F_3(\mathbf{r}))^\top$  が定まっているとする。曲線  $C$  のパラメータ表示が、 $\mathbf{r} = (x(t), y(t), z(t))^\top$  ( $a \leq t \leq b$ ) であるとき、ベクトル場  $\mathbf{F}$  の曲線  $C$  に沿った線積分は、

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \left( \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) dt \quad (2.27)$$

$$= \int_a^b \left\{ F_1(t) \cdot \frac{dx(t)}{dt} + F_2(t) \cdot \frac{dy(t)}{dt} + F_3(t) \cdot \frac{dz(t)}{dt} \right\} dt \quad (2.28)$$

と定義される<sup>(4)</sup>。ただし、 $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)^\top$  とする。

## 例題 2.1

次のベクトル場  $\mathbf{F}$  と曲線  $C$  に対して、 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  を求めよ。

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}, \quad C: \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} \quad \left( 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

## 解答

$\mathbf{F}$  と  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  をパラメータ  $t$  を使って表すと、 $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ \sin^2 t \\ t^2 \end{pmatrix}$ ,  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$  と書けるので、

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} (-\sin t \cos^2 t + \sin^2 t \cos t + t^2) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \{ (\cos t)' \cos^2 t + \sin^2 t (\sin t)' + t^2 \} dt \\ &= \left[ \frac{1}{3} \cos^3 t + \frac{1}{3} \sin^3 t + \frac{1}{3} t^3 \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi^3}{24} \end{aligned}$$

□

<sup>(4)</sup>  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  は、

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

と表記されることもある。

## 2.3.2 grad の線積分

線積分のベクトル場  $\mathbf{F}$  があるスカラー関数  $f$  の grad でかける ( $\mathbf{F} = \nabla f$ ) とき、線積分の公式は次のようにかける。式変形においては、熱力学で多用する全微分の考えを使用する<sup>(5)</sup>。

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \left( \frac{df}{dt} \right) dt \\ &= f(b) - f(a)\end{aligned}$$

## grad の線積分

$$\int_C (\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = f(b) - f(a) \quad (2.31)$$

これより、grad の線積分は経路によらず、始点と終点だけで計算できることがわかる。

## 例題 2.2

$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 3x^2y - y^2 + yz \\ x^3 - 2xy + xz \\ xy - 1 \end{pmatrix}$  とし、曲線  $C$  を原点から点  $(2, 2, 2)$  に至る任意の曲線とする。

- (1)  $\text{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$  を示せ。
- (2) 線積分  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  の値を求めよ。

## 解答

- (1) 頑張って計算すると、 $\text{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$  となることが示せる。
- (2)  $\text{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$  より、あるスカラー関数  $\phi(x, y, z)$  を用いて、 $\mathbf{F} = \nabla \phi$  と書ける (式 (2.22))。よって、

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0,0)}^{(2,2,2)} (\nabla \phi) \cdot d\mathbf{r}$$

となり、求める線積分はあるスカラーの grad の線積分と等しくなる。

## (方法 1)

grad の線積分は、途中の経路に依存しないので、「曲線  $C$  を原点から点  $(2, 2, 2)$  に至る任意の曲線とす

<sup>(5)</sup> 2.2.3 節の式 (2.26) の証明と同様に考えると、

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (2.29)$$

が成立する。この式の両辺を  $dt$  で割ると、

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (2.30)$$

となる。

る」とあるが、Cとして、 $t$ をパラメーターとして、 $(x, y, z) = (t, t, t)$ と表される曲線をとって考える。すると、

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^3 \\ t^3 - t^2 \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (1, 1, 1)$$

となる。ゆえに、

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 (3t^3 + t^3 - t^2 + t^2 - 1)dt = \int_0^2 (4t^3 - 1)dt = 14$$

(方法2)  $\mathbf{F} = \nabla\phi$ を満たす $\phi$ を求めて、gradの線積分を実行する。

$$\mathbf{F} = \nabla\phi = \left( \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^\top$$

なので、 $\mathbf{F}$ の $x$ 成分より、 $\phi(x, y, z) = x^3y - xy^2 + xyz + g(y, z)$ とかける。これを $y, z$ に関して偏微分することで、 $g(y, z)$ の形を決定する。

$$(A) \quad \mathbf{F} = \phi(x, y, z) = x^3 - 2xy + xz + \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} \text{ である。}$$

$$(B) \quad \mathbf{F} = \phi(x, y, z) = xy + \frac{\partial g(y, z)}{\partial z} \text{ である。}$$

となる。

- (A) より  $\frac{\partial g(y, z)}{\partial y} = 0$  となる。これは、 $g(y, z)$ が $z$ のみの関数であることを示す。
- (B) より  $\frac{\partial g(y, z)}{\partial z} = -1$  なので、 $g(y, z) = -z + c$  となる。これは、 $g(y, z)$ が $z$ のみの関数であることを満たしている。

以上より、

$$\phi(x, y, z) = x^3y - xy^2 + xyz - z + c$$

と書けることがわかる。

$$\begin{aligned} \therefore \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{(0,0,0)}^{(2,2,2)} (\nabla\phi) \cdot d\mathbf{r} = \phi(2, 2, 2) - \phi(0, 0, 0) \\ &= (2^3 \times 2 - 2 \times 2^2 + 2 \times 2 \times 2 - 2 + c) - c = 14 \end{aligned}$$

□

## 2.4 面積分

空間上の曲線と同様に、空間上の曲線についても、その表現法は1つではない。

- (曲面の陰関数表示)  $\{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = 0, f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}\}$
- 2つのパラメーター  $u, v$  を用いて、曲線上の点を  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  と表現する。  
数学的には「 $uv$  平面上の領域  $D \subset \mathbf{R}^2$  から空間  $\mathbf{R}^3$  への写像  $\Phi$  のグラフ」ということもできる。これを使うと、 $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  と書くことができる。

この後者の方法を用いて、曲面を表現した時、面積分を次のように定義する。

### ベクトル場の面積分

曲面  $S$  上の点  $\mathbf{r}$  が

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad (u, v) \in D$$

とかけるとき、曲面  $S$  の法線ベクトルの1つ  $\mathbf{n}$  は、

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

とかける。ただし、 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$  である。これを用いて、線積分を次のように定義する。

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (2.32)$$

$$= \int_D \left\{ \mathbf{F}(u, v) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \right\} du dv \quad (2.33)$$

$$= \int_D \det \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \end{bmatrix} du dv \quad (2.34)$$

### 例題 2.3

$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ -2z \end{pmatrix}$  とし、曲面  $S$  を  $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}$  とする。

このとき、 $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  を求めよ。

### 解答

曲面  $S$  上の点を2つのパラメーター  $x, y$  で表す。 $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$  より、 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  とかけ

るから、 $S$  上の点  $\mathbf{r}$  は、

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{4-x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

と表せる。ここで、パラメータ  $x, y$  の動く範囲は、「 $z = \sqrt{4-x^2-y^2} \geq 0$  かつ  $z$  は実数」<sup>(3)</sup> より、

$$4-x^2-y^2 \geq 0 \iff x^2+y^2 \leq 4$$

を満たす  $xy$  平面上の領域であり、これを  $D$  と呼ぶことにする。すると、 $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$  とかける<sup>(4)</sup>。一方、 $\mathbf{F}$  をパラメータ  $x, y$  を使って表すと、

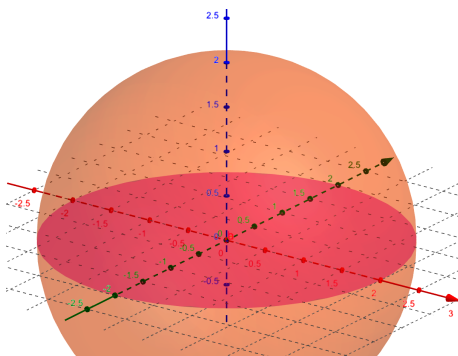
$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ -2\sqrt{4-x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

となる。また、 $\mathbf{r}$  を  $x, y$  で偏微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \frac{-2y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

<sup>(3)</sup>  $z \geq 0$  を用いて、 $z$  の 2 つの候補から  $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$  の方を選んだのだから、 $z \geq 0$  は当然満たされている。よって、 $z$  が実数となる条件だけを考えればよい。

<sup>(4)</sup>  $D$  と  $S$  の関係を考える。



オレンジ色の球面が  $D$ 、赤色の円が  $S$  である。

- $S$  は  $D$  とその内部からなる立体の平面  $z = 0$  による断面
- $S$  は (球面) $D$  の  $xy$  平面への正射影

$S$  を断面とみるか、正射影とみるか？今回の場合は正射影と見た方がよい。 $S$  上の点  $(x, y, z)$  に対して ( $z$  を fix したとき)、対応する  $(x, y)$  がいかなるものかを知りたいのだから、方程式  $x^2 + y^2 = 4 - z^2$  を満たす  $(x, y)$  の組を考えればよい。これは、図形的には  $xy$  平面への正射影を考えることに相当する。



となる。すると、

$$\begin{aligned}
 \det \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \end{bmatrix} &= \begin{vmatrix} 4x & 1 & 0 \\ 4y & 0 & 1 \\ -2\sqrt{4-x^2-y^2} & -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 4x & 4y & -2\sqrt{4-x^2-y^2} \\ 1 & 0 & -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \end{vmatrix} \\
 &= 4x \begin{vmatrix} 0 & -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ 1 & -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4y & -2\sqrt{4-x^2-y^2} \\ 1 & -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{4x^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} + \frac{4y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} - 2\sqrt{4-x^2-y^2} \\
 &= \frac{2(3x^2+3y^2-4)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}
 \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 2 \int_D \left( \frac{3x^2+3y^2-4}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \right) dx dy$$

となる。あとはこの2重積分を計算すればよい。今回  $D$  は円とその内部なので、2次元極座標を使うことを考える。 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  ( $0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta < 2\pi$ ) とおくと、

$$\begin{aligned}
 \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= 2 \int_D \left( \frac{3x^2+3y^2-4}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \right) dx dy = 2 \int_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{3r^2-4}{\sqrt{4-r^2}} r dr d\theta \\
 &= -4\pi \int_0^2 \frac{r}{\sqrt{4-r^2}} (3r^2-4) dr \\
 &= -4\pi \left\{ \left[ -(3r^2-4)\sqrt{4-r^2} \right]_0^2 + \int_0^2 6r\sqrt{4-r^2} dr \right\} \\
 &= -4\pi \left( 8 + 3 \int_0^4 \sqrt{4-t} dt \right) \\
 &= -4\pi \left( 8 + 3 \left[ \frac{2}{3} (4-t)^{3/2} \right]_0^4 \right) = 32\pi
 \end{aligned}$$

□

## 2.5 Gauss の発散定理

面積分の計算がとても面倒であることは、上の [例題 2.3](#) からわかる。少しでも計算を楽にする方法として2つの公式がある。その1つ目は **Gauss の発散定理**<sup>(5)</sup>である。

<sup>(5)</sup>単に「Gauss の定理」ということもある。ただ、この TeX ノートでは、後述する Gauss の法則と区別するため、ベクトル解析の公式の方を「Gauss の発散定理」と呼ぶことにする。

## Gauss の発散定理

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV \quad (2.35)$$

(ただし、 $S$  は任意の閉曲面、 $V$  は  $S$  の内部の空間)

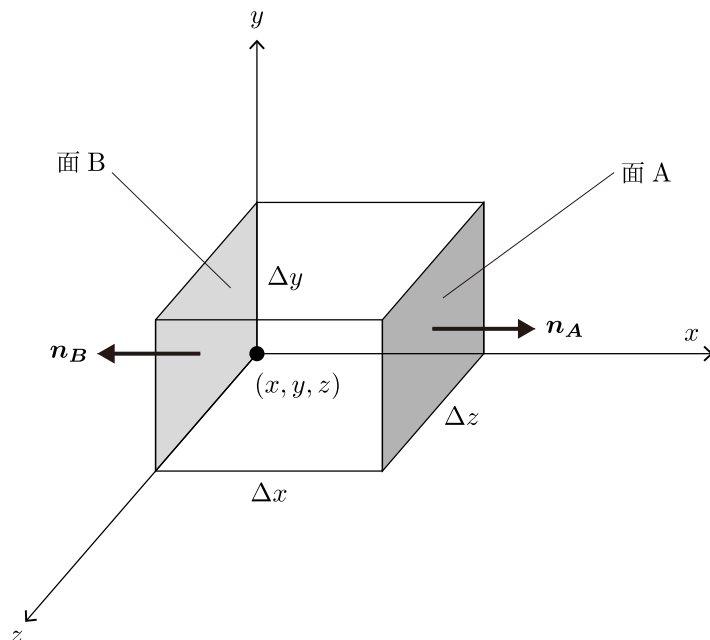


図 2.5 体積  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  の微小直方体における Gauss の発散定理

## 証明

(この証明は数学的な厳密さを欠く。感覚的にはこんな感じだと思ってほしい。)

点  $(x, y, z)$  付近にある微小直方体を考え、この直方体を通過する電場を考える。面 A を通過する電場は、

$$\int_A \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_A dS = \int_A E_x(x + \Delta x, y, z) dy dz$$

であり、一方、面 B を通過する電場は、

$$\int_B \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_B dS = - \int_B E_x(x, y, z) dy dz$$

である。よって、 $x$  方向に流入し流出する電場<sup>(6)</sup>は、

$$\int_A E_x(x + \Delta x, y, z) dy dz - \int_B E_x(x, y, z) dy dz = \{E_x(x + \Delta x, y, z) - E_x(x, y, z)\} \Delta y \Delta z \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta V \end{aligned} \quad (2.37)$$

<sup>(6)</sup> 面 A, B が微小なら、面 A, B 上のどの点でも  $\mathbf{E}$  は等しいとみなせることを利用して、面 A では点  $(x + \Delta x, y, z)$  の値に、面 B では点  $(x, y, z)$  の値に等しいと近似する。また、(2.30) から (2.31) への変形では、

$$E_x(x + \Delta x, y, z) = E_x(x, y, z) + \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x$$

と、Taylor 展開の  $\Delta x$  の 1 次までで近似して計算する。

同様に、 $y$  方向は  $\frac{\partial E_y}{\partial y} \Delta V$ ,  $z$  方向は  $\frac{\partial E_z}{\partial z} \Delta V$  なので、この直方体全面から出る電場は、

$$\left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Delta V = (\operatorname{div} \mathbf{E}) \Delta V$$

ゆえに、全ての微小直方体を足し合わせて、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} \, dV$$

となる。

□

#### 例題 2.4

$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x^2 \\ -xy \\ z^2 \end{pmatrix}$  とし、曲面  $S$  を  $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  とする。この時、面積分

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

を求めよ。 $\mathbf{n}$  は曲面の単位法線ベクトルで、原点から遠ざかる向きのものとする。

#### 解答

曲面  $S$  に対して、領域  $V$  を  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  で定める。すると、Gauss の発散定理より、

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V (\operatorname{div} \mathbf{F}) \, dV$$

となる。 $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2x - x + 2z = x + 2z$  である。よって、

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V (x + 2z) \, dV = 0$$

である。<sup>(7)</sup>

□

---

(7) 領域  $V$  は球対称性を持つので、 $V$  内の点  $(x, y, z)$  を 1 つとると、 $(-x, y, z)$  も  $V$  内にある。そのため、領域  $V$  全体で  $\int_V x \, dV$  の積分を考えると、 $\int_{(x,y,z) \in V, x \geq 0} x \, dV$  は、 $\int_{(x,y,z) \in V, x \leq 0} x \, dV$  によって相殺されて、 $V$  全体での体積積分は 0 となる。数学的に厳密に考えるなら、極座標変換を使えば良い。

$$(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi) \quad (0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi)$$

と変換すると、

$$\begin{aligned} \int_V x \, dV &= \int_V r \cos \theta |r^2 \sin \theta| \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_0^1 r^3 \, dr \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin 2\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{1}{4} \cdot 0 \cdot 2\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。また、同様にして、 $\int_V z \, dV = 0$  である。

## 2.6 Stokes の定理

面積分の計算を楽にする2つ目の方法は **Stokes の定理**である。この Stokes の定理は、電磁気学で時々出てくる  $\text{rot}$  の面積分を簡単に計算する方法で、 $\text{rot}$  の面積分を線積分に変換して計算量を減らす。逆に、線積分を  $\text{rot}$  の面積分に変換することに使うこともできる。これは、計算量が増えて大変なように思えるが、 $\text{rot}$  が 0 になる時は、線積分の計算結果がすぐに 0 だとわかり、大変便利な公式である。

### Stokes の定理

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S \{\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})\} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS \quad (2.38)$$

( $S$  は  $\Gamma$  を縁とする任意の曲面)

Stokes の定理は色々な所で使用されるが、証明を書くのは面倒なので省略する。最後に、Stokes の定理を使うと楽に解ける問題を取りあげてこの chapter を終わりにする。

#### 例題 2.5

$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x^2 + y - 4 \\ 3xy \\ 2xz + z^2 \end{pmatrix}$  とし、曲面  $S$  を  $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0\}$  とする。この時、面積分

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

を求めよ。 $\mathbf{n}$  は曲面の単位法線ベクトルで、原点から遠ざかる向きのものとする。

#### 解答

曲面  $S$  に対して、閉曲線  $C$  を  $C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 16, z = 0\}$  で定める。すると、Stokes の定理より、

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

となる。さて、 $C$  上の点は  $t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) を使うと、 $(4 \cos t, 4 \sin t, 0)$  となる。すると、 $C$  上において、

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \cos^2 t + 4 \sin t - 4 \\ 48 \sin t \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -4 \sin t \\ 4 \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

だから、

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \{(16 \cos^2 t + 4 \sin t - 4)(-4 \sin t) + (48 \sin t \cos t)(4 \cos t)\} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \{64(\cos t)^2(\cos t)' - 16 \sin^2 t + 16 \sin t - 192(\cos t)'(\cos t)^2\} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ -128(\cos t)^2(\cos t)' - 16 \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} + 16 \sin t \right\} dt \\ &= \left[ -\frac{128}{3} \cos^3 t - 8 \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) - 16 \cos t \right]_0^{2\pi} \\ &= -16\pi \end{aligned}$$

□

## 第 3 章 直交曲線座標

前の chapter で  $xyz$  座標系 (デカルト座標系) における grad、div、rot、Laplacian の定義を紹介した。ただ、多くの電磁気学の問題を解く時は、デカルト座標系より、極座標系や円柱座標系の方を使った方が多い。この chapter では、極座標系や円柱座標系における grad、div、rot、Laplacian の扱い方を考える。そこで直交曲線座標について考える。

まだ、数学の話が続くが、この chapter の内容をおさえておくと、後で登場する計算でなぜ  $\frac{1}{r}$  が必要なのかなどがわかる。

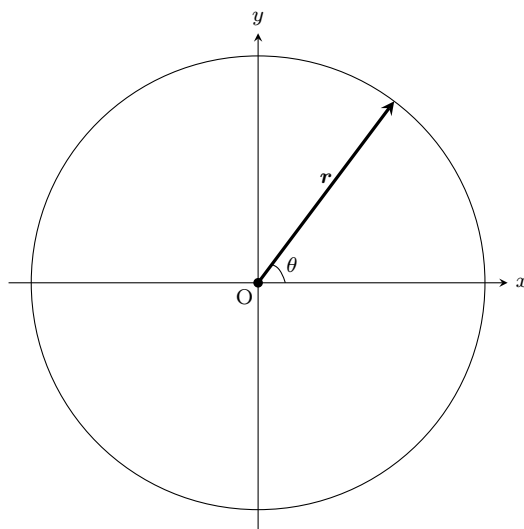
### 3.1 直交曲線座標とは

#### 3.1.1 直交曲線座標とは

3次元空間内の点  $\mathbf{r}$  は、3つの座標値を用いることで指定できる。この chapter で考えたいのは、 $x, y, z$  以外の表現法である。2次元座標系で円周上の座標を  $(x, y)$  の代わりに、 $(r, \theta)$  と表現するように<sup>(1)</sup>、同じ点を表す方法は1つではない。

3次元空間内の点  $\mathbf{r}$  がデカルト座標で  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  とかけるとする。この点が別の座標系で  $\mathbf{r} = (u, v, w)$  とかけるとする。このとき、 $(x, y, z)$  と  $(u, v, w)$  の間には何らかの関係がある。脚注 (1) の場合、 $(x, y)$  と  $(r, \theta)$  は  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  という関係式で結ばれていた。 $(x, y, z)$  と  $(u, v, w)$  の間の関係を式 (3.1) と書くことにしよう。式 (3.1) の  $x = x(u, v, w)$  というのは、 $(x, y, z)$  の  $x$  が  $u, v, w$  の関数でかけることを表す。

<sup>(1)</sup> $x$  軸と動径ベクトル  $\mathbf{r}$  のなす角を  $\theta$  とする。この時、 $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  であるとき、 $(x, y)$  の代わりに、 $(r, \theta)$  と書くことで点を表すことができる。



$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \\ w = w(x, y, z) \end{cases} \quad (3.1)$$

さて、式 (3.1) の表記法を使うと、 $\mathbf{r}$  は  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, w)$  と書くことができる。ここで、 $v, w$  を  $v = v_0, w = w_0$  で固定すると、ただ 1 つのパラメーター  $u$  が動くことで空間上の曲線を表現することができる (2.3 「線積分」を参照)。そして、式 (3.2) で定義されるベクトルはこの曲線の接線ベクトルとなることが知られている。

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v, w)}{\partial u} \\ \frac{\partial y(u, v, w)}{\partial u} \\ \frac{\partial z(u, v, w)}{\partial u} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

この接線ベクトル  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$  の大きさを  $h_u$  としよう。 $h_u$  を用いて  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$  を規格化したベクトルを  $\mathbf{E}_u$  と定義する。

$$\mathbf{E}_u = \frac{1}{h_u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \quad (3.3)$$

同様に、 $\mathbf{E}_v, \mathbf{E}_w$  を定義しよう。

#### 直交曲線座標

上記のように定義した 3 つの単位ベクトル  $\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_v, \mathbf{E}_w$  により作られる  $\mathbf{R}^3$  の基底  $\{\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_v, \mathbf{E}_w\}$  が正規直交基底<sup>(2)</sup>のとき、 $(u, v, w)$  座標系を直交曲線座標系という。

### 3.1.2 直交曲線座標とデカルト座標の関係

デカルト座標だけでなく、直交曲線座標でも線積分や面積分、体積積分をしたい。このような時はどうすればよいか。微小線分  $d\mathbf{r}$  はデカルト座標系では、 $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$  である。これを直交曲線座標で書き換えることからスタートする。

#### 線素

- デカルト座標系： $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$
- 直交曲線座標系： $d\mathbf{r} = (h_u du, h_v dv, h_w dw)$

(2)

#### Remark

$n$  次元ベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  が正規直交基底をなすとは以下の式が成立することである。

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}; \quad \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{i,j}$$

ラフなイメージとしては、 $d\mathbf{r}$  を  $du, dv, dw$  を用いて表すことを考える。全微分を考えると、

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dw \\ &= (h_u \mathbf{E}_u) du + (h_v \mathbf{E}_v) dv + (h_w \mathbf{E}_w) dw \\ &= (h_u du) \mathbf{E}_u + (h_v dv) \mathbf{E}_v + (h_w dw) \mathbf{E}_w \end{aligned}$$

となるからである。すると、線積分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \left( \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) dt \\ &= \int_C \left\{ (A_u, A_v, A_w) \cdot \left( h_u \frac{du}{dt}, h_v \frac{dv}{dt}, h_w \frac{dw}{dt} \right) \right\} dt \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$= \int_C \left( A_u h_u \frac{du}{dt} + A_v h_v \frac{dv}{dt} + A_w h_w \frac{dw}{dt} \right) dt \quad (3.5)$$

### 面素

- デカルト座標系： $dS = (dydz, dzdx, dxdy)$
- 直交曲線座標系： $dS = (h_v h_w dv dw, h_w h_u dw du, h_u h_v du dv)$

### 体積要素

- デカルト座標系： $dV = dxdydz$
- 直交曲線座標系： $dV = h_u h_v h_w du dv dw$

### 直交曲線座標とデカルト座標の関係

※  $\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_v, \mathbf{E}_w$  とこれまで書いてきたが、ここからは、これらの代わりに、 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$  とかく。大文字の  $\mathbf{E}$  を使うことで、デカルト座標の正規直交基底と区別する。なお、デカルト座標の正規直交基底は、 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  と書くことにする。さらに、 $(x, y, z)$  座標系とこれまで書いてきたものを、 $(x_1, x_2, x_3)$  座標系と書くことにする。また、 $(u, v, w)$  座標系とこれまで書いてきたものを、 $(u_1, u_2, u_3)$  座標系と書くことにする。このような表記法をするメリットはすぐにわかる。

$\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$  は、 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  を使ってどのように書くことができるか。座標変換によって基底がどのように変換されるかを調べる。 $\mathbf{E}_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}$  であるが、 $d\mathbf{r} = dx_1 \mathbf{e}_1 + dx_2 \mathbf{e}_2 + dx_3 \mathbf{e}_3$  とデカルト座標系を使って書くことができるので、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{1}{h_1} \frac{dx_1 \mathbf{e}_1 + dx_2 \mathbf{e}_2 + dx_3 \mathbf{e}_3}{du_1} \\ &= \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \mathbf{e}_3 \right) \end{aligned}$$

同様に、 $\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$  についても考えると、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{pmatrix} = \mathcal{O} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

と線形代数の教科書にのっている形で書くことができる。

この  $\mathcal{O}$  については次の2つのことが知られている。(1つ目は今導出した)

- $\mathcal{O}$  の  $(i, j)$  成分は、 $\mathcal{O}_{ij} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial x_j}{\partial u_i}$  である。

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \frac{1}{h_2} \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \\ \frac{1}{h_3} \frac{\partial x_1}{\partial u_3} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial x_2}{\partial u_3} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

- $\mathcal{O}$  は直交行列。つまり、 $\mathcal{O}^T = \mathcal{O}^{-1}$  が成立する。

## 3.2 直交曲線座標における grad, div, rot, ラプラシアン

### 3.2.1 勾配 (grad)

ナブラ演算子は以下のようにかける。まずは、これを直交曲線座標の場合に変換する。

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

式 (3.6) と式 (3.7) より、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \mathcal{O}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$\mathcal{O}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial x_1}{\partial u_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial x_2}{\partial u_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

とかける。すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} &= \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \mathbf{E}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \mathbf{E}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial x_1}{\partial u_3} \mathbf{E}_3 \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \\ &= \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{E}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{E}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial x_1}{\partial u_3} \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{E}_3 \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

となる<sup>(3)</sup>。同様に、

$$\mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} = \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{E}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{E}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial x_2}{\partial u_3} \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{E}_3 \right) \quad (3.11)$$

$$\mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{E}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{E}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{E}_3 \right) \quad (3.12)$$

となることがわかる。式 (3.10)、(3.11)、(3.12) の3つの式を足すと、ナブラ演算子の直交曲線座標表示が得られる。

#### ナブラ演算子の直交曲線座標表示

$$\nabla = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \mathbf{E}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \mathbf{E}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \mathbf{E}_3 \quad (3.13)$$

<sup>(3)</sup>  $\frac{\partial x_1}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial x_1}$  を  $\frac{\partial}{\partial u_1}$  と約分しないように注意。



※ 式 (3.13) のようになる理由は以下の通りである。

$$\nabla = \left( \boxed{(A)} \right) \mathbf{E}_1 + \left( \boxed{(B)} \right) \mathbf{E}_2 + \left( \boxed{(C)} \right) \mathbf{E}_3$$

の形で書いたとき、(A)、(B)、(C) の部分は以下のようになる<sup>(4)</sup>。

$$\begin{aligned} (A) : \quad & \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \\ (B) : \quad & \frac{1}{h_2} \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \\ (C) : \quad & \frac{1}{h_3} \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_3} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial u_3} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \end{aligned}$$

すると、式 (3.13) より、直交曲線座標における grad は以下のようになる。

直交曲線座標における grad

$$\nabla \Phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \mathbf{E}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \mathbf{E}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \mathbf{E}_3 \quad (3.14)$$

ここで、式 (3.14) の  $\Phi$  が  $\Phi = u_1$  と書けるとしよう。すると、

$$\begin{aligned} \nabla u_1 &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial u_1}{\partial u_1} \mathbf{E}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u_1}{\partial u_2} \mathbf{E}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial u_1}{\partial u_3} \mathbf{E}_3 \\ &= \frac{1}{h_1} \mathbf{E}_1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

となる。式 (3.15) の両辺のノルム (絶対値) をとると、 $\|\nabla u_1\| = \frac{1}{h_1}$  となる。

規格化定数

デカルト座標系  $(x_1, x_2, x_3)$  と直交曲線座標系  $(u_1, u_2, u_3)$  を考える。この時、規格化定数  $h_i$  は、

$$h_i = \frac{1}{\|\nabla u_i\|} \quad (3.16)$$

と書ける。ただし、 $\nabla u_i$  は、 $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$  と見たときに、 $\nabla u_i = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \frac{\partial u_i}{\partial x_2}, \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \right)$  と書けるベクトルを表す。

### 3.2.2 発散 (div)

ベクトル  $\mathbf{V}$  が  $\mathbf{V} = V_1 \mathbf{E}_1 + V_2 \mathbf{E}_2 + V_3 \mathbf{E}_3$  と書けるとする。まず、 $V_1 \mathbf{E}_1$  に対して、div を作用させることを考える<sup>(5)(6)</sup>。

$$\nabla \cdot (V_1 \mathbf{E}_1) = \nabla \cdot (V_1 \mathbf{E}_2 \times \mathbf{E}_3)$$

<sup>(4)</sup>21 ページの脚注の式 (2.29) や式 (2.30) を参照。全微分の考え、あるいは **chain-rule**(連鎖律) と呼ばれる数学の公式を利用して変形する。

$$\begin{aligned}
&= \nabla \cdot \{V_1(h_2 \nabla u_2) \times (h_3 \nabla u_3)\} \\
&= \nabla \cdot \{V_1 h_2 h_3 (\nabla u_2 \times \nabla u_3)\} \\
&= \nabla(V_1 h_2 h_3) \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3) + V_1 h_2 h_3 \nabla \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3) \\
&= \nabla(V_1 h_2 h_3) \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3) + V_1 h_2 h_3 \{(\nabla \times \nabla u_2) \cdot \nabla u_3 - (\nabla \times \nabla u_3) \cdot \nabla u_2\} \\
&= \nabla(V_1 h_2 h_3) \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3) \\
&= \nabla(V_1 h_2 h_3) \cdot \left( \frac{1}{h_2 h_3} \mathbf{E}_2 \times \mathbf{E}_3 \right) \\
&= \nabla(V_1 h_2 h_3) \cdot \left( \frac{1}{h_2 h_3} \mathbf{E}_1 \right) \\
&= \left\{ \frac{1}{h_1} \frac{\partial(V_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} \mathbf{E}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial(V_1 h_2 h_3)}{\partial u_2} \mathbf{E}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial(V_1 h_2 h_3)}{\partial u_3} \mathbf{E}_3 \right\} \cdot \left( \frac{1}{h_2 h_3} \mathbf{E}_1 \right) \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(V_1 h_2 h_3)}{\partial u_1}
\end{aligned}$$

では、残りの成分についても計算しよう。これは、 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$  と循環させればよいので、

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (V_2 \mathbf{E}_2) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(V_2 h_3 h_1)}{\partial u_2} \\
\nabla \cdot (V_3 \mathbf{E}_3) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(V_3 h_1 h_2)}{\partial u_3}
\end{aligned}$$

と導ける。

以上より、直交曲線座標における div は以下のようにになる。

直交曲線座標における div

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial(V_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(V_2 h_3 h_1)}{\partial u_2} + \frac{\partial(V_3 h_1 h_2)}{\partial u_3} \right\} \quad (3.18)$$

### 3.2.3 回転 (rot)

div と同様に、ベクトル  $\mathbf{V}$  が  $\mathbf{V} = V_1 \mathbf{E}_1 + V_2 \mathbf{E}_2 + V_3 \mathbf{E}_3$  と書けるとし、まず  $V_1 \mathbf{E}_1$  に対して、rot を作用させることを考える。

$$\begin{aligned}
\nabla \times (V_1 \mathbf{E}_1) &= \nabla \times (V_1 h_1 \nabla u_1) \\
&= \nabla(V_1 h_1) \times \nabla u_1 + V_1 h_1 \nabla \times \nabla u_1 \\
&= \nabla(V_1 h_1) \times \nabla u_1 \quad (\text{rot grad が } 0 \text{ になることを使った}) \\
&= \nabla(V_1 h_1) \times \frac{\mathbf{E}_1}{h_1}
\end{aligned}$$

<sup>(5)</sup>  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  をベクトル場とした時、

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (3.17)$$

が成立することを式変形で利用する。これは、 $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  を成分表示することで示すことができる。

<sup>(6)</sup>  $\nabla u_1, \nabla u_2, \nabla u_3$  は 33 ページの「規格化定数」の部分に書いてあるが、 $(x_1, x_2, x_3)$  座標系 (デカルト座標系) で表記したものである。そのため、通常のベクトル解析の公式が使える。ここでいう「通常の」は、「デカルト座標系で証明することが可能である」という意味である。

となる。ここで、式 (3.14) を使うと、 $\nabla$  を使わずに表記することができる<sup>(7)</sup>。

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (V_1 \mathbf{E}_1) &= \nabla(V_1 h_1) \times \frac{\mathbf{E}_1}{h_1} \\
 &= \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial(V_1 h_1)}{\partial u_1} \mathbf{E}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial(V_1 h_1)}{\partial u_2} \mathbf{E}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial(V_1 h_1)}{\partial u_3} \mathbf{E}_3 \right) \times \frac{\mathbf{E}_1}{h_1} \\
 &= \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial(V_1 h_1)}{\partial u_2} \mathbf{E}_2 \right) \times \frac{\mathbf{E}_1}{h_1} + \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial(V_1 h_1)}{\partial u_3} \mathbf{E}_3 \right) \times \frac{\mathbf{E}_1}{h_1} \\
 &= \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial(V_1 h_1)}{\partial u_3} \mathbf{E}_2 - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(V_1 h_1)}{\partial u_2} \mathbf{E}_3
 \end{aligned}$$

では、残りの成分についても計算しよう。これは、 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$  と循環させればよいので、

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (V_2 \mathbf{E}_2) &= \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(V_2 h_2)}{\partial u_1} \mathbf{E}_3 - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial(V_2 h_2)}{\partial u_3} \mathbf{E}_1 \\
 \nabla \times (V_3 \mathbf{E}_3) &= \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial(V_3 h_3)}{\partial u_2} \mathbf{E}_1 - \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial(V_3 h_3)}{\partial u_1} \mathbf{E}_2
 \end{aligned}$$

と導ける。

以上より、直交曲線座標における rot は以下のようにになる。

#### 直交曲線座標における rot

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{V} &= \left\{ \frac{1}{h_2 h_3} \left( \frac{\partial(V_3 h_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(V_2 h_2)}{\partial u_3} \right) \right\} \mathbf{E}_1 \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{h_3 h_1} \left( \frac{\partial(V_1 h_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(V_3 h_3)}{\partial u_1} \right) \right\} \mathbf{E}_2 + \left\{ \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial(V_2 h_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(V_1 h_1)}{\partial u_2} \right) \right\} \mathbf{E}_3 \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

この式は、 $3 \times 3$  の行列式を使うと、次のようになる。

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \frac{1}{h_2 h_3} \mathbf{E}_1 & \frac{1}{h_3 h_1} \mathbf{E}_2 & \frac{1}{h_1 h_2} \mathbf{E}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ V_1 h_1 & V_2 h_2 & V_3 h_3 \end{vmatrix} \quad (3.20)$$

### 3.2.4 ラプラシアン (Laplacian)

Laplacian は、 $\text{div}(\text{grad})$  により定義されるので、これまでに見てきた直交曲線座標の grad と div の公式を利用するだけですぐに導ける。ここに、2 つの公式を記す。

<sup>(7)</sup> 最後の行の計算では、デカルト座標系の正規直交基底  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  と同じように、 $\mathbf{E}_3 \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{E}_2 \times \mathbf{E}_1 = -(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2) = -\mathbf{E}_3$  が成立することを利用した。

**Remark**

- 直交曲線座標における grad

$$\nabla\Phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} \mathbf{E}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\Phi}{\partial u_2} \mathbf{E}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\Phi}{\partial u_3} \mathbf{E}_3$$

- 直交曲線座標における div

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial(V_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(V_2 h_3 h_1)}{\partial u_2} + \frac{\partial(V_3 h_1 h_2)}{\partial u_3} \right\}$$

ということで、スカラー  $\Phi$ (直交曲線座標表示) に対して、Laplacian を作用させよう。上の  $\mathbf{V}$  を  $\nabla\Phi$  に置き換えればよいだけなので、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi &= \nabla \cdot (\nabla\Phi) \\ &= \nabla \cdot \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} \mathbf{E}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\Phi}{\partial u_2} \mathbf{E}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\Phi}{\partial u_3} \mathbf{E}_3 \right) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} h_2 h_3 \right)}{\partial u_1} + \frac{\partial \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial\Phi}{\partial u_2} h_3 h_1 \right)}{\partial u_2} + \frac{\partial \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial\Phi}{\partial u_3} h_1 h_2 \right)}{\partial u_3} \right\} \end{aligned}$$

**直交曲線座標における Laplacian**

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} h_2 h_3 \right)}{\partial u_1} + \frac{\partial \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial\Phi}{\partial u_2} h_3 h_1 \right)}{\partial u_2} + \frac{\partial \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial\Phi}{\partial u_3} h_1 h_2 \right)}{\partial u_3} \right\} \quad (3.21)$$

### 3.3 直交曲線座標の具体例

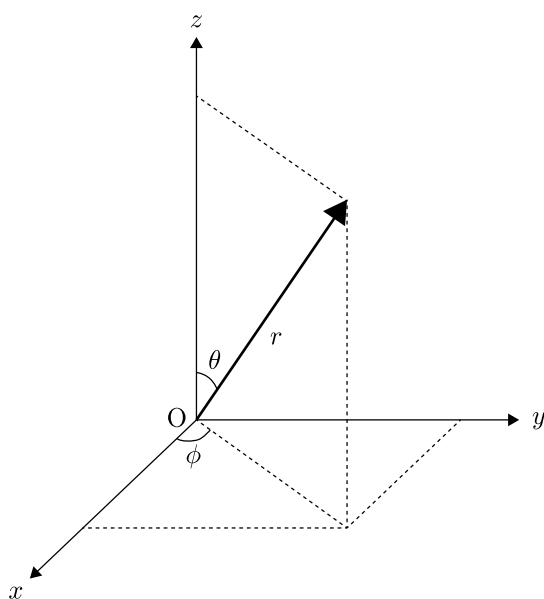


図 3.1 3次元極座標

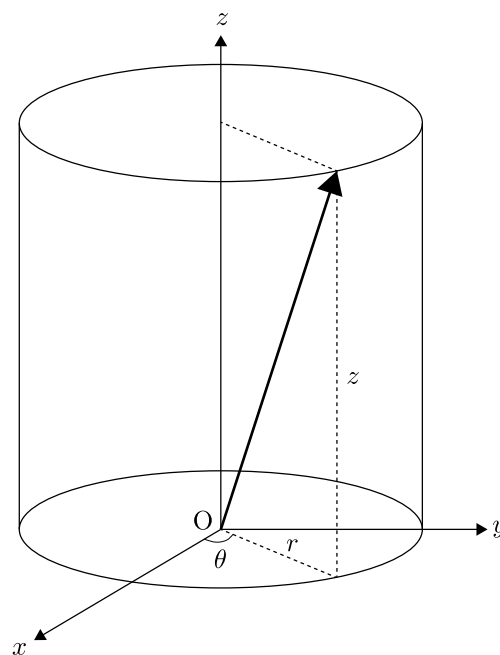


図 3.2 3次元円柱座標

#### 3.3.1 極座標の場合

図 3.1 から、極座標表示での  $\mathbf{r}$  は以下ようになる。

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (3.22)$$

これより、まず規格化定数  $h_r$ ,  $h_\theta$ ,  $h_\phi$  を計算する。

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \phi \\ r \cos \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

規格化定数はこれら 3 つのベクトルの大きさなので、

$$h_r = 1 \quad h_\theta = r \quad h_\phi = r \sin \theta \quad (3.24)$$

である。これが分かれば後は、式 (3.14)、式 (3.18)、式 (3.19)、式 (3.21) に代入して頑張って計算するだけである。

## 極座標における grad・div・rot・grad

## • grad の極座標表示

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbf{E}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\mathbf{E}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\mathbf{E}_\phi \quad (3.25)$$

## • div の極座標表示

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left\{ \frac{\partial(V_1 r^2 \sin\theta)}{\partial r} + \frac{\partial(V_2 r \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(V_3 r)}{\partial\phi} \right\} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 V_1)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial(V_2 \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V_3}{\partial\phi} \end{aligned} \quad (3.26)$$

## • rot の極座標表示

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} &= \left\{ \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left( \frac{\partial(V_3 r \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial(V_2 r)}{\partial\phi} \right) \right\} \mathbf{E}_r \\ &+ \left\{ \frac{1}{r \sin\theta} \left( \frac{\partial(V_1)}{\partial\phi} - \frac{\partial(V_3 r \sin\theta)}{\partial r} \right) \right\} \mathbf{E}_\theta + \left\{ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(V_2 r \sin\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(V_1)}{\partial\theta} \right) \right\} \mathbf{E}_\phi \end{aligned} \quad (3.27)$$

## • Laplacian の極座標表示

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi &= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left\{ \frac{\partial \left( \frac{\partial\Phi}{\partial r} r^2 \sin\theta \right)}{\partial r} + \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} r \sin\theta \right)}{\partial\theta} + \frac{\partial \left( \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} r \right)}{\partial\phi} \right\} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} \end{aligned} \quad (3.28)$$

## 3.3.2 円柱座標の場合

図 3.2 から、極座標表示での  $\mathbf{r}$  は以下ようになる。

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad (3.29)$$

これより、まず規格化定数  $h_r, h_\theta, h_z$  を計算する。

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -r \sin\theta \\ r \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

規格化定数はこれら 3 つのベクトルの大きさなので、

$$h_r = 1 \quad h_\theta = r \quad h_z = 1 \quad (3.31)$$

である。極座標の時と同様に、式 (3.14)、式 (3.18)、式 (3.19)、式 (3.21) に代入して頑張って計算する。

## 円柱座標における grad・div・rot・grad

- grad の円柱座標表示

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbf{E}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\mathbf{E}_\theta + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{E}_z \quad (3.32)$$

- div の円柱座標表示

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(V_1 r)}{\partial r} + \frac{\partial V_2}{\partial \theta} + \frac{\partial(V_3 r)}{\partial z} \right\} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_1)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \theta} + \frac{\partial V_3}{\partial z} \quad (3.33)$$

- rot の円柱座標表示

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} = & \left\{ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_3}{\partial \theta} - \frac{\partial(V_2 r)}{\partial z} \right) \right\} \mathbf{E}_r \\ & + \left( \frac{\partial V_1}{\partial \phi} - \frac{\partial V_3}{\partial z} \right) \mathbf{E}_\theta + \left\{ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(V_2 r)}{\partial r} - \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \right) \right\} \mathbf{E}_z \end{aligned} \quad (3.34)$$

- Laplacian の円柱座標表示

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi = & \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} r \right)}{\partial r} + \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \frac{\partial \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} r \right)}{\partial z} \right\} \\ = & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (3.35)$$





## 第II部

## 静電場



## 第 4 章 静電場の基本法則

Part1 の第 2 章と第 3 章で必要なベクトル解析の知識を確認したので、これらを巧みに使いこなして、本丸を倒しにいこう。まず最初に「静電場」を倒しにいこう。この第 4 章では、静電場に関することの基本的なことにふれる。この chapter では、「電磁気学 A」(1 年秋学期) の内容を中心に扱う。

この chapter の一番最初に、スカラーポテンシャルの導入をするのだが、 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  とおくということを認めて先に進むのがよいか。ここだけ、Maxwell 方程式の  $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$  を持ってきて、 $\mathbf{E}$  はあるスカラーの grad と書けるということで導入するのがよいか。ずっと迷っていた際、3 年の春学期の「電磁気学第二」の授業で、担当教員が紹介した『岩波基礎物理シリーズ 電磁気学』に、今まで私が見たことないアプローチがあり、私はその方法をとても気に入った。そこで、この T<sub>E</sub>X ノートでは、その方法でスカラーポテンシャルを導入することにする。

その後は Gauss の法則を導出し、導体の性質にふれて… と、駒場で習った電磁気学の授業と同じ流れで、展開していくことにする。

### 4.1 スカラーポテンシャルの導入

#### 4.1.1 $1/r$ の grad

第 1 章「クーロンの法則」(9 ページ) で、電荷が連続的に分布している場合の電場の式を導いた。その結果は、次の式のようなであった。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_K \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (4.1)$$

ここで、スカラー関数  $\frac{1}{r}$  という関数の grad を考える。これは、点  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  に対して、 $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  により定まる  $r$  を用いて表される関数  $\frac{1}{r}$  を対応させるものである。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \\ &= -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} \\ &= -\frac{x}{r^3} \end{aligned}$$

となるから、

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \quad (4.2)$$

となることがわかる。このことは、前の chapter で極座標における grad の公式を使って求めることもできる。 $\frac{1}{r}$  を  $r$  のみの関数とみれば、

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \mathbf{E}_r \quad (4.3)$$

となる。この  $\mathbf{E}_r$  が  $r$  方向の単位ベクトルなので、 $\frac{\mathbf{r}}{r}$  と等しいことを使えば、上の式 (4.2) と一致することがわかる。

$1/r$  の grad

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (4.2)$$

あわせて、スカラー場  $r^n$  の grad も求めておく。これも、極座標における grad の公式を使うと、

$$\nabla(r^n) = nr^{n-1} \mathbf{E}_r = nr^{n-2} \mathbf{r} \quad (4.4)$$

となる。

### 4.1.2 スカラーポテンシャルの式

原点をシフトしても、微分の効果は変わらない<sup>(1)</sup>。原点を通常の  $O$  から、(通常の  $O$  から見た時の)  $\mathbf{r}'$  にシフトさせる。すると、式 (4.2) は以下ようになる<sup>(2)</sup>。

$$\nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (4.5)$$

これを使うと、式 (4.1) は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \int_K -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}') \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \\ &= -\nabla \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_K \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

と変形できる<sup>(3)</sup>。ここで、 $\nabla$  演算子が作用する対象を  $\phi(\mathbf{r})$  と書くことにしよう。つまり、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_K \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

とする。この  $\phi(\mathbf{r})$  はスカラーポテンシャルと呼ばれるスカラー量で、静電場を理解する上でとても重要な量である。スカラーポテンシャルを使うと、

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

と書けることがわかった。この性質は、電場  $\mathbf{E}$  が時間  $t$  に依存しないときに限り、成立することが知られている。

<sup>(1)</sup> もちろん、座標軸のスケールを変換したり、デカルト座標から極座標に変更するなどしたら、微分の作用の結果は大きく変わる。

<sup>(2)</sup> 変数が  $\mathbf{r}$  で、 $\mathbf{r}'$  は定数であることに注意。

<sup>(3)</sup> 演算子  $\nabla$  は  $\mathbf{r}$  に作用する。一方、体積積分は、 $\mathbf{r}'$  を領域  $K$  内を動かして積分する。そのため、 $\int$  と  $\nabla$  は作用する対象が違うので、順番を交換しても問題ない。

## スカラーポテンシャル

- 式 (4.1) で表される電場  $\mathbf{E}$  に対するスカラーポテンシャルは、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_K \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (4.7)$$

で表される。

- 静電場  $\mathbf{E}$  と、スカラーポテンシャル  $\phi$  の間には、

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (4.8)$$

の関係があり、これは静電場なら、式 (4.1) 以外の形の静電場でも成立する。

## 4.1.3 スカラーポテンシャルの性質

さて、 $\mathbf{E}$  はあるスカラーの grad でかけることがわかったので、16 ページの 2 階微分の  $\text{rot}(\text{grad}) = \mathbf{0}$  より、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$$

が成立する。この式は静電場の特徴を表すとても重要な式である。この後、ファラデーの電磁誘導の法則により修正されるが、静電場においては公理のように重要な式の 1 つである。

## 静電場を特徴づける方程式 (1)

- $\mathbf{E} = -\nabla\phi$
- $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$

(両者は同値であることもあわせて覚えておいたほうがよい。)

次に、電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  がある空間中で、電荷  $q$  を点  $\mathbf{r}_1$  から  $\mathbf{r}_2$  まで動かすことを考える。このときに、電場から受ける力とつりあうように外力を働かせて移動させる。外力がする仕事  $W$  は、

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (-q\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (\nabla\phi) \cdot d\mathbf{r} \\ &= q\{\phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1)\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

となる。さて、この計算で注目すべき点は 2 つある。

- $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  のおかげで、grad の線積分をしていることになる。grad の線積分は始点と終点だけで決まり、途中経路に依存しない。つまり、電場に対しても、力学で登場する「位置エネルギー」を定義することができる。この位置エネルギーに相当するのが、「スカラーポテンシャル (電位)」である。
- 外力がした仕事が「電荷 × 電位差」でかけることが上の式からわかる。 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$  なら、 $\mathbf{E} = \nabla\phi$  でいいはずなのに、わざと  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  となるスカラーポテンシャル  $\phi$  をとったのは、外力がした仕事を「-(電荷 × 電位差)」となるのを避けるためだったのかもしれない。

最後に、ポテンシャルといえば、あの性質を忘れてはいけない。ポテンシャルは不定性を持っているのであり、基準点(ポテンシャルが0になる点)を指定する必要があるということだ。 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$  から、 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  とした。今、 $\phi$  に定数  $c$  を足した  $\phi' = \phi + c$  に対して、 $\nabla\phi'$  を考えると、

$$\nabla\phi' = \nabla(\phi + c) = \nabla\phi + \nabla c = \nabla\phi$$

となる。これは、演算子  $\nabla$  が微分作用素で、定数  $c$  に作用すると、 $\nabla c = \mathbf{0}$  となることによる。このように、スカラーポテンシャル  $\phi$  は不定性をもつ。そこで、基準点を定める。基準点は自由にとってよく、計算するときに楽な場所を基準点とすればよい。式(4.1)のような電場に対しては、無限遠方を基準点とすることがよい。なぜなら、式(4.7)で表されるスカラーポテンシャル  $\phi$  は、 $\mathbf{r}$  を無限遠方の点とすると、 $\int$  の中が0となるので、0となる。そのため、この点を基準点とすればちょうどよいといえる。

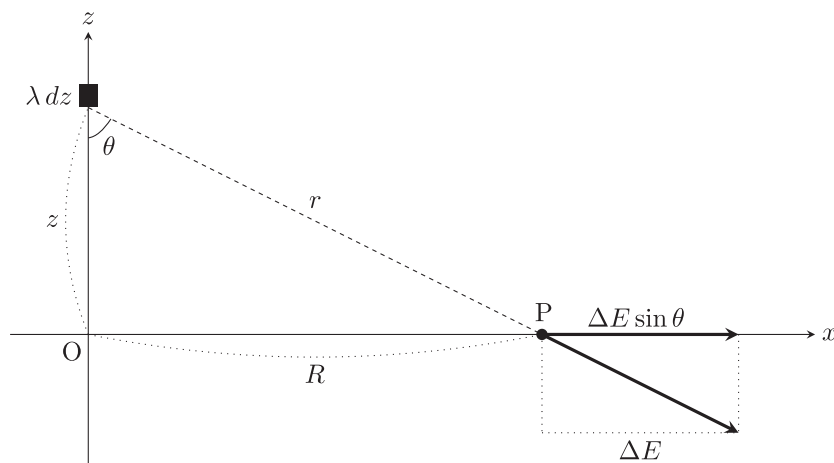
#### 4.1.4 電場は電位の grad

電場  $\mathbf{E}$  を求める際に気をつけなければならないのは、電場はベクトルであるということだろう。電場ベクトル  $\mathbf{E}$  の向きを正確に把握しなければならない。ベクトルを扱うのが面倒な時こそ、スカラーが活躍する。電場  $\mathbf{E}$  と電位  $\phi$  の間には、 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  の関係があるので、電位さえわかれば電場が求められる。だから、まず電位を求めればよい。このことを、2つの題材を使って実際にやってみる。

##### 例題 4.1

$xyz$  空間内の、 $z$  軸にそって無限に長く細い針金があり、一様に帯電している。この針金が、単位長さあたり  $\lambda$  の電荷量を持つ時、点  $P(R, 0, 0)$  にできる電場を以下の手順で求める。

- (1) 針金が  $z$  軸の  $-L \leq z \leq L$  の部分だけにあるときの、点  $P$  にできる電場を求める。
- (2)  $L \rightarrow \infty$  の極限を考える。



##### 解答

例題 1.1 と同じ図を持ってきたが、電位を使って電場を求めるときは、

針金全体が作る電場に寄与するのは、 $\Delta E \sin \theta$  のみである。なぜなら、 $\cos$  成分は原点に関して対称な位置  $(0, 0, -z)$  付近の微小部分が作る電場の  $z$  成分により相殺されるからである。よって、針金全体により、点  $P$  に作られる電場は  $x$  軸正方向の向きで、その大きさは……

といった空間図形の解釈をする必要がない。

- (1)  $z$  軸上の  $(0, 0, z)$  付近の微小部分  $dz$  に含まれる電荷  $\lambda dz$  を点電荷とみなすと、この電荷  $\lambda dz$  が点 P に作る電位  $\Delta\phi$  は次のようになる。

$$\Delta\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{r}$$

よって、 $-L$  から  $L$  までのすべての寄与を足し合わせると、

$$\phi = \int_{-L}^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{\sqrt{z^2 + R^2}} dz \quad (4.10)$$

あとは、 $z = R \tan \theta$  において、置換する。ここで、 $\theta_0 = \tan^{-1} \frac{L}{R}$  とおくと、

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\cos \theta}{R} \frac{R}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\cos \theta} d\theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right) \right]_{-\theta_0}^{\theta_0} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \left( \frac{1 + \sin \theta_0}{1 - \sin \theta_0} \right) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \left( \frac{\sqrt{L^2 + R^2} + L}{\sqrt{L^2 + R^2} - L} \right) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{\sqrt{L^2 + R^2} + L}{R} \end{aligned} \quad (4.11)$$

後は、 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  を使って、 $\mathbf{E}$  を決定する<sup>(4)</sup>。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi \\ &= \left( -\frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{\sqrt{L^2 + R^2} + L}{R} \right\}, 0, 0 \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

となる。 $x$  成分を頑張って計算する。

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{\sqrt{L^2 + R^2} + L}{R} \right\} \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{R}{(\sqrt{L^2 + R^2} + L)^2} - \frac{1}{R} \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

- (2)  $L \rightarrow \infty$  の極限をとる。

- $\lim_{L \rightarrow \infty} E_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$  となる。
- (おまけ) 上で求めた  $\phi$  について極限をとると、 $\lim_{L \rightarrow \infty} \phi = +\infty$  となる。

□

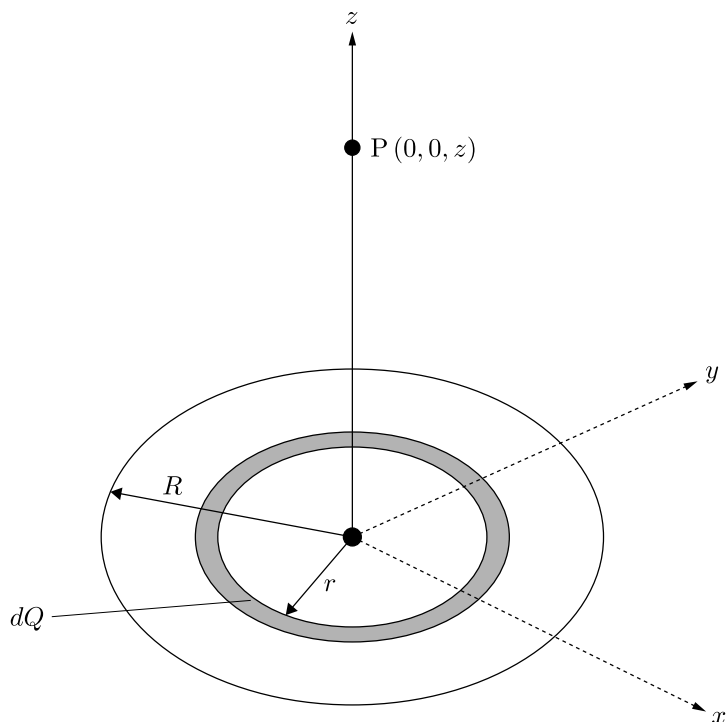
このようにして求めた  $\mathbf{E}$  と、第 1 章の [例題 1.1](#) で求めた  $\mathbf{E}$  は見事に一致する。今回の場合は、[例題 1.1](#) のように解いたほうが楽である。電位を使った解法は、一般に計算が面倒である。その理由は後述する Poisson

<sup>(4)</sup>第 1 章と同じ図を使用しているので、点 P の位置を  $(R, 0, 0)$  と書いたが、これを  $(x, 0, 0)$  と書いても問題ない。 $(x, 0, 0)$  と書くと、すぐに  $x$  で偏微分したくなるが、 $R$  だと偏微分しようとは思わなくなる。

方程式から  $\phi$  を決めるのが面倒で、そのあとの微分演算も面倒だからである。 $\phi$  を求めるのが面倒だという欠点があるが、ベクトルが最後の  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  のところまで登場しないという強みもある。今後も様々な方法が登場するが、どの方法にも長所と短所があるので、問題演習などを通して、どの方法がベストであるか判断できるようになる必要がある。

### 例題 4.2

- (1)  $xy$  平面上の半径  $R$  の円板に、面密度  $\sigma$  で電荷が一様に分布している時、円板の中心軸上、中心から距離  $z$  の位置にある点の電場を求めよ。
- (2)  $R \rightarrow \infty$  の極限はどうなるか。



### 解答

- (1) 上の図の点 P における電位  $V(P)$  を考える<sup>(5)</sup>。

円板を内径  $r$ 、幅  $dr$  のリング (面積  $dS$ ) に分けると、 $dS = 2\pi r dr$ <sup>(6)</sup> である。すると、このリングが持つ電荷  $dQ$  は、 $dQ = 2\pi\sigma r dr$ 。よって、点 P における電位は、厚みが微小なリングによる電位を足し合わせるから、

$$\begin{aligned}
 V(P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi\sigma r}{\sqrt{z^2 + r^2}} dr = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r}{\sqrt{z^2 + r^2}} dr \\
 &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{z^2}^{z^2 + R^2} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \\
 &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - z)
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

<sup>(5)</sup> この問題も 例題 1.1 のように解くこともできるが、上の 例題 4.1 の説明に記した通り、電場ベクトルの向きを考える必要があるので、私は電位を用いた解法の方がよいと思う。

<sup>(6)</sup>  $dS = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r dr + \pi(dr)^2$  であるが、 $dr$  は微小なので、 $(dr)^2$  を無視すると、 $dS = 2\pi r dr$  となる。



よって、

$$\mathbf{E}(\mathbf{P}) = \left( -\frac{\partial V(\mathbf{P})}{\partial x}, -\frac{\partial V(\mathbf{P})}{\partial y}, -\frac{\partial V(\mathbf{P})}{\partial z} \right) = \left( 0, 0, \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right\} \right) \quad (4.15)$$

(2)  $R \rightarrow \infty$  とすれば、

$$\mathbf{E}(\mathbf{P}) = \left( 0, 0, \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) \quad (4.16)$$

□

## 4.2 Gauss の法則とその応用

### 4.2.1 立体角

Gauss の法則を証明するために**立体角**の概念を導入する。Wikipedia<sup>(7)</sup>の説明がとてもしっかりしているので、それを存分に利用する。ということで、まず Wikipedia に書かれている 2 次元平面における**角度**の定義を確認しよう。

平面上の 1 点から出る 2 つの半直線によって区切られた部分を**角**といい、この 2 半直線の開き具合を**角度**という。角度は、角の頂点を中心とする半径 1 の円から、2 半直線が切り取る円弧の長さで表すことができる。

つまり、下の図 4.1 の角 OPQ を点 O を中心とする半径 1 の円の弧 P'Q' の長さに対応させるということだ。角度ってこんな風に定義するんだぁ～と思うだろうが、この定義は立体角の概念に拡張しやすい。

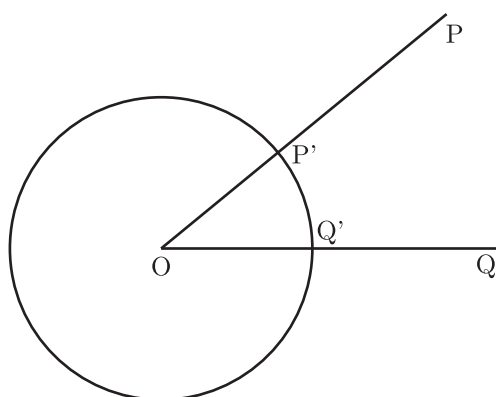


図 4.1 平面における角度の定義

では、立体角の定義について、Wikipedia の記述を見てみよう。

<sup>(7)</sup><https://ja.wikipedia.org/wiki/立体角>

## 立体角

空間上の1点(角の頂点)から出る半直線が動いてつくる錐体面によって区切られた部分のことをいい、この錐体面の開き具合を**立体角**という。立体角は、角の頂点を中心とする半径1の球から、錐体面が切り取る曲面の面積で表すことができる。

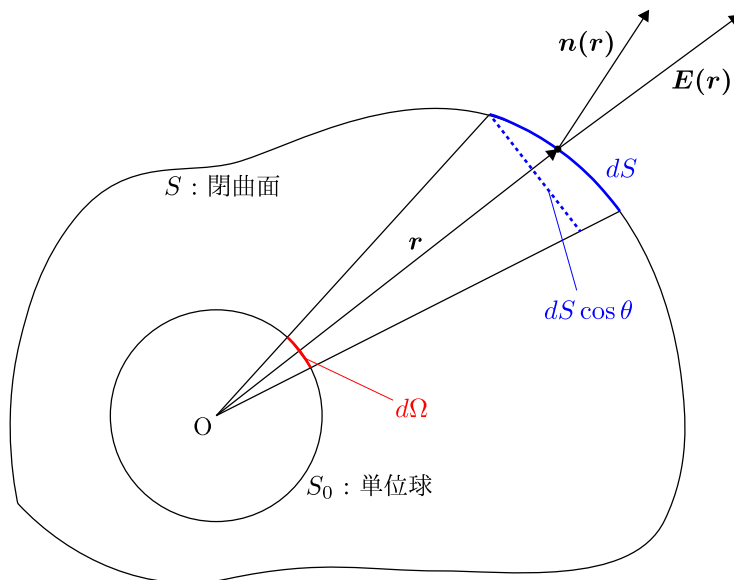


図 4.2 立体角の定義

## 4.2.2 Gauss の法則 (積分形) の導出

## Gauss の法則

• 積分形: 
$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

## 証明

電荷が1個 → 電荷が  $n$  個 → 電荷が連続分布と徐々に拡張していくことにする。

## (1) 電荷が1個の場合について

図 4.2 のように<sup>(8)</sup>、原点  $O$  に電荷  $q$  があるとする。上図において、微小面積  $dS$  を通過する電場の総和は、

$$\int_{dS} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS \cos \theta}{r^2} \quad (4.17)$$

である<sup>(9)</sup>。ここで、**立体角**  $d\Omega$  について、相似な図形の比から  $1:r^2 = d\omega : dS \cos \theta$ 、つまり、

$$d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{r^2} \quad (4.18)$$

<sup>(8)</sup>図は前の subsection で使った図を使いまわしする。(スペースの節約にもなるので。)

<sup>(9)</sup> $dS$  を領域の名称として使用したので面素として  $da$  を使った。

が成立する<sup>(10)</sup>。よって、

$$\int_{dS} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (4.19)$$

である。よって、閉曲面  $S$  全体で考える<sup>(11)</sup>と、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.20)$$

となる。

## (2) 電荷が $n$ 個の場合について

閉曲面  $S$  の中に  $n$  個の点電荷  $q_1, q_2, \dots, q_n$  がある時は、重ね合わせの原理 (第 1 章 1.3) により、個々の電荷  $q_i$  が作る電場の和で書ける。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_S \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{n} \, da &= \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_0} \\ \int_S \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \right) \cdot \mathbf{n} \, da &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i = \mathbf{E}$  (この  $\mathbf{E}$  が閉曲面上の任意の点において観測される実際の電場である。) と書くことにすると、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \quad (4.21)$$

## (3) 電荷が連続分布の場合に拡張する

閉曲面  $S$  内部の電荷は体積積分を用いて、 $\int_V \rho(\mathbf{r}) dV$  と書けるので

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \quad (4.22)$$

□

### 4.2.3 Gauss の法則の微分形

#### Gauss の法則

##### ● 積分形

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) \, dV \quad (4.23)$$

##### ● 微分形

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (4.24)$$

前の subsection では、上の式 (4.23) の第 1 項と第 3 項が等しいことを導いた。ここから、話を進めていく。

- 式 (4.23) の第 1 項と第 2 項については、Gauss の発散定理 (第 2 章・26 ページ) よりすぐに導ける。

<sup>(10)</sup>この式 (4.18) は、立体角の数式を用いた定義式といえる。この式を定義式とみなしてもよいが、私は個人的には Wikipedia に書かれている説明の方が好きである。

<sup>(11)</sup>立体角の定義より、閉曲面全体を考えることは、半径 1 の球の表面全体を考えることと等価である。

- 微分形について。式 (4.23) の第2項と第3項より、

$$\int_V \left\{ \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \right\} dV = 0$$

である。これが任意の  $V$  について成り立つから、

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$$

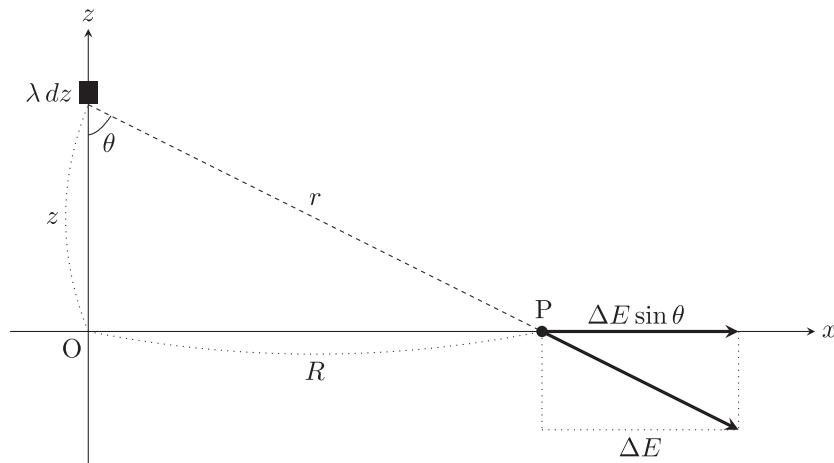
である。この式を微分形の Gauss の法則という。

#### 4.2.4 Gauss の法則を利用して電場・電位を求める

##### 無限に長い直線上に分布した電荷が作る電場

無限に長い直線上に分布した電荷が作る電場

$$E(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \quad (\lambda = \text{電荷密度}, R = \text{直線からの距離})$$



無限に長い直線にそって一様に電荷が、電荷密度  $\lambda$  で分布している。この時、直線から距離  $R$  離れた点における電場  $\mathbf{E}$  がどうなるか。[例題 1.1]では「重ね合わせの原理」を使って考えた。[例題 4.1]では、電位を利用して計算した。今度は Gauss の法則を使って考える。電気力線は、電荷から四方八方に出る。そのため、点  $(0, 0, z)$  付近の  $dz$  にある電荷が点  $P(R, 0, 0)$  に作る電場の  $z$  成分は、対称な位置にある点  $(0, 0, -z)$  付近の  $dz$  にある電荷が、点  $P$  に作る電場の  $z$  成分によって相殺される。従って、点  $P$  にできる電場の向きは、上の図では  $x$  方向になる。

このことをふまえた上で、Gauss の法則を使って、電場  $\mathbf{E}$  を求める。図 4.3 のような円柱 (高さは 1) を考える<sup>(12)</sup>。上に書いたことより、電場  $\mathbf{E}$  の向きは、円柱の側面に垂直な方向である。上下の底面では  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{n}$  が垂直なので、 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$ 。一方、側面では、 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = E(R)$ 。この円柱に含まれる電荷は  $\lambda$  で、円柱の側面積は  $2\pi R$  なので、Gauss の法則より、

$$E(R) \cdot 2\pi R = \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \quad \Longleftrightarrow \quad E(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \quad (4.25)$$

<sup>(12)</sup>Gauss の法則の閉曲面  $S$  は任意なので、対称性があり、計算が簡単になるようなガウス面  $S$  を導入すれば良い。

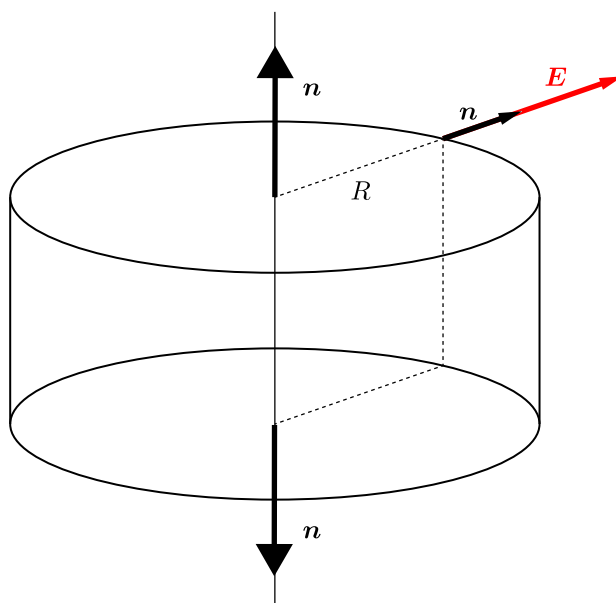


図 4.3 Gauss 面の取り方

## 無限に広い平面に一樣に分布した電荷が作る電場

無限に広い平面に一樣に分布した電荷が作る電場

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (\sigma \text{ は面密度})$$

さて、ここで無限に広い平面に分布した電荷が作る電場を考える。図 4.4 のような直方体を考える。この直方体に対して積分形の Gauss の法則を用いることを考える。

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} E & (\text{無限平面と平行なガウス面} \cdot 2 \text{ 面}) \\ 0 & (\text{無限平面と垂直なガウス面} \cdot 4 \text{ 面}) \end{cases} \quad (4.26)$$

であることと、直方体に含まれる電荷が  $\sigma S$  ( $S$  は無限平面と平行な直方体の面の面積) であることから、Gauss の法則より、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = E \cdot (2S) = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \quad \Longleftrightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (4.27)$$

となる。

この結果は、前の例題 4.2 の円板の半径を  $R \rightarrow \infty$  とした結果と一致する。このことは、円板の無限に大きくなったものは無限に広い平面であることを考えると、当然のことなのかもしれない。

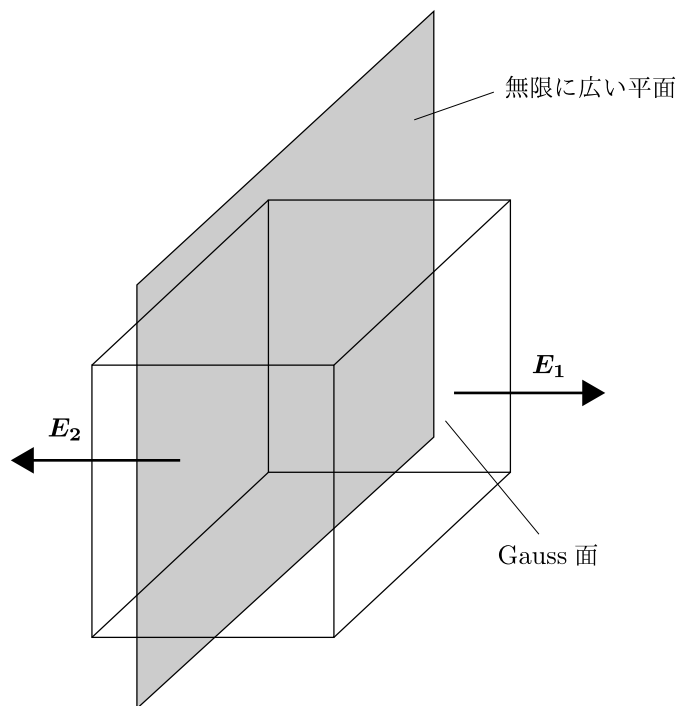


図 4.4 Gauss 面の取り方 (2)

**球殻**

球対称、円柱対称、面对称など、特殊な対称性の場合は Gauss の法則を使うことで簡単に電場  $E$  が求められる。続けて、球対称性のときについてみていく。

**例題 4.3**

一様に電荷が分布している半径  $R$  の球を考える (電荷密度は  $\rho$ )。

(1) 球の中心から距離  $r$  の位置での電場の大きさ  $E(r)$  を求めよ。

(2) 球の中心から距離  $r$  の位置での電位  $\phi(r)$  を求めよ。

(ただし、電位の基準は無限遠とする。)

**解答**

(1) Gauss の法則を使う。閉曲面  $S$  として半径  $r$  の球面をとる。

$r \leq R$  のとき

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = E(r) \cdot (4\pi r^2) = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \iff E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (4.28)$$

$r \geq R$  のとき

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = E(r) \cdot (4\pi r^2) = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} \iff E(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \quad (4.29)$$

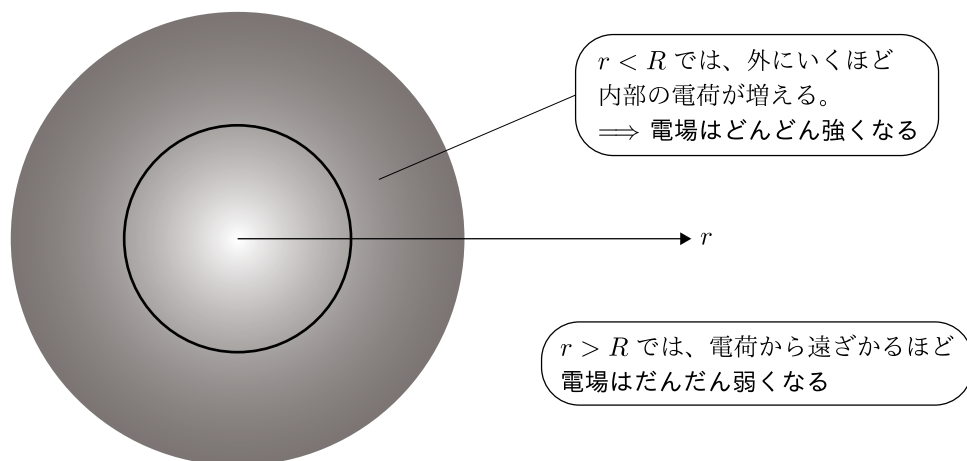


図 4.5 球対称な場合の Gauss 面の取り方、電場の大きさ

なお、 $r \geq R$  の場合について、 $Q$  を球殻内部に含まれる全電荷とすると、 $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$  となるので、 $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  と表せることがわかる。

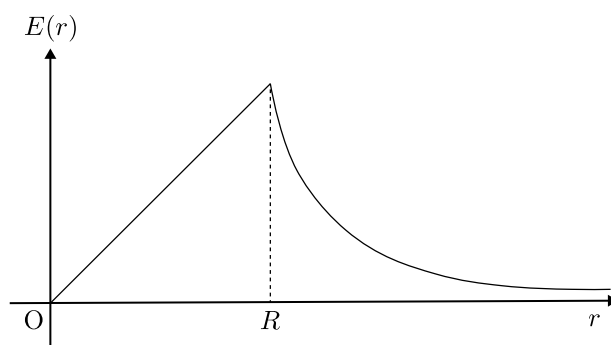


図 4.6 例題 3 の電場の空間分布のグラフ

(2)  $E(r)$  と  $\phi(r)$  の関係は、電位の基準が無限遠のとき、

$$\phi(r) = - \int_{\infty}^r E(r') dr' \quad (4.30)$$

である<sup>(13)</sup>。

(13)

**Remark**

grad の極座標表示は以下のようになる。

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{E}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \mathbf{E}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \mathbf{E}_\phi$$

これより、 $\Phi$  が  $\theta, \phi$  に依存しないときは、 $\nabla \Phi(r) = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \mathbf{E}_r$  となり、grad の  $r$  のみに依存する。

このことと、 $\mathbf{E} = -\nabla \phi$  より、 $\mathbf{E}$  が  $r$  のみに依存するときは、 $\phi$  も  $r$  のみに依存し、(4.30) の関係が成立する。

$r \leq R$  のとき

$$\begin{aligned}\phi(r) &= - \int_{\infty}^R \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} dr - \int_R^r \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r dr \\ &= \frac{\rho}{6\varepsilon_0} (3R^2 - r^2) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3} (3R^2 - r^2)\end{aligned}\quad (4.31)$$

$r \geq R$  のとき

$$\phi(r) = - \int_{\infty}^r \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\quad (4.32)$$

□

#### 例題 4.4

半径  $R$  の球の表面に、面密度  $\sigma$  で電荷が一様に分布している。球の中心から距離  $r$  の位置での電場の大きさ  $E(r)$  と電位  $\phi(r)$  を求めよ。(電位の基準は無限遠とする。)

#### 解答

例題 3 と同じように考えればよい。答えだけ書くと、

$$\begin{cases} E(r) = 0, & \phi(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} & (r \leq R \text{ のとき}) \\ E(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}, & \phi(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} & (r \geq R \text{ のとき}) \end{cases}\quad (4.33)$$

□

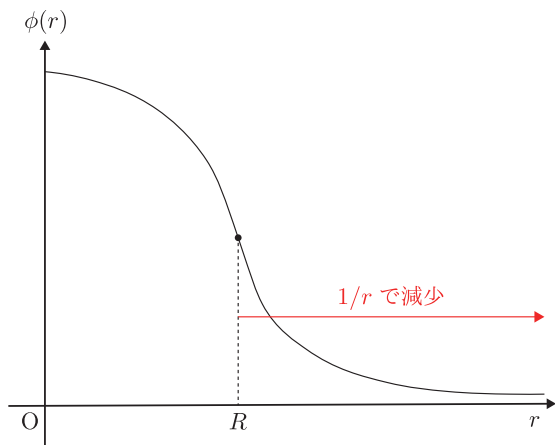


図 4.7 例題 3 の電位の空間分布のグラフ

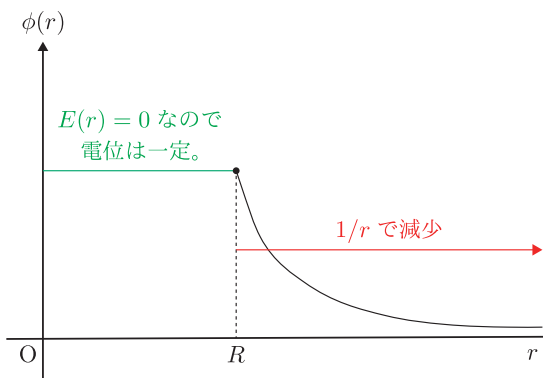


図 4.8 例題 4 の電位の空間分布のグラフ



**例題 4.5**

半径  $R$  の球の内部の電荷分布が、球の中心からの距離  $r$  を用いて、

$$\rho(r) = \frac{u}{r^2}$$

(ただし、 $u$  は正の定数) で書けるとする。このとき、球の中心から距離  $r$  の位置における電場の大きさ  $E(r)$  を求めよ。

まず、Gauss の法則の積分形は次の通りである。

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

今回の厄介なところは、上の式の右辺にある  $dV$  をどうするかというところにある。これは3重積分の変数変換を用いればよい。 $\rho(\mathbf{r})$  が球の中心からの距離で表されていることから、極座標を利用することを考える。3次元極座標の定義は以下の通りである。

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

これについて、Jacobi 行列<sup>(14)</sup>を考えると次のようになる。

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

よって、 $\det J$  を計算すると、

$$\det J = r^2 \sin \theta \quad (4.35)$$

が得られる。3×3 行列の行列式を求めるので、Sarrus の公式か余因子展開を使えば、すぐに  $\det J$  が求められる。以上のことを用いると、変数変換ができる。

<sup>(14)</sup>座標変換のイメージ  $(x, y, z) \rightarrow (q_1, q_2, q_3)$  への変換について。

$$x = x(q_1, q_2, q_3)$$

$$y = y(q_1, q_2, q_3)$$

$$z = z(q_1, q_2, q_3)$$

と  $x, y, z$  を  $q_1, q_2, q_3$  で表すことを考える。このとき、 $x, y, z$  の微小変化を考えると、chain-rule より、

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{pmatrix}$$

となる。Jacobi 行列の 3×3 行列は、まさに、この式に登場する 3×3 行列と同じである。

**解答**

$r \leq x$  (ただし、 $x \leq R$ ) の部分に含まれる電荷  $Q(x)$  は、

$$\begin{aligned} Q(x) &= \int_V \rho(\mathbf{r}) dV = \iiint \frac{u}{r^2} dx dy dz = \iiint \frac{u}{r^2} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= u \int_0^x dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 4\pi ux \end{aligned} \quad (4.36)$$

とかける。変数変換の結果、 $dV = 4\pi r^2 dr$  と変形された<sup>(15)</sup>。  $Q(x) = 4\pi ux$  を使うと、今まで通り Gauss の法則 (積分形) を用いることで電場が求められる。Gauss の法則の電荷密度の積分の部分は、

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot 4\pi ur & (r \leq R \text{ のとき}) \\ \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot 4\pi uR & (r \geq R \text{ のとき}) \end{cases}$$

なので、答えは、

$$E(r) = \begin{cases} \frac{u}{\varepsilon_0 r} & (r \leq R \text{ のとき}) \\ \frac{uR}{\varepsilon_0 r^2} & (r \geq R \text{ のとき}) \end{cases} \quad (4.37)$$

□

<sup>(15)</sup> この  $4\pi r^2$  という値だけなら、こんなでも出せる。(数学的に正しいかどうかは知らないが...)

$dV = (\text{球の中心から距離 } r + dr \text{ にある領域の体積}) - (\text{球の中心から距離 } r \text{ にある領域の体積})$

なので、

$$dV = \frac{4\pi(r+dr)^3}{3} - \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi}{3} \{3r^2(dr) + 3r(dr)^2 + (dr)^3\}$$

となる。ここで、 $dr$  は十分小さいので、 $(dr)^2$  と  $(dr)^3$  を含む項を無視すると、 $dV = 4\pi r^2 dr$  である。

## 4.3 導体の性質

### 4.3.1 導体と電場

**導体**とは、内部に自由に動くことのできる電子を含んだ物体のことである。この導体の中を自由に動き回る電子を**自由電子**という。この自由電子により、電気を自由に通すことができる。もし、何らかの原因により、導体内部の多数の電子が同一方向に動くと、電荷の巨視的な流れが生じる。この流れは**電流**といわれる。この subsection では、**各電荷が静止していて、電場が時間的に変化しない状況**を考える。つまり、**導体に電流が流れていない場合**を考える。

導体が電流が流れていない状況下では以下のことが成立することが知られている。

#### 導体と静電場

1. 導体内の電場は 0。
2. 導体内ではどの点の電位も等しい。
3. 導体内部では、電荷密度がいたところで 0 である。(巨視的にみたときに、導体内部に正味電荷は存在しない。)
4. 導体の電荷は、導体の表面にのみ分布する。この時、導体表面の電荷は、導体外部の電場をうまく打ち消し、導体内部の電場が 0 に保たれるように分布する。
5. 導体の表面上の電場は必ず導体面に直交し、その大きさ  $E$  は  $\sigma$  を**局所的な面密度**として、
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$
と表される。

「導体が電流が流れていない」という仮定と、ここまで登場した性質を利用して、上記の 5 つの性質が正しいことを確認する。

1. **もし、導体内部に電場があるならば、どうなるだろうか？**自由電子は電場から力を受けて導体内を移動する。これは電流が流れていることになってしまう。そのため、導体に電流が流れていないとき、導体内の電場は 0 である。
2. 電場  $\mathbf{E}$  と電位 (ポテンシャル)  $\phi$  の関係は

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

である。つまり、電場は電位の微分である。微分したら 0 ということは、微分する前の電位は定数である。よって、 $\mathbf{E} = 0$  の導体内では、「 $\phi = \text{一定}$ 」であり、**導体内はどの点のポテンシャルも等しい**。

3. Gauss の法則、特に微分形の Gauss の法則  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  を導体に適用する。導体の内部は  $\mathbf{E} = 0$  なので、 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  である。そのため、 $\rho = 0$  である。これは、導体内部のいたところで電荷密度が 0 であることを表している。
4. 4. の内容は、1.~3. から自動的に得られる帰結である。下の図は、**静電誘導**を説明するために使われる図である。静電誘導とは、外部電場の影響で、電荷の再分布が起こり、導体表面に電荷分布が生じる現象である。導体内部の電荷密度は 0 なので、**電荷は導体の表面にだけ存在できないことになるが、**

どのように電荷が分布するかは、外部電場に依存する。導体内の自由電子は電場から力を受けて移動する。すると、電荷に偏りが生じて電場分布が生じる。こうして導体内部に生じた電場分布が外部電場を打ち消して、最終的に内部の電場が0の状態(平衡状態)になる。

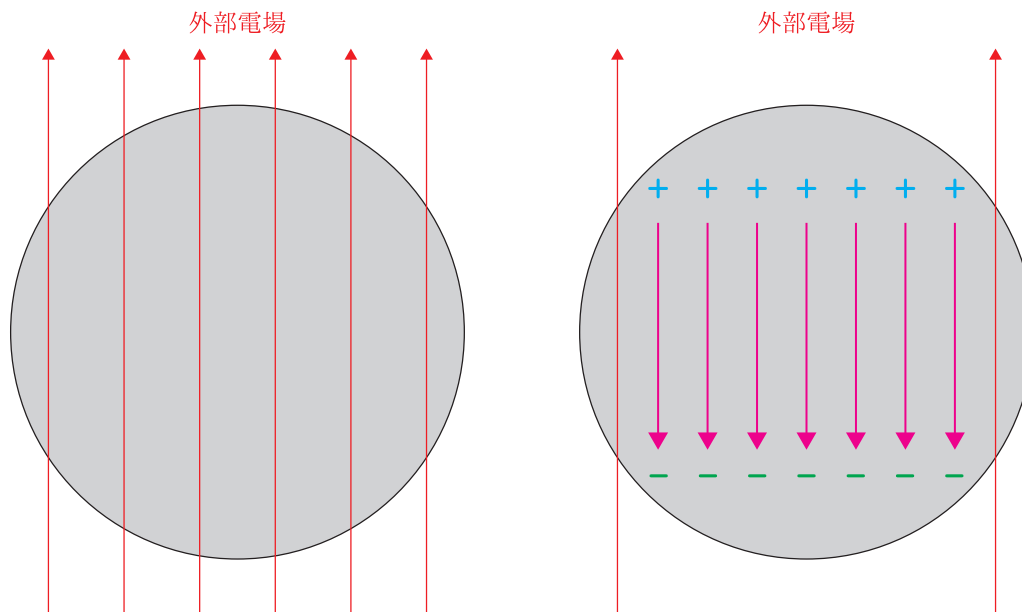


図 4.9 静電誘導：電場がかかると、導体内部の電場が0になるように電荷が移動する。

5. もし、表面電荷が作る電場が接線方向の成分を持っているなら、「導体内ではどの点の電位も等しい」ということに反する。導体表面は、等電位面(電位が等しい点が集まってできる面)の1つである。そのため、導体表面上の  $\mathbf{r}$  における電位  $\phi(\mathbf{r})$  とその点からわずかにずれた導体表面上の点  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  における電位  $\phi(\mathbf{r} + d\mathbf{r})$  は等しい。これより、

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) \approx \phi(\mathbf{r}) + \nabla\phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (4.38)$$

という式が成立する。ここで、 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  の性質を使うと、式(4.38)は、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (4.39)$$

となり、導体表面上の微小ベクトル  $d\mathbf{r}$  と電場ベクトル  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  は直交する。ゆえに、**導体の表面上の電場は必ず導体面に直交することがわかる。**

局所的な面密度を  $\sigma$  として Gauss の法則を用いると、以下ようになる。

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = E \cdot S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \iff E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

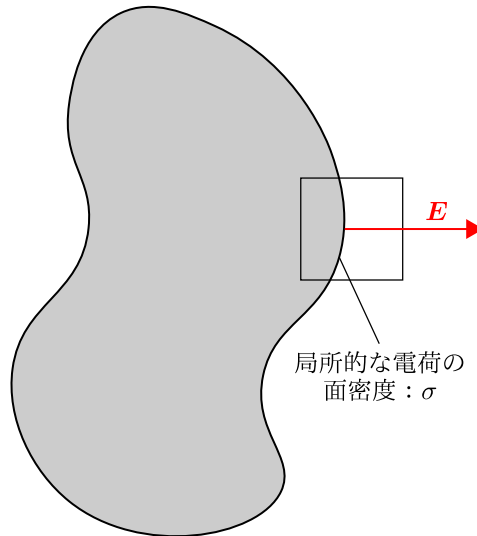


図 4.10 導体表面の電場と Gauss 面の取り方

## 4.3.2 同心球殻 (演習問題)

**例題 4.6**

半径  $a$  の導体球を内半径  $b$ 、外半径  $c$  ( $a < b < c$ ) の導体球殻で包み、内殻  $Q_1$ 、外殻  $Q_2$  の電荷を与える。

- (1) 空間上の各点における電場  $E(r)$  を求めよ。
- (2) 空間上の各点における電位  $\phi(r)$  を求めよ。
- (3) 外球を接地<sup>(16)</sup>したとき、(1) と (2) の結果はどうなるか。

**解答**

まず、電場や電位を求める前に、外部球殻の内側と外側に蓄えられている電荷の量を求める。

図 4.11 のように半径  $r$  ( $b < r < c$ ) の球面をとり、この球面を貫く電場について Gauss の法則の式を考える。導体内の電場は 0 なので、

$$0 = \frac{1}{\epsilon_0}(Q_1 + Q_{\text{in}}) \quad (4.40)$$

が成立する。これより、 $Q_{\text{in}} = -Q_1$  である。外殻には  $Q_2$  の電荷を与えたので、 $Q_{\text{out}} = Q_1 + Q_2$  となる。

- (1) 空間上の各点で Gauss の法則を利用して、電場  $E(r)$  を計算する<sup>(17)</sup>。

- $r < a$  and  $b \leq r < c$  (導体の内部) : 導体の内部は電場は 0 なので、 $E(r) = 0$
- $r \geq c$  (外球の外部)

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon_0} \iff E(r) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (4.41)$$

<sup>(16)</sup> ※ 接地とは、電磁気学においては、基準電位点 ( $\phi = 0$ ) に接続することである。基準電位点とは、いくら電荷が流出入しても電位が変わらない点である。空間内に空間の時間変化の影響を受けず、電位が常に 0 になるようにした点を用意したということである。日常生活の中では、水回りの電気機器など、漏電により人が感電する危険性のあるものには、接地電線がついている。この電線は、不具合による漏れ電流を大地に流すことで、電気機器が過剰に電荷を持っている状況をなくす働きを持つ。

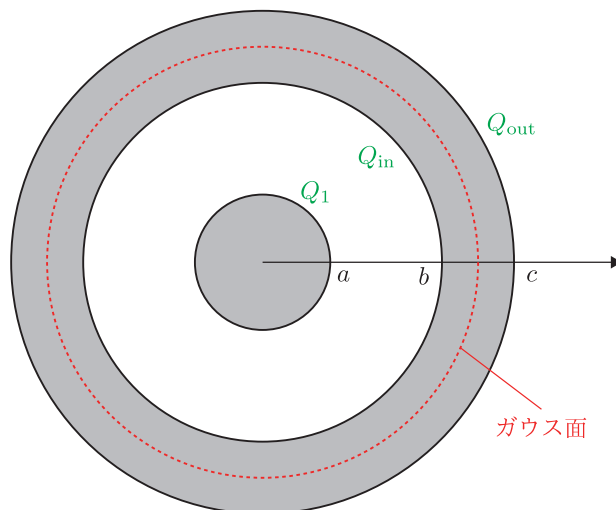


図 4.11 外部球殻の内側と外側に蓄えられている電荷の量の計算するための Gauss 面の取り方

- $a \leq r < b$  (内殻と外殻の間)

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \iff E(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (4.42)$$

(2) 電位  $\phi(r)$  は、式 (4.30) を利用して求めればよい。電位の計算は無限大から  $r$  までの積分なので、 $r$  が大きい方から計算していく。

- $r \geq c$  (外球の外部)

$$\phi(r) = \int_{\infty}^r \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} dr' = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (4.43)$$

- $b \leq r \leq c$  (外殻の導体部分)

$b \leq r < c$  の部分は電場  $E(r)$  が 0 であることに注意する。

$$\phi(r) = - \int_{\infty}^c E(r') dr' - \int_c^r E(r') dr' = - \int_{\infty}^c E(r') dr' = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} \quad (4.44)$$

- $a \leq r < b$  (内殻と外殻の間)

$$\begin{aligned} \phi(r) &= - \int_{\infty}^b E(r') dr' - \int_b^r E(r') dr' = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} - \int_b^r \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} dr' \\ &= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{r} \right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

- $r < a$  (内殻の導体部分)

$r < a$  の部分は電場  $E(r)$  が 0 であることに注意する。

$$\begin{aligned} \phi(r) &= - \int_{\infty}^a E(r') dr' - \int_a^r E(r') dr' = - \int_{\infty}^a E(r') dr' \\ &= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

<sup>(17)</sup> 解答を作成しているうちに、境界部分の不等号で  $=$  が入るかどうかがあるのか怪しく感じている。もし、間違っているなら、まえがきの最後に記した Twitter アカウントまで連絡をしてくださるとありがたいです。

- (3) 外球を接地すると、外球の電位は0になる。そのため、 $b \leq r \leq c$ において、 $\phi(r) = 0$ となる。式(4.44)より、 $Q_1 + Q_2 = 0$ が成立する。これを  $E(r)$  や  $\phi(r)$  の式に代入すればよい。

[電場  $E(r)$ ]

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} & a \leq r < b \\ 0 & b \leq r < c \\ 0 & r \geq c \end{cases} \quad (4.47)$$

[電位  $\phi(r)$ ]

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) & r < a \\ \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{r} \right) & a \leq r < b \\ 0 & b \leq r < c \\ 0 & r \geq c \end{cases} \quad (4.48)$$

□

### 4.3.3 導体内の空洞

#### 導体内の空洞

中空の空洞内には電場は存在せず、空洞表面には電荷は分布していない。

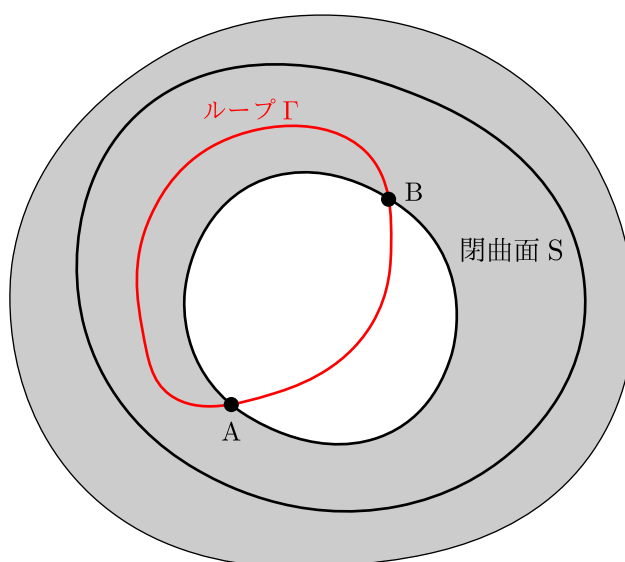


図 4.12 中空の空洞を持つ導体

金属の内部に中空の空洞があった場合、空洞の内部の電場はどうなっているのだろうか？さて、空洞を包んでいるがどこも導体の中にある閉曲面  $S$  がある。導体内の電場は0だから、この閉曲面  $S$  を貫く電場は0である。したがって、Gauss の法則より、この閉曲面  $S$  内に存在する電荷の総量は0である。では、 $S$  内には電荷が一切ないのか？正電荷と負電荷が同じ量だけあっても電荷は0であり、Gauss の法則だけではこ

の可能性を排除できない。

ここで、空洞内部に電荷が分布していると仮定しよう。もし、空洞表面上の点 A に正電荷  $+q$  があるなら、閉曲面  $S$  内に存在する電荷の総和は 0 なので、表面上のどこかに負電荷  $-q$  が必ずあるはずである (それを点 B とする)。図 4.12 のようなループ  $\Gamma$  を考える。中空内は A から B への電気力線に沿って曲線をとる。このループ  $\Gamma$  における周回積分は

$$\oint_{\text{ループ}\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A \rightarrow B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \text{ (空洞)} + \int_{B \rightarrow A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \text{ (導体内)} \quad (4.49)$$

となる。

まず、ループ  $\Gamma$  を縁として、曲面全体が導体内にあるように閉曲面 (この閉曲面を  $S'$ ) をとる。静電場では、 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$  なので、Stokes の定理より、

$$\int_{S'} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

が成立する。導体内の線積分は、導体内の電場が  $\mathbf{0}$  だから 0 である。そのため、

$$\int_{A \rightarrow B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \text{ (空洞)} = 0 \quad (4.50)$$

である。しかし、電気力線に沿った空洞内の A から B への線積分は 0 であるはずがなく、矛盾が生じる。

こうして、矛盾が生じることを確認できたので、**空洞表面には電荷は分布していないことが示された**。電荷がないのだから、電場も存在しない。そのため、空洞内の電位は一定で導体と同じ値をとることがわかる。

## 4.4 Poisson 方程式

この section では、Poisson 方程式の基本的な事柄を取り扱う。第 6 章では、Poisson 方程式の解について、数学的な議論なども含めて高度な内容を取り扱う。

### 4.4.1 Poisson 方程式とは？

静電場  $\mathbf{E}$  に関する 2 つの式から新たな関係式を導くことを考える。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4.51)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (4.52)$$

1 つ目の式は Gauss の法則の微分形である。2 つ目の式は特に名前はないが、この式のおかげでスカラーポテンシャルが定義されることが保証されることを考えると、とても重要な式である。 $\mathbf{E}$  と  $\phi$  は、 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  という関係で結ばれている。 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  を Gauss の法則の微分形に代入すると、

$$\nabla \cdot (\nabla\phi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

が得られる。左辺はラプラジアン  $\nabla^2$  なので以下のように書ける。



## Poisson 方程式

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4.53)$$

この方程式を **Poisson 方程式** という。  $\rho = 0$  の時の場合は、特に **Laplace 方程式** といわれる。

数学的には式 (4.53) を使えば、電位  $\phi$  が分かり、電場  $\mathbf{E}$  は  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  に代入すれば求められる。しかし、Poisson 方程式を解いて電位  $\phi$  を求めることは極めて難しい。対称性があり、 $\nabla^2\phi$  を簡単な形に直せる場合などに限り、Poisson 方程式を解くことができる。そのため、Gauss の法則や Coulomb の法則といった公式を利用して電場  $\mathbf{E}$  や電位  $\phi$  を求めることが多い。Poisson 方程式は、電位  $\phi$  から電荷分布  $\rho$  を求める場合には、ただの計算問題になるので、電位から電荷分布を求める問題で役に立つ。

## 4.4.2 Earnshaw の定理

こんな定理があるらしい。Laplace 方程式を利用すると、すぐに示せる定理である。

## Earnshaw の定理

空間に電荷を含まない静電場を考えると、電位はこの空間内において、極大値をとることもなく、また極小値をとることもない。

## 証明

空間に電荷を含まないので、Laplace 方程式が成立する。もし、電位  $\phi$  が空間内のある点で極大値をとるとすると、 $\nabla\phi = \mathbf{0}$  である。特に、 $x$  成分に注目すると、 $\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0$  が成立する。極大なので、これに加えて、 $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} < 0$  が成立する。 $y, z$  成分についても同様のことが言えるから、

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} < 0$$

これは Laplace 方程式が成立することと矛盾する。

□

## 4.4.3 Poisson 方程式を利用する

4.2.4 「Gauss の法則を使って電場や電位を求める」の「球殻」のところでとりあげた以下の問題を Poisson 方程式を用いて解くことを考える。そうすると、いかに Gauss の法則が演習問題をとくうえでは素晴らしい定理であるかがわかる。

## 例題 4.7

一様に電荷が分布している半径  $R$  の球を考える (電荷密度は  $\rho$ )。球の中心から距離  $r$  の位置での電位  $\phi(r)$  と電場の大きさ  $E(r)$  を求めよ。(ただし、電位の基準は無限遠とする。)

球対称性があるから、電場も電位も原点からの距離  $r$  のみに依存する。さて、Poisson 方程式は

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

である。これを、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  を使って書き直すことを考える。ただ、この T<sub>E</sub>X ノートでは既に Laplacian の極座標表示を第3章で求めてあるので、それを使う<sup>(18)</sup>。今回、 $\phi$  が  $\theta$  や  $\phi$  に依存しない状況を考えているので、

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (4.54)$$

となり、今回考える Poisson 方程式は次のように簡単になる。

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4.55)$$

### 解答

$A, B, C, D$  を適当な定数とする。

- $r \geq R$  のとき

球の外には電荷はないので、Poisson 方程式 (Laplace 方程式) は

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0$$

となる。両辺に  $r^2$  をかけると、 $r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}$  の微分が 0 なので、

$$r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} = A$$

となり、

$$\phi(r) = \int \frac{A}{r^2} dr = -\frac{A}{r} + B \quad (4.56)$$

となる。

- $r \leq R$  のとき

球の内部には電荷密度  $\rho$  で電荷が存在するので、Poisson 方程式は

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

両辺に  $r^2$  をかけて式変形すると、

$$r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} = \int -\frac{\rho}{\varepsilon_0} r^2 dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} r^3 + C$$

(18)

### Remark

- Laplacian の極座標表示

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} r^2 \sin \theta \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} r \sin \theta \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} r \right) \right\} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

次に両辺を  $r^2$  で割って積分すると、

$$\phi(r) = \int -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r + \frac{C}{r^2} dr = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 - \frac{C}{r} + D \quad (4.57)$$

となる。

$$\begin{cases} \phi(r) = -\frac{A}{r} + B & (r \geq R \text{ のとき}) \\ \phi(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 - \frac{C}{r} + D & (r \leq R \text{ のとき}) \end{cases}$$

定数  $A, B, C, D$  をこれから決めていく。これらは特殊な 3 点の条件から決まる。原点 ( $r = 0$ )、無限遠 ( $r \rightarrow \infty$ ) と境界 ( $r = R$ ) の 3 点である。まず、電位の基準を無限遠としているので、 $r \rightarrow \infty$  で  $\phi(r) \rightarrow 0$  である。よって、 $B = 0$ 。

次に、 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  であることから、 $E(r) = -\frac{\partial\phi}{\partial r}$  について考える。

$$\begin{cases} E(r) = -\frac{A}{r^2} & (r \geq R \text{ のとき}) \\ E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r - \frac{C}{r^2} & (r \leq R \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。ここで、積分形の Gauss の法則の式を思い出す。

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

この式はある閉曲面を貫く電気力線の総量は、内部の総電荷を真空の誘電率で割ったものであることを示す式である。さて、 $r = 0$  の近傍で原点を中心とする微小球面  $S$  をとる。 $S$  を貫く電場  $E(r)$  はほぼ  $r \rightarrow 0$  の極限值に近い。上の  $E(r)$  に対しては、 $\lim_{r \rightarrow 0} E(r) = -\infty$  なので、積分系の Gauss の法則の左辺の面積分は発散する。しかし、今回の場合、 $\rho(\mathbf{r})$  は  $S$  内の任意の点において有界 (有限の定数) なので、体積積分は発散しない。このような矛盾が生じたのは  $E(r)$  が  $r \rightarrow 0$  の極限を考えたときに発散する項を持っているからである。そのため、 $C = 0$ が必要である。

こうして、定数のうち 2 つが決まり、電場と電位の式が少しずつ決まってきた。

$$\begin{cases} \phi(r) = -\frac{A}{r} & (r \geq R \text{ のとき}) \\ \phi(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 + D & (r \leq R \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(r) = -\frac{A}{r^2} & (r \geq R \text{ のとき}) \\ E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r & (r \leq R \text{ のとき}) \end{cases}$$

あとは境界 ( $r = R$ ) について考える。境界面では**電位の連続性**が要求される。なぜなら、電位が不連続だと電場 (電位の微分) が無限大発散するかもしれないからである (電位が連続なら電場は必ず有界)。また、**電場の連続性**も要求される。電場が不連続で、境界面で電場の値が違うということは物理現象としては不合理だからといえば良いのではないか。

● 電場の連続性と  $E(r)$  の決定

電場  $E(r)$  の  $r = R$  における連続性から、 $-\frac{A}{R^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}R$  が成立しなければならない。これより、 $A = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}R^3$  であり、電場は

$$\begin{cases} E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} & (r \geq R \text{ のとき}) \\ E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r & (r \leq R \text{ のとき}) \end{cases} \quad (4.58)$$

と求められる。

● 電位の連続性と  $\phi(r)$  の決定

上で求めた  $A$  の値を代入して、 $r = R$  における連続性を考えると、 $\frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 + D$  が成立しなければならない、 $D = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$  であり、電位は

$$\begin{cases} \phi(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} & (r \geq R \text{ のとき}) \\ \phi(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}R^2 & (r \leq R \text{ のとき}) \end{cases} \quad (4.59)$$

と求められる。

□

ここまで、Poisson 方程式から電場や電位を求めたが、とても面倒だった。**数学的には Poisson 方程式を解くだけだが、とても面倒であり、問題を解く時は Gauss の法則を使う方が圧倒的に楽であることがわかる。**今度は、Poisson 方程式を使い、ポテンシャル関数から電荷分布を求めてみる。今回は、湯川ポテンシャルを題材に考える。

**例題 4.8**

空間の電位分布が、湯川ポテンシャル  $\phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^{-r/\lambda}}{r}$  に従うとき、 $r > 0$  での電荷分布  $\rho(r)$  を求めよ。

**解答**

ただ、Poisson 方程式を使うだけであるが、Laplacian は極座標表示を使うことに注意。今回、 $\phi$  は  $r$  のみにしか依存しないので、

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(r) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-r/\lambda}}{r} \right) \times r^2 \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left( \frac{(-1/\lambda)e^{-r/\lambda}}{r} - \frac{e^{-r/\lambda}}{r^2} \right) \times r^2 \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{r}{\lambda} e^{-r/\lambda} - e^{-r/\lambda} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \cdot \left( -\frac{1}{\lambda} e^{-r/\lambda} + \frac{r}{\lambda^2} e^{-r/\lambda} + \frac{1}{\lambda} e^{-r/\lambda} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \cdot \frac{e^{-r/\lambda}}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Poisson 方程式より、 $\nabla^2 \phi(r) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$  なので、 $\rho(r)$  は以下のように決定できる。

$$\rho(r) = -\varepsilon_0 \nabla^2 \phi(r) = \boxed{-\frac{q}{4\pi} \frac{1}{r} \cdot \frac{e^{-r/\lambda}}{\lambda^2}}$$

である。

□

## 4.5 電気双極子

### 4.5.1 電気双極子による電位と電場の特徴

電気双極子による電場や電位を計算で求めよう。今回は、議論を単純化するために、 $+q$  と  $-q$  の電荷が  $z$  軸上の原点に対して対称な位置にあるとしよう。その対称な位置を 2 点  $(0, 0, \frac{d}{2})$  と  $(0, 0, -\frac{d}{2})$  として、それぞれの位置に電荷  $+q$  と  $-q$  があるとする。この 2 つの電荷が、原点から十分遠く離れた点  $(x, y, z)$  に作る電場と電位を考える。

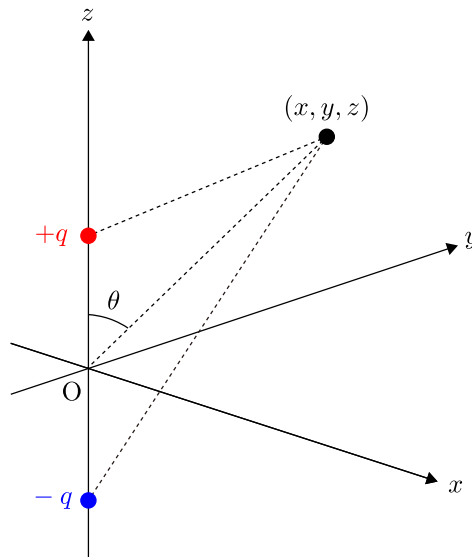


図 4.13 電気双極子を作る電場や電位を求める

4.1.4 「電場は電位の grad」でも記した通り、電位はスカラーの計算で取り扱いが楽なので、まずは電位を求める。そのあと、 $\mathbf{E} = -\nabla \phi$  により、電場を求めればよい。電位はすぐに求められる。

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{+q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \frac{d}{2})^2}} + \frac{-q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + \frac{d}{2})^2}} \right) \quad (4.60)$$

ここで、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  を導入し、 $r$  が  $d$  に比べて十分大きいので近似をする。まず、 $d^2$  を含む項を無視する。

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2} &= \sqrt{r^2 - zd + \frac{d^2}{4}} \approx r \sqrt{1 - \frac{zd}{r^2}} \\ \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z + \frac{d}{2}\right)^2} &= \sqrt{r^2 + zd + \frac{d^2}{4}} \approx r \sqrt{1 + \frac{zd}{r^2}} \end{aligned}$$

さらに、 $\frac{zd}{r^2}$  は1に比べて十分小さいとみなすと、

$|x|$  が1に比べて十分小さい時、 $(1+x)^n \rightarrow 1+nx$  と近似できる

というよく使う近似を使えるので、 $\phi(x, y, z)$  は次のようになる。

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{+q}{r} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2} \right) + \frac{-q}{r} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2} \right) \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3} qd \quad (4.61)$$

最初の式から十分簡単になったけど、ここで、**双極モーメント**という量を導入する。これは、大きさが  $p = qd$  のベクトルとする。次の subsection でもう少し詳しく記述する。 $z$  軸と位置ベクトル  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  のなす角を  $\theta$  とすると、 $z = r \cos \theta$  となる<sup>(19)</sup>。

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

と書くこともできる。このことから、電気双極子のポテンシャルは  $r^{-2}$  で減少し、点電荷の  $r^{-1}$  と異なることがわかる。電場  $\mathbf{E}$  は、 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  であるので、

$$\mathbf{E} = \left( -\frac{\partial\phi}{\partial x}, -\frac{\partial\phi}{\partial y}, -\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)$$

となる。これの各成分について計算する。

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3} p \right) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{z}{r^3} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \\ &= -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( -\frac{3z}{r^4} \right) \cdot \frac{x}{r} \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{r^5} \end{aligned} \quad (4.62)$$

同様にして、 $E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3yz}{r^5}$  である。最後に  $E_z$  を計算すると、

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3} p \right) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r^3} \right) \\ &= -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{1}{r^3} + z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r^3} \right) \right\} \\ &= -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{1}{r^3} + z \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^3} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial z} \right\} \\ &= -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{1}{r^3} + z \left( -\frac{3}{r^4} \right) \cdot \frac{z}{r} \right\} \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z^2 - r^2}{r^5} \end{aligned} \quad (4.63)$$

以上のことをまとめると、電気双極子の作る電場  $\mathbf{E}$  は

$$\mathbf{E} = \left( \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{r^5}, \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3yz}{r^5}, \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z^2 - r^2}{r^5} \right) \quad (4.64)$$

と求められる。これより、電気双極子の電場は  $r^{-3}$  (のオーダー) で減少し、点電荷の  $r^{-2}$  と異なることがわかる。

#### 4.5.2 電気双極子の一般的な取り扱い

前の subsection では、電気双極子が作る電場  $\mathbf{E}$  の具体的な成分を求めた。この subsection では、 $\mathbf{E}$  の一般的な表示を求める。そのために、まず、図 4.13 から座標系を取り払う。つまり、2つの電気双極子がある方向を  $z$  方向とするという設定を取り払う。

<sup>(19)</sup> 37 ページの「3次元極座標」の図と、式 (3.22) を参照。

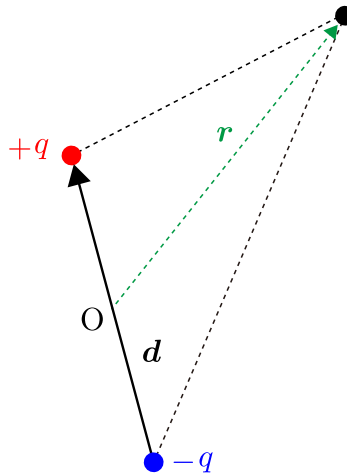


図 4.14 電気双極子が作る電場や電位を求める (2)

図 4.14 のように 2 つの電荷  $q, -q$  があり、電荷  $-q$  から電荷  $q$  へのベクトルを  $\mathbf{d}$  と書くことにする。また、2 つの電荷の midpoint に原点  $O$  をとる。すると、電荷  $+q, -q$  の位置を表す位置ベクトルは、 $\frac{\mathbf{d}}{2}, -\frac{\mathbf{d}}{2}$  とかける。この状況下で点  $\mathbf{r}$  における電場や電位を考える。

まず、 $\Phi_0(\mathbf{r})$  という量を

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (4.65)$$

と定義する。これは、原点に単位電荷 ( $q = 1$ ) の電荷があったとした時の点  $\mathbf{r}$  の電位である。この  $\Phi_0$  を使おうと、

- $+q$  が点  $\mathbf{r}$  に作るポテンシャル： $q \cdot \Phi_0\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}}{2}\right)$
- $-q$  が点  $\mathbf{r}$  に作るポテンシャル： $-q \cdot \Phi_0\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{d}}{2}\right)$

とかけるので、双極子が点  $\mathbf{r}$  に作るポテンシャル  $\phi(\mathbf{r})$  は、

$$\phi(\mathbf{r}) = q\Phi_0\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}}{2}\right) - q\Phi_0\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{d}}{2}\right)$$

となる。ここで、 $|\mathbf{d}| \ll |\mathbf{r}|$  の場合、つまり、双極子から十分遠くにある点  $\mathbf{r}$  では、

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &\approx q \left\{ \Phi_0(\mathbf{r}) + \nabla\Phi_0(\mathbf{r}) \cdot \left(-\frac{\mathbf{d}}{2}\right) \right\} - q \left\{ \Phi_0(\mathbf{r}) + \nabla\Phi_0(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{d}}{2} \right\} \\ &= -q\mathbf{d} \cdot \nabla\Phi_0(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.66)$$

と近似できる。 $q\mathbf{d}$  は、前の subsection で紹介した通り、**双極モーメント** というベクトル量で、これを  $\mathbf{p}$  と表す。 $\nabla\Phi_0(\mathbf{r})$  は、式 (4.65) より、 $\Phi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla\left(\frac{1}{r}\right)$  となる。 $1/r$  の grad は、式 (4.2) より、 $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3}\mathbf{r}$  となる。よって、式 (4.66) は、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

となる。これが、(一般の場合の) 電気双極子が作る電位の式である。ここから、電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  を求める。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \nabla\left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}\right) \right\}$$

各成分の計算をする。 $x$  成分について、

$$\begin{aligned}
 E_x &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \nabla \left( \frac{p_x x + p_y y + p_z z}{r^3} \right) \right\} \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (p_x x + p_y y + p_z z) \cdot \frac{1}{r^3} + (p_x x + p_y y + p_z z) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r^3} \right) \right\} \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{p_x}{r^3} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^3} \right) \frac{\partial r}{\partial x} \right\} \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{p_x}{r^3} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \cdot \left( -\frac{3}{r^4} \right) \cdot \frac{x}{r} \right\}
 \end{aligned}$$

と計算できる。 $y, z$  成分については、 $x$  を  $y, z$  と変えればよいので、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\mathbf{p}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} \right\}$$

となる。

#### 電気双極子が作る電位と電場

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (4.67)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} \right\} \quad (4.68)$$

### 4.5.3 広義の電気双極子モーメント

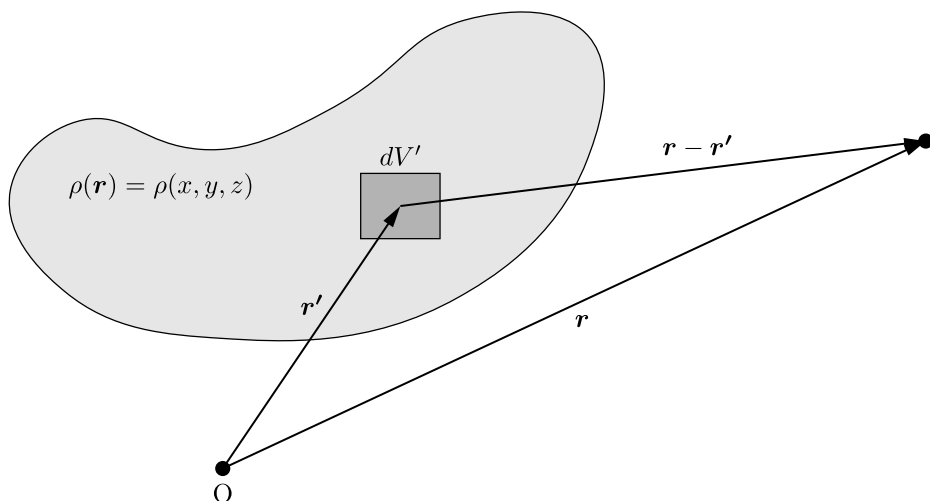


図 4.15 電荷が連続的に分布している場合のイメージ

第1章「クーロンの法則」(9ページ)で、電荷が連続的に分布している場合の電場の式を導いた。その結果は、次の式のものであった。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_K \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$



また、この電場  $\mathbf{E}$  に対するスカラーポテンシャルは 45 ページで導いていて、次の式のようにかける。

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_K \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

この subsection では、上の  $\phi(\mathbf{r})$  の式を少し変形することで、電荷が連続的に分布している場合の電場の様子を調べる。ただ、そのために次のような仮定をおく。

- 図 4.15 の電荷が連続的に分布している領域  $K$  を原点の近傍領域とする。
- 電場の様子を知りたい点  $\mathbf{r}$  を原点から十分遠方の点とする。

この 2 つの仮定のもとでは、 $\phi(\mathbf{r})$  をうまく近似することができる。

まず、 $\phi(\mathbf{r})$  の分母について、 $|\mathbf{r}| = r$  と書くことにすると、 $r \gg |\mathbf{r}'|$  なので、

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= \sqrt{|\mathbf{r}|^2 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') + |\mathbf{r}'|^2} = r \sqrt{1 - 2\frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')}{r^2} + \frac{|\mathbf{r}'|^2}{r^2}} \\ &\approx r \sqrt{1 - 2\frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')}{r^2}} \end{aligned} \quad (4.69)$$

と近似できる (ルートのの中の第 3 項は微小量なので無視した)。すると、 $\phi(\mathbf{r})$  は、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_K \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')}{r^2}}} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_K \rho(\mathbf{r}') \left\{ 1 - 2\frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')}{r^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} dV' \quad (4.70)$$

となる。ここでも、

$$|x| \text{ が } 1 \text{ に比べて十分小さい時、} (1+x)^n \rightarrow 1+nx \text{ と近似できる}$$

という近似を適用すると、

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_K \rho(\mathbf{r}') \left\{ 1 + \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')}{r^2} \right\} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_K \rho(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int_K \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV' \end{aligned} \quad (4.71)$$

となる。ここで、式 (4.71) の右辺第 1 項の積分は領域  $K$  内の全電荷を表している (これを  $Q$  と表すことにする)。右辺第 2 項の積分について、これを  $\mathbf{p}$  とおく。すると、式 (4.71) は次のように書き直せる。

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (4.72)$$

このように式を書き直すと、 $\phi(\mathbf{r})$  は原点にある点電荷  $Q$  が作る電位と、原点にある電気双極子が作る電位の重ね合わせになっていることがわかる。

電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  はこの式から、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} \right\} \quad (4.73)$$

と書ける。

## 4.6 静電エネルギー

この chapter の最後に、静電場のエネルギーについて考える。点電荷系からスタートして、一般の系に拡張することを考える。

### 4.6.1 電荷が集合した系の静電エネルギー

単位電荷 ( $q = 1$ ) の電荷を電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  中で、A から B まで動かす仕事は、2 点 A、B における静電ポテンシャル  $\phi(\mathbf{r})$  を用いて、

$$W(A \rightarrow B) = \phi(B) - \phi(A) \quad (4.74)$$

と書ける<sup>(20)</sup>。点  $\mathbf{r}_1$  にある電荷  $q_1$  が作る電場の下で、電荷  $q_2$  を無限遠から点  $\mathbf{r}_2$  まで動かすのに要する仕事は

$$W = q_2 \{ \phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\infty) \} = q_2 \phi(\mathbf{r}_2) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (4.75)$$

である。この考えを拡張することで、複数の電荷が存在する時の系全体がもつ静電エネルギーを考える。

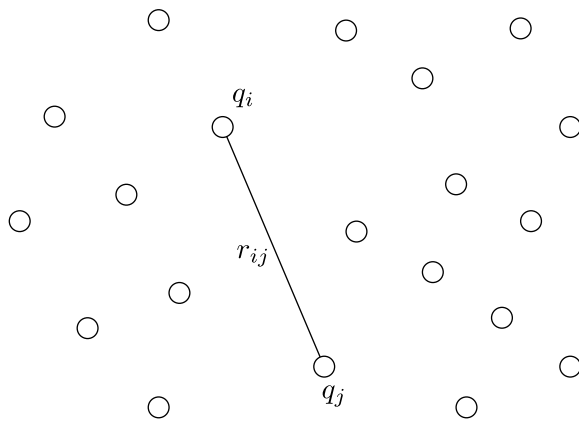


図 4.16 粒子対の静電エネルギーのイメージ

多数の電荷がある場合、電荷対の相互作用エネルギーを全て足し合わせたものが系全体が持つエネルギーとなる。電荷  $q_i$  と  $q_j$  (ただし、 $i \neq j$ ) の対の相互作用エネルギーは式 (4.75) より

$$W = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} \quad (4.76)$$

となる。そのため、全ての対の相互作用エネルギーを足すと、

$$U = \sum_{\text{全ての対}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} \quad (4.77)$$

となり、これが求める多数の荷電粒子から成る系がもつ静電エネルギーである。

全ての対を過不足なく数える方法を考えると、 $(i, j)$  という組み合わせと  $(j, i)$  という組み合わせを今回は区別する必要はないので、その区別を無視して数えてから 2 で割れば良い。そのため、この式 (4.77) は次と等価である。

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \phi_i \quad (4.78)$$

<sup>(20)</sup> 45 ページの説明を参照。

ただし、 $\phi(r_i)$  は以下のように定める。

$$\phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (4.79)$$

これは、電荷  $q_i$  とそれに影響を及ぼす  $\phi_i$  の積を  $i$  について和をとり、2 で割れば良いということを表している。

もし、電荷分布が連続的ならば、次のように積分で書くことができる。

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}_1) \phi(\mathbf{r}_1) dV_1 \quad (4.80)$$

ただし、 $\phi(\mathbf{r}_1)$  は以下のように定める。

$$\phi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} dV_2 \quad (4.81)$$

この  $\phi(\mathbf{r}_1)$  の式は、 $\mathbf{r}_1$  のまわりにある電荷の影響を表すが、式を見ればわかる通り、点  $\mathbf{r}_1$  の電位を表している式である。そのため、影響を及ぼす項というまわりくどい言い方をせず、点  $\mathbf{r}_1$  の電位 と言ってよいだろう。

#### 例題 4.9

内部に一樣な密度  $\rho$  で電荷が分布している半径  $R$  の球の静電エネルギーを求めよ。

#### 解答

##### 解法 1

上の式 (4.80) や式 (4.81) を使うことを考える。56 ページで求めた電位の式  $\phi(r)$  の式を利用する。

$$\phi(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) \quad (4.31)$$

系が持つ静電エネルギー  $U^{(21)}$  は、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho \cdot \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) \cdot r^2 \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{6\epsilon_0} \int_0^R r^2 (3R^2 - r^2) dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{\pi \rho^2}{3\epsilon_0} \int_0^R r^2 (3R^2 - r^2) dr \\ &= \frac{4\pi \rho^2 R^5}{15\epsilon_0} \end{aligned} \quad (4.82)$$

##### 解法 2

一樣な密度で電荷が分布している半径  $R$  の球が、少しずつ球殻を積み重ねていくことでできていると考える。半径  $r$  になった時、球のもつ電荷を  $Q(r)$  とすると、

$$Q(r) = \rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3}$$

(21) 変数変換については、59 ページや 60 ページの説明を参照。

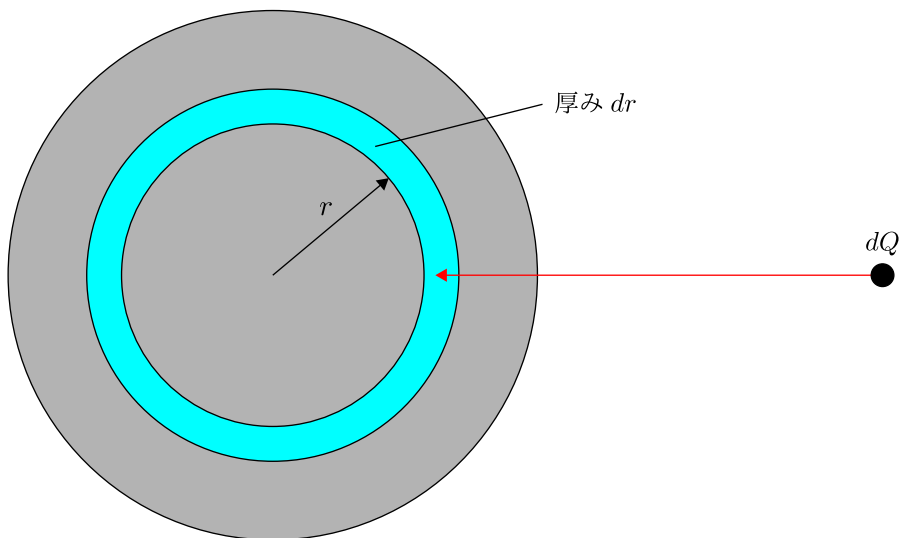


図 4.17 球殻を積み重ねていくイメージで静電エネルギーを捉える

である。これに電荷  $dQ$  を付け加えるのに要する仕事を考える。電荷  $dQ$  が感じる電位は  $\frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r}$  なので、

$$dU = \frac{Q(r)dQ}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{(\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3) \cdot \rho \cdot 4\pi r^2 dr}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{4\pi\rho^2 r^4}{3\epsilon_0} dr \quad (4.83)$$

となる。よって、系が持つ静電エネルギー  $U$  は、

$$U = \int dU = \int_0^R \frac{4\pi\rho^2 r^4}{3\epsilon_0} dr = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0}$$

と求められる。□

#### 4.6.2 平行平板コンデンサーに蓄えられる静電エネルギー

式 (4.80) の式を変形することで、静電エネルギーを、電荷ではなく、電場を使って表現することを考えたい。その前に、高校物理で習った平行平板コンデンサーに蓄えられる静電エネルギーについて考えたい。

図 4.18 のような平行平板コンデンサーに蓄えられる静電エネルギー  $U$  を考える。これは、高校物理で習った通り、コンデンサーの静電容量を  $C$  として、

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \quad (4.84)$$

である。この式は、前の subsection の 例題 4.7 の解法 2 と同様に考えることで求めることができる。

- コンデンサーの極板間の電位差  $V$  は、 $Q = CV$  の関係を満たす<sup>(22)</sup>。
- 一方の電極から他方へ電荷を移動させることでコンデンサーを充電していくと考える。微小電荷  $dQ$  を移動させるのに要する仕事は  $dU = VdQ$  と書ける。
- よって、静電エネルギーは

$$U = \int dU = \int_0^Q \frac{Q'}{C} dQ' = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 \quad (4.85)$$

と計算できる。

<sup>(22)</sup>  $Q$  と  $V$  をこのように結びつけた時の比例定数  $C$  を静電容量と呼ぶ。静電容量については、Chapter5 の 5.3 でとりあげる。

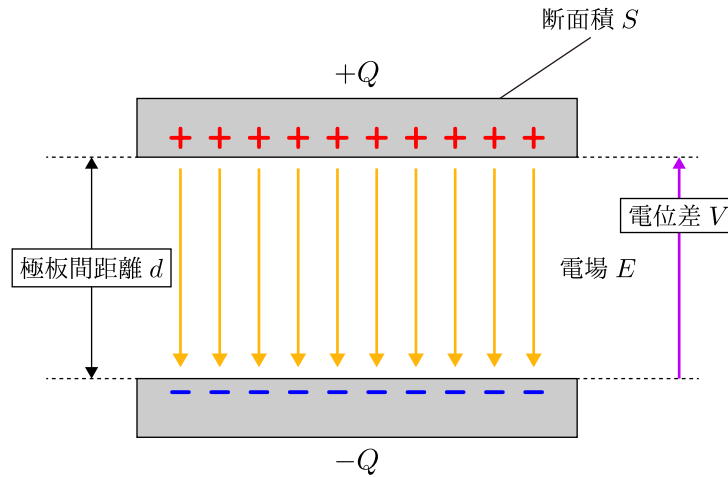


図 4.18 平行平板コンデンサーの断面

さて、高校物理において静電容量  $C$  は

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad (4.86)$$

と書けることを習った。さらに、電位差  $V$  は平行平板コンデンサーの場合、 $V = Ed$  である。そのため、静電エネルギー  $U$  は、

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{d} (Ed)^2 = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot (Ad) \quad (4.87)$$

と書くことができる。 $Ad$  はコンデンサーの極板と極板の間の領域の体積に等しい。そのため、式 (4.87) は、体積  $Ad$  の空間に単位体積あたり  $\varepsilon_0 E^2/2$  の静電エネルギーが蓄えられていることを表す式であると考えることができる。

### 4.6.3 静電場のエネルギー

前の subsection で平行平板コンデンサーに蓄えられる静電エネルギーは単位体積あたり  $\varepsilon_0 E^2/2$  であることがわかった。実は、一般の場合の単位体積あたりの静電エネルギーが  $\varepsilon_0 E^2/2$  であることが確かめられる。

そこで次の2つの式をスタートにして考える。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ U &= \frac{1}{2} \int_{\text{全空間 } V} \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV \end{aligned}$$

1つ目の方程式は Poisson 方程式で、2つ目の式は静電エネルギーを求める式である。Poisson 方程式より、 $\rho = -\varepsilon_0 \nabla^2 \phi$  なので、

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho \phi dV = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \phi \nabla^2 \phi dV \quad (4.88)$$

と静電エネルギーは表すことができる。ここで、被積分関数  $\phi \nabla^2 \phi$  を次のように変形する。

$$\begin{aligned}\phi \nabla^2 \phi &= \phi \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left( \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \\ &= \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) - (\nabla \phi) \cdot (\nabla \phi)\end{aligned}\tag{4.89}$$

すると、式 (4.88) は次のように書き直せる。

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \{(\nabla \phi) \cdot (\nabla \phi)\} dV - \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \{\nabla \cdot (\phi \nabla \phi)\} dV$$

さらに、 $\mathbf{E} = -\nabla \phi$  と Gauss の発散定理を使うと、

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) dV - \frac{\varepsilon_0}{2} \int_S (\phi \nabla \phi) \cdot \mathbf{n} dS\tag{4.90}$$

となる。右辺第1項の被積分関数は  $\mathbf{E}$  の大きさ  $E$  の2乗に等しい。右辺第2項については、 $V$  が全空間なので、 $S$  は無限遠方にある非常に大きい曲面であるといえる。スカラーポテンシャル  $\phi$  は無限遠方で0としてよい<sup>(23)</sup>。従って、 $\phi \nabla \phi$  は無限遠方では0となるから、面積分は0である。以上より、静電エネルギー  $U$  は

$$U = \int_V \left( \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \right) dV\tag{4.91}$$

である。積分空間で  $E$  が一定なら、 $U$  の値は  $\varepsilon_0 E^2 / 2 \times (\text{体積})$  となり、平行平板コンデンサーに限らず、単位体積あたりの静電エネルギーは  $\varepsilon_0 E^2 / 2$  である。

<sup>(23)</sup>48 ページに記した通り、スカラーポテンシャルには不定性がある。通常、無限遠方で0になるように  $\phi$  の不定部分を調節する。

## 第 5 章 静電場の応用問題

静電場の基本的なことは第 4 章までに紹介した。この章と次の章では応用的な話を取り上げる。応用的な話の中でも、Poisson 方程式に関する話で、1 つの章 (第 6 章) を作ることにした。そこで、この章では、Poisson 方程式以外話を取り上げる。題材は、1 年の「電磁気学 A」、2 年の「電磁気学第一」と「物理数学」で登場した 4 つのテーマとした。

まず最初に、電磁気学でこれから多用する「Dirac のデルタ関数」の基本事項を取り上げる。その後に、鏡像法、コンデンサーの基本事項、誘電体中の静電場の話を取り上げる。私がこれまでに世話になった教員は、この  $\text{\LaTeX}$  ノートの第 4 章の内容を押さえることがまず大事であるという立場で、第 4 章の内容はレポート課題や演習問題を出してきたので、私自身も第 4 章の内容はよく理解している。しかし、この第 5 章の内容はあまり理解していない。そのため、「静電場の応用問題」という章のタイトルをつけたが、内容は第 4 章から漏れた内容について大雑把だが紹介するという形になる。

そして、この章の最後には、「物理数学」で出てきた Legendre の微分方程式について紹介する。最後の subsection は、「へえ～～」と思いながら読めばよい。物理学というより、どちらかというと、数学の話になるだろう。

### 5.1 Dirac のデルタ関数

デルタ関数は色々な場面に登場する便利な関数である。電磁気学をはじめとする物理学だけでなく、制御論や信号処理といった工学的な分野でも登場する関数である。工学分野ではインパルス信号と呼ばれる。

#### 5.1.1 デルタ関数とは？

デルタ関数  $\delta(x)$  は以下の性質を満たす関数のことをいう。

デルタ関数とは？

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a) \quad (5.1)$$

デルタ関数の積分区間について注意点を記す。上の式 (5.1) では、積分区間を  $-\infty$  から  $\infty$  としたが、 $a$  を含む区間なら積分区間の幅が十分小さくてもよい。つまり、十分小さい  $\varepsilon > 0$  に対して、

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x) \delta(x-a) dx = f(a) \quad (5.2)$$

が成立するという特徴をデルタ関数はもつ。

式 (5.1) の  $f(x)$  が定数関数  $f(x) = 1$  で、かつ  $a = 0$  のときを考えると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (5.3)$$

が成立する。

式 (5.1) と式 (5.2) を見ると、 $f(x)$  が任意の関数で、積分区間を  $a$  の近傍に狭めても  $f(a)$  になるから、

$$\delta(x-a) = 0 \quad (x \neq a) \quad (5.4)$$

という性質をデルタ関数  $\delta(x)$  は持つと考えてよい。でも、ほぼ全部の区間で 0 なのに、積分値が 1 になるためには、

$$\delta(x-a) = \infty \quad (x = a) \quad (5.5)$$

という性質 ( $x = a$  で非常に大きくなるという性質) を持っていないとおかしい。

上記のような特徴を持つデルタ関数  $\delta(x)$  は、通常の関数の枠組みでは説明できないことが知られている。そのため、デルタ関数は**超関数**の一つであると言われる。この T<sub>E</sub>X ノートでは式 (5.1)、式 (5.2)、式 (5.3) の 3 つの性質を持つ関数をデルタ関数と定義し、3 つの式からデルタ関数は式 (5.4)、式 (5.5) を満たすことがわかるという立場をとる。

### 5.1.2 デルタ関数の近似

デルタ関数を

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ +\infty & (x = 0) \end{cases} \quad (5.6)$$

によって定義された関数と見れば、初等的な関数の極限としてデルタ関数を扱うことができる。ここでは Wikipedia にとりあげられている例について考える。

次のようなガウス関数  $f(x)$  の  $\sigma \rightarrow 0+0$  の極限がデルタ関数となる。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5.7)$$

この  $f(x)$  は平均 0、分散  $\sigma^2$  の正規分布の分布関数である。図 5.1 のように、 $x = 0$  でピークをとる関数で、 $\sigma$  が小さいほどそのピークはシャープになるという特徴を正規分布の分布関数は持つ。

デルタ関数の特徴として、 $-\infty$  から  $+\infty$  での積分が 1 になるというものがあるが、ガウス積分<sup>(1)</sup>を計算すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \sqrt{2\pi\sigma^2} = 1$$

と  $\sigma$  によらず 1 になることがわかる。

続けて、 $x$  を固定して  $\sigma \rightarrow 0$  とした時の極限を考える。(関数列の各点収束みたいなことを考える。)

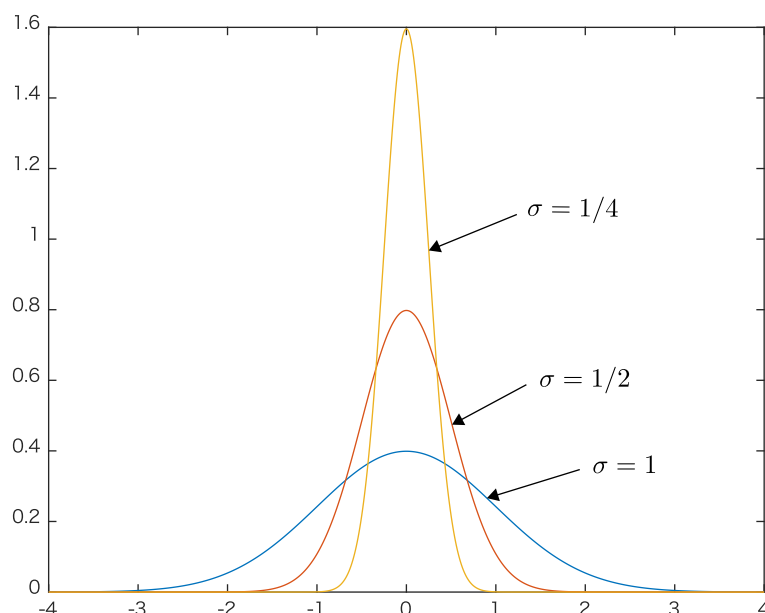
(1)

#### Remark

- Gauss 関数の積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$



図 5.1 ガウス関数の形状と  $\sigma$  の関係

- $x \neq 0$  のとき： $\sigma = 1/t$  により変数変換する。

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}t^2\right) = 0$$

- $x = 0$  のとき： $\exp$  の部分が消える。

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} = +\infty$$

従って、 $\sigma \rightarrow 0$  の極限は式 (5.6) に一致する。 $-\infty$  から  $+\infty$  での積分が  $\sigma$  によらず 1 になることも合わせて考えると、ガウス関数の  $\sigma \rightarrow 0$  の極限はデルタ関数であるといえる。

## 5.2 Poisson 方程式の解の一意性と鏡像法

電位や電場を求める方法の 1 つとして「鏡像法」を紹介する。この方法は都合の良い解法のように思える。この都合の良さを保証するのが、Poisson 方程式の境界値問題が一意的な解を持つという性質である。5.2.1 ではこの解の一意性を示し、5.2.2 で鏡像法によりいくつかの場合において電場や電位を求める方法を紹介する。

### 5.2.1 Poisson 方程式の解の一意性

Poisson 方程式は 2 階の偏微分方程式である。 $\nabla^2 \phi(x, y, z) = -\rho(x, y, z)/\varepsilon_0$  という偏微分方程式を解くことで、 $\phi(x, y, z)$  がどのような関数で表されるかがわかる。ただ、常微分方程式の場合を思い出せばわかるように、ある位置での  $\phi(x, y, z)$  の値を具体的に指定しないと任意定数を含む解しか得られない。そこで、ある位置での  $\phi(x, y, z)$  の値を指定した時にどのような解が得られるか考えることがある。これを境界値問題という。この subsection では、次の性質を示していく。

## Poisson 方程式の境界値問題

ある閉じた領域  $\Omega$  の中で与えられた Poisson 方程式があったとする。この Poisson 方程式に対して、境界条件として  $\phi$  の値 or  $\partial\phi/\partial n$  ( $\phi$  の  $\Omega$  を囲む閉曲面の法線方向の方向微分<sup>(2)</sup>) の値がその領域  $\Omega$  の表面  $\Sigma$  で与えられたとする。このとき、これら共通の Poisson 方程式と境界条件に従う 2 つの関数  $\phi_1$  と  $\phi_2$  があるならば、それらは恒等的に等しい。

## 証明

まず、 $\Phi$  を次のように導入する。

$$\Phi = \phi_1 - \phi_2 \quad (5.10)$$

$\phi_1$  と  $\phi_2$  は共通の Poisson 方程式を満たすので、

$$\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \phi_1 - \nabla^2 \phi_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \left(-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) = 0$$

となり、 $\Omega$  の内部で、次の式が恒等的に成立する。

$$\Phi \nabla^2 \Phi = 0 \quad (5.11)$$

式 (4.89)<sup>(3)</sup> をふまえると、

$$0 = \int_{\Omega} (\Phi \nabla^2 \Phi) dV = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) dV - \int_{\Omega} \{(\nabla \Phi) \cdot (\nabla \Phi)\} dV$$

これに Gauss の発散定理を適用すると、

$$\int_{\Sigma} \Phi (\nabla \Phi) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \|\nabla \Phi\|^2 dV$$

となる。さらに、方向微分を使って書き直すと、

$$\int_{\Sigma} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = \int_{\Omega} \|\nabla \Phi\|^2 dV \quad (5.12)$$

となる。

ここで、 $\phi_1$  と  $\phi_2$  は共通の境界条件を  $\Sigma$  上で満たすので、 $\Phi$  または  $\partial\Phi/\partial n$  は恒等的に 0 に等しいはずである。そのため、式 (5.12) の左辺は 0 となる。ノルムは非負の値をとることから、 $\Omega$  の内部で恒等的に  $\nabla \Phi = 0$  が成立する必要がある。

<sup>(2)</sup>あるベクトル  $\mathbf{v}$  に沿ったスカラー関数の方向微分は

$$\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{r}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{r} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{r})}{t} \quad (5.8)$$

と定義される。 $f(\mathbf{r} + t\mathbf{v})$  を点  $\mathbf{r}$  の近傍で Taylor 展開すると、

$$\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{r}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{r}) + \nabla f(\mathbf{r}) \cdot (t\mathbf{v}) + O(t^2) - f(\mathbf{r})}{t} = \nabla f(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} \quad (5.9)$$

と表すこともできる。

<sup>(3)</sup>

$$\begin{aligned} \phi \nabla^2 \phi &= \phi \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left( \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \\ &= \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) - (\nabla \phi) \cdot (\nabla \phi) \end{aligned}$$

- $\Phi$  が  $\Sigma$  上で恒等的に 0 であるとき

$\Omega - \Sigma$  (領域  $\Omega$  の境界を除く部分) のある点で  $\Phi$  が 0 でないと仮定する。すると、 $\Omega$  の内部で  $\Phi$  の勾配が生じるので、 $\Omega - \Sigma$  において  $\nabla\phi \neq \mathbf{0}$  となる部分が存在する。これは、 $\Omega$  の内部で恒等的に  $\nabla\Phi = 0$  が成立することに反する。

ゆえに、 $\Omega$  上の任意の点で  $\Phi = 0$  である。つまり、 $\phi_1 \equiv \phi_2$  である。

- $\partial\Phi/\partial n$  が  $\Sigma$  上で恒等的に 0 であるとき

$\partial\Phi/\partial n = \nabla\Phi \cdot \mathbf{n} = 0$  だが、 $\mathbf{n}$  は表面の法線ベクトルで明らかに non-0 なので、境界  $\Sigma$  を含めた  $\Omega$  全体で  $\nabla\Phi = 0$  である。すると、 $\Phi$  は定数となるので、 $\phi_1$  と  $\phi_2$  の差は定数差となる。

さて、 $\nabla\Phi = 0$  より、 $\nabla\phi_1 = \nabla\phi_2$  である。よって、 $\phi_1$  と  $\phi_2$  から得られる電場  $\mathbf{E}$  は共通である。そのため、定数差はどうでもいいので、その定数差を無視しても良い。よって、この境界条件に対しても  $\phi_1 = \phi_2$  がえられる。

□

## 5.2.2 鏡像法

境界条件を指定すると、Poisson 方程式の解が一意に定まることを利用して楽に解を予想する方法の 1 つに鏡像法がある。この方法はどんなに簡単な方法でも、どんなに賢い方法でも境界条件を満たすような解を 1 つ持ってくれば、それ以外の解は存在しないことを利用する。境界条件を満たすできるだけ単純な仮想的状況を設定して、その下で議論を始めていくのが鏡像法の特徴である。例題 5.1 では、鏡像法を使って解く問題の中で、とてもシンプルな問題を 1 つとりあげる。

### 例題 5.1

$xyz$  空間の平面  $x = 0$  上に接地した無限に広い導体平面がある。その導体平面の点  $A(a, 0, 0)$  に電荷  $q$  を置いた。

- (1) 領域  $x \geq 0$  にある点  $P(x, y, z)$  における電位を求めよ。
- (2) 導体平面上の電場を求めよ。
- (3) 導体の表面に誘導されている電荷の面密度を求めよ。
- (4) 導体の表面に誘導される全誘導電荷を求めよ。

### 解答

接地した導体板がない状態を考えると、点  $P$  における電位  $\phi(x, y, z)$  は

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} \quad (5.13)$$

と書ける。これに、 $x = 0$  を代入すると、平面  $x = 0$  上の点における電位がわかる。

$$\phi(0, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2}} \quad (5.14)$$

この式は、明らかに  $x = 0$  で  $\phi(0, y, z) = 0$  という条件を満たさない。

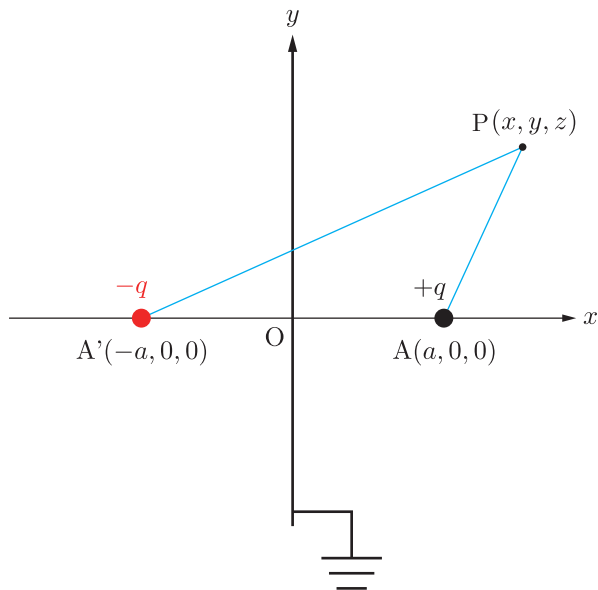


図 5.2 鏡像電荷の配置

- (1) そこで、どんなに卑怯な方法でも  $x = 0$  で  $\phi(0, y, z) = 0$  となり、かつ Poisson 方程式の境界条件を満たすものを探すことを考える。結論を書くと、図 5.2 のように、 $x$  軸に関して点 A と対称の位置にある点 A'  $(-a, 0, 0)$  に電荷 (鏡像電荷)  $-q$  をおけば良い。

点 A' に置いた鏡像電荷  $-q$  の影響も考慮すると、点 P における電位  $\phi(x, y, z)$  は

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} \right\} \quad (5.15)$$

となり、 $x = 0$  を代入すると、

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2}} \right\} = 0 \quad (5.16)$$

となる。ということで、式 (5.15) で与えられる  $\phi$  が答えである。

なぜ、式 (5.15) で与えられる  $\phi$  が答えなのか。この問題の不思議な点に注目してほしい。「領域  $x \geq 0$  にある」という言葉がキーになっている。この問題は、 $x \geq 0$  の部分で正確なら、 $x < 0$  の部分はどうでもいいのである。

ここで、 $\phi_1$  と  $\phi_2$  を次のように定める。

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} \right\} \\ \phi_2(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} \right\} \end{aligned}$$

$\phi_1$  は鏡像電荷と接地した導体板がないときの静電ポテンシャル、つまり、空間の点 A にただ電荷  $+q$  がある時の静電ポテンシャルで、 $\phi_2$  は空間の点 A' にただ電荷  $-q$  がある時の静電ポテンシャルである。そのた

め、 $\phi_1$  と  $\phi_2$  は次の Poisson 方程式の解である<sup>(4)</sup>。

$$\nabla^2 \phi_1 = -\frac{q}{\varepsilon_0} \delta(x-a) \quad (5.17)$$

$$\nabla^2 \phi_2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \delta(x+a) \quad (5.18)$$

ここで、 $x \geq 0$  の範囲を考えると、 $\delta(x+a) = 0$  となるから、ナブラ演算子 (微分演算子) の線形性より、

$$\nabla^2 \phi \equiv \nabla^2 (\phi_1 + \phi_2) = -\frac{q}{\varepsilon_0} \delta(x-a) \quad (5.19)$$

となる。そのため、 $\phi = \phi_1 + \phi_2$  とすれば、この  $\phi$  は  $\phi_1$  と同じ Poisson 方程式の解の 1 つである。したがって、 $x \geq 0$  の領域では、

$$\nabla^2 \phi = -\frac{q}{\varepsilon_0} \delta(x-a)$$

の解として、 $\phi = \phi_1 + \phi_2$  を考えればよい。すると、 $\phi$  は境界条件 ( $x=0$  で  $\phi=0$ ) を満たす。そして、前の subsection で示したことから、境界条件を指定したとき、解が一意に定まることから、こうしてうまく見つけた  $\phi = \phi_1 + \phi_2$  は、境界条件を満たす唯一解である。

(2) 鏡像法により、 $x \geq 0$  の領域におけるスカラーポテンシャルを求めることができた。

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} \right\} \quad (5.15)$$

電場  $\mathbf{E}$  は、 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  により求めることができる。頑張って微分すると、以下ようになる。

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{-q(x-a)}{\{(x-a)^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} + \frac{q(x+a)}{\{(x+a)^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} \right\} \quad (5.20)$$

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{-qy}{\{(x-a)^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} + \frac{qy}{\{(x+a)^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} \right\} \quad (5.21)$$

$$E_z = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{-qz}{\{(x-a)^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} + \frac{qz}{\{(x+a)^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} \right\} \quad (5.22)$$

今回は導体平面上、 $x=0$  での電場を知りたいので、上の 3 つの式に  $x=0$  を代入すると、

$$\mathbf{E} = \left( -\frac{qa}{2\pi\varepsilon_0 (a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, 0, 0 \right) \quad (5.23)$$

(3) 4.3.1 「導体と電場」 (59 ページ) に記されている以下の性質を利用する。

**導体の表面上の電場は必ず導体面に直交し、その大きさ  $E$  は  $\sigma$  を局所的な面密度として、 $E = \sigma/\varepsilon_0$  と表される。**

求める面密度を  $\sigma$  とすると、

$$\sigma = \varepsilon_0 E_x = -\frac{qa}{2\pi} \frac{1}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (5.24)$$

(4) 全電荷を  $Q$  とする。 $Q$  は、 $yz$  平面全体で、上の面密度を面積分すればよい。

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \left\{ -\frac{qa}{2\pi} \frac{1}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\} \quad (5.25)$$

<sup>(4)</sup>  $A$  と  $A'$  が  $x$  軸上にあるので、デルタ関数の  $y, z$  の部分は気にしないことにした。

この面積分の計算は、極座標に変数変換すると楽である。 $y = R \cos \theta$ ,  $z = R \sin \theta$  と変換すると、

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_0^\infty dR \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ -\frac{qa}{2\pi} \frac{1}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \right\} \cdot \underbrace{R}_{\text{Jacobian}} \\
 &= -qa \int_0^\infty \frac{R}{(a^2 + R^2)^{3/2}} dR \\
 &= -qa \left[ -\frac{1}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right]_0^\infty \\
 &= -q
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

と  $Q$  を求めることができる<sup>(5)(6)</sup>。

□

## 5.3 コンデンサー

### 5.3.1 静電容量を求める

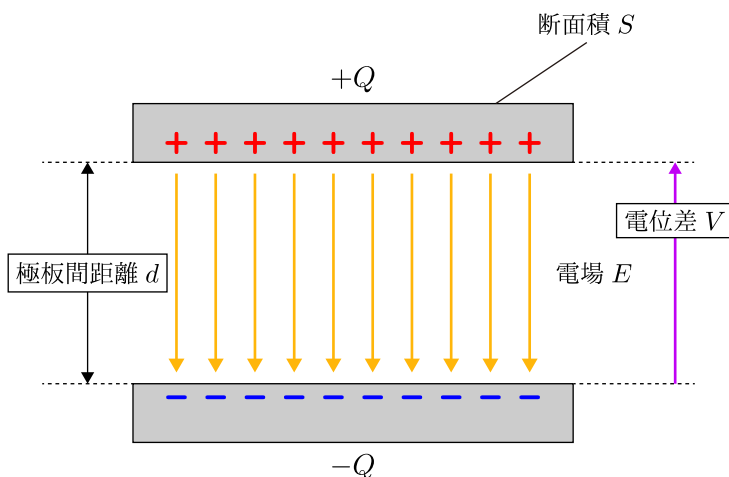


図 5.3 平行平板コンデンサー

2つの導体 A と B があり、それらが電荷  $Q$  と  $-Q$  をそれぞれもち、AB 間の電位差が  $V$  のとき、

$$Q = CV \tag{5.27}$$

<sup>(5)</sup>  $R = a \tan \theta$  と置換して計算してもよい。その場合、以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
 Q &= -qa \int_0^{\pi/2} \frac{a \tan \theta}{(a^2 + a^2 \tan^2 \theta)^{3/2}} \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta \\
 &= -qa \int_0^{\pi/2} \frac{a^2 \tan \theta}{a^3 / \cos \theta} d\theta \\
 &= -q \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \\
 &= -q
 \end{aligned}$$

<sup>(6)</sup> 今回考えた状況では、誘導される全電荷  $-q$  は、元々あった点電荷  $q$  と電荷の大きさは等しく、符号が逆になっている。このような誘導を完全誘導という。

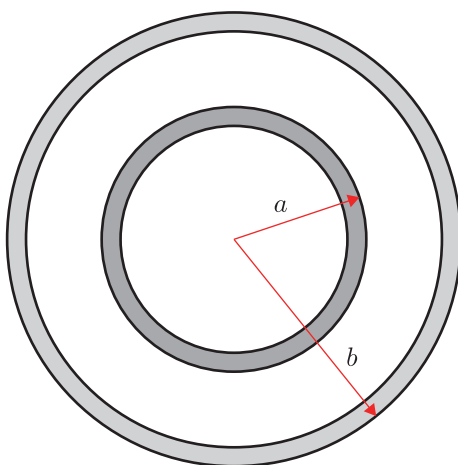
の関係が成立する。この比例定数  $C$  を静電容量という。静電容量は導体の形や大きさで決まり、電荷や電位に依存しない値であることが知られている。高校物理で学んだ通り、図 5.3 のような平行平板コンデンサーの静電容量は、

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad (5.28)$$

とかけて、確かに  $Q$  や  $V$  に依存しないことがわかる。

### 例題 5.2

半径  $a, b$  の同心球殻導体があり、内側の球殻は電荷  $Q$  を帯びている。この時、2つの導体の間の静電容量を求めよ。



### 解答

2つの球殻間の電位差がわかればよい。そこで、まず Gauss の法則を使うと、中心から距離  $r$  ( $a \leq r \leq b$ ) の位置における電場  $E(r)$  がわかり、その  $E(r)$  を用いて、電位差  $V$  を求める。

Gauss の法則より、 $a \leq r \leq b$  の範囲では、

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \iff E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

となる。内側が正の電気量を持つので、外側が負の電気量を持つ。そこで、外側の球殻から見た内側の球殻の電位  $V$  を求めると、

$$V = - \int_b^a E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{b-a}{ab}$$

となる。

よって、静電容量  $C$  は次のようになる。

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{ab}{b-a} = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{a}{1 - \frac{a}{b}}$$

□

ここで、最初に静電容量を定義したときに、「2つ」の導体の電位差を用いて静電容量という考えを導入した。しかし、「1つ」の導体が孤立して空間内にある状況でも静電容量という考えが導入できる。孤立し

た導体の静電容量を考えると、相手は無限遠方にあると考えればよい。その際、無限遠方の電位は0であることは忘れてはならない。

上の例題2において、 $b \rightarrow \infty$ の極限を考えると、 $C \rightarrow 4\pi\epsilon_0 a$ となる。これが、孤立した導体球の静電容量である。

### 5.3.2 複数の導体がある場合の静電容量 (容量係数と電位係数)

1つの導体球の静電容量は、2つの同心導体球殻の静電容量を考えてから極限を取れば求められることは先ほどふれた。言い換えると、無限遠に導体アース (電位0) があるとして考えればよい。この考え方を使得、複数の導体がある場合、特に2つの導体がある系の静電容量について考える。

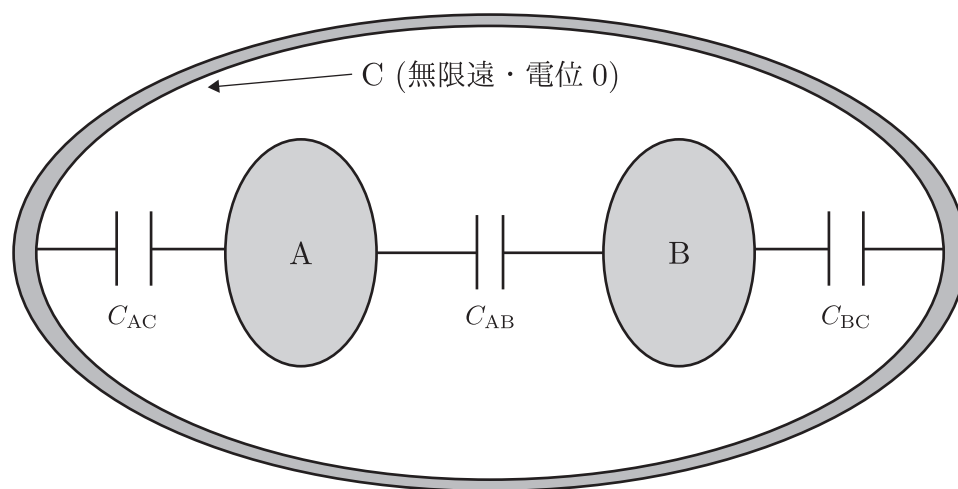


図 5.4 2つの導体からなる系の取り扱い (1)

図 5.4 のように、2つの導体 A と B がある系を、2つの導体 A,B と無限遠の導体アース C の3つがある系とみなして考える。そして、A,B 間、B,C 間、C,A 間はコンデンサーとみなす。さらに、無限遠に導体アースがあることがわかるように書き直すと、図 5.5 のようになる<sup>(7)</sup>。

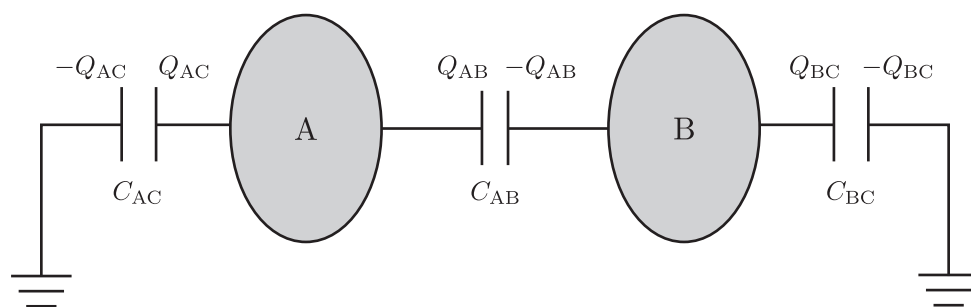


図 5.5 2つの導体からなる系の取り扱い

図 5.5 において、 $-Q_{AC}$  の極板と  $-Q_{BC}$  の極板は、導体アース C であり、この電位を 0 V (基準) とする。導体 A の電位を  $V_A$ 、導体 B の電位を  $V_B$  とすると、 $Q_{AC}$  の極板と  $Q_{AB}$  の極板の電位は  $V_A$ 、 $-Q_{AB}$  の極

<sup>(7)</sup> 図 5.5 では、A、B とブラックボックスのように見える部分があるが、ただの導線しかないと考えて良い。導体 A (導体 B) に相当する部分であることをわかりやすく表しただけである。



板と  $Q_{BC}$  の極板の電位は  $V_B$  となる。

よって、導体 A、導体 B に蓄えられる電荷は、

$$\begin{aligned} Q_A &= Q_{AC} + Q_{AB} = C_{AC}V_A + C_{AB}(V_A - V_B) \\ Q_B &= -Q_{AB} + Q_{BC} = -C_{AB}(V_A - V_B) + C_{BC}V_B \end{aligned}$$

と書ける。行列を用いて整理すると次のようになる。

$$\begin{pmatrix} Q_A \\ Q_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{AC} + C_{AB} & -C_{AB} \\ -C_{AB} & C_{AB} + C_{BC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

ここで、式 (5.29) を次のように書き直す。

$$\begin{pmatrix} Q_A \\ Q_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

このように書き直したとき、行列の各成分  $C_{ij}$  を**容量係数**という。テキストによっては、 $C_{ij}$  を  $i = j$  の時、**容量係数**といい、 $i \neq j$  の時、**誘導係数**というと書いてあるテキストもある。つまり、式 (5.30) の  $2 \times 2$  行列の対角成分が容量係数で、それ以外が誘導係数ということになる。

$Q = \sim$  の形から、 $V = \sim$  の形で直してみよう。 $\hat{C}$  の逆行列  $\hat{C}^{-1}$  を左からかけると、 $\hat{V} = \hat{C}^{-1}\hat{Q}$  となる。そのため、ある  $p_{ij} (i, j \in \{1, 2\})$  を用いて、

$$\begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_A \\ Q_B \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

と書いてもよい。この  $p_{ij}$  のことを**電位係数**という。

ここまでのことを一般化して、行列の成分を調べると、次の性質が成立することが知られている。特に**相反定理**は重要な性質である。

#### 相反定理 (容量係数)

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

とかけるとき、次の 3 つの性質が成り立つ。

1. 全ての  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  に対して、 $C_{ii} > 0$  (対角成分は必ず正である)
2.  $i \neq j$  の時、 $C_{ij} = C_{ji} < 0$  (**相反定理**)
3. 全ての  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  に対して、真ん中の行列の第  $i$  行目の成分の和は正である。  
つまり、 $\sum_{j=1}^n C_{ij} > 0$

## 相反定理 (電位係数)

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix}$$

とかけるとき、次の2つの式が成り立つ。

1.  $i \neq j$  の時、 $p_{ij} = p_{ji}$  (相反定理)
2.  $i \neq j$  とする。全ての  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  に対して、 $p_{ii} > p_{ij} > 0$

一般の  $n$  について、上の2つの定理を証明することは可能だが面倒なので、今回は  $n = 2$  の場合に成り立つことだけ確認しよう。 $n = 2$  のときは、式 (5.29) や式 (5.30) を考えればよい。 $(C_{AB}, C_{AC}, C_{BC})$  の3つは正である)

$$\begin{pmatrix} Q_A \\ Q_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{AC} + C_{AB} & -C_{AB} \\ -C_{AB} & C_{AB} + C_{BC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_A \\ Q_B \end{pmatrix}$$

- 確かに対角成分は全て正である。
- 相反定理の成立も明らか。
- 各行の全成分の和は第1行は  $C_{AC}$  で、第2行は  $C_{BC}$  なので、正である。

従って、容量係数に関する3つの性質が  $2 \times 2$  行列については成立することが確認できた。

次に、真ん中の  $2 \times 2$  行列  $\hat{C}$  の行列式  $\det \hat{C}$  を用いると、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} &= \frac{1}{\det \hat{C}} \begin{pmatrix} C_{22} & -C_{12} \\ -C_{21} & C_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_A \\ Q_B \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det \hat{C}} \begin{pmatrix} C_{AB} + C_{BC} & C_{AB} \\ C_{AB} & C_{AC} + C_{AB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_A \\ Q_B \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.32)$$

となる。なお、 $\det \hat{C}$  は、

$$\det \hat{C} = (C_{AC} + C_{AB})(C_{AB} + C_{BC}) - (C_{AB})^2 = C_{AB}(C_{AC} + C_{BC}) + C_{AC}C_{BC}$$

より正である。よって、 $n = 2$  のとき、上の電位係数に関する相反定理も正しいことがわかる。

### 5.3.3 相反定理と静電エネルギー

引き続き、 $n = 2$  の場合について考える。 $C_{12} = C_{21}$  (相反定理) が成立することが成立することについては、静電エネルギーの観点からも説明できる。その説明において、式 (5.30) を利用するので、まずその式を記しておく。なお、後で体積積分で文字  $V$  を使用するので、電位は  $\phi$  を用いて表した。

$$\begin{pmatrix} Q_A \\ Q_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

静電エネルギーは、式 (4.80) の式を用いると、

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int \rho \phi dV = \frac{1}{2} (Q_A \phi_A + Q_B \phi_B) \\
 &= \frac{1}{2} \{ (C_{11} \phi_A + C_{12} \phi_B) \phi_A + (C_{21} \phi_A + C_{22} \phi_B) \phi_B \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ C_{11} (\phi_A)^2 + (C_{12} + C_{21}) \phi_A \phi_B + C_{22} (\phi_B)^2 \}
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

と書ける。ここで、式 (5.33) より、

$$\begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} = \frac{1}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} \begin{pmatrix} C_{22} & -C_{12} \\ -C_{21} & C_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_A \\ Q_B \end{pmatrix} \tag{5.35}$$

となるから、これを式 (5.34) に代入すると、

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \frac{1}{(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21})^2} \times \{ C_{11} (C_{22}Q_A - C_{12}Q_B)^2 \\
 &\quad + (C_{12} + C_{21}) (C_{22}Q_A - C_{12}Q_B) (-C_{21}Q_A + C_{11}Q_B) + C_{22} (-C_{21}Q_A + C_{11}Q_B)^2 \} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21})^2} \times [ (Q_A)^2 \{ C_{11}C_{22}^2 - (C_{12} + C_{21})C_{21}C_{22} + C_{22}C_{21}^2 \} \\
 &\quad + (Q_A Q_B) \{ -2C_{11}C_{12}C_{22} + (C_{12} + C_{21})(C_{11}C_{22} + C_{12}C_{21}) - 2C_{11}C_{21}C_{22} \} \\
 &\quad + (Q_B)^2 \{ C_{11}C_{12}^2 - (C_{12} + C_{21})C_{11}C_{12} + C_{22}C_{11}^2 \} ] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21})^2} \times [ (Q_A)^2 C_{22} (C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}) + (Q_B)^2 C_{11} (C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}) \\
 &\quad + (Q_A Q_B) (-C_{11}C_{12}C_{22} + C_{12}^2 C_{21} - C_{11}C_{21}C_{22} + C_{12}C_{21}^2) ] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21})^2} \times [ (Q_A)^2 C_{22} (C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}) + (Q_B)^2 C_{11} (C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}) \\
 &\quad + (Q_A Q_B) \{ C_{12}C_{21} (C_{12} + C_{21}) - C_{11}C_{22} (C_{12} + C_{21}) \} ] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} \times \{ C_{22} (Q_A)^2 + C_{11} (Q_B)^2 - (C_{12} + C_{21}) (Q_A Q_B) \}
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

となる。

もし、導体 A の電荷が  $Q_A \rightarrow Q_A + dQ_A$  と変化したとき、静電エネルギーが  $U \rightarrow U + dU$  になったとする。このとき、 $dU$  は以下のように書ける。

$$dU = \frac{\partial U}{\partial Q_A} dQ_A = \frac{1}{2} \frac{1}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} \{ 2C_{22}Q_A - (C_{12} + C_{21})Q_B \} dQ_A \tag{5.38}$$

また、 $dU$  は電荷  $dQ_A$  を無限遠方 (電位 0) から導体 A (電位  $\phi_A$ ) まで運ぶのに要する仕事なので、

$$dU = \phi_A dQ_A = \frac{1}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} (C_{22}Q_A - C_{12}Q_B) dQ_A \tag{5.39}$$

と書くこともできる。式 (5.38) と式 (5.39) が表す  $dU$  は同一であるから、

$$\frac{C_{12} + C_{21}}{2} = C_{12} \iff C_{12} = C_{21} \tag{5.40}$$

が成立する。こうして、静電エネルギーの観点から相反定理を示すことができた。

## 5.4 誘電体中の静電場

この section では導体ではなく絶縁体を取り扱う。絶縁体の性質については、ファラデーが平行平板コンデンサーの極板間に絶縁体を入れると、静電容量が増加することを示した。

### 5.4.1 誘電体中の電気分極とは？

導体を電場がかかっている環境の下に置くと、導体内部の電場が0になるように電荷が移動する。(60ページの図4.9を参照。)誘電体の場合は、図5.6のように原子内で正電荷と負電荷の中心がずれる。正負の電荷の中心がずれることにより、微視的な電気双極子をつくる。これにより、原子内に双極子モーメントが発生する。導体の場合、外部電場により、正電荷と負電荷が導体内部をうまく移動して導体内部の電場が0になる。ただ、誘電体の場合は、導体内部の電場は弱められるけれど、導体のように完全に0にならない。このように絶縁体は導体と異なる性質を示す。

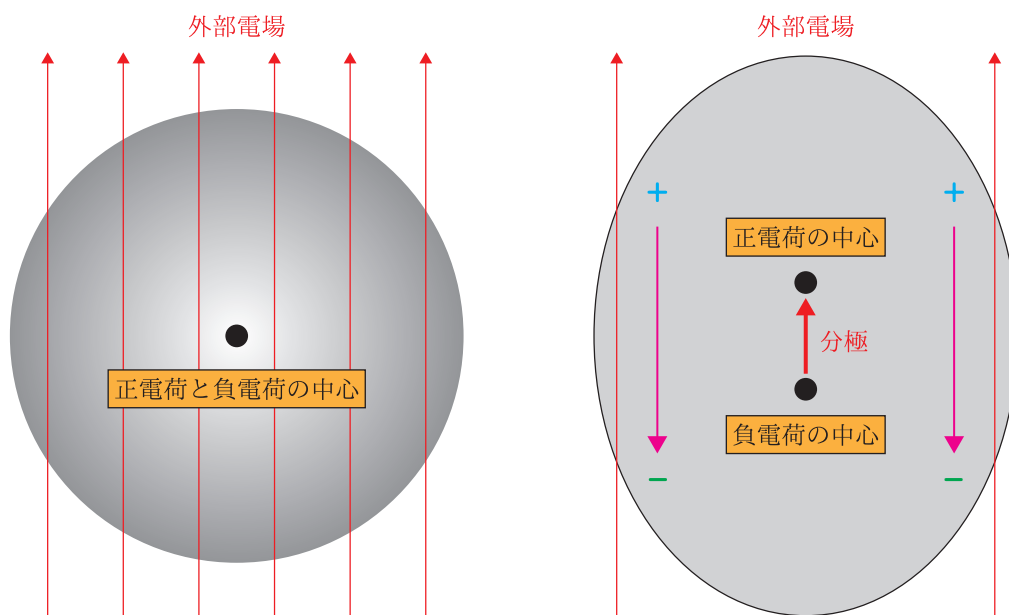


図 5.6 誘電体に電場がかかると、正電荷と負電荷の中心がずれる。

分極ベクトルの最も単純な考えは次の通りである。1つの原子で生じた双極子モーメントが $qd$ で、単位体積に $N$ 原子があるならば、単位体積あたりの双極子モーメントは $Nqd$ とかける。ここで、単位体積あたりの双極子モーメントを $\mathbf{P}$ と表し、分極ベクトルという。

$$\mathbf{P} = Nq\mathbf{d} \quad (5.41)$$

ただ、一般には、分極ベクトル $\mathbf{P}$ は誘電体内の場所により異なる<sup>(8)</sup>。そこで、巨視的な視点での誘電体の電気分極を考える。巨視的な視点で見ると、電気分極は、個々の原子や分子が持つ電気双極子を体積による平均をとったもので表される。点 $\mathbf{r}$ における分極ベクトル $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ は、点 $\mathbf{r}$ 近傍の微小領域 $\delta V$ <sup>(9)</sup>に含まれる電気双極子モーメントの総和をとり、体積 $\delta V$ で割った値と定義する。

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\delta V} \sum_i \mathbf{P}_i \quad (5.42)$$

<sup>(8)</sup>しかし、平行平板コンデンサーに挿入した誘電体では $\mathbf{P}$ は一樣と考えてよい。

<sup>(9)</sup>この部分は『物質の電磁気学』をもとに作成しているが、これが微小領域を $dV$ ではなく $\delta V$ と書いているので、この TeX ノートでも $\delta V$ と記す。

## 5.4.2 分極電荷

分極ベクトルのもとが電気双極子であることから、式 (4.67) の「電気双極子がつくる電位」の式から議論をスタートする。

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

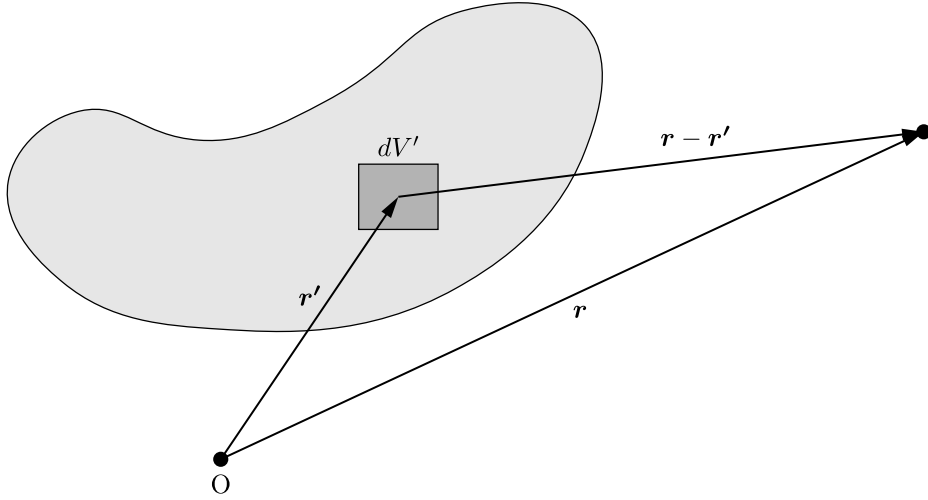


図 5.7 連続的な電気分極により分極ベクトルがつくる電位を求める

誘電体の微小体積  $dV'$  に含まれる電気双極子モーメントの総和は式 (5.42) より、 $\mathbf{P}(\mathbf{r}')dV'$  とかける。この  $\mathbf{P}(\mathbf{r}')dV'$  がつくる電位は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{P}(\mathbf{r}')dV') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

とかける。これを全誘電体領域について足し合わせる。

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (5.43)$$

ここで、変数  $\mathbf{r}'$  について勾配に関する  $\nabla'$  の計算として次の式を考える。

$$\nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (5.44)$$

すると、

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \left\{ \nabla' \cdot \left[ \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] - \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} \end{aligned} \quad (5.45)$$

と式変形することができる。これにさらに Gauss の発散定理を用いると、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S dS' \left\{ \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \left\{ \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} \quad (5.46)$$

となる。

この  $\phi(\mathbf{r})$  の式は次のように 2 つに分解することができる。

- (右辺第1項)：誘電体の表面にある面密度  $\sigma_P(\mathbf{r})$  の面電荷  $\sigma_P$  による電位

$$\sigma_P(\mathbf{r}) = \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad (5.47)$$

- (右辺第2項)：内部にある体積密度  $\rho_P(\mathbf{r})$  の空間電荷  $\rho_P$  による電位

$$\rho_P(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad (5.48)$$

$\sigma_P$  や  $\rho_P$  は実際に存在する電荷を表していない。ただ、式の形を見る限り、電荷と等価な存在であることはわかる。このような誘電体の巨視的な電場を表すための仮想的な電荷のことを**分極電荷**という。分極電荷は特徴は以下の2つである。

- 分極電荷は仮想的なものなので、誘電体の外へ取り出すことができない。
- 分極電荷は電気双極子 (正と負が対になっている) に由来するので、誘電体全体では必ず打ち消しあう。

この分極電荷の考えを導入することで、誘電体の性質が把握しやすくなる。分極電荷に対して、電子やイオンに由来し、実際に物体から取り去ったり、付け加えられる電荷のことを**真電荷**と呼ぶ。

### 5.4.3 誘電体の Gauss の法則

誘電体の中の巨視的な電場  $\mathbf{E}$  は外部電場  $\mathbf{E}_e$  と分極電場  $\mathbf{E}_P$  からなる。分極電場は分極電荷  $\sigma_P$  や  $\rho_P$  によって作られる。外部電場は外部電荷  $\rho_e$  に由来する。ここでいう「外部」は誘電体を構成する原子分子以外によるという意味で、幾何学的に誘電体の外にあるという意味ではない。

既に取り扱った Gauss の法則の式をスタートとして、誘電体の Gauss の法則を導くことを考える。空間上に電荷分布  $\rho_e(\mathbf{r})$  があるときは、Gauss の法則 (微分形) が成立する。

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_e(\mathbf{r}) = \frac{\rho_e(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (5.49)$$

誘電体の存在を式の上ではどのように表現するかを考えよう。そこで役に立つものの1つが分極電荷  $\rho_P(\mathbf{r})$  である。 $\rho_P(\mathbf{r})$  は誘電体の性質を把握するための仮想的なものであり、誘電体の外では定義されない。そこで、 $\rho_P(\mathbf{r})$  の定義を次のように拡張する。領域  $K$  を誘電体が存在する領域とする。

$$\rho_P(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho_P(\mathbf{r}) & (\mathbf{r} \text{ が領域 } K \text{ の内部}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (5.50)$$

変な書き方をしたが、意味としては位置  $\mathbf{r}$  に対して、 $\mathbf{r}$  が  $K$  の外部なら 0 を返すと設定することで、空間上の任意の点  $\mathbf{r}$  に対して、 $\rho_P(\mathbf{r})$  が値を持つようにしたのである。すると、誘電体の効果として  $\rho_P(\mathbf{r})$  を元々の電荷分布  $\rho_e(\mathbf{r})$  に加えるだけで、通常空間で誘電体の効果を議論することができる。要するに、誘電体の存在を分極電荷  $\rho_P(\mathbf{r})$  という形で記述しているのである。

誘電体の効果を考える時、位置  $\mathbf{r}$  の電荷密度は  $\rho_e(\mathbf{r}) + \rho_P(\mathbf{r})$  なので、Gauss の法則は、

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_e(\mathbf{r}) = \frac{\rho_e(\mathbf{r}) + \rho_P(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (5.51)$$

と書き直せる。 $\rho_P(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})$  (式 (5.48)) より、

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})) = \rho_e(\mathbf{r}) \quad (5.52)$$

となる。

#### 誘電体の Gauss の法則

- 電束密度  $D(\mathbf{r})$

$$D(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad (5.53)$$

- 誘電体中の Gauss の法則

$$\nabla \cdot D(\mathbf{r}) = \underbrace{\rho_e(\mathbf{r})}_{\text{真電荷密度}} \quad (5.54)$$

では、 $\rho_e(\mathbf{r})$  の情報から  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  と  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  を決定することを考えよう。誘電体中の Gauss の法則 (式 (5.54)) を使うことで、 $D(\mathbf{r})$  は求められる。しかし、電束密度の定義式 (式 (5.53)) だけでは、 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  と  $D(\mathbf{r})$  を決定することはできない。何かもう 1 つ情報が欲しい。

その情報が多くの誘電体において、「 $\mathbf{P}$  と  $\mathbf{E}$  が比例する」という観測事実である。電気分極  $\mathbf{P}$  が電場  $\mathbf{E}$  に比例して現れる誘電体は**常誘電体**と呼ばれる。常誘電体の性質を示す量として**電気感受率**  $\kappa$  を次のように定義する。

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E} \quad (5.55)$$

この  $\kappa$  を導入すると、電束密度の定義式は、

$$D(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 (1 + \kappa) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (5.56)$$

と書ける。ここで、 $D$  と  $E$  の比例係数に着目する。

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \kappa) \quad (5.57)$$

により定義される  $\varepsilon$  を誘電体の**誘電率**と定義する<sup>(10)</sup>。この  $\varepsilon$  を使うと、誘電体の Gauss の法則の式は、以下のように書くこともできる。

#### 誘電体の Gauss の法則 (2)

- 誘電体中の Gauss の法則 (2)

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_e(\mathbf{r})}{\varepsilon} \quad (5.58)$$

- 誘電体内部の電場を把握するには、いつも  $\varepsilon_0$  としていたところを  $\varepsilon$  と置き換えるだけで良い。

そういえば、ここまで誘電体における rot について触れていないが、結論を書いてしまうと、rot の式に変化はない。つまり、誘電体であっても、 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$  が成立する。rot の式はそのまま、div の式の  $\varepsilon_0$  が  $\varepsilon$  になったということは、Poisson 方程式は、 $\varepsilon_0$  の部分が  $\varepsilon$  に変わるだけである。

#### 5.4.4 異なる誘電体の境界面における接続の条件

異なる誘電体が接続されている場合、その境界面がどのようになるかは考慮しないと、電場や電位を正確に把握することはできない。逆に、自然界は今から述べる (電場や電位に関する) 境界条件を満たすように、電荷分布が変化すると考えても良いだろう。

<sup>(10)</sup> 誘電率は時々、真空の誘電率の何倍であるかで表記されることがある。 $\varepsilon_r \equiv \varepsilon / \varepsilon_0$  のことを**比誘電率**という。

## 異なる誘電体の境界面における接続の条件

- 電束密度  $\mathbf{D}(\mathbf{r})$  の法線成分は連続である。
- 電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  の接線成分は連続である。

このことを証明しよう。まず、電束密度について示す。図 5.8 のように、境界面にまたがる極めて薄い断面積  $\Delta S$  の微小円筒を考える。円筒の底面は境界面に平行、つまり、 $\mathbf{n}$  の方向が境界面の法線方向と一致すると仮定し、さらに、境界面上に真電荷は存在しないと仮定する。

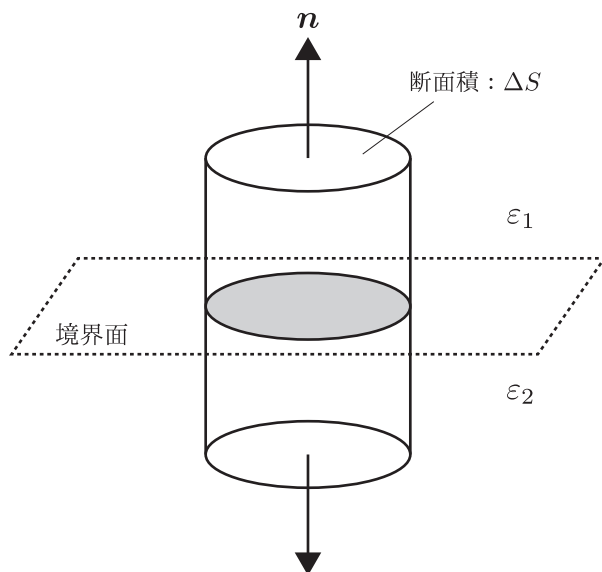


図 5.8 電束密度の法線成分の連続性を考える

すると、誘電体の Gauss の法則より、

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 0$$

が成立する。円筒全体で体積積分すると、

$$\int_V \{\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r})\} dV = 0$$

となる。この式の左辺に Gauss の発散定理を適用すると、

$$\int_S \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = 0 \quad (5.59)$$

が成立することがわかる。さて、厚みが微小なので円柱の底面と側面の面積分のうち、側面の部分は無視できる。そのため、底面の面積分だけを考えればよい。上の底面の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を図 5.8 のように定めると、

$$\int_S \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} \Delta S + \mathbf{D}_2 \cdot (-\mathbf{n}) \Delta S = 0$$

と書ける<sup>(11)</sup>。この式より、

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n} \quad (5.60)$$

<sup>(11)</sup> お気持ちとしては、「断面積  $\Delta S$  は微小なので、断面ではどの位置でも  $\mathbf{D}$  は等しい」と仮定して計算したと考えれば良い。



が成立することがいえる。ベクトルの内積で書かれているのでわかりづらいが、底面との単位法線ベクトルとの内積なので、 $\mathbf{D}$  の法線成分がイコールであることを表している。

続けて、電場の接線成分が境界面で連続であることを示そう。今度は図 5.9 のような境界面にまたがる微小な長方形の閉曲線  $C$  を考える。

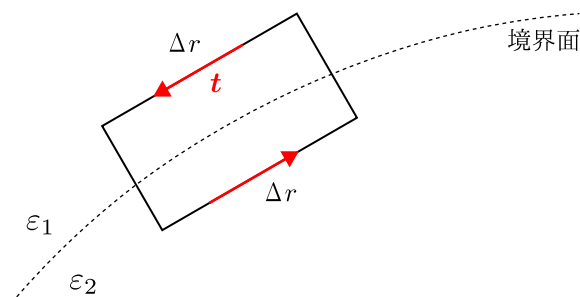


図 5.9 電場の接線成分の連続性を考える

誘電体においても、 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  が成立するので、長方形全体で  $\text{rot} \mathbf{E}$  を面積分すると、

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

となる。左辺を Stokes の定理を用いて変形すると、

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (5.61)$$

が成立する。ここで、境界面に垂直な方向の長さを無限小にとると、その部分の線積分への寄与は無視できるから、境界面に平行な方向の単位ベクトル  $\mathbf{t}$  を図 5.9 のように取ると、

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t} \Delta r + \mathbf{E}_2 \cdot (-\mathbf{t}) \Delta r = 0$$

と書ける<sup>(12)</sup>。この式より、

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t} = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t} \quad (5.62)$$

が成立することがいえる。ベクトルの内積で書かれているのでわかりづらいが、 $\mathbf{E}$  の接線成分がイコールであることを表している。

### 5.4.5 誘電体とコンデンサー

5.4.3「誘電体の Gauss の法則」の最後に、誘電体内部の電場を把握するには、いつも  $\epsilon_0$  としていたところを  $\epsilon$  と置き換えるだけで良いと記した。本当に、これだけで誘電体の存在を考慮したことになる。この subsection では、次の例題を使って、誘電体が挿入されたときのコンデンサーの静電容量がどうなるかを調べる。なお、平行平板コンデンサーの極板間に誘電体が挿入された時の静電容量の変化については高校物理で扱っているので、ここでは取り上げない。

<sup>(12)</sup> 電束密度の場合と同様に、「微小長方形なので、境界面に平行な方向についてはどの位置でも  $\mathbf{E}$  は等しい」と仮定して計算したと考えれば良い。

**例題 5.3**

内径  $a$ 、外径  $b$ 、長さ  $l$  の円筒形のコンデンサーの中に、中心軸から半径  $c$  ( $a < c < b$ ) の円筒を境として、その内側に誘電率  $\varepsilon_1$ 、外側に誘電率  $\varepsilon_2$  の誘電体を詰め込んだ。この時の静電容量を求めよ。

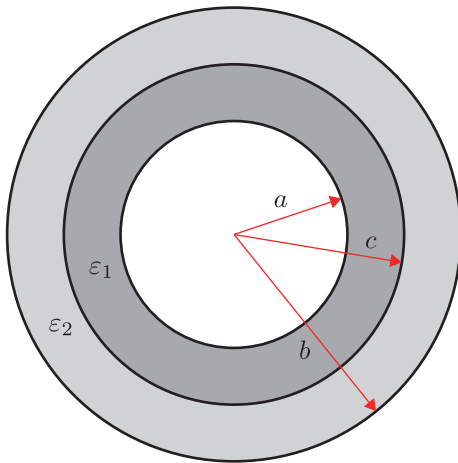


図 5.10 円筒形コンデンサーの断面

**解答**

コンデンサーの静電容量を求める問題なので、プロセスは決まっている。

1. 内側 ( $a$ ) と外側 ( $b$ ) の電位差  $V$  を求める。
2.  $C = Q/V$  により、静電容量  $C$  を求める。

以下、この順番で静電容量を求めていく。

内側の円筒に単位長さあたり  $\lambda (> 0)$  の電荷を与える<sup>(13)</sup>。中心軸から距離  $r$  の距離での電束密度  $E(r)$  を求める。Gauss 面として半径  $r$  の円を底面とし、高さ 1 の円柱の側面を採用する。誘電体の Gauss の法則より、

$$E(r) \cdot 2\pi r = \begin{cases} \frac{\lambda}{\varepsilon_1} & (a \leq r \leq c) \\ \frac{\lambda}{\varepsilon_2} & (c \leq r \leq b) \end{cases} \iff E(r) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1 r} & (a \leq r \leq c) \\ \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2 r} & (c \leq r \leq b) \end{cases} \quad (5.63)$$

が成立する。最初に、内側が正の電荷を持つと仮定したので、外側は負の電荷を持つ。そこで、外側の球殻から見た内側の球殻の電位を求める。 $r = a$  と  $r = c$  の電位差は、

$$V_{ac} = - \int_c^a \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1 r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1} \log \frac{c}{a} \quad (5.64)$$

である。同様に  $r = c$  と  $r = b$  の電位差を求めると、

$$V_{cb} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2} \log \frac{b}{c} \quad (5.65)$$

<sup>(13)</sup> 実際に電荷が与えられていない場合は、電荷を与えたと仮定しないと  $C = Q/V$  を計算することはできないので、適切に電荷を与える。

よって、内側と外側の電位差  $V$  は、

$$V = V_{ac} + V_{cb} = \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_1} \log \frac{c}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} \log \frac{b}{c} \right\} \quad (5.66)$$

となる。ゆえに、静電容量  $C$  は、

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_1} \log \frac{c}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} \log \frac{b}{c} \right\}} = 2\pi l \left( \frac{1}{\varepsilon_1} \log \frac{c}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} \log \frac{b}{c} \right)^{-1} \quad (5.67)$$

□

## 5.5 Laplace 方程式の解

空間上の電荷のない点では Laplace 方程式

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (5.68)$$

が成立する。境界条件を決めることで解は一意に定まる。

ただ、偏微分方程式を解くことは容易ではない。この T<sub>E</sub>X ノートでは簡単に解くことができる特殊な場合について考える。といっても、その数学的なレベルは学部 1,2 年のレベルを大きく逸脱している。実際、2 年生の「電磁気学第一」の演習の授業ではこんな感じだよと雰囲気だけ学んだだけで、詳細には立ち入っていない。この T<sub>E</sub>X ノートでは、Legendre 多項式の中身を詳細に議論するといったことはしないが、ある程度は偏微分方程式の解について真面目に議論することにする。

### 5.5.1 極座標における Laplace 方程式の解 (1)

$x, y, z$  表示よりも極座標表示した方が良い場合がある。そこで、まず極座標における Laplace 方程式の解について考える。 $(x, y, z)$  と  $(r, \theta, \varphi)$  を以下のように結びつける。

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

式 (3.28)(38 ページ) に記した極座標における Laplacian を使うと、式 (5.68) は以下のように書ける。

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (5.69)$$

この偏微分方程式を解く方法として**変数分離法**を考える。これは、 $V(r, \theta, \varphi)$  として、

$$V(r, \theta, \varphi) = A(r)B(\theta)C(\varphi) \quad (5.70)$$

と、 $r$  だけ、 $\theta$  だけ、 $\varphi$  だけの関数の積で表されるものを仮定して、 $A(r), B(\theta), C(\varphi)$  の形を決定していくという方法である。では、 $V(r, \theta, \varphi) = A(r)B(\theta)C(\varphi)$  を式 (5.69) に代入しよう。

$$\begin{aligned}\nabla^2 V &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dA}{dr} BC \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dB}{d\theta} AC \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 C}{\partial \varphi^2} AB \\ &= BC \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dA}{dr} \right) + AC \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dB}{d\theta} \right) + AB \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 C}{d\varphi^2} = 0\end{aligned}\quad (5.71)$$

この式 (5.71) の両辺を  $A(r)B(\theta)C(\varphi)(=V)$  で割ると<sup>(14)</sup>、

$$\frac{1}{A} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dA}{dr} \right) + \frac{1}{B} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dB}{d\theta} \right) + \frac{1}{C} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 C}{d\varphi^2} = 0 \quad (5.72)$$

となる。さらに、両辺に  $r^2 \sin \theta$  をかけて整理すると、

$$\underbrace{\sin^2 \theta \left\{ \frac{1}{A} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dA}{dr} \right) + \frac{1}{B} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dB}{d\theta} \right) \right\}}_{r, \theta \text{ だけの関数}} = \underbrace{-\frac{1}{C} \frac{d^2 C}{d\varphi^2}}_{\varphi \text{ だけの関数}} \quad (5.73)$$

となる。左辺は  $r, \theta$  だけの関数、右辺は  $\varphi$  だけの関数であるのに、両者が等しいというのが常に成立するらしい。こんなことが起こるためには、両辺は  $r, \theta, \varphi$  に依存しない定数でなければならない。では、その定数はどんな値であるか？

#### Remark

2 階の常微分方程式

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \alpha y(t) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

が、任意の  $t \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  において有限の値を持つのは  $\alpha < 0$  の時に限る。

#### 証明

$\alpha < 0$  の時は、単振動を特徴付ける微分方程式なので解は

$$y(t) = A \sin \sqrt{\alpha} t + B \cos \sqrt{\alpha} t$$

の形になるから、任意の  $t$  に対して、 $y(t)$  は有限の値となる。以下、 $\alpha = 0$ ,  $\alpha > 0$  の場合について考える。

- $\alpha = 0$  の時： $y(t) = At + B$  と一次関数になるので、 $t \rightarrow \pm\infty$  で必ず発散する。
- $\alpha > 0$  の時： $y(t) = Ae^{\sqrt{\alpha}t} + Be^{-\sqrt{\alpha}t}$  となるので、この場合も  $t \rightarrow \pm\infty$  で必ず発散する。

□

本論に戻ろう。物理現象は実数世界の出来事なので、必ず実数で表現される。そのため、式 (5.73) で両辺は定数であると記したが、それは実数である。式 (5.73) の右辺に着目する。定数を  $\alpha$  と書くと、

$$\frac{d^2 C(\varphi)}{d\varphi^2} = -\alpha C(\varphi)$$

と整理できる。今回の Laplace 方程式の解としては、空間全体で有限の値をとるようなものを求めたいので、上の Remark より、この  $\alpha$  は正の値である。そこで、式 (5.73) の両辺が表す定数を  $m^2$  ( $m \in \mathbb{R}_{>0}$ ) とおく。

<sup>(14)</sup> この瞬間、 $ABC$  が恒等的に 0 となる解、すなわち、 $V$  が恒等的に 0 となる解は仮定しないという立場をとったことになる。このような立場を取ることは問題ない。なぜなら、 $V$  が恒等的に 0 になる場合、 $\nabla^2 V = 0$  であることは自明であり、かつそんな解について議論することは無意味だからである。

**Step1 : Laplace 方程式を変数分離法で整理する。**

$$\underbrace{\sin^2 \theta \left\{ \frac{1}{A} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dA}{dr} \right) + \frac{1}{B \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dB}{d\theta} \right) \right\}}_{r, \theta \text{ だけの関数}} = \underbrace{-\frac{1}{C} \frac{d^2 C}{d\varphi^2}}_{\varphi \text{ だけの関数}} = m^2 \quad (5.74)$$

式 (5.74) より、 $C(\varphi)$  については、

$$\frac{d^2 C(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2 C(\varphi)$$

が成立するので、

$$C(\varphi) = c_m \cos m\varphi + d_m \sin m\varphi \quad (5.75)$$

と書ける。

$A(r)$  と  $B(\theta)$  についても、式 (5.74) より、

$$\underbrace{\frac{1}{A} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dA}{dr} \right)}_{r \text{ だけの関数}} = \underbrace{-\frac{1}{B \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dB}{d\theta} \right)}_{\theta \text{ だけの関数}} + \frac{m^2}{\sin^2 \theta}$$

と書くことができ、 $r$  だけの式と  $\theta$  だけの式に分解することができる。そのため、この両辺は  $r, \theta$  に依らない定数である。天下りの的ではあるが、この定数を  $n(n+1)$  とおく。

**Step2 :  $r, \theta$  と  $\varphi$  の成分に分解して、 $A(r), B(\theta), C(\varphi)$  の特徴をつかむ。**

- $C(\varphi)$  について：三角関数になる

$$C(\varphi) = c_m \cos m\varphi + d_m \sin m\varphi$$

- $A(r)$  と  $B(\theta)$  はさらに分解することができる。

$$\underbrace{\frac{1}{A} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dA}{dr} \right)}_{r \text{ だけの関数}} = \underbrace{-\frac{1}{B \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dB}{d\theta} \right)}_{\theta \text{ だけの関数}} + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = n(n+1) \quad (5.76)$$

式 (5.76) から  $r$  については

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dA(r)}{dr} \right) - n(n+1)A(r) = 0 \quad (5.77)$$

が成立する。この微分方程式の解として、 $A(r) = r^k$  とおく。

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \frac{d}{dr} (r^2 \cdot k r^{k-1}) - n(n+1)r^k \\ &= k(k+1)r^k - n(n+1)r^k \\ &= \{k(k+1) - n(n+1)\}r^k \end{aligned} \quad (5.78)$$

式 (5.78) より、 $k = n, -(n+1)$  の時に  $r$  に依らず左辺は 0 になる。よって、 $A(r) = r^n, r^{-(n+1)}$  は微分方程式 (5.77) の解である。そのため、 $A(r)$  は

$$A(r) = a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \quad (5.79)$$

と書ける。

一方、 $B(\theta)$  については、

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dB}{d\theta} \right) + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right\} B(\theta) = 0 \quad (5.80)$$

と書くことができる。この微分方程式については、簡単に解くことはできない。天下りの的に解を書くと、以下のようになる。

$$B(\theta) = P_n^m(\cos \theta) \quad (5.81)$$

ここで使われている  $P_n^m(x)$  は **陪 Legendre 関数** と呼ばれる関数で次のように定義される。

陪 Legendre 関数

- (第1種の) 陪 Legendre 関数:  $P_n^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$
- (第1種の) Legendre 関数:  $P_n(x) \equiv \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$
- Legendre 多項式:  $P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), \quad \dots$

最終的にはここまで得られた  $A(r), B(\theta), C(\varphi)$  を  $n, m$  について動かして和をとればよい。この和をとる操作を考えるためには、 $n, m$  の取りうる値についての議論が必要である。ただ、 $n, m$  の範囲を議論するのは難しいので省略する。結論を書くと、 $n$  は 0 以上の全ての整数、 $m$  は 1 以上の全ての整数である<sup>(15)</sup>。

### Step3: Laplace 方程式の解の決定

- $A(r), B(\theta)$  について

$$A(r) = a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}, \quad B(\theta) = P_n^m(\cos \theta)$$

- Laplace 方程式の一般解の決定

$$V(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) (c_m \cos m\varphi + d_m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta) \quad (5.82)$$

<sup>(15)</sup> この部分の記述が数学的に正しいかどうかは知らない。最終的な結論が  $n, m$  ともに 0 以上の全ての整数を取りうるということを知っていて、 $m=0$  と  $m>0$  で状況が違うことから場合分けしたから、ここでは (とりあえず) 「 $m$  は 1 以上の全ての整数」と記した。

### 5.5.2 極座標における Laplace 方程式の解 (2)

Laplace 方程式を解く際、電位分布が  $z$  軸のまわりに軸対称であり、電位  $V$  が  $\varphi$  に依存しないことがわかっているときは、式 (5.82) よりも簡単な形で  $V$  を表すことができる。

$\varphi$  に依存しないから、式 (5.70) の  $C(\varphi)$  が定数であるとみればよい。そのため、式 (5.74) の  $\varphi$  の微分は 0 になる。従って、 $\underline{m=0}$  である。あとは、 $m=0$  を代入すると、

$$V(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \left( a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) P_n^0(\cos \theta)$$

となる。(  $m$  の値は 0 と確定しているので、 $m$  に関する和をとる必要はない。 )

ここで、 $P_n^0(x)$  について考える。0 回微分を「微分しない」と解釈すると、 $P_n^m(x)$  の定義より、

$$P_n^0(x) = \underbrace{(1-x^2)^0}_1 \cdot \underbrace{\frac{d^m}{dx^m} P_n(x)}_{P_n(x)} = P_n(x)$$

となる。また、 $a_n$  と  $b_n$  は任意定数なので、 $c_0 a_n$  と  $c_0 b_n$  を改めて  $a_n$ ,  $b_n$  とおくと、電位  $V$  が  $\varphi$  に依存しない時の一般解は、

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) \quad (5.83)$$

である。この状況を式 (5.82) では表現することができない。そのため、式 (5.82) を次のように拡張する。

#### 極座標における Laplace 方程式の一般解

$n = m = 0$  の時が  $z$  軸に関して対称性がある時、それ以外のときで (残りの) 一般的な状況を表す。想定されうる特殊解の線型結合が一般解である。

$$V(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) (c_m \cos m\varphi + d_m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta) \quad (5.84)$$

### 5.5.3 円柱座標における Laplace 方程式の解

今度は、円柱座標における Laplace 方程式の解について考える。(  $x, y, z$  ) と (  $r, \theta, z$  ) を以下のように結びつける。

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

式 (3.35)(39 ページ) に記した極座標における Laplacian を使うと、式 (5.68)(99 ページ) は以下のように書ける。

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (5.85)$$

ここでは、 $V$  が  $z$  方向につき一様で  $z$  に依存しない場合を考えよう。 $z$  微分は 0 になるから、

$$\nabla^2 V = r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0 \quad (5.86)$$

と整理することができる。今回も**変数分離法**により解を求めよう。 $V(r, \theta)$  を

$$V(r, \theta) = A(r)B(\theta) \quad (5.87)$$

とおいて、式 (5.86) に代入すると、

$$\begin{aligned} rB(\theta) \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA(r)}{dr} \right) + A(r) \frac{d^2 B}{d\theta^2} &= 0 \\ rB(\theta) \left( \frac{dA(r)}{dr} + r \frac{d^2 A(r)}{dr^2} \right) + A(r) \frac{d^2 B}{d\theta^2} &= 0 \end{aligned}$$

となる。この両辺を  $V = A(r)B(\theta)$  で割ると、

$$\underbrace{\frac{1}{A(r)} \left( r \frac{dA(r)}{dr} + r^2 \frac{d^2 A(r)}{dr^2} \right)}_{r \text{ だけの式}} = \underbrace{-\frac{1}{B(\theta)} \frac{d^2 B}{d\theta^2}}_{\theta \text{ だけの式}} \quad (5.88)$$

と整理することができる。 $r$  だけの式と  $\theta$  だけの式が等しいことから、式 (5.88) の両辺は定数となる。任意の  $\theta$  に対して、 $B(\theta)$  が発散しないために

$$\underbrace{\frac{1}{A(r)} \left( r \frac{dA(r)}{dr} + r^2 \frac{d^2 A(r)}{dr^2} \right)}_{r \text{ だけの式}} = \underbrace{-\frac{1}{B(\theta)} \frac{d^2 B}{d\theta^2}}_{\theta \text{ だけの式}} = n^2 (> 0)$$

となる。

すると、 $B(\theta)$  の方から、

$$B(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \quad (5.89)$$

と求められる。 $A(r)$  の方は、

$$r \frac{dA(r)}{dr} + r^2 \frac{d^2 A(r)}{dr^2} = n^2 A(r) \quad (5.90)$$

と変形して、 $A(r)$  として  $A(r) = r^k$  を仮定する。

$$\begin{aligned} r \cdot k r^{k-1} + r^2 k(k-1) r^{k-2} &= n^2 r^k \\ k^2 r^k &= n^2 r^k \\ (k^2 - n^2) r^k &= 0 \end{aligned}$$

これより、 $k = \pm n$  のときは  $r$  によらず、 $(k^2 - n^2) r^k = 0$  となるから、 $A(r) = r^n, r^{-n}$  は微分方程式 (5.90) の解である。従って、

$$A(r) = c_n r^n + \frac{d_n}{r^n} \quad (5.91)$$

となる。

以上より、求める Laplace 方程式の解は

$$V(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \left( c_n r^n + \frac{d_n}{r^n} \right) \quad (5.92)$$

である。

参考書 (『詳解 電磁気学演習』) にのっている解は、式 (5.92) とは少し違う。この部分を答えを知っている私が都合よく補正していく。その補正方法は以下の通りである。



電位  $V$  が  $z$  だけでなく  $\theta$  にも依存しないという特殊ケースを考えると、この場合は  $n = 0$  となるから、

$$B(\theta) = a_0\theta + b_0$$

となる。 $A(r)$  については、

$$r \frac{dA(r)}{dr} + r^2 \frac{d^2 A(r)}{dr^2} = 0 \iff A'(r) + r \frac{d}{dr} A'(r) = 0$$

を考える。これは  $A'(r)$  についての 1 階の微分方程式である。

$$\frac{dA'(r)}{A'(r)} = -\frac{dr}{r}$$

と変形すると、

$$\ln A'(r) = -\ln r + k \implies A'(r) = \frac{c_0}{r} \implies A(r) = c_0 \ln r + d_0$$

となって、 $z$  にも  $\theta$  にも依存しないときの  $V$  は、

$$V(r) = (a_0\theta + b_0)(c_0 \ln r + d_0) \quad (5.93)$$

と求められる。

#### 円柱座標における Laplace 方程式の一般解

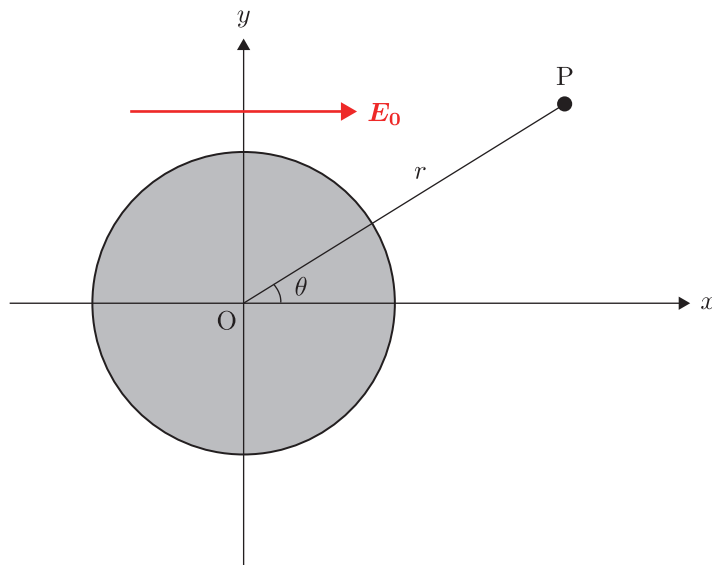
電位  $V$  が  $z$  方向については一様であるとき、円柱座標における Laplace 方程式の一般解は以下のよう  
に書ける。

$$V(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \left( c_n r^n + \frac{d_n}{r^n} \right) + (a_0\theta + b_0)(c_0 \ln r + d_0) \quad (5.94)$$

## 5.5.4 一様な静電場の中の円柱導体

## 例題 5.4

半径  $a$  の円柱型導体が一様な電場  $E_0$  の中にその軸を  $E_0$  に垂直にしておかれている時の円柱の外  
点における電位を求めよ<sup>(16)</sup>。



## 解答

円柱軸に沿って  $z$  軸、電場  $E_0$  の方向に  $x$  軸をとる。円柱の外での電位は、

- 電場  $E_0$  による電位  $V_1$
- 円柱に誘導された電荷による電位  $V_2$

の和になる。まず、 $V_1$  については、電場が一様なので、図のように座標系を設定すると、 $V_1(r, \theta)$  は、

$$V_1(r, \theta) = -E_0 \cdot x = -E_0 r \cos \theta \quad (5.95)$$

となる。( $E_0$  による電位は  $x = 0$  を基準とした。)

続けて、 $V_2$  について考える。ここで、円柱座標における Laplace 方程式の一般解を利用する。後は、この式の係数  $a_n, b_n, c_n, d_n$  を決定していく。

$$V_2(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \left( c_n r^n + \frac{d_n}{r^n} \right) + (a_0 \theta + b_0)(c_0 \ln r + d_0)$$

(制約 1)  $V_2$  自体は  $r \rightarrow \infty$  の極限で発散しないと仮定する。すると、 $c_n = 0$  ( $n \geq 0$ )である。

$$\therefore V_2(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \cdot \frac{d_n}{r^n} + (a_0 \theta + b_0) \cdot d_0$$

<sup>(16)</sup> この問題は、(不親切なことに) 電位の基準の位置についての説明がない。そのため、自分で基準をどのようにするかを設定する必要がある。

(制約 2) 電場  $\mathbf{E}_0$  の向きは  $x$  軸の正の方向なので、円柱に誘導される電荷は  $x$  依存性を持っていても、 $y$  依存性を持っていると考えにくい。そのため、 $\theta$  に関して  $V_2(r, \theta)$  が偶関数である<sup>(17)</sup> ことが必要。従って、 $b_n (n \geq 1) = 0, a_0 = 0$  が成立することが必要。

$$\therefore V_2(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta) \cdot \frac{d_n}{r^n} + b_0 d_0$$

(制約 3) 導体の電位は一定であることから、 $r = a$  における電位は  $\theta$  に依存しないことが必要<sup>(18)</sup>。

(制約 4)  $V = V_1 + V_2$  は、円柱面 ( $r = a$ ) において、 $V(a, \theta) = 0$  が成立すると仮定する。(境界条件の設定)

$$\begin{aligned} V(a, \theta) &= -E_0 a \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta) \cdot \frac{d_n}{a^n} + b_0 d_0 \\ &= -E_0 a \cos \theta + \frac{a_1 d_1}{a} \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n \cos n\theta) \cdot \frac{d_n}{a^n} + b_0 d_0 \end{aligned}$$

これより、 $b_0 d_0 = 0$  となる必要があることはすぐにわかる。 また、 $V(a, \theta)$  が  $\theta$  によらず 0 になることより、 $\cos \theta, \cos 2\theta, \dots$  の係数が 0 となることが必要である。よって、 $n \geq 2$  で  $a_n d_n = 0$  であることも必要である。 さらに、 $\cos \theta$  の係数について、

$$-E_0 a + \frac{a_1 d_1}{a} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 d_1 = E_0 a^2$$

以上より、 $V_2(r, \theta)$  は、

$$V_2(r, \theta) = \frac{E_0 a^2}{r} \cos \theta \quad (5.96)$$

である。ゆえに、 $V(r, \theta)$  は上記のように制約をつけたもとで、

$$V(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^2}{r} \cos \theta = \boxed{-E_0 \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta} \quad (5.97)$$

と書ける。 □

### 5.5.5 一様な静電場の中の誘電体球

#### 例題 5.5

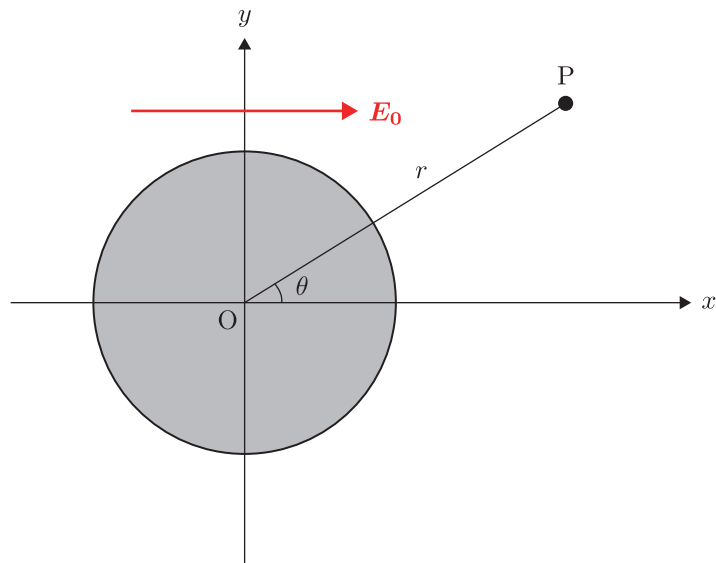
半径  $a$ 、誘電率  $\varepsilon$  の誘電体球が、一様電場  $\mathbf{E}_0$  がかかっている真空中に置かれた時の球の内外の電位を求めよ。

円柱か球かの違いはあるが、その平面  $z = 0$  への射影は、前の例題と同じである。そのため、例題 4 と同じ図を使用する。今度は、円柱ではなく球体なので、 $V(r, \theta)$  として、式 (5.83)

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta)$$

<sup>(17)</sup>  $y$  依存性がないということは、 $V_2(r, \theta) = V_2(r, -\theta)$  という形で表現できる。

<sup>(18)</sup> 導体の電位は一定なら、 $V(r, \theta) = \text{const.}$  ( $r \leq a$ ) が本当は正しい。でも、今回考えている問題では、 $r < a$  の電位を考える必要がないので、 $r = a$  における電位が  $\theta$  に依存しないことだけを考えれば十分。



を使用する。なお、 $P_n(\cos \theta)$  は、

$$P_0(\cos \theta) = 1, \quad P_1(\cos \theta) = \cos \theta, \quad P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1), \dots$$

である。

### 解答

#### (1)：球の外部の電位

例題 4 と同様に、球の外部の電位は、

- 電場  $E_0$  による電位  $V_1$
- 導体球に誘導された電荷による電位  $V_2$

の和になる。 $V_2$  について、 $r \rightarrow \infty$  の極限で発散しないと仮定すると、

$$V_{\text{ex}}(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad (5.98)$$

と書ける。

#### (2)：球の内部の電位

球の内部も球の外部と同じで、上記の  $V_1$  と  $V_2$  の和になる。 $r = 0$  で発散しないように注意すると、

$$V_{\text{in}}(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta)$$

である。 $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$  なので、

$$V_{\text{in}}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (5.99)$$

と書ける。

## (3)：係数の決定

$a_n$  と  $b_n$  を境界条件により決定する。5.4.4「異なる誘電体の境界面における接続の条件」(95 ページ～)に記した通り、境界面における接続の条件は、

- 電束密度  $\mathbf{D}(\mathbf{r})$  の法線成分は連続である。
- 電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  の接線成分は連続である。

の 2 つが成立することである。

電束密度の法線成分は、極座標で見たときの  $r$  方向である。grad の極座標表示<sup>(19)</sup>(38 ページ)を思い出すと、

$$\varepsilon \frac{\partial V_{\text{in}}}{\partial r} \Big|_{r=a} = \varepsilon_0 \frac{\partial V_{\text{ex}}}{\partial r} \Big|_{r=a} \quad (5.100)$$

が電束密度の法線成分の連続性を表す。この式 (5.100) は、式 (5.98) と式 (5.99) より、

$$\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \cdot a^{n-1} P_n(\cos \theta) = \varepsilon_0 \left\{ -E_0 \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} -(n+1) \frac{b_n}{a^{n+2}} P_n(\cos \theta) \right\} \quad (5.101)$$

と変形できる。電束密度の連続性については、任意の  $\theta$  に対して成立するので、式 (5.101) は  $\theta$  によらず成立することが必要である。 $\cos \theta = P_1(\cos \theta)$  であることに注意すると、各  $P_n(\cos \theta)$  の係数が両辺で一致することが必要である。よって、

$$\begin{cases} 0 = \varepsilon \frac{b_0}{a^2} & (n=0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (5.102)$$

$$\begin{cases} \varepsilon a_1 = -\varepsilon_0 E_0 - 2\varepsilon_0 \frac{b_1}{a^3} & (n=1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (5.103)$$

$$\begin{cases} \varepsilon n a_n \cdot a^{n-1} = -\varepsilon_0 (n+1) \frac{b_n}{a^{n+2}} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (5.104)$$

が成立すればよい。

電場の接線成分は、極座標で見たときの  $\theta$  方向である。ここでも、grad の極座標表示を思い出すと、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V_{\text{in}}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_{\text{ex}}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} \quad (5.105)$$

が電場の接線成分の連続性を表す。この式 (5.105) は、式 (5.98) と式 (5.99) より、

$$\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot a^n \frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta) = \frac{1}{a} \left\{ -E_0 a \frac{\partial}{\partial \theta} P_1(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{a^{n+1}} \frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta) \right\} \quad (5.106)$$

と変形できる ( $\cos \theta = P_1(\cos \theta)$  であることを用いた)。電場の連続性についても、任意の  $\theta$  に対して成立す

(19)

**Remark**

grad の極座標表示は以下のようになる。

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{E}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \mathbf{E}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \mathbf{E}_\phi$$

るので、各  $\frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta)$  の係数が両辺で一致することが必要である。よって、

$$\begin{cases} a_0 = \varepsilon \frac{b_0}{a} & (n=0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (5.107)$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot a = -E_0 a + \frac{b_1}{a^2} & (n=1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (5.108)$$

$$\begin{cases} a_n \cdot a^n = (n+1) \frac{b_n}{a^{n+1}} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (5.109)$$

が成立すればよい。従って、式 (5.102) から式 (5.104) と、式 (5.107) から式 (5.109) の6つの式から係数が決定できる。

( $n=0$  のとき) 式 (5.102) より、 $b_0 = 0$  なので、式 (5.107) より、 $a_0 = 0$

( $n=1$  のとき) 式 (5.108) より、 $a_1 = -E_0 + \frac{b_1}{a^3}$  なので、式 (5.103) より、

$$\varepsilon \left( -E_0 + \frac{b_1}{a^3} \right) = -\varepsilon_0 E_0 - 2\varepsilon_0 \frac{b_1}{a^3} \iff b_1 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 a^3$$

と求められる。これより、 $a_1 = \frac{-3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0$  である。

( $n=2$  のとき) 式 (5.109) より、 $a_n = (n+1) \frac{b_n}{a^{2n+1}}$  なので、式 (5.104) より、

$$\varepsilon n(n+1) \frac{b_n}{a^{n+2}} = -\varepsilon_0 (n+1) \frac{b_n}{a^{n+2}} \iff b_n = 0$$

と求められる。これより、 $a_n = 0$  である。

ゆえに、球の内外の電位は、求めた係数を式 (5.98) と式 (5.99) に代入して、

$$V(r, \theta) = \begin{cases} -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} r \cos \theta & (r \leq a) \end{cases} \quad (5.110)$$

$$\begin{cases} -E_0 r \cos \theta + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta & (r \geq a) \end{cases} \quad (5.111)$$

である。 □

## 第 6 章 Poisson 方程式の解

静電場の基本的なことは第 4 章で紹介し、やや応用的な側面については第 5 章で紹介した。この第 6 章では電磁気学、特に静電場に関係する数学的な話をメインに取り上げる。第 4 章の 4.4 「Poisson 方程式」の部分で Poisson 方程式を紹介した。

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

この Poisson 方程式について、第 4 章では「解くことは容易ではない」といって、簡単な場合だけを解いた。この chapter では、解くのが難しい Poisson 方程式の一般解を求めることを考える。

その準備として、 $1/r^2$  の Laplacian が  $-4\pi\delta(\mathbf{r})$  とかけることを示す。また、Green 関数という考えを導入する。この 2 つの準備ができれば一般解を導出することができる。この chapter の内容は、「物理数学」と「電磁気学第一」の内容だけでなく、「量子力学第一」(工学部物理工学科が開講する学部 2 年生対象の量子力学の講義) や、信号処理に関する講義のいいところ取りをして、Poisson 方程式の一般解を求めるというゴールへ向かうこととする。

この章の内容ははっきり言って難しい。特に、section 6.1 と section 6.2 の一部は、駒場時代 (学部 1,2 年) では習わなかった「超関数」の話をしている。その部分は「へえ〜」と思いながら読めばよい。いや、読み飛ばしてもよい。

### 6.1 Dirac のデルタ関数 (発展)

繰り返しになるが、この section の内容は駒場時代 (学部 1,2 年) で習った内容ではなく、本 TeX ノートが取扱うレベルを逸脱している。ただ、筆者の興味と自己満足だけで書いている。この section は読み飛ばしても構わない。

超関数について詳しく書こうと思ったきっかけは、「信号処理論第二」(工学部計数工学科が開講する学部 3 年生対象の講義) で聞いた超関数の話が電磁気学にも応用できないかなあと思っただけからである。Wikipedia で「超関数」のページを読むと、凡人には理解できない話が書かれているが、そんなことを知っている必要はない。今から書くことだけわかればよい。(まあ、私が信号処理論第二の講義で習ったことだけど。)

#### 6.1.1 超関数とは何か? (発展)

5.1 「Dirac のデルタ関数」では、「通常関数の枠組みでは説明できない、通常関数の枠組みを超越した関数だから超関数という」的なことしか書いていないが、ここではマジメに<sup>(1)</sup>超関数について定義したい。そこで、まず最初に、汎関数という概念を定義する。

<sup>(1)</sup>「数学的に厳密に」という意味でマジメに定義すると理解できないので、この TeX ノートでは、「一般的な電磁気学の教科書よりは少しだけ正確に」という意味でマジメに定義する。

## 関数と汎関数

- 関数：実数 (または複素数) から、実数 (または複素数) への写像
- 汎関数：関数から実数 (または複素数) への写像

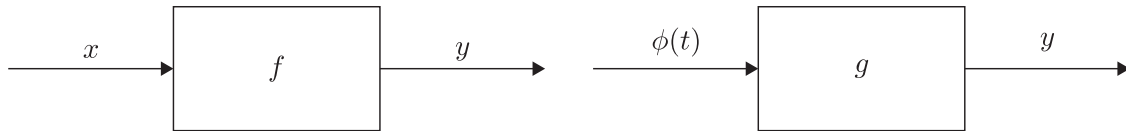


図 6.1 関数のイメージ

図 6.2 汎関数のイメージ

関数は、入力  $x$  を  $f$  で記述されるシステムに代入すると、 $y = f(x)$  という出力が得られるというシステムなのである。汎関数は、この入力に関数になっている。前の章でデルタ関数の性質として、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a) \quad (6.1)$$

を紹介したが、それは関数  $f(x)$  から  $x = a$  の時の値  $f(a)$  を取り出すシステムといえる。この点でデルタ関数  $\delta(t)$  は関数  $f(x)$  のある特定の値を取り出す汎関数といえる。

ここまでの説明を読むと、「合成関数  $g(f(x))$  は汎関数とどう違うのか？」という疑問が出てもおかしくない。合成関数との違いは、図を書くことでわかる。図 6.1 のシステムを 2 つ直列に繋いだものが合成関数  $g(f(x))$  である。

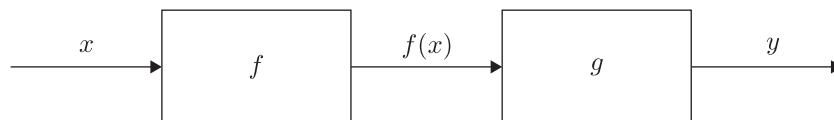


図 6.3 合成関数のイメージ

汎関数についてなんとなくわかったところで超関数を定義しよう。

## 超関数

**超関数**  $g(x)$  とは、関数  $\phi(x)$  に対して定義される汎関数で、線形性と連続性を満たすものをいう。

- 超関数  $g(x)$  が  $\phi(x)$  に対して割り当てられる値を  $N_g[\phi(x)]$  と表記することにする。つまり、 $g(x)$  と記述されるシステムに関数  $\phi(x)$  を入力した時の出力を  $N_g[\phi(x)]$  と記すことにする。
- 線形性：  $N_g[a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x)] = a_1N_g[\phi_1(x)] + a_2N_g[\phi_2(x)]$
- 連続性：  $\phi_m(x) \rightarrow 0$  ならば、  $N_g[\phi_m(x)] \rightarrow 0$

※ 超関数を  $g(x)$  と表記しているが、汎関数なので、入力の実数  $x$  ではなく、関数  $\phi(x)$  であることに注意。



### テスト関数

超関数は、(通常の) 関数  $\phi(x)$  から実数 (or 複素数) への写像である。この入力した関数 (超関数が作用した関数) は**テスト関数**と呼ばれる。

この T<sub>E</sub>X ノートでは、テスト関数として考える対象に制約をつける。テスト関数  $\phi(x)$  としては、無限回連続で微分可能で、 $|x| \rightarrow \infty$  の極限で  $x$  の任意のべきよりもさらに早くゼロに近づく関数のみを対象とすることにする。すなわち、

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^m| \cdot |\phi^{(n)}(x)| = 0 \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

が成立する関数を扱うことにする。この前提は電磁気学を考える上では問題ない。例えば電場や電位は基本的に無限遠方の電位や電場を 0 と考えている。電磁気学で扱う関数の多くは無限遠方で 0 というものが多い。今、変数  $x$  としているのでわかりづらいが、このような仮定を置くことは問題ないのである。

そして、テスト関数  $\phi(x)$  に超関数  $g(x)$  が作用することを、定積分のような表記で記すことにする。

$$N_g[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi(x) dx \quad (6.2)$$

このように記すのは、超関数の演算が、定積分の演算とうまく対応していることと関連がある。それについては、次の subsection で記す。

### 6.1.2 超関数の演算 (発展)

この subsection では、超関数の演算を紹介する。この subsection でも  $g(x)$  を超関数とし、 $\phi(x)$  をテスト関数とする。

#### 超関数の演算に関する基本公式

- 和:  $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)\phi(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x)\phi(x) dx \quad (6.3)$$

- シフト:  $g(x - x_0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x - x_0)\phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi(x + x_0) dx \quad (6.4)$$

- スケーリング:  $g(ax)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(ax)\phi(x) dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi\left(\frac{x}{a}\right) dx \quad (6.5)$$

- 微分 (導関数):  $\frac{dg(x)}{dx}$  <sup>(2)</sup>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg(x)}{dx} \phi(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{d\phi(x)}{dx} dx \quad (6.6)$$

<sup>(2)</sup> この「微分」の公式は部分積分みたいな考えをすればよい。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg(x)}{dx} \phi(x) dx &= [g(x)\phi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{d\phi(x)}{dx} dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{d\phi(x)}{dx} dx \end{aligned}$$

「 $g(x)\phi(x)$  の部分は  $\phi(x)$  を  $x \rightarrow \infty$  でゼロに近づく関数と仮定したから、0 とした」というような雰囲気だと思えばよい。

- $n$  次導関数:  $\frac{d^{(n)}g(x)}{dx^n}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{(n)}g(x)}{dx^n} \phi(x) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{d^{(n)}\phi(x)}{dx^n} dx \quad (6.7)$$

### 超関数を通常関数を使って表現する

超関数を通常関数を使って表現することができれば、取り扱いがかなり楽になる。超関数と通常関数が等価となる条件を記す。

テスト関数  $\phi(x)$  としては、

$$\phi(x) = \begin{cases} \text{non-0} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

というものを考える。ここでいう non-0 は、 $a \leq x \leq b$  の区間では、恒等的に 0 ではないということの意味している。

このとき、「通常関数  $f(x)$  と超関数  $g(x)$  が等価である ( $g(x) = f(x)$ )」とは、上の条件を満たす任意のテスト関数  $\phi(x)$  に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi(x) dx \quad (6.8)$$

が成立することと定義する。式 (6.8) の左辺は超関数としての写像を表し、右辺は  $f(x)\phi(x)$  の積分を表している。

### 6.1.3 デルタ関数の種々の性質と超関数的な視点 (発展)

ここまで記した超関数の性質を利用してデルタ関数を再定義する。

#### デルタ関数を超関数の視点で定義する

デルタ関数  $\delta(x)$  はテスト関数  $\phi(x)$  に対して、 $x = 0$  の時の  $\phi$  の値を割り当てる超関数として定義される。なお、テスト関数  $\phi(x)$  は原点で連続であればよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \phi(x) dx = \phi(0) \quad (6.9)$$

デルタ関数を「テスト関数  $\phi(x)$  に対して、 $x = 0$  の時の  $\phi$  の値を割り当てる」超関数とみれば、後は超関数の各種性質から、デルタ関数の各種性質を導出することができる。

- シフト

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \phi(x + x_0) dx = \phi(x_0) \quad (6.10)$$

- 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (6.11)$$

( $\because$  テスト関数  $\phi(x)$  を恒等的に 1 である関数とすればよい。)

- スケーリング

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (6.12)$$

- $f(x)$  が  $x = 0$  で連続なら、 $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$   
なぜなら、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\delta(x)\}\phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \{\delta(x)f(x)\}\phi(x) dx = f(0)\phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{f(0)\delta(x)\}\phi(x) dx$$

と式変形をすることができるからである。

- デルタ関数の微分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\phi(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi'(x) dx = -\phi'(0) \quad (6.13)$$

#### 6.1.4 一般の関数の超関数への拡張 (発展)

超関数は通常の関数と別物であることを考えると、非常に扱いにくい。そこで、一般の関数が超関数と同等に扱えるようにすることを考えたい。

そのシンプルな考え方は、超関数を作用させる操作が積分で書かれていることから、テスト関数  $\phi(x)$  に普通の関数  $f(x)$  をかけて積分したときの値が、テスト関数に超関数を作用させたときの値と等しいなら、その  $f(x)$  と超関数は等価であるとみなせばよい。

準備として、超関数と類似した次の演算を定義する。

一般の関数の超関数への拡張 (1)

テスト関数  $\phi(x)$  から実数 (or 複素数) への写像を一般の関数  $f(x)$  を用いて、

$$N_f[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x) dx \quad (6.14)$$

と定める。これは、超関数を定義する際に記した線形性と連続性を満たすので、 $\phi(x)$  に対して  $N_g[\phi(x)]$  を割り当てる写像は超関数とみなせる。

ということは、任意のテスト関数  $\phi(x)$  に対して、

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x) dx}_{f(x)\phi(x) \text{ の積分}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi(x) dx}_{\text{超関数の演算}}$$

が成立するなら、 $f(x)$  を用いた左辺の演算を超関数の演算と等価な演算とみなせる。

しかし、実際には任意のテスト関数  $\phi(x)$  に対して、上の式が成立するのはめったにない。そこで、ある関数列やパラメータをもつ関数の極限がこの性質を満たす場合に注目する。

## 一般の関数の超関数への拡張 (2)

- 一般の関数の列  $g_n(x)$  と超関数  $g(x)$ 、任意のテスト関数  $\phi(x)$  に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \phi(x) dx \quad (6.15)$$

が成立するとき、 $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$  と記すことにする。

- $t$  をパラメータとする一般の関数  $f(x; t)$  と超関数  $g(x)$ 、任意のテスト関数  $\phi(x)$  に対して、

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x; t) \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \phi(x) dx \quad (6.16)$$

が成立するとき、 $g(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(x; t)$  と記すことにする。

こうして、一般の関数を超関数に拡張する方法がわかると、デルタ関数を

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ +\infty & (x = 0) \end{cases}$$

と考えることに抵抗がなくなってしまう。5.1.2 「デルタ関数の近似」でも考えた Gauss 関数について再度考えよう。

$$f(x; \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

とおく。 $f(x; \sigma)$  は、5.1.2 でみた通り、 $\sigma \rightarrow 0$  の極限は  $x \neq 0$  では 0、 $x = 0$  では  $+\infty$  となる。

ここで、式 (6.16) が成立するかどうか考えよう。 $f(x; \sigma)$  は  $\sigma$  が 0 に近い時、 $x = 0$  近傍以外では 0 に近くなるので、積分を考える時、積分結果に影響を与えるのは  $\phi(x)$  の  $x = 0$  の近傍の値に限る。そのため、インテグラルの中の  $\phi(x)$  は  $\sigma \rightarrow 0$  の極限を考えている限りでは、 $\phi(0)$  と近似しても問題ない。

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x; \sigma) \phi(x) dx \approx \lim_{\sigma \rightarrow 0} \phi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \phi(0)$$

こうして、式 (6.16) が成立することが確認できたので、 $\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$  と書いても OK となる。

## 6.2 $1/r$ の Laplacian

前の section では電磁気学の本論から少し、いや大幅にずれて、超関数の話をした。この section では電磁気学に話を戻し、Poisson 方程式の解を考える上で重要な  $1/r^2$  の Laplacian について考える。

$\mathbf{r} = (x, y, z)$  とし、 $r = \|\mathbf{r}\|$  とすると、多くの電磁気学の教科書には

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}) \quad (6.17)$$

と書かれている。この section では、この式 (6.17) について考える。この section の作成においては、ちょうど発売された『グリフィス 電磁気学 I』(丸善出版)を参考にした。

### 6.2.1 $r \neq 0$ のときを考える

$\mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$  ( $\mathbf{e}_r$  は  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  方向の単位ベクトル) というベクトル場を考えよう。第 4 章の 4.1.1 で  $1/r$  の grad を求めた時、

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$$

という式を導いたので、 $\mathbf{v} = -\nabla \left( \frac{1}{r} \right)$  と書いても良い。

ここで、 $\text{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$  を求めてみよう。この  $\text{\LaTeX}$  ノートでは、球座標における div の公式を導出しているので、それを使うことにする<sup>(3)</sup>。38 ページの式 (3.26) より、 $r \neq 0$  では、

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \frac{1}{r^2} \right) = 0 \quad (6.18)$$

となる。

### 6.2.2 $r = 0$ のとき — 3 次元のデルタ関数 —

続けて、 $\nabla \cdot \mathbf{v}$  を原点を中心とする半径  $R$  の球の内部  $V$  で体積積分をすることを考えよう。この球の表面を  $S$  と書くことにする。すると、Gauss の発散定理より、

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV = \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS$$

となる。球面の法線ベクトル  $\mathbf{n}$  と  $\mathbf{r}$  の向きは同じなので、 $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$  となる。よって、 $\nabla \cdot \mathbf{v}$  の体積積分は、

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV = \int_S \frac{1}{r^2} dS = \frac{1}{R^2} \int_S dS = \frac{1}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi \quad (6.19)$$

となる。おかしいことが起きている。 $\nabla \cdot \mathbf{v}$  は  $r \neq 0$  で 0 なのに、体積積分が  $4\pi$  になっている。ここで式 (6.19) に注目すると、体積積分は  $R$  に依存しない。そのため、 $R$  を十分小さくとっても、体積積分は  $4\pi$  に

<sup>(3)</sup>

#### Remark

div の極座標表示は以下のようになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 V_1)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(V_2 \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_3}{\partial \phi}$$

なる。ということは、体積積分を0にさせないのは、 $r=0$ での $\nabla \cdot \mathbf{v}$ の値である。

さて、 $r=0$ の時の値を考えるために、Dirac のデルタ関数を3次元に拡張する。

### 3次元のデルタ関数

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) d\mathbf{r} = f(\mathbf{a}) \quad (6.20)$$

(積分区間として $\mathbb{R}^3$ と記したが、これは3次元空間全体で積分することを意味する。)

3次元のデルタ関数は基本的には1次元と同じである。6.1「Dirac のデルタ関数 (発展)」のように関数から実数または複素数への写像という考えで見ると、「テスト関数に対して $\phi(0,0,0)$ を対応させる演算」といえる。 $x, y, z$ の全てを0にした $\phi$ の値に対応させることから、

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (6.21)$$

と1次元のデルタ関数を3つ掛け合わせたものとみなせそうである。もし、式(6.21)のように書けるなら、式(6.20)の左辺は

$$(\text{左辺}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz f(x, y, z) \delta(x - a_x) \delta(y - a_y) \delta(z - a_z)$$

と書ける。この積分を $x, y, z$ の順番で実行すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) d\mathbf{r} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz f(x, y, z) \delta(x - a_x) \delta(y - a_y) \delta(z - a_z) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz f(a_x, y, z) \delta(y - a_y) \delta(z - a_z) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dz f(a_x, a_y, z) \delta(z - a_z) \\ &= f(a_x, a_y, a_z) = f(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

となる。

ということは、1次元の場合と同様に式(6.20)の $f(\mathbf{r})$ を空間全体で恒等的に1をとる関数とすれば、

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1 \quad (6.22)$$

が成立する。すると、式(6.19)は、

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV = 4\pi \int_V \delta(\mathbf{r}) dV \quad (6.23)$$

と書くことができる。 $\mathbf{v} = -\nabla(1/r)$ であることをふまえると、上の式は

$$\int_V \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) dV = -4\pi \int_V \delta(\mathbf{r}) dV$$

と書き直すこともできる。そして、空間 $V$ の任意性から左辺と右辺の被積分関数は等しくならないといけない。このことから、 $r=0$ では $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$ が成立する。ただ、デルタ関数を超関数的な見方ではなく、 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ 以外では0をとり、式(6.20)や式(6.22)を満たす関数と見れば、 $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$ は $r \neq 0$ でも成立する。

$1/r$  のラプラシアン

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad (6.24)$$

## 6.2.3 超関数的視点から考える (発展)

式 (6.24) を変形すると、

$$\delta(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right)$$

である。3次元のデルタ関数を一般の関数の超関数への拡張として考える。そのために、式 (6.16) のように適当なパラメーターを持つ関数の極限を考えることにしよう。ここでは、『グリフィス 電磁気学 I』の問題 1.64 に出てくる  $\varepsilon$  をパラメーターとする関数  $D(r, \varepsilon)$  を考える。

$$D(r, \varepsilon) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + \varepsilon^2}} \right) \quad (6.25)$$

この  $D(r, \varepsilon)$  に対して、 $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限をとると、 $-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right)$  となる。

まず、 $D(r, \varepsilon)$  を変形しよう。 $r$  のみに依存するから、式 (3.28) (38 ページ) より、以下のようになる。

$$\begin{aligned} D(r, \varepsilon) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + \varepsilon^2}} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{2r}{(r^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{r^3}{(r^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{3r^2}{(r^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} + \frac{1}{r^2} \left( -\frac{3}{2} \right) \frac{r^3 \cdot 2r}{(r^2 + \varepsilon^2)^{5/2}} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{3\varepsilon^2}{(r^2 + \varepsilon^2)^{5/2}} \end{aligned} \quad (6.26)$$

これを受けて  $D(r, \varepsilon)$  のグラフを図示すると、図 6.4 と図 6.5 のようになる。 $\varepsilon$  が 0 に近づくほど、 $r \neq 0$  ではほぼ 0 で、 $r = 0$  では非常に大きな値をとる関数になることがわかる。

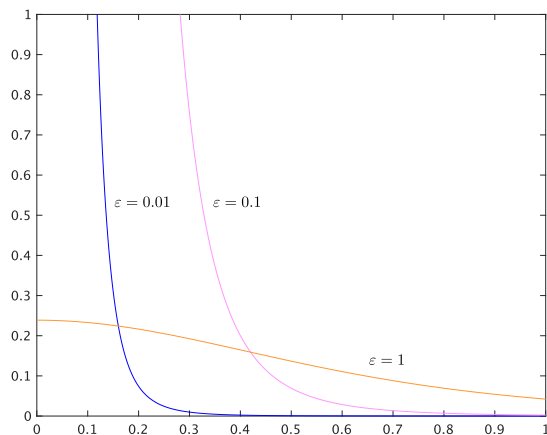


図 6.4  $D(r, \varepsilon)$  のグラフ： $0 \leq x \leq 1$  の部分

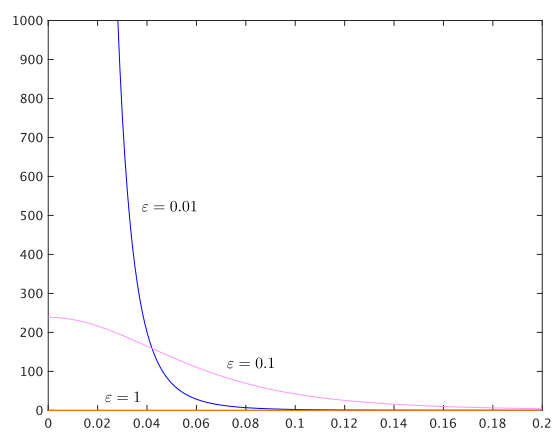


図 6.5  $D(r, \varepsilon)$  のグラフ： $0 \leq x \leq 0.2$  の部分

式 (6.16) を利用することを考える。 $D(r, \varepsilon)$  が  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限で  $\delta(\mathbf{r})$  となることから、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} D(r, \varepsilon) \phi(r) d\mathbf{r} = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{0}) \quad (6.27)$$

が成立することを確かめれば、 $\delta(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right)$  であることが言える。

$D(r, \varepsilon)$  は  $\varepsilon$  が 0 に近い時、 $r = 0$  の近傍以外では 0 に近くなるので、積分を考える時、積分結果に影響を与えるのは  $\phi(r)$  の  $r = 0$  の近傍の値に限る。そのため、 $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限を考えている限りでは、 $\phi(\mathbf{0})$  と近似しても問題ない。

さて、 $d\mathbf{r} = dx dy dz$  は極座標では  $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$  とかけるから、式 (6.27) の積分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} D(r, \varepsilon) \phi(r) d\mathbf{r} &= \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \phi(\mathbf{0}) \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{3\varepsilon^2}{(r^2 + \varepsilon^2)^{5/2}} \cdot \underbrace{r^2 \sin \theta}_{\text{Jacobian}} \\ &= \phi(\mathbf{0}) \cdot \frac{3\varepsilon^2}{4\pi} \left( \int_0^\infty \frac{r^2}{(r^2 + \varepsilon^2)^{5/2}} dr \right) \left( \int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) \left( \int_0^{2\pi} d\phi \right) \\ &= \phi(\mathbf{0}) \cdot 3\varepsilon^2 \int_0^\infty \frac{r^2}{(r^2 + \varepsilon^2)^{5/2}} dr \end{aligned}$$

この積分を計算するために、 $r = \varepsilon \tan \varphi$  と置換すると、

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} D(r, \varepsilon) \phi(r) d\mathbf{r} &= \phi(\mathbf{0}) \cdot 3\varepsilon^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\varepsilon^2 \tan^2 \varphi}{\{\varepsilon^2(1 + \tan^2 \varphi)\}^{5/2}} \frac{\varepsilon}{\cos^2 \varphi} d\varphi \\ &= \phi(\mathbf{0}) \cdot 3 \int_0^{\pi/2} \tan^2 \varphi \cdot \cos^5 \varphi \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi \\ &= \phi(\mathbf{0}) \cdot 3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi \\ &= \phi(\mathbf{0}) \end{aligned}$$

以上より、 $\delta(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right)$  であることが超関数の視点からも確かめられた。

## 6.2.4 湯川ポテンシャルについて再び考える

4.4.3 「Poisson 方程式を利用する」で考えた例題 4.6 を振り返ってみよう。

### 例題 4.6

空間の電位分布が、湯川ポテンシャル  $\phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^{-r/\lambda}}{r}$  に従うとき、 $r > 0$  での電荷分布  $\rho(r)$  を求めよ。

この問題は Poisson 方程式  $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$  を使えば  $\rho(r)$  が求められる。

$$\rho(r) = -\frac{q}{4\pi} \frac{1}{r} \cdot \frac{e^{-r/\lambda}}{\lambda^2} \quad (6.28)$$

ただ、これは  $r > 0$  の時の値である。では、 $r = 0$  の時の値は何か。 $r$  が 0 に近づくほど、 $\phi(r)$  の式で、 $1/r$



の寄与が大きくなるので、 $e^{-r/\lambda} \approx 1$  と近似しても問題ない。すると、 $\phi(r) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$  となるから、 $r \rightarrow 0$  における  $\rho(r)$  は以下ようになる。

$$\rho(r) = -\epsilon_0 \nabla \phi(r) = -\epsilon_0 \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = q \cdot \delta(r) \quad (6.29)$$

式 (6.28) と式 (6.29) の結果を図示しよう。デルタ関数を  $r = 0$  で無限大、それ以外では 0 と考えて図示すると、図 6.6 のようになる。

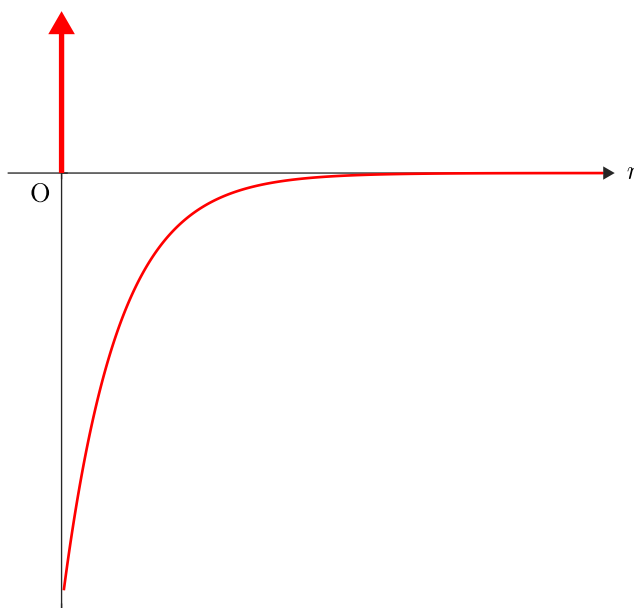


図 6.6 電位分布  $\phi(r)$  が湯川ポテンシャルに従う時の電荷分布  $\rho(r)$

デルタ関数を  $r = 0$  で無限大、それ以外では 0 と考えれば、 $r > 0$  の部分に  $\rho(r)$  に  $q \cdot \delta(r)$  を足しても問題ないことになる。このことから、湯川ポテンシャルの下での  $r > 0$  における電荷分布  $\rho(r)$  を

$$\rho(r) = q \cdot \delta(r) - \frac{q}{4\pi} \frac{1}{r} \cdot \frac{e^{-r/\lambda}}{\lambda^2} \quad (6.30)$$

と演習書に書かれていることが多い。この式 (6.30) で  $r \rightarrow 0$  とすると、 $\infty - \infty$  となり不定となるので、 $r = 0$  でも成り立つ式であると言い切れるかどうかは怪しい。

### 6.2.5 湯川ポテンシャルの下での電荷分布の全空間積分

ここで、次の問題を考えてみよう。この問題の答えとしては「 $-q$  である」と考える派と、「0 である」と考える派の 2 つがあるらしい。少なくとも、筆者はそう思っている。あなたはどちらの立場ですか<sup>(4)</sup>。

<sup>(4)</sup> クラスの試験対策委員として、担当教授の期末試験の過去問を解いているときに、この例題 6.1 と同じ問題を解くことになった。問題を解いた後、クラスの方々に答えはこうではないかと提示したときに、クラスの方々からいくつかの指摘を受けたことを頭の片隅に置いて、この 6.2.5 を記している。

私は、試験対策委員として間違いのないように、電磁気学の演習書も調べ、全電荷は 0 と結論づけた。しかし、クラスの方々からは  $-q$  の方が正しいのではないかと指摘を受けた。

あなたはこの 6.2.5 の部分を読んでどちらが正しいと考えるだろうか。

**例題 6.1**

空間の電位分布が、湯川ポテンシャル  $\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-r/\lambda}}{r}$  に従うとき、空間全体の全電荷量  $Q$  を求めよ。

**解答**

まず、答えが  $-q$  であるという人の考え方を記すと以下のようになる。

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_{\mathbb{R}^3} \rho(r) dV = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \left( -\frac{q}{4\pi} \frac{1}{r} \cdot \frac{e^{-r/\lambda}}{\lambda^2} \right) \cdot r^2 \sin\theta \\
 &= -\frac{q}{\lambda^2} \int_0^\infty r e^{-r/\lambda} dr \\
 &= -\frac{q}{\lambda^2} \left\{ \left[ -\lambda r e^{-r/\lambda} \right]_0^\infty + \lambda \int_0^\infty e^{-r/\lambda} dr \right\} \\
 &= -\frac{q}{\lambda} \left[ -\lambda e^{-r/\lambda} \right]_0^\infty \\
 &= -q
 \end{aligned}$$

$r$  の積分は 0 から  $+\infty$  であることから、 $\rho(r)$  の積分は  $r > 0$  の部分の式を使って積分することは間違いない。でも、6.2.4 で記した通り、 $r > 0$  の部分は、

$$\rho(r) = q \cdot \delta(r) - \frac{q}{4\pi} \frac{1}{r} \cdot \frac{e^{-r/\lambda}}{\lambda^2}$$

と書いてもよい。こちらを使って積分をすると、結果は 0 になる。これが答えが 0 であるという人の立場である。 $q \cdot \delta(r)$  の全空間積分はデルタ関数の性質より  $q$  になって、上の積分を相殺する。□

**6.3 Poisson 方程式の解 (1)**

4.1 節で電位に関する次の式を導いた。

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_K \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (4.7)$$

この式は Coulomb の法則を認めて、議論を先に進めることで得られる 1 つの式であることは 4.1 節を読めばわかる。また、本 TeX ノートでは Coulomb の法則から、次の 2 つの式が得られるということについても 4.1 節と 4.2 節で触れている。

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (4.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.24)$$

この section 以降では、Poisson 方程式  $\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  が与えられたときに、 $\phi(\mathbf{r})$  が式 (4.7) のように書くことを示す<sup>(5)</sup>。その前に、6.3 節では式 (4.7) が Poisson 方程式を満たすことを示す。 $\phi(\mathbf{r})$  を Poisson 方程式に代入し、積分領域  $K$  を  $K_\epsilon$  と  $K'$  に分離する。

<sup>(5)</sup>ここまでの議論は Coulomb の法則を認めてから電磁気学の議論を展開していくというスタイルをとっている。これと対立する方法で電磁気学の議論を展開している本の一つに『マクスウェル方程式から始める電磁気学』という本がある。

『いつまでクーロンの法則から始めるのか — 大学の電磁気学教育』([https://www.jstage.jst.go.jp/article/peu/22/2/22\\_75/\\_article/-char/ja](https://www.jstage.jst.go.jp/article/peu/22/2/22_75/_article/-char/ja)) によると、Coulomb の法則からスタートして Maxwell 方程式にたどり着くまでの一連の電磁気学の議論は、Maxwell 方程式が電磁気学の完全な体系を与える基本法則であると確立されるより前の電磁気学の教育の方法が影響しているらしい。Maxwell 方程式が基本法則であると示されるより前に、様々な電磁気学的な現象は発見され、そこからスタートして Maxwell

- $K_\varepsilon$ : 観測点  $\mathbf{r}$  を中心とする半径  $\varepsilon$  の球の内部。  $\varepsilon$  は微小。
- $K'$ : 領域  $K$  のうち、 $K_\varepsilon$  の外側の部分。

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_K \nabla^2 \left( \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_K \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{K_\varepsilon} \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{K'} \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'\end{aligned}$$

$\nabla^2$  は  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  に関する微分であり、 $\mathbf{r}' = (x', y', z')$  に関する微分ではないことに注意すると、 $\rho(\mathbf{r}')$  には  $\nabla^2$  はかからない。また、 $K'$  上の内部には観測点  $\mathbf{r}$  が含まれないので  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \neq 0$  である。すると、式 (6.18) より、 $K'$  の積分の方の  $\nabla^2(\cdot)$  は 0 になる。よって、

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{K_\varepsilon} \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \quad (6.31)$$

となる。

#### Remark

一般に、任意の 2 変数  $x$  と  $x'$  の差の関数  $f(x - x')$  を微分した時、次の式が成立する。

$$\frac{\partial f(x - x')}{\partial x} = - \frac{\partial f(x - x')}{\partial x'} \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial^2 f(x - x')}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x - x')}{\partial x'^2} \quad (6.33)$$

#### 証明

$k = x - x'$  とおくと、

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x - x')}{\partial x} &= \frac{\partial f(k)}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial f(k)}{\partial k} \\ \frac{\partial f(x - x')}{\partial x'} &= \frac{\partial f(k)}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x'} = - \frac{\partial f(k)}{\partial k}\end{aligned}$$

となるから、式 (6.32) は成立する。2 回微分の式については、式 (6.32) の  $f$  を  $\frac{\partial f(x - x')}{\partial x}$  や  $\frac{\partial f(x - x')}{\partial x'}$  とすることで示すことができる。  $\square$

方程式にたどり着いたという歴史的な流れを再現するということしかできなかった時代の教育法が今も踏襲されていて、この  $\text{\LaTeX}$  ノートでもその方法と同じように Coulomb の法則からスタートしている。

先に紹介した記事の筆者は Coulomb の法則からスタートする電磁気学の教授法について、次のように記している。

電磁気学全体の論理構造を一つの完成した建築物に例えるなら、全体の設計図に従って建築をすすめるのではなく、全体設計図を隠したまま、いわば、「家族が増えたので家を建て増す」という感じの建て増し方式です。

重要な事実、自然現象を都合の良いタイミングで登場してくることをどう思うか。東大で周囲の人の話、ツイートを見ていると、電磁気学、特に学部 1、2 年で学ぶ Coulomb の法則からスタートして Maxwell 方程式を導くという電磁気学の議論の展開はつまらないという人が多いような気がする。私は学部 1 年の時の「電磁気学 A」ではこの方法で電磁気学の基礎を一通り学び、学部 2 年の「電磁気学第一」では逆に Maxwell 方程式からスタートする電磁気学を学んだ。個人的には後者の方が面白いように感じた。学部 2 年の授業ということで、学部 1 年の時は、数学的に難しい部分があって結論だけ紹介されていたことが、しっかり紹介されたこともあるが、Maxwell 方程式から電磁気学の基本的な現象が次々と得られるという流れがなんか気に入った。皆さんはどう思いますか？

この Remark を使うと、式 (6.31) の  $\mathbf{r}$  にかかる  $\nabla$  を、 $\mathbf{r}'$  にかかる  $\nabla'$  に置き換えてもよい。すると、

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{K_\epsilon} \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{K_\epsilon} \rho(\mathbf{r}') \nabla'^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{K_\epsilon} \rho(\mathbf{r}') \cdot \operatorname{div}' \left[ \operatorname{grad}' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] dV'\end{aligned}$$

となる。ここで、領域  $K_\epsilon$  では  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{r}'$  の距離は十分小さいので、 $\rho(\mathbf{r}') \approx \rho(\mathbf{r})$  とみなせるから、以下のようになる。Gauss の発散定理を用いて体積積分を面積分に変えた。

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \int_{K_\epsilon} \operatorname{div}' \left[ \operatorname{grad}' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] dV' \\ &= \frac{\rho(\mathbf{r})}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial K_\epsilon} \left[ \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] \cdot \mathbf{n}' dS\end{aligned}\tag{6.34}$$

さて、今、 $\mathbf{r}'$  は半径  $\epsilon$  の球の表面上の点なので、

$$\nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{n}' = \nabla' \left( \frac{1}{\epsilon} \right) \cdot \mathbf{e}_r = -\frac{1}{\epsilon^2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = -\frac{1}{\epsilon^2}$$

となる。すると、式 (6.34) の面積分は以下のようになる。

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) &= \frac{\rho(\mathbf{r})}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial K_\epsilon} \left( -\frac{1}{\epsilon^2} \right) dS \\ &= \frac{\rho(\mathbf{r})}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( -\frac{1}{\epsilon^2} \right) \cdot 4\pi\epsilon^2 = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

以上より、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_K \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \tag{4.7}$$

が Poisson 方程式を満たすことが示された。次の section からは Poisson 方程式の解がこのように書けることを示していく。

## 6.4 Green 関数

6.4 節では物理学では多々登場する Green 関数を紹介し、電磁気学の Poisson 方程式ではどのように利用されるかを記す。Green 関数と類似する概念として、工学の分野で登場するインパルス応答があるが、似て非なる概念なので、取り扱いには注意を要する。まず、6.4.1 では本論とは少しそれるがインパルス応答を紹介し、6.4.2 で Green 関数を紹介することとする。

### 6.4.1 インパルス応答とは何か？

まず、工学におけるインパルス応答について軽くふれる<sup>(6)</sup>。ある線形システムにインパルス  $\delta(t)$  を入力した時の応答をインパルス応答という。インパルス応答を  $\mathcal{L}[\delta(t)] = h(t)$  と表した時、このシステムに  $f(t)$  を入力した時の応答を考えてみよう。

<sup>(6)</sup>6.4.1 では、インパルス応答の説明では、関数の変数を  $t$  としている。工学分野ではインパルス応答といったら、システムにインパルスを入力した時の出力の時間変化のことを指し、時間 (time) を表す文字  $t$  がよく使われる。そこで、本 TeX ノートでもインパルス応答の説明では  $t$  を変数とする。

デルタ関数を使うと、 $f(t)$  は

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

と、 $f(t)$  と  $\delta(t)$  の畳み込みで表される。ちなみに、 $f(t)$  と  $\delta(t)$  の畳み込みを  $f(t) \otimes \delta(t)$  と記す。すると、 $f(t)$  を線形システムに入力した時の応答は、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \mathcal{L}[\delta(t - \tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

と、 $f(t)$  とインパルス応答  $\mathcal{L}[\delta(t)] = h(t)$  の畳み込みで表される。

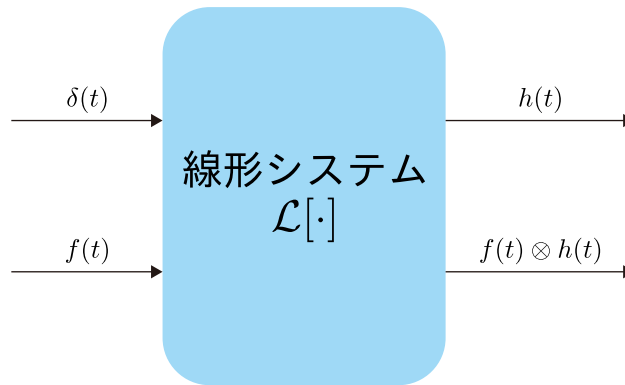


図 6.7 インパルス応答と線形システム

#### 6.4.2 Green 関数とは何か？

今度は Green 関数について記す。6.4.2 では変数を  $r$  とする。インパルス  $\delta(r)$  を入力した時の応答がインパルス応答  $\mathcal{L}[\delta(r)] = h(r)$  であった。逆に、その線形システム (線形演算子) に何を入力するとデルタ関数になるかを考えたい。その答えが **Green 関数**である。

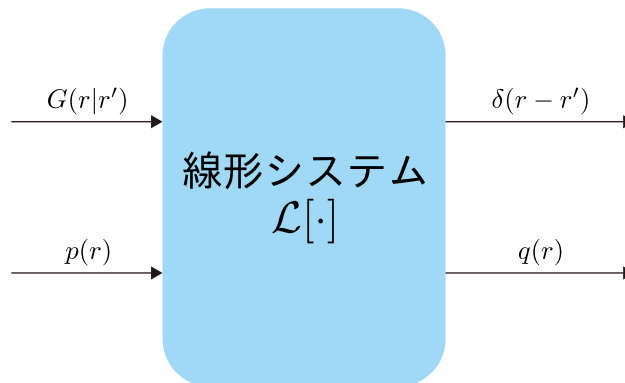


図 6.8 Green 関数と線形システム

$\mathcal{L}[G(r|r')] = \delta(r - r')$  となる  $G$  がわかっているとす。何かの入力に対して、出力が  $q(r)$  であるとわかっているとき、その入力を求める方法を考える。 $q(r)$  は  $q(r)$  とデルタ関数  $\delta(r)$  の畳み込みとして表すことができるから、

$$\begin{aligned} q(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(r - r') q(r') dr' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}[G(r|r')] q(r') dr' \\ &= \mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{\infty} G(r|r') q(r') dr'\right] \end{aligned}$$

となり、入力を  $p(r)$  とすると、

$$p(r) = \int_{-\infty}^{\infty} G(r|r') q(r') dr' \quad (6.35)$$

と表すことができる。ここに登場した  $G$  のことを **Green 関数** という。

## 6.5 Poisson 方程式の解 (2)

### 6.5.1 Poisson 方程式の解 — 数学的な結論 —

ここまで準備ができると Poisson 方程式を解くことが可能になる。Poisson 方程式  $\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$  において、 $\nabla^2(\cdot)$  がシステムを表す線形演算子なので、 $\nabla^2 G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  となる  $G$  がわかっているれば、式 (6.35) より、

$$\phi(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \left(-\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0}\right) dV' \quad (6.36)$$

となる。

6.2 節で  $1/r$  の Laplacian を求めた。その時に得られた式 (6.24) より、

$$\nabla^2 \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r}\right) = \delta(\mathbf{r})$$

が成立する。そのため、 $\nabla^2 G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  となる  $G$  は

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

である<sup>(7)</sup>。故に、Poisson 方程式の解は、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_K \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

となる。

---

<sup>(7)</sup>  $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  が  $\nabla^2 G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  を満たすのは確かだが、これ以外にも  $\nabla^2 G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  を満たす

関数があるかもしれない。その辺の議論を正確に行うには、複素関数論や Fourier 解析などが必要になってくる。この TeX ノートは私が大学 2 年生までに習った数学のレベルで議論できる内容を取り上げようと思うので、本論では詳細を省く。付録編にここで省いた数学的な議論をのせている。

### 6.5.2 Poisson 方程式の解 — 電磁気学的な結論 —

ここまではデルタ関数との畳み込みを利用して、式 (6.36) のような式を導いた。6.5.2 では別の方法で、電磁気学的な方法で式 (6.36) を導く方法を示す。どんな方法であれ、式 (6.36) を導くことができれば、結論は同じになる。

Poisson 方程式は、以下のように書ける<sup>(8)</sup>。

$$\nabla'^2 \phi(\mathbf{r}') = -\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0} \quad (6.37)$$

一方、Green 関数についてはその定義より、次のように書ける。

$$\nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (6.38)$$

ここで、式 (6.38) の両辺に  $\phi(\mathbf{r}')$  をかけたものと、式 (6.37) の両辺に  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  をかけたものの差について考えてみよう。

$$\nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \phi(\mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla'^2 \phi(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \phi(\mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \left( -\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0} \right) \quad (6.39)$$

この両辺を  $\mathbf{r}$  を内部に含む領域  $\Omega$  で  $\mathbf{r}'$  について積分すると、

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{ \nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \phi(\mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla'^2 \phi(\mathbf{r}') \} dV' \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \phi(\mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \left( -\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0} \right) \right\} dV' \\ &= \phi(\mathbf{r}) - \int_{\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \left( -\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0} \right) dV' \end{aligned} \quad (6.40)$$

となる。後は、この式の左辺の量を評価していく。結論を先に書くと、この左辺が 0 であると評価できて、

$$\phi(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \left( -\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0} \right) dV' \quad (6.36)$$

が得られる。ここで、ベクトル解析の公式を一つ紹介する<sup>(9)</sup>。

#### Remark

$f, g$  をスカラー関数とする。

$$\operatorname{div}[(\operatorname{grad} f) \cdot g] = (\nabla^2 f) \cdot g + (\operatorname{grad} f) \cdot (\operatorname{grad} g) \quad (6.41)$$

<sup>(8)</sup>  $\nabla$  に ' をつけたのは、 $\mathbf{r}' = (x', y', z')$  に関する偏微分であることを強調するためである。

<sup>(9)</sup> 式 (6.41) では  $\cdot$  を用いている。右辺第 2 項の  $\cdot$  のみベクトルの内積を表している。この TeX ノートでは、 $\cdot$  を多用しているが、文脈に応じてベクトルの内積を表すのか、通常の掛け算の積を表すのかに注意して読んでほしい。

## 証明

愚直に左辺を計算して、右辺と一致することを確認する。

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \cdot g \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \cdot g \right) \\
 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot g + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot g + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cdot g + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} \\
 &= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \cdot g + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} \right) \\
 &= (\nabla^2 f) \cdot g + (\text{grad} f) \cdot (\text{grad} g) \\
 &= (\text{右辺})
 \end{aligned}$$

□

この式 (6.41) を利用することで、次の式が成立することがすぐわかる。

$$\text{div}[(\text{grad} f) \cdot g - (\text{grad} g) \cdot f] = (\nabla^2 f) \cdot g - (\nabla^2 g) f \quad (6.42)$$

すると、式 (6.42) と Gauss の発散定理より、

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \{ \nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \phi(\mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla'^2 \phi(\mathbf{r}') \} dV' \\
 &= \int_{\Omega} \nabla' \cdot \{ (\nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \phi(\mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla' \phi(\mathbf{r}')) \} dV' \\
 &= \int_{\partial\Omega} \{ (\nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \phi(\mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla' \phi(\mathbf{r}')) \} \cdot \mathbf{n}' dS' \quad (6.43)
 \end{aligned}$$

となる。

ここで、領域  $\Omega$  として、点  $\mathbf{r}$  を中心とする半径  $R$  の球の内部を選ぶこととしよう。ただし、 $R$  は十分大きいとする。6.2 節の結果から、

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

となる。そのため、式 (6.43) は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \{ \nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \phi(\mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla'^2 \phi(\mathbf{r}') \} dV' \\
 &= \int_{\partial\Omega} \left\{ -\frac{1}{4\pi} \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) \cdot \phi(\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R} \cdot \nabla' \phi(\mathbf{r}') \right\} \cdot \mathbf{n}' dS' \\
 &= \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R^2} \cdot \phi(\mathbf{r}') dS' + \frac{1}{4\pi R} \int_{\partial\Omega} \nabla' \phi(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' dS' \quad (6.44)
 \end{aligned}$$

$R$  を十分大きくとると、球面領域  $\partial\Omega$  上での電位  $\phi(\mathbf{r}')$  は 0 になる。そのため、式 (6.44) の面積分は 0 になる。ゆえに、式 (6.40) の左辺は 0 になるから、

$$\phi(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \left( -\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0} \right) dV' \quad (6.36)$$

が成立することがわかる。



## 第III部

## 静磁場



## 第 7 章 静磁場の基本法則

第 1 章、第 4 章～第 6 章では、クーロンの法則からスタートして、静電場の特徴を記した。クーロンの法則では空間上のある点に留まっている電荷が周囲に及ぼす影響を考えた。ここからは、空間上の動く電荷が周囲に与える影響について考える。空間上を動く電荷は**電流**という概念で表現され、電流により作られる場は**磁場**と呼ばれる。第 7 章では時間変動のない磁場、**静磁場**について考える。

静磁場についてどのように説明するのが良いのだろうか。静電場の時に Coulomb の法則を認めて議論を進めたのと同様に、この TeX ノートでは静電場での Coulomb の法則に対応する Biot-Savart の法則を認めて先に進めることにする。ただ、その前に「電流と電荷保存則」、「電流に働く磁気力」の 2 つについて記して、静磁場に関する話の準備をする。

### 7.1 電流と電荷保存則

#### 7.1.1 電流密度と電流の定義

Wikipedia<sup>(1)</sup>では、電流について「電子に代表される荷電粒子の移動に伴う電荷の移動 (電気伝導) のこと」と記されている。電流は電荷の 3 次元空間上の移動であるので、電流を数式で表現する際はベクトルが用いられる。このベクトルは**電流密度ベクトル**と呼ばれるベクトルで、 $\mathbf{j}$  と表す<sup>(2)</sup>。電流密度ベクトル  $\mathbf{j}$  の向きと大きさは次のように定めることとする。

- 大きさ：電荷の流れに垂直な面を単位面積あたり、単位時間あたりに通過する電荷の量
- 向き：電荷の運動の方向

この定義から、左側に動く負の電荷と右側に動く正の電荷は同じ電流をもたらすといえる。

さて、上の定義から、空間上の微小面 (面積  $\Delta S$ ) を単位時間に流れる電気量は、この微小面の単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とすると、 $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \Delta S$  とかける。電流  $I$  は「任意の面  $S$  を単位時間あたりに通過する全電荷」と定義され、

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \quad (7.1)$$

となる。

#### 7.1.2 電流密度と電荷の移動速度の関係

次に、電流密度と電荷の移動速度の関係を見てみよう。空間上に電荷の分布があり、その平均の運動が速度  $\mathbf{v}$  の運動であるとする。図 7.1 のような微小面積  $\Delta S$  をもつ面を考える。この面の単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とする。微小時間  $\Delta t$  の間にこの面を通過する電荷量を考える。電流密度ベクトルを  $\mathbf{j}$  とすると、式 (7.1) より、この面を単位時間に貫く電気量は

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \Delta S \quad (7.2)$$

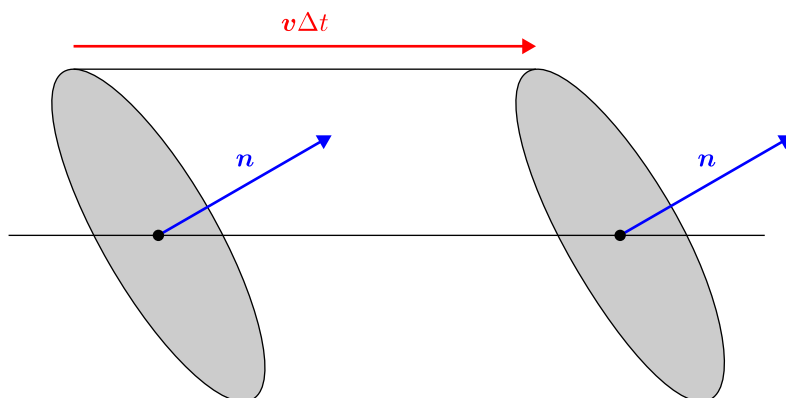


図 7.1 単位時間に面を貫く電荷の計算

時間  $\Delta t$  の間に微小面積  $\Delta S$  をもつ面を通過する電荷は、図 7.1 のような平行な底面をもつ立体の内部にある。この立体の体積は、 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta t \Delta S$  と表せるので、通過する電荷量は電荷密度を  $\rho$  とすると、

$$\Delta Q = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta t \Delta S$$

と書ける。これより、微小面を通過する電流は

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta S \quad (7.3)$$

と書ける。式 (7.2) と式 (7.3) より、電流密度ベクトル  $\mathbf{j}$  と電荷の平均移動速度  $\mathbf{v}$  の間には、

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \quad (7.4)$$

の関係があることがわかる。

### 7.1.3 電荷保存則

最後に、電流に関する性質で最も重要な電荷保存則を記す。電流  $I$  は「任意の面  $S$  を単位時間あたりに通過する全電荷」により定義される。ここで、この面  $S$  を球面のような閉曲面としよう。この時、閉曲面  $S$  を単位時間あたりに通過する全電荷は、

$$I = \int_{\text{閉曲面 } S} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$

となる。電荷は急に湧き出てくるものではないので、閉曲面  $S$  を通過したら、必ず閉曲面内部にある電荷量は減少する。そのため、閉曲面  $S$  を単位時間あたりに通過する全電荷は、単位時間あたりの電荷の減少量と一致する。これを式で書くと、以下のようになる。

$$I = -\frac{d}{dt}(Q_{\text{内部}}) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{閉曲面内部}} \rho dV$$

と書ける。

以上のことから、次の式が成立する。

$$\int_{\text{閉曲面 } S} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{閉曲面内部}} \rho dV \quad (7.5)$$

<sup>(1)</sup><https://ja.wikipedia.org/wiki/電流>

<sup>(2)</sup>高校物理では、電流は  $I$ ,  $i$  を使うことが多いが、この TeX ノートを含め、大学レベルの電磁気学の教科書では  $j$  が使われる。これは虚数単位、2 乗して  $-1$  となる虚数を  $i$  と表現するためである。ただ、工学系、特に電気系では電流に  $i$  を使う習慣があるため、2 乗して  $-1$  となる虚数は  $j$  と書く。

この式が積分形で表現された**電荷保存則**である。

式 (7.5) の左辺に Gauss の発散定理を適用すると、

$$\int_{\text{閉曲面内部}} \nabla \cdot \mathbf{j} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{閉曲面内部}} \rho dV \quad (7.6)$$

となる。閉曲面  $S$  は任意なので、被積分関数は一致する。ゆえに、

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (7.7)$$

が成立する。これが微分形で表現された**電荷保存則**である。

#### 電荷保存則

- 積分形：  $\int_{\text{閉曲面 } S} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{閉曲面内部}} \rho dV$
- 微分形：  $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

## 7.2 電流に働く磁気力

### 7.2.1 ローレンツ力

## 7.3 Biot-Savart の法則

## 7.4 ベクトルポテンシャル

## 7.5 アンペールの法則



## 第 8 章 静磁場の応用問題

---

- 8.1 磁気双極子
- 8.2 定常電流の流れるコイルに作用する力
- 8.3 電磁場の相対性
- 8.4 静磁場に関する応用問題





## 第IV部

# 時間変動する電場と磁場



## 第 9 章 静電場・静磁場の式の修正

---

9.1 変位電流

9.2 電磁誘導

9.3 Maxwell 方程式



## 第 10 章      コイルを含む回路の性質

---

10.1    自己インダクタンスと相互インダクタンス

10.2    磁気エネルギー



## 第 11 章 電磁波

---

### 11.1 波動方程式

### 11.2 電気双極子放射





第Ⅴ部

付録編



## 付録 A Fourier・Laplace 解析の基礎

第 6 章の後半で 3 次元の Green 関数について考えた。そこでは、

$$\nabla^2 \left( -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \right) = \delta(\mathbf{r})$$

が成立することから、Green 関数を

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

であるとして議論を進めた。

ここで、1 点気になることがある。上の  $-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  以外に、 $\nabla^2 G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  は存在しないだろうか。この章では、上の  $-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  が唯一解であることを証明する。

この証明を理解するにあたり、知っておくべきことが以下の 2 点であり、この章では、これらのベースにある Fourier 解析の基礎を記して、唯一解であることの証明を最後に記す。

- 偏微分方程式の解法。特に Fourier 変換を利用して解く方法。
- $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  の値。この定積分の値は  $\pi/2$  である。

### A.1 Fourier 級数展開

『東京大学工学教程 基礎系 数学 フーリエ・ラプラス解析』の「はじめに」に Fourier 解析について、次のように記されている。

Fourier 解析は、19 世紀初めに Joseph Fourier によって固体中の熱伝導を解析するために提案された理論に端を発している。これを用いることで、複雑な周期関数や非周期関数を簡便に記述・解析することが可能となるため、数学の一大分野をなすまでに発展し、物理学に限らず理工学のほとんどの分野で欠かすことのできない数学的なツールになっている。

ここに記されているように、Fourier 解析は理工学必須のツールである。私は、工学部の学生であるが、工学分野では、特に信号処理の分野で使われる。ただ、Fourier 解析は物理学の人間と工学の人間で、定義の仕方が少々異なっている場合があり、教科書を読むときは注意を要する。

私は数学科の人間ではないので、Fourier 解析は数学的なツール以上のものだとは思っていない。そのため、いきなり **Fourier 変換** を定義してもよいが、それでは Fourier 解析を理解できたとは言えないので、まず、**Fourier 級数展開** から始める。

### A.1.1 Fourier 級数展開とは何か？

**Fourier 級数展開**とは、簡単に言うと、有限区間で定義された関数を (無限個の) 三角関数の線形結合として書き表すことである。 $-L \leq x \leq L$  で関数  $f(x)$  をある係数  $a_0, a_1, a_2, \dots$  と  $b_1, b_2, \dots$  を利用して、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (\text{A.1})$$

と書き表すことが Fourier 級数展開である。

この subsection では、Fourier 級数展開の具体例を見ることにしよう。 $f(x) = |x|$  という関数は  $-\pi \leq x \leq \pi$  の範囲では、

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x \quad (\text{A.2})$$

と Fourier 級数展開することができる。ここで、 $n$  を 0 以上の整数として、 $f_n(x)$  を

$$f_n(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x \quad (\text{A.3})$$

とおくことにしよう。すると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  となる。 $f_x$  と  $f_0(x)$  のグラフを書くと、図 A.1 のようになる。また、 $f_x$  と  $f_2(x)$  のグラフを書くと、図 A.2 のようになる。2 つの図を見比べると、 $f_0(x)$  よりも  $f_2(x)$  をよく近似していることがわかる。

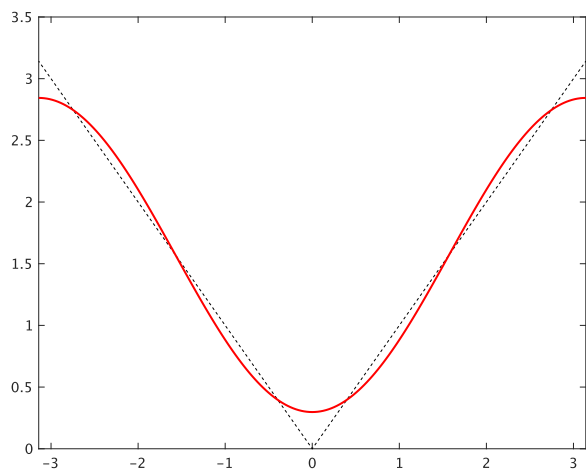


図 A.1  $f(x) = |x|$  と  $f_0(x)$  のグラフ

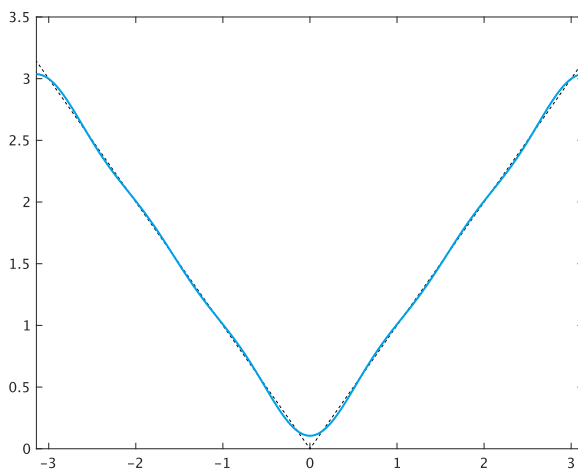


図 A.2  $f(x) = |x|$  と  $f_2(x)$  のグラフ

### A.1.2 Fourier 級数展開の係数の決定

では、式 (A.1) の係数  $a_0, a_1, \dots$  と  $b_1, b_2, \dots$  はどのように決定すれば良いのか？ここで三角関数に関する次の積分が活躍する。以下に挙げる 5 つの式は簡単に示すことができるので、証明は省略する。

## 三角関数に関する積分 (三角関数の直交性)

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad (\text{A.8})$$

上にあげた性質を使うと、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (\text{A.1})$$

と展開したときの係数を決定することができる。まず、式 (A.1) を  $-L$  から  $L$  の範囲で積分しよう。以下の式変形では、無限和と積分の順序を交換できることを認めることにする<sup>(1)</sup>。

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \int_{-L}^L \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx \\ &= \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{-L}^L a_n \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \int_{-L}^L b_n \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right\} \\ &= a_0 L \end{aligned}$$

これより、係数  $a_0$  は

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (\text{A.9})$$

で求められることがわかった。

続けて、式 (A.1) の両辺に  $\cos \frac{n\pi x}{L}$  ( $n \geq 1$ ) をかけて、両辺を  $-L$  から  $L$  の範囲で積分しよう。

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \int_{-L}^L \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right] \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \int_{-L}^L a_m \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \int_{-L}^L b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right\} \\ &= a_n L \end{aligned}$$

これより、係数  $a_n$  ( $n \geq 1$ ) は

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n \geq 1) \quad (\text{A.10})$$

<sup>(1)</sup>無限和と積分の順序を交換できる条件については、数学書を読んでほしい。この TeX ノートでは交換できることは認めるものとする。

で求められることがわかった。この式で  $n = 0$  としたものは式 (A.9) と一致することから、全ての  $n \geq 0$  に対して、

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n \geq 0) \quad (\text{A.11})$$

と書けることがわかる。式 (A.1) で、 $a_0/2$  と 2 で割っていることで、 $n = 0, n \geq 1$  のどちらでも共通の式を使って  $a_n$  を決定することができる。

同様に、式 (A.1) の両辺に  $\sin \frac{n\pi x}{L}$  ( $n \geq 1$ ) をかけて、両辺を  $-L$  から  $L$  の範囲で積分することで、

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n \geq 0) \quad (\text{A.12})$$

と書けることがわかる。

### Fourier 級数展開

関数  $f(x)$  を以下のように三角関数の線形結合で展開することを **Fourier 級数展開** という。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (\text{A.1})$$

このとき、 $a_n$  と  $b_n$  は以下のように求めることができる。

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (\text{A.11})$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (\text{A.12})$$

では、式 (A.11) と式 (A.12) を用いて、 $f(x) = |x|$  の  $-\pi \leq x \leq \pi$  の範囲での Fourier 級数展開を求めよう。

$$|x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (\text{A.13})$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx dx \quad (\text{A.14})$$

式 (A.14) の積分を計算しよう。 $b_n$  の方は  $|x|$  が偶関数で、 $\sin nx$  が奇関数なので、 $|x| \sin nx$  は奇関数となり、積分値は 0 となる。一方、 $a_n$  は頑張って計算すると、 $n \geq 1$  の時は

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} \{(-1)^n - 1\} = \begin{cases} -\frac{4}{n^2 \pi} & (n \text{ が奇数}) \\ 0 & (n \text{ が偶数}) \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

となる。また、 $n = 0$  の時は

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi \quad (\text{A.16})$$

となる。ゆえに、 $n$  が奇数なので、 $n = 2k + 1$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) と書き直すことで、

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x \quad (\text{A.2})$$

と Fourier 級数展開できることがわかる。

### A.1.3 複素 Fourier 級数展開

Fourier 級数展開は  $\sin$  と  $\cos$  で展開することである。三角関数はオイラーの公式を利用することで複素指数関数で表すことができる。そこで、Fourier 級数展開も複素指数関数を用いて表記することを考えよう。方針としては、式 (A.1) を次の 2 式を使って書き換えることで、複素指数関数表記を得ることにする。

$$\cos \frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{2} \left\{ \exp \left( i \frac{n\pi x}{L} \right) + \exp \left( -i \frac{n\pi x}{L} \right) \right\} \quad (\text{A.17})$$

$$\sin \frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{2i} \left\{ \exp \left( i \frac{n\pi x}{L} \right) - \exp \left( -i \frac{n\pi x}{L} \right) \right\} \quad (\text{A.18})$$

上の 2 式を式 (A.1) に代入すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n}{2} \left\{ \exp \left( i \frac{n\pi x}{L} \right) + \exp \left( -i \frac{n\pi x}{L} \right) \right\} + \frac{b_n}{2i} \left\{ \exp \left( i \frac{n\pi x}{L} \right) - \exp \left( -i \frac{n\pi x}{L} \right) \right\} \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n}{2} \left\{ \exp \left( i \frac{n\pi x}{L} \right) + \exp \left( -i \frac{n\pi x}{L} \right) \right\} - i \frac{b_n}{2} \left\{ \exp \left( i \frac{n\pi x}{L} \right) - \exp \left( -i \frac{n\pi x}{L} \right) \right\} \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n - ib_n}{2} \exp \left( i \frac{n\pi x}{L} \right) + \frac{a_n + ib_n}{2} \exp \left( -i \frac{n\pi x}{L} \right) \right] \end{aligned}$$

ここで、式 (A.11) と式 (A.12) で表される  $a_n, b_n$  について、 $n$  を  $-n$  に置き換えたものを考えると、

$$a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n$$

が成立するので、上の式は、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n - ib_n}{2} \exp \left( i \frac{n\pi x}{L} \right) + \frac{a_{-n} - ib_{-n}}{2} \exp \left( i \frac{(-n)\pi x}{L} \right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \in \mathbb{Z}}} \left[ \frac{a_n - ib_n}{2} \exp \left( i \frac{n\pi x}{L} \right) \right] \end{aligned}$$

と書ける。ここで、 $c_n$  を次のように設定する。

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2} & (n \neq 0 \text{ のとき}) \\ \frac{a_0}{2} & (n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

式 (A.12) の  $b_n$  の式に  $n = 0$  を代入すると  $b_0 = 0$  となるから、全ての  $n \in \mathbb{Z}$  に対して、

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad (\text{A.19})$$

としてよい。このように  $c_n$  を設定すると、 $\exp(0) = 1$  に注意すれば、

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \left( i \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (\text{A.20})$$

が得られる。これが Fourier 級数展開の複素指数関数表記である。

では、式 (A.20) の展開係数  $c_n$  の求め方を考えよう。式 (A.19) より、 $c_n = (a_n - ib_n)/2$  なので、

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{n\pi x}{L} - i \sin \frac{n\pi x}{L} \right\} dx \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \frac{1}{2} \exp \left( -i \frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \exp \left( -i \frac{n\pi x}{L} \right) dx \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

#### Fourier 級数展開 (複素指数関数表記)

関数  $f(x)$  を以下のように複素指数関数を用いて展開することもできる。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \left( i \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (\text{A.20})$$

このとき、 $c_n$  は以下のように求めることができる。

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \exp \left( -i \frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad (\text{A.21})$$

では、式 (A.20) と式 (A.21) を用いて、 $f(x) = |x|$  を  $-\pi \leq \pi$  の範囲で Fourier 級数展開しよう。

$$|x| = f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \left( i \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (\text{A.22})$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \exp(-inx) dx \quad (\text{A.23})$$

式 (A.23) を計算しよう。まず、 $n = 0$  のときは、

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{\pi}{2}$$

である。 $n \neq 0$  のときは、

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \exp(-inx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \{ \cos(nx) - i \sin(nx) \} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{n^2\pi} & (n \text{ が奇数}) \\ 0 & (n \text{ が偶数}) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

となる。すると、 $f(x) = |x|$  は以下のように展開できる。

$$\begin{aligned} |x| &= \frac{\pi}{2} + \sum_{\substack{k \neq 0 \\ k \in \mathbb{Z}}} \left( -\frac{2}{(2k+1)^2\pi} \right) \exp\{-i(2k+1)x\} \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \left( -\frac{2}{(2k+1)^2\pi} \right) \left[ \exp\{-i(2k+1)x\} + \exp\{i(2k+1)x\} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x \end{aligned}$$



## A.2 Fourier 変換

この section では、Fourier 級数展開の特徴をさらに詳しく把握するとともに、Fourier 変換の概念を導入する。Fourier 変換は偏微分方程式を解く際に用いられるだけでなく、電気工学分野では、信号の周波数解析に用いられる。その Fourier 変換の数学的な基礎について、この section では記す。

### A.2.1 Fourier 級数展開の特徴

前の section で、 $f(x) = |x|$  の Fourier 級数展開は、

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x \quad (\text{A.2})$$

であることを紹介した。これは  $-\pi \leq x \leq \pi$  の範囲では正しい。この範囲の外側について考えよう。

いうまでもなく、式 (A.2) の右辺は周期関数である。しかし、 $f(x) = |x|$  は周期関数ではない。だから、 $-\pi \leq x \leq \pi$  という制約がついているのであるが、この制約を外したい。ここで、 $g(x)$  として、

$$g(x) = |x - 2m\pi|, \quad (2m-1)\pi \leq x \leq (2m+1)\pi, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (\text{A.25})$$

を導入する。この関数のグラフは図 A.3 のようになる。

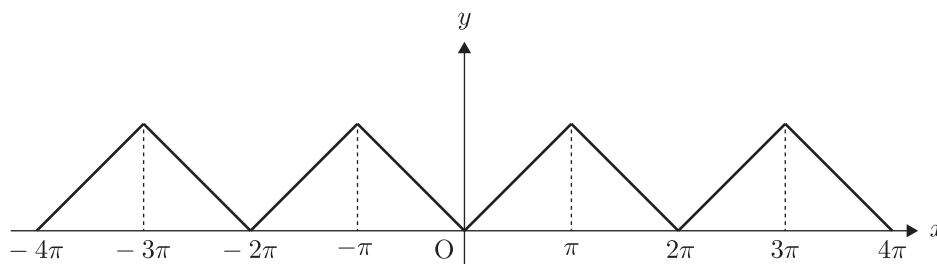


図 A.3  $g(x) = |x - 2m\pi|$  のグラフ

$g(x) = |x - 2m\pi|$  は図 A.3 のような周期  $2\pi$  の周期関数である。一方、式 (A.2) の右辺も周期  $2\pi$  の周期関数である。そして、 $f(x) = |x|$  は、 $g(x)$  の  $-\pi \leq x \leq \pi$  の部分と一致する。このことから、 $-\pi \leq x \leq \pi$  の範囲でも考えていた

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x$$

という三角関数の展開は、周期  $2\pi$  の周期関数  $g(x) = |x - 2m\pi|$  の  $\mathbb{R}$  での級数展開であるといえる。

Fourier 級数展開については、一般に次のことがいえる。

**周期関数を、その周期の整数倍の周期をもつすべての三角関数の和で表すのが、Fourier 級数展開である。**

そのため、上の  $g(x)$  のような周期関数は、**1 周期分のみを取り出して**、前の section に記した公式を用いることで、 $\mathbb{R}$  全体で三角関数の級数和 (Fourier 級数展開) で表現することができる。しかし、非周期関数については、範囲に制約をつけない限り、Fourier 級数展開をすることはできない。

### A.2.2    Fourier 級数展開から Fourier 変換へ

周期関数は  $\mathbb{R}$  全体で Fourier 級数展開できるが、非周期関数はそうできない。ここから先は非周期関数を複素指数関数の重ね合わせで表現するにはどうすればよいかを考える。

### A.2.3    Fourier 変換の例

### A.2.4    Fourier 変換の性質

### A.2.5    デルタ関数と Fourier 変換

## A.3    微分方程式と Fourier 変換

## A.4    Laplacian がデルタ関数になる関数

## A.5    Laplace 解析とは何か？ — Fourier 解析との違い —

# 参考文献

---

この  $\text{T}_\text{E}\text{X}$  ノート作成に用いた資料を以下に記す。この参考文献のページは、最初に  $\text{T}_\text{E}\text{X}$  ノートを作成してから 1 年半経っていて、全てを反映することはできていない。1 年生の時に  $\text{T}_\text{E}\text{X}$  ノートを作るために用いた書物を反映できていない。どの先生が書かれた本か。どの本を参考にしたかをメモしていなかったからだ。

以下に記したのは、私が持っている電磁気学の教科書と演習書のうち、この  $\text{T}_\text{E}\text{X}$  ノートの作成に利用したものである。

- (1) 砂川重信『物理テキストシリーズ 電磁気学』(岩波書店)
- (2) 砂川重信『物理テキストシリーズ 電磁気学演習』(岩波書店)
- (3) 川村清『岩波基礎物理シリーズ 3 電磁気学』(岩波書店)
- (4) 中山正敏『岩波基礎物理シリーズ 4 物質の電磁気学』(岩波書店)
- (5) 後藤憲一・山崎修一郎『詳解 電磁気学演習』(共立出版)
- (6) ファインマン・レイトン・サンズ(著), 宮島龍興(訳)『ファインマン物理学 3 電磁気学』(岩波書店)
- (7) 満田節生・坂田英明・二国徹郎・徳永英司(訳)『グリフィス 電磁気学 I』(丸善出版)

電磁気学 A の講義で、私の担当教員が教科書として取り上げたのは、上の (5) のファインマン物理学と、次のテキストであった。

- (8) 松下貢『物理学講義 電磁気学』(裳華房)

その他にも、東大の図書館にある電磁気学に関する本を参考にした。

- (9) 横山順一『講談社基礎物理学シリーズ 4 電磁気学』(講談社)
- (10) 加藤正昭『基礎物理学 3 電磁気学』(東京大学出版会)

さらに、一部の数学的な記述、概念の導入については電磁気学の本に限らず、以下に上げるものを使用した。

- (11) 清水勇二『基礎と応用 ベクトル解析 [新訂版]』(サイエンス社)
- (12) 信号処理論第二 授業スライド  
<http://www.sp.ipc.i.u-tokyo.ac.jp/~saruwatari/>
- (13) 回路学第二 授業スライド

付録編の付録 A 「Laplacian がデルタ関数になる関数は何か? (発展)」は、以下の参考書を参考にして記した。

- (14) 加藤雄介・求幸年『東京大学工学教程 基礎系 数学 フーリエ・ラプラス解析』(丸善出版)