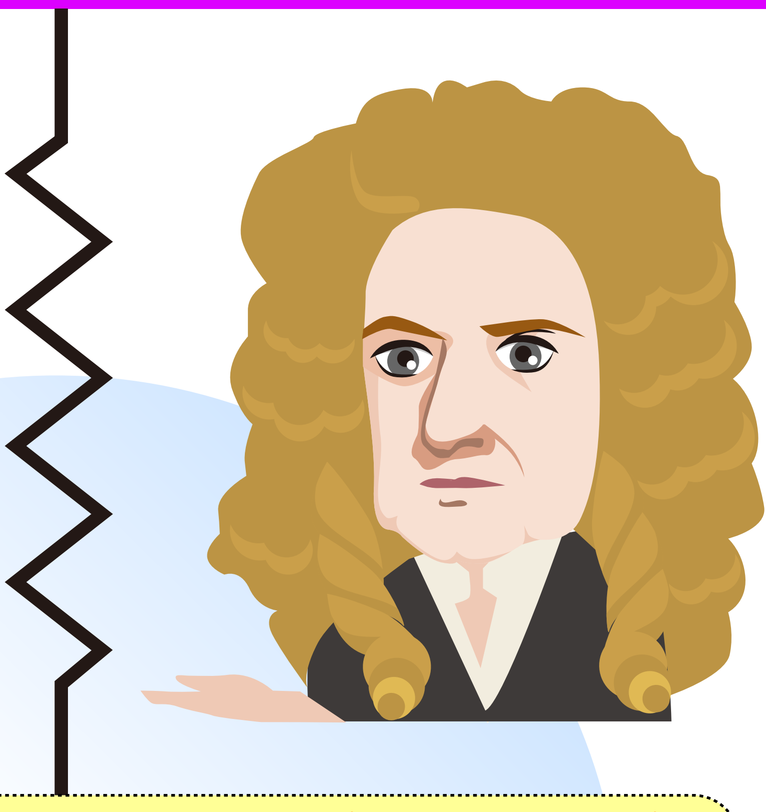
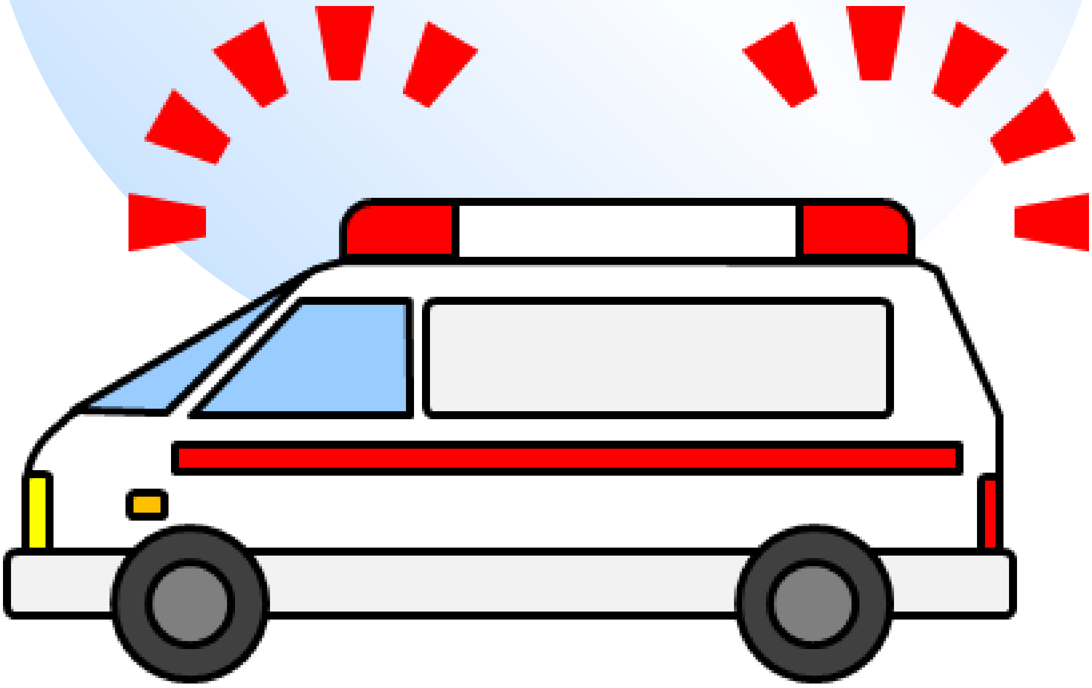
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$f' = \frac{V - V_\mathrm{o}}{V - v_\mathrm{s}} f$$



高校物理を振り返る（波動編）

anmitsu48



まえがき

私は諸事情により、高校物理について振り返ることになった。その際、山本義隆先生が書かれた『新・物理入門』や、インターネットで見つけられる「高校物理の備忘録」(`https://physnotes.jp`)、浪人時代のハイパー東大理類コース[(1)]のテキスト、浪人時の物理の先生、杉山忠男先生の板書を元に作成したノートを見た。私が(浪人時代であるにも関わらず)受験勉強をほったらかして作ったノート。理論だけがただ書かれているノート。ただテクニックを習得するのではなく、物理学の本質を理解するのが重要であるという考えの下で(実際は受験勉強の逃避が主な目的であったが)作成して、物理の受験勉強をした気になったあの頃を思い出した。そんなノートを大学で習ったことも取り入れながら、TEX で Re-write している。

その Re-write を始めてもう 3 年が経つ。未だに完成していない。それに自分でも完成形が見えていない。いつ終わりになるのかもわからず、ただ自分の気の向くままに書き続けている。この TEX ノートの全体の流れは、私が作成したノートに基づいている。一応、私が高校生、浪人生だった 2015 年度、2016 年度の時点の「物理基礎」の部分の内容を取り上げたあと、「物理」の内容を取り上げている。

私の高校時代の物理の教員、佐藤先生は必要なところで微分や積分を用いて授業を行っていた。浪人時代の杉山先生の授業も、高校物理では「微積物理」と呼ばれる方法で授業をしていた。高校 2 年生の時の物理基礎の授業の担当教員は、佐藤先生ではなかった。その先生は、頑張って微分や積分を避けようとしていて、私は、イマイチ教科書の内容、受験に役立つテクニックを完璧に理解できなかった[(2)]。「微積物理」だから高校物理の力学を理解できたのかどうかはわからない。ただ、高校 3 年生の時の佐藤先生の授業は私に大きな影響を、プラスの影響を与えて、私の物理の理解を促進させた。

本 TEX ノートの構成

この TEX ノートは、「高校物理を振り返る」シリーズの第 2 弾である。高校物理では以下の 5 個の内容について基本的な事を扱う。

- 力学
- 熱力学
- 波動
- 電磁気学
- 原子物理

この TEX ノートでは、教科書にのっている上辺だけのことは記さない。微分積分や簡単な行列の演算を利用することで、高校物理の波動分野の本質を記すように努めた。

波動編は、高校物理の分野の中で、私が嫌いな分野の 1 つである。何でだろう。特に、光に関する話が嫌いだった。この TEX ノートは、波動分野が苦手だった私が、波動分野を振り返ってまとめたものである。力学編では、高校レベルの範囲をかなり逸脱していたが、この波動編も高校レベルを逸脱する予定である。『高校物理を振り返る』というタイトルの意味は、高校物理の範囲をできるだけ高校のレベルで再構成していくことであるが、その際、高校で習う数学をベースに、ちょっとの説明をつけて、大学 1 年生レベルの数学も利用する。それは高校物理で取り扱われる内容の本質を記すためである。

[(1)] 私は 2016 年度に河合塾に在籍していたが、その時は「ハイパー東大理類コース」という呼び方だった。どうやら、今は違う呼び方らしい。

[(2)] 私は公立高校の出身である。私の卒業した高校では、数 2 の微分積分は 2 学期の後半から扱った。そのため、物理基礎の授業でも、物理の先生が微分積分を使うことはなかった。

本質を記すために、微分積分や行列、微分方程式などを適宜利用した高校物理では出てこないような議論を展開する。基本的には、高校物理に出てくる微分積分の内容は、高校数学の内容だけで十分である。しかし、現在の高校数学では行列を扱わない。そこで、付録編に力学編で記した行列の基礎知識に関する内容を記す。必要に応じて適宜参照してほしい。私は、高校数学で行列を扱っている時の、高校数学の教科書を見たことがないので、当時どのレベルまで理系の高校生が行列を扱えたか知らない。そのため、行列の説明については基礎の基礎から記した。また、力学編には出てこないが、波動編で新しく出てくる高度な数学の内容については本論で高校数学をベースに紹介している。

この TEX ノートに、私は「高校物理を振り返る」というタイトルをつけた。内容は高校物理の教科書にのっている内容を遥かに逸脱する。そんな TEX ノートを作成することを通して、高校物理の範囲を自分なりに再構成することができると信じている。そして、力学編についてはその成果がすでに 1 つの形として出来上がっている。東京大学の同じ学部の人は、同期のメンバーとゼミを開き、自らの興味のある分野をさらに追求している。この TEX ノートはそのような行為とは対極の位置にあるといえよう。しかし、自分なりに高校物理の内容を再構成することは、非常に面白いことであるように、段々思うようになり、波動分野についてもまとめ上げることにした。

カラー box について

本 TEX ノートでは 2 種類の枠を用意した。

テスト
テスト

テスト
テスト

赤枠は物理の内容に関する重要事項を表し、青枠は数学の内容に関する重要事項を表している。色分けしているがどちらも重要である。

最後に、この TEX ノートについて何かありましたら、`kouta.nagata.0920@gmail.com` まで連絡をお願いします。

anmitsu48
2021 年 4 月 18 日

目 次

第 1 章　波動の記述

「波」と電子辞書の『新明解国語辞典 (第 7 版)』で調べると、次の 4 つの意味が出てくる。

1. 風などによって揺れ動いた水面に高低が生じ、押しやるように次々に伝わっていく現象。
2. 休むことなく押し寄せ、個人が抵抗することのできないもの。
3. 起伏があり、高低の常ならぬ物のたとえ。
4. 音・光が空気などの中を振動しながら次々に伝わる現象。

3 番目の「起伏があり、高低の常ならぬ物のたとえ」を使って説明すると、波の特徴は起伏、すなわち変位がある。そして、それは「常ならぬ」もの、つまり、時間変化するものである。起伏は位置によって異なるだろう。波は位置 $\boldsymbol{r}$ と時間 t の関数として表現できる物理現象といえる。位置座標系について、1 次元の場合だけを考えても、必ず、時間 t という変数も考える必要があるので、波は少なくとも 2 変数関数である。1 変数関数でないという点が波の厄介な点なのかもしれない。

この chapter では、波動編の最初であるが、だいぶ発展的な内容である偏微分と波動方程式、Fourier 級数展開を紹介する。高校物理の教科書にのっている内容は正弦波の基本的な式しかない。高校物理の本質を理解するには重要な概念で、高校数学のレベルでもそれなりに取り扱える概念なので本章で紹介することとした。

1.1　波動とは何か

波動に関する教科書の記述をまず見てみよう。『改訂版 物理基礎』(数研出版) の 138 ページにはこのように書かれている。

静かなプールの水面にボールを落とすと、そこを中心に同心円状の波紋が広がっていく。このように、ある点で生じた振動が次々と周囲に伝わる現象を**波 (wave)** または**波動**という。また、水のように振動を伝える物質を**媒質 (medium)** といい、ボールの落下点のように振動を始めた点を**波源 (wave source)** という。
次にプールに浮かぶボールに波を送る場合を考えてみよう。このとき、ボールは波とともに進まず、ほぼ上下に振動するだけである。つまり、水面を波が伝わるとき、水は波とともに進まず、ほぼ上下に動くだけである。
このように、媒質が全体としてある特定の向きに移動することなく、波源の振動が隣へ隣へと伝わる現象が波である。

(中略)

波は媒質そのものを運ばないで振動のみを遠方に伝える。このことから、波は情報を伝える性質を持つともいえる。代表的な例として音や光、そして電波があげられる。

1.2　偏微分と波動方程式 (発展)

力学分野では全ての基礎は**運動方程式** $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ である。波動分野で運動方程式に相当する式は**波動方程式**であり、

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

とかける。この section では、波動現象を記述するのに必要な数学のツールで高校数学では登場しない**偏微分**を紹介し、波動方程式を紹介する。

1.2.1　偏微分とは何か

波動のように 2 つ以上の変数を持つ関数を扱う時も時間変化を考えたい。というより、2 つ以上の変数を持つ関数の微分を考えたい。2 つ以上の変数を持つ関数の微分で重要なのは**偏微分**である。2 つの変数 x, t に依存する関数 $y(x,t)$ について偏微分の定義を書くと以下のようになる。

偏微分

- **偏微分の定義**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \tag{1.2}$$

- 感覚的には、どの文字について微分するかを決めたら、他の文字は定数とみなして微分ということが偏微分である。

例 1.1　二変数関数 $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ について、$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を計算してみよう。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{x}{(x^2+y^2)^2} \cdot (2x) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^2} \cdot (2y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

力学で登場する加速度は 1 次元では $a(t) = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$ と書かれる。これは $x(t)$ を t に関して 2 回微分したものである。この 2 回微分する操作が二変数関数ではどうなるかを記す。

偏微分 (2 階)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right)$$

上の 4 つのように 1 回偏微分したものをさらに偏微分したものを次のように表記する。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{1.3}$$

例 1.2　二変数関数 $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ について、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を計算してみよう。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)=\cdots=\frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)=\cdots=\frac{2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

1.2.2　波動の定式化

波動を数学的に取り扱うためには、波動を数学的に表現することが必要である。ここでは一直線上を伝わる波を考えることにする。このような場合には波の伝わる方向に x 軸をとると、波動の伝播により変化する物理量 u は位置 x と時間 t の関数でかける。波動は一般に多変数関数で表すことができるが、位置 x を $x=x_0$ で固定するか、時間 t を $t=t_0$ で固定すれば 1 変数関数として処理できる。関数 $u(x,t)$ で時間 t を $t=t_0$ で固定した 1 変数関数 $u(x,t_0)\equiv f(x)$ は時刻 t_0 における空間的な波の形を表している。波の形状についていくつかを記すと、図 1.1 から図 1.3 のようになる。

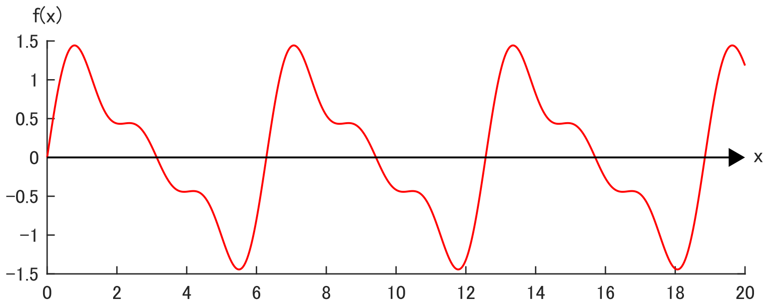


図 1.1　周期的な波

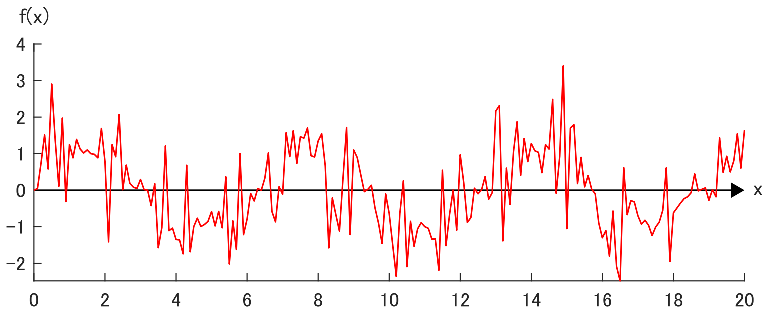


図 1.2　不規則な波

ここで、ある時刻 $t=t_0$ における波形が一定の形を保ったまま一定の速さ v で進行する場合を考える。時刻 $t=t_0+\Delta t$ における波の形はどうなるか考えると、波の形が不変なので、ただ $v\Delta t$ だけ右に平行移動したものとなる。このことより、$t=t_0$ における波形 $u(x,t_0)$ を $f(x)$ と書くことにすると、

$$u(x,t_0+\Delta t)=f(x-v\Delta t),\quad u(x,t_0-\Delta t)=f(x+v\Delta t)$$

が成立することがわかる。従って、時間原点を $t=0$ として、$t=0$ のときの波の形を $f(x)$ と書くことにしたとき、x 軸の正の方向に進む波は

$$u(x,t)=f(x-vt) \tag{1.4}$$

とかける。一方で x 軸の負の方向に進む波は、正の方向に進む波を逆再生することで得られると考えれば、

$$u(x,t)=f(x+vt) \tag{1.5}$$

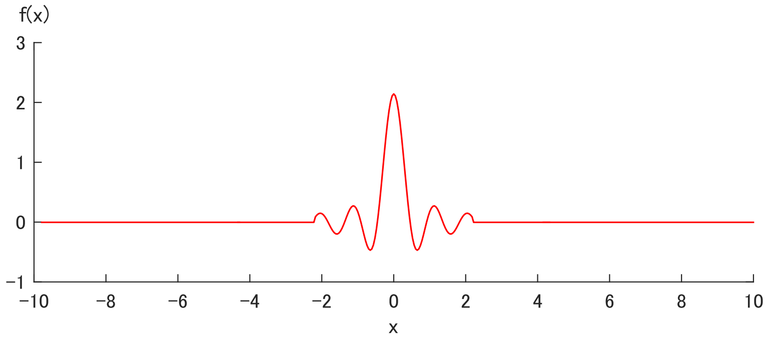


図 1.3　波束

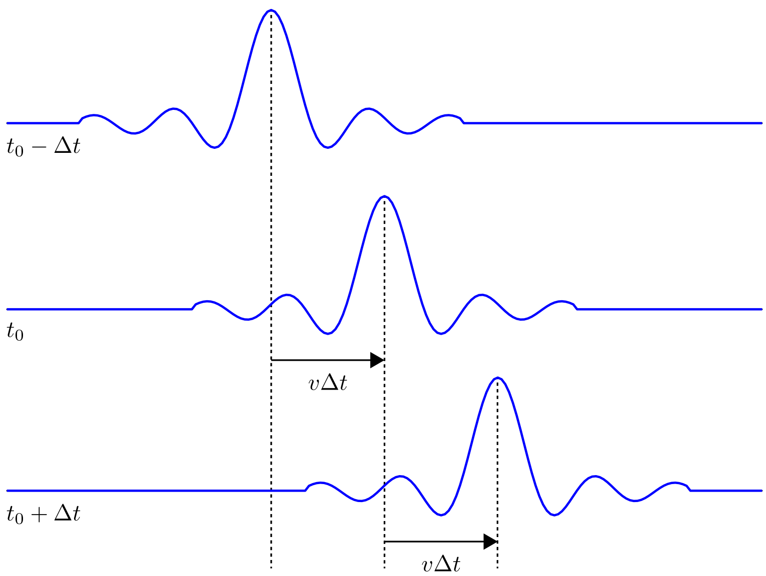


図 1.4　波が右向きに進行する様子

となる。この式は一定の波形、一定の速さで進む波を表す関数に課される条件である。ここで注意するのは $f(\cdot)$ はどんな関数でも良いということである。任意の関数だと考えづらいかもしれないが、実際の波の多くは x と t に関して周期性を持っていることが多いということから、基本的には正弦波の特徴を考えれば十分である。正弦波だけで十分なのかという疑問がわき出てくるかもしれないが、このことについては**波の重ね合わせの原理**と **Fourier 級数展開**ということが保証しているので、この TEX ノートでは、正弦波を主に取り扱うことにする。

1.2.3　波動方程式

力学分野の運動方程式に相当する**波動方程式**

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

をこの subsection では導出する。今回は一定の波形・速さで進む波の式から波動方程式を導出する。

一定の波形・速さで進む波の方程式は

$$u(x,t) = f(x - vt) \tag{1.4}$$

とかける。ここで $\psi = x - vt$ とおく。u を x と t で 2 回偏微分してみよう。合成関数の微分公式については、通常の場合と同様に偏微分の場合でも成立する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \psi}\underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial x}}_{1} = \frac{\partial u}{\partial \psi} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \qquad (1.6) \\
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \psi}\underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial t}}_{-v} = -v\frac{\partial u}{\partial \psi} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial \psi}\left(-v\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)\frac{\partial \psi}{\partial t} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

式 (1.6) と式 (1.7) より、次の 2 階の偏微分方程式が得られる。この形の偏微分方程式は**波動方程式**と呼ばれる。今回は、一定の波形・速さで進む波をベースにスタートしたが、そのような波に限らず、数学的に波動方程式をみたす関数は波を表すということもいえる。この方程式は弦や棒、気体、電磁波など様々な物理現象で現れる重要な式であるので、頭の片隅に焼き付けてほしい。

波動方程式

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (1.8)$$

1.2.4 連鎖律

多変数関数に関する微分で重要な数学ツールに**連鎖律 (chain rule)** がある。この後の話に chain rule が出てくるので、ここで紹介する。

連鎖律 (chain rule)

2 変数関数 $z = f(x, y)$ について、変数 x, y がパラメータ t を用いてかけるとする。このとき、z はパラメータ t を使って表すことでできて、$z(t) = f(x(t), y(t))$ の t での微分は次のようになる。

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \qquad (1.9)$$

証明 ここでは数学的に厳密な証明はしない。厳密な証明は数学書を読んでほしい。

Δt を微小量とする。このとき、$x(t+\Delta t)$, $y(t+\Delta t)$ は $x(t)$ に十分近い値となる。そこで、

$$x(t+\Delta t) = x + \Delta x, \quad y(t+\Delta t) = y + \Delta y$$

と記すことにする。(x, y で $x(t), y(t)$ を表すことにする。$\Delta x, \Delta y$ は微小量である。)

$$\begin{aligned}
\frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} &= \frac{f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) - f(x(t), y(t))}{\Delta t} \\
&= \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta t} \\
&= \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta t} + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta t} \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

ここで、右辺第 1 項は y を固定した x の 1 変数関数が分子にあるとみなせる。1 変数関数のテイラー展開より[1]、

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x, y+\Delta y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y+\Delta y)\cdot \Delta x \tag{1.11}$$

とかける。同様にして、

$$f(x, y+\Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\cdot \Delta y \tag{1.12}$$

と表すことができる。

式 (1.10)〜式 (1.12) を使用すると、

$$\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t} \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x, y+\Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\frac{\Delta y}{\Delta t} \tag{1.13}$$

となる。この式で $\Delta t \to 0$ の極限をとると、式 (1.9) が得られる。 □

1.2.5　波動方程式の解

$u(x,t) = f(x+vt)$ という形についても同様にして波動方程式を導くことができる。ここまでは $f(x-vt)$ や $f(x+vt)$ が波動方程式を満たすことを確認したが、ここからは、式 (1.8) の形で書ける偏微分方程式の解 $u(x,t)$ の形を求めていく。まず、

$$\chi = x - vt, \quad \tau = x + vt$$

とおいて、u を χ と τ の関数 $u(\chi(x,t), \tau(x,t))$ と見れば、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \chi}(-v) + \frac{\partial u}{\partial \tau}\cdot v\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \chi}\left(\frac{\partial u}{\partial \chi}(-v) + \frac{\partial u}{\partial \tau}\cdot v\right)\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \chi}(-v) + \frac{\partial u}{\partial \tau}\cdot v\right)\frac{\partial \tau}{\partial t} \\
&= \frac{\partial}{\partial \chi}\left(\frac{\partial u}{\partial \chi}(-v) + \frac{\partial u}{\partial \tau}\cdot v\right)\cdot(-v) + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \chi}(-v) + \frac{\partial u}{\partial \tau}\cdot v\right)\cdot v \\
&= v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \chi \partial \tau}\right)
\end{aligned} \tag{1.14}$$

となる[2]。偏微分表記がされているためにややこしいが、t での微分なので x は定数とみなせば、連鎖律が適用できる。同様に x での 2 階微分を計算すると、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cdots = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \chi \partial \tau}\right) \tag{1.15}$$

が得られる。

式 (1.14) と式 (1.15) を波動方程式 (1.8) に代入すると、

$$v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \chi \partial \tau}\right) = v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \chi \partial \tau}\right)$$

---

[1] 式 (A.27) や式 (A.28) を参照。

[2] 最後の式変形で $\dfrac{\partial}{\partial \chi}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \tau}\right) = \dfrac{\partial}{\partial \tau}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \chi}\right)$ という性質を利用した。このように偏微分の順序を交換しても値が等しくなる性質は任意の関数で成立する性質ではない。ただ、多くの場合でこの性質が成立する。この性質が成立する厳密な条件については数学書を読んでほしい。

となり、この式を整理することで

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\chi\partial\tau} = 0 \tag{1.16}$$

が得られる。この式 (1.16) は $u(\chi,\tau)$ を χ について微分したあとに τ について微分すると 0 になることを表している。そのため、$\tau \to \chi$ の順に式 (1.16) を積分することで u を得る。χ を固定して τ について積分すると、

$$\frac{\partial u}{\partial\chi} = f_1'(\chi) \tag{1.17}$$

とかける。式 (1.17) の右辺は τ で偏微分するとき、χ だけの項からなる式の偏微分が 0 になることによる。f_1' と $'$(ダッシュ) を付けたのは後の計算の都合による。今度は χ で積分すると、

$$u(\chi,\tau) = f_1(\chi) + f_2(\tau)$$

が得られる。これに $\chi = x - vt,\ \tau = x + vt$ を代入すると、波動方程式を満たす関数 $u(x,t)$ は

$$u(x,t) = f_1(x-vt) + f_2(x+vt) \tag{1.18}$$

という形であることがわかる。この計算では、f_1, f_2 の具体的な形が要求されないことから、f_1, f_2 は任意の関数であることが言える。式 (1.18) の形の解は**ダランベールの解**と言われる。

1.3　波動の表現 — 正弦波 —

この section では波動現象を取り扱う上での基礎となる正弦波について記す。正弦波は数学的にも簡単であり、取り扱いが楽なので、ここからは正弦波をベースに紹介する。正弦波について説明できれば、後述する重ね合わせの原理と Fourier 級数展開により、任意の波動方程式を記述する関数に拡張することができる。

1.3.1　波動を表現するグラフ

波動を表現する方法として最も単純なものはグラフを使う方法だ。ただ、ここまでに書いた通り、波動は少なくとも 2 つ以上の変数が必要である。x 方向に伝播する波は、変位 u が位置 x と時間 t の関数 $u(x,t)$ で表され、x を $x=x_0$ で固定するか、t を $t=t_0$ で固定すれば 1 変数関数として処理できることは 1.2.2 節でふれた。

さて、変位 $u(x,t)$ について、時間 t を $t=t_0$ で固定したときのグラフが図 1.5 のような sin カーブになったとする。このとき、**振幅**と**波長**は次のように定義される。

- **振幅**：変位の最大値 (図 1.5 の A)
- **波長**：山から山までの距離。隣り合う 2 つの山の間の距離。(図 1.5 の λ)

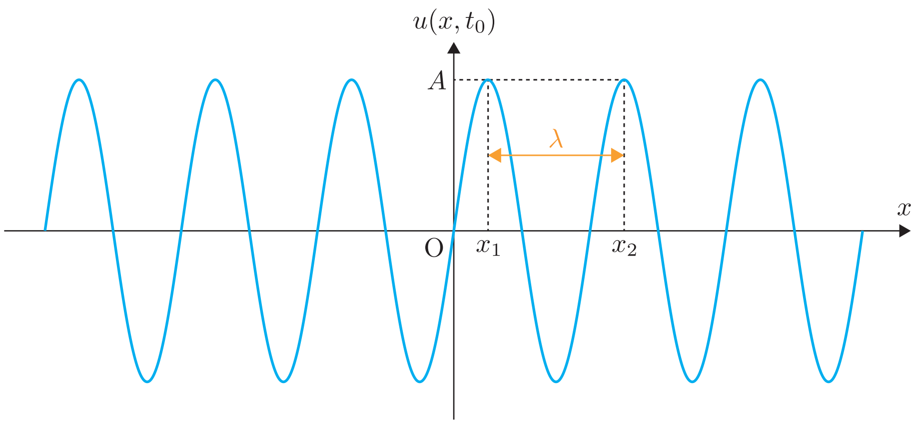


図 1.5　$t=t_0$ と固定した時の変位 $u(x,t_0)$ のグラフ

一方、変位 $u(x,t)$ について、位置 x を $x=x_0$ で固定したときのグラフが図 1.6 のような sin カーブになったとする。このとき、**振幅**と**周期**は次のように定義される。

- **振幅**：変位の最大値 (図 1.6 の A)
- **周期**：山から山までの距離。となり合う 2 つの山の間の距離。(図 1.6 の T)

1.3.2　正弦波の式

ここからは、波形が正弦波 (sin カーブ) を中心に波動現象を考える。その前に、新しい用語を「振動数」について定義する。図 1.6 のように、$x=x_0$ における変位が sin カーブであるとする。この時、**周期**と**振動数**を次のように定義する。

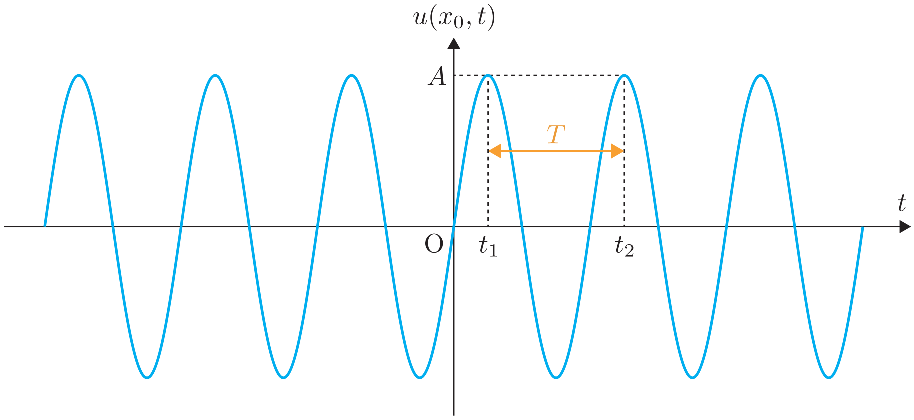


図 1.6 $x = x_0$ と固定した時の変位 $u(x_0, t)$ のグラフ

周期と振動数

- **周期** T：$u - t$ グラフにおける山から山までの距離。1 回の振動に要する時間を表す。
- **振動数** f：1 秒間あたりの振動回数。単位は**ヘルツ (Hz)**。

このように周期と振動数を定義すると、次の式が成立する。

$$fT = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad f = \frac{1}{T} \tag{1.19}$$

波形が正弦波であるとき、任意の点 x、任意の時刻 t における波の変位を表す式を考えよう。まず、原点 $x = 0$ における u-t グラフ[3]を考える。これを表す方程式が

$$u(0, t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_0\right) \tag{1.20}$$

であるとする。位置 x の分子は、原点の振動が伝わってから原点と同じような振動をする。波が伝わる速さを v とすると、波が伝わるのに要する時間は $|x|/v$ である。そのため、時刻 t における位置 x の振動は、時刻 $t - |x|/v$ における原点 $(x = 0)$ の振動と同じである。絶対値記号は邪魔なので、波が x 軸の正の方向に伝わる場合を考える。あるいは、波が伝わる向きに x 軸の正の方向をとることにしよう。そうすると、

$$\begin{aligned} u(x, t) = u\left(0, t - \frac{x}{v}\right) &= A \sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) + \phi_0\right\} \qquad (1.21) \\ &= A \sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT}\right) + \phi_0\right\} \qquad (1.22) \end{aligned}$$

となる。

ここで、式 (1.22) に登場する vT という量について考える。波が x 軸の正の方向に一定の速さ v で伝わるとする。図 1.7 の実線は $t = 0$ の時の u-x グラフで、破線は $t = \Delta t$ の時の u-x グラフである。ただし、Δt はあまり大きくなく、$\Delta t \leq T$ を満たすとする。

この時、図 1.7 における $x_{\Delta t}$ と x_0 の差は、$x_{\Delta t} - x_0 = v\Delta t$ とかける。では、$\Delta t = T$ の時を考える（この T は周期である）。このとき、見かけ上では図 1.7 の水色の曲線と黄色の曲線が重なって見える。したがって、位置 x_0 の振動状態と位置 x_T の振動状態は一致しているといえる。ここで、改めて u-x グラフを

[3] $t = 0$ の時に、$u(0, 0) = 0$ とならない場合もある。そのような時は**初期位相**を考えればよい。式 (1.20) の ϕ_0 が初期位相である。この ϕ_0 と振幅 A を適切にとることで、任意の正弦波を表現することができる。

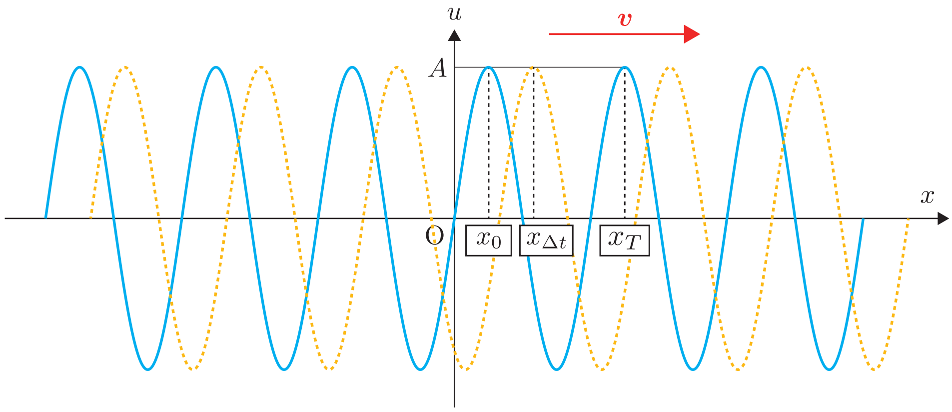


図 1.7　$t=0,\ t=\Delta t$ における u-x グラフ

眺めると、x_T と x_0 の差 vT はちょうど 1 波長 λ に等しいことがわかる。こうして、波動に関する 1 つの大切な関係式が得られた。

波の速さ、波長、振動数の関係

波の伝わる速さを v、波長を λ、周期を T とすると、

$$vT=\lambda \tag{1.23}$$

という関係が成立する。また、式 (1.19) の $f=\dfrac{1}{T}$ の関係から、上の式は、

$$v=f\lambda \tag{1.24}$$

と書くこともできる。

式 (1.23) より、式 (1.22) は次のように書き直せる。

$$u(x,t)=A\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\phi_0\right\}$$

力学編の「単振動」の説明で単振動の周期 T に対して、$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ という関係をもつ角振動数 ω を利用した。ここでも、$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ を利用すると、

$$u(x,t)=A\sin\left\{\left(\omega t-2\pi\frac{x}{\lambda}\right)+\phi_0\right\}$$

とかける。大学で使うような学術書では、波動に関する説明で $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ という量を定義し、式を簡潔に書くことがある。この k を**波数**という。

任意の点、任意の時刻における変位

位置 x、時刻 t における変位 $u(x,t)$ は以下のようにかける。

$$u(x,t) = A\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \phi_0\right\} \tag{1.25}$$

さらに、$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ とおくと、以下のように書くこともできる。

$$u(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \phi_0) \tag{1.26}$$

1.3.3 正弦波と波動方程式

正弦波が $u(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \phi_0)$ という形で記述できることを前の subsection で紹介した。1.3 節の最後に正弦波が波動方程式の解の 1 つであることを紹介する。波動方程式は次のように書くことができる。

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{1.8}$$

この波動方程式に正弦波の式を代入する。

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A\sin(\omega t - kx + \phi_0)$$
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -(-k)^2 A\sin(\omega t - kx + \phi_0)$$

ここで $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{2\pi}{\lambda} f\lambda = kv$ とかけることから、波動方程式を満たすことが確認できた。

この $\omega = kv$ の関係式を利用すると、

$$u(x,t) = A\sin(-k(x - vt) + \phi_0)$$

と sin 関数の引数が $x - vt$ となっていることがわかる。これは正弦波の式がダランベールの解であることを表しているので、正弦波は波動方程式の解であるといえる。

1.3.4 正弦波のエネルギー

空間中を正弦波 $u(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \phi)$ が伝わる場合を考える。変位が正弦波で記述される時、媒質の各部分はつり合いの位置を中心に単振動をしている。これをいくつかの振動子の集合体と考えた時、個々の振動子の質量を m_i とすると、振動子が持つ弾性エネルギーは

$$\varepsilon_{u,i} = \frac{1}{2}(m_i\omega^2)u(x,t)^2 = \frac{1}{2}m_i\omega^2 A^2\sin^2(\omega t - kx + \phi) \tag{1.27}$$

となる。ここで k は波数を表し、バネ定数を表すわけではない。バネ定数は $m_i\omega^2$ である。振動子の運動エネルギーについて、個々の振動子の速度は $u(x,t)$ の t での偏微分である。つまり、

$$v(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \omega A\cos(\omega t - kx + \phi)$$

である。そのため、運動エネルギーは

$$\varepsilon_{v,i} = \frac{1}{2}m_i v(x,t)^2 = \frac{1}{2}m_i\omega^2 A^2\cos(\omega t - kx + \phi) \tag{1.28}$$

である。

したがって、各振動子が持つエネルギーの総和は

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{u,i} + \varepsilon_{v,i} = \frac{1}{2} m_i \omega^2 A^2 \tag{1.29}$$

とかける。振動子自体は時間的に変動しても、振動子が持つエネルギーは時間的に不変である。そして、その一定量は振幅 A の 2 乗に比例する。波のエネルギーは一般に振幅の 2 乗に比例することが知られている。

1.4　正弦波はなぜ重要なのか？（発展）

波動現象の基礎として正弦波について簡単に紹介した。この section では正弦波が重要である理由として、振動数 ω の異なる正弦波の重ね合わせにより、任意の周期的な波形を表現できることを記す。

1.4.1　重ね合わせの原理

波動方程式の解は**重ね合わせの原理**を満たす。これは数学的には

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{1.8}$$

の解として、$u_1(x,t)$ と $u_2(x,t)$ が見つかったとき、a_1, a_2 を定数として $a_1 u_1(x,t) + a_2 u_2(x,t)$ も解であるという性質である。これを拡張することで、解として $u_1(x,t), \cdots, u_n(x,t)$ が得られた場合は、$a_1 u_1(x,t) + \cdots + a_n u_n(x,t)$ も解であるということができる。

重ね合わせの原理は、ある点 x に x 軸の正の方向と負の方向から波が到来したときの変位が、正の方向から来た波のみによる変位 $u_1(x,t)$ と、負の方向から来た波のみによる変位 $u_2(x,t)$ の単純な和でかけることを表している。2 つの波が相互作用して、$u_1(x,t)u_2(x,t)$（積）や $\{u_1(x,t)\}^2$（累乗）という項の効果が出てくることはない。

1.4.2　Fourier 級数展開

理学系や工学系の多くで Fourier 解析は必須のツールになっている。その Fourier 解析のベースとなっている Fourier 級数展開は波動現象の理解にも役立つ。**Fourier 級数展開**とは、簡単に言うと、周期的な関数を（無限個の）三角関数の重ね合わせとして書き表すことである。波動現象の多くは周期的なもの、あるいは周期的な部分の一部分であるために、三角関数のような周期的な関数を利用することで表現できるはずだと考えれば、この TEX ノートでは十分である。

Fourier 級数展開とは何か？

周期が $2T$（$-T \leq t \leq T$ を 1 周期とする）の関数 $f(t)$ はある係数 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ と $b_1, b_2, \cdots$ を利用して、

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{T} + b_n \sin \frac{n\pi t}{T} \right) \tag{1.30}$$

と書き表すことができる。これを **Fourier 級数展開**という。

では、式 (1.30) の係数 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ と $b_1, b_2, \cdots$ はどのように決定すれば良いのか？ここで三角関数に関する次の積分が活躍する。以下に挙げる式は簡単に示すことができる。

三角関数の直交性

$$\int_{-T}^{T} \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t = \int_{-T}^{T} \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t = 0 \tag{1.31}$$

$$\int_{-T}^{T} \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{m\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t = \int_{-T}^{T} \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{m\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t = \begin{cases} T & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \tag{1.32}$$

$$\int_{-T}^{T} \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{m\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t = 0 \tag{1.33}$$

証明　式 (1.31) については普通に積分するだけで OK。

$$\int_{-T}^{T} \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t = \frac{T}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\right]_{-T}^{T} = \frac{T}{n\pi}\{\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)\} = 0$$

$$\int_{-T}^{T} \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t = -\frac{T}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\right]_{-T}^{T} = -\frac{T}{n\pi}\{\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)\} = 0$$

式 (1.32) については三角関数の**積和の公式**(4)を利用する。

$$\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{m\pi t}{T}\right) = \frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{(n+m)\pi t}{T}\right) + \cos\left(\frac{(n-m)\pi t}{T}\right)\right\}$$

$$\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{m\pi t}{T}\right) = -\frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{(n+m)\pi t}{T}\right) + \sin\left(\frac{(n-m)\pi t}{T}\right)\right\}$$

上の 2 式において、n, m は正の整数の場合を考えると $n-m$ の項を積分した時に、$\dfrac{1}{n-m}$ の項が出てきてしまう。もし、$n = m$ だと分母が 0 になってしまうので、$n = m$ の時だけ別に考える必要がある。

- $n \neq m$ のとき
  cos と sin を 1 周期分積分するので、積分値は 0 となる。

- $n = m$ のとき
  $n = m$ のときは cos や sin の 2 乗になるので、**2 倍角の公式**を利用して変形する。

$$\int_{-T}^{T} \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t = \int_{-T}^{T} \cos^2\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t = \int_{-T}^{T} \frac{1}{2}\left\{1 + \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)\right\} \mathrm{d}t = T$$

$$\int_{-T}^{T} \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t = \int_{-T}^{T} \sin^2\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t = \int_{-T}^{T} \frac{1}{2}\left\{1 - \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)\right\} \mathrm{d}t = T$$

最後に式 (1.33) について考える。これも積和の公式を利用する。

$$\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{m\pi t}{T}\right) = \frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{(n+m)\pi t}{T}\right) + \sin\left(\frac{(n-m)\pi t}{T}\right)\right\}$$

(4)

積和の公式

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A+B) - \cos(A-B)\}$$

$$\sin A \sin B = -\frac{1}{2}\{\sin(A+B) - \sin(A-B)\}$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\{\sin(A+B) + \sin(A-B)\}$$

$n \neq m$ の時は sin の 1 周期分の積分なので 0 となるが、$n = m$ の時も 2 倍角の公式により $\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2n\pi t}{T}\right)$ となるから、結局 1 周期分積分すると 0 になる。 □

三角関数の直交性を使うと、式 (1.30) の係数 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ と $b_1, b_2, \cdots$ を決定することができる。まず、式 (1.30) を $-T$ から T の範囲で積分しよう。以下の式変形では、無限和と積分の順序を交換できることを認めることにする(5)。

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-T}^{T}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{T} + b_n\sin\frac{n\pi t}{T}\right)\right]\mathrm{d}t \\
&= \int_{-T}^{T}\frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\underbrace{\int_{-T}^{T} a_n\cos\frac{n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t}_{\text{全ての } n \text{ で } 0} + \underbrace{\int_{-T}^{T} b_n\sin\frac{n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t}_{\text{全ての } n \text{ で } 0}\right\} \\
&= a_0 T
\end{aligned}$$

これより、係数 a_0 は

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.34}$$

で求められることがわかった。この式から、a_0 は $f(t)$ の時間平均の 2 倍であることがわかる。すると、$a_0/2$ は $f(t)$ の時間平均であるといえる。そのため、$f(t)$ の時間平均からの変動を（無限個の）三角関数の重ね合わせで表現するのが Fourier 級数展開であるといえる。

続けて、式 (1.30) の両辺に $\cos\dfrac{n\pi t}{T}$ $(n \geq 1)$ をかけて、両辺を $-T$ から T の範囲で積分しよう。

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T} f(t)\cos\frac{n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t &= \int_{-T}^{T}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi t}{T} + b_m\sin\frac{m\pi t}{T}\right)\right]\cos\frac{n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-T}^{T}\frac{a_0}{2}\cos\frac{n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\underbrace{\int_{-T}^{T} a_m\cos\frac{m\pi t}{T}\cos\frac{n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t}_{m \neq n \text{ のとき } 0 \text{ である}} + \underbrace{\int_{-T}^{T} b_m\sin\frac{m\pi t}{T}\cos\frac{n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t}_{\text{全ての } n \text{ で } 0}\right\} \\
&= \int_{-T}^{T} a_n\cos^2\frac{n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t = a_n T
\end{aligned}$$

これより、係数 a_n $(n \geq 1)$ は

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\cos\frac{n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t \quad (n \geq 1)$$

で求められることがわかった。この式で $n = 0$ としたものは式 (1.34) と一致することから、全ての $n \geq 0$ に対して、

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\cos\frac{n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t \quad (n \geq 0) \tag{1.35}$$

と書けることがわかる。$a_0/2$ と 2 で割っているのは、$n = 0,\ n \geq 1$ のどちらでも共通の式を使って a_n を決定することが可能だからである。さて、この a_n は a_0 と同様に考えると、$f(t)$ に $\cos(n\pi t/T)$ をかけたものの時間平均である。時間信号に正弦波をかける操作は**周波数変調**と言われる。

(5) 無限和と積分の順序を交換できる条件については、数学書を読んでほしい。この TEX ノートでは交換できることは認めるものとする。

同様に、式 (1.30) の両辺に $\sin\dfrac{n\pi t}{T}$ $(n \geq 1)$ をかけて、両辺を $-T$ から T の範囲で積分することで、

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\sin\frac{n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t \quad (n \geq 0) \tag{1.36}$$

と書けることがわかる。

Fourier 級数展開

関数 $f(t)$ を以下のように三角関数の線形結合で展開することを **Fourier 級数展開**という。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{T} + b_n\sin\frac{n\pi t}{T}\right) \tag{1.30}$$

このとき、a_n と b_n は以下のように求めることができる。

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\cos\frac{n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t \tag{1.35}$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\sin\frac{n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t \tag{1.36}$$

1.4.3　Fourier 級数展開の具体例

周期 2 の時間波形 $f(t)$ として、

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \left(2n - \frac{1}{2} \leq t \leq 2n + \frac{1}{2}\right) \\ 0 & \left(2n - 1 \leq t < 2n - \frac{1}{2},\ 2n + \frac{1}{2} < t \leq 2n + 1\right) \end{cases} \tag{1.37}$$

を考える（n は自然数）。これを Fourier 級数展開することを考える。

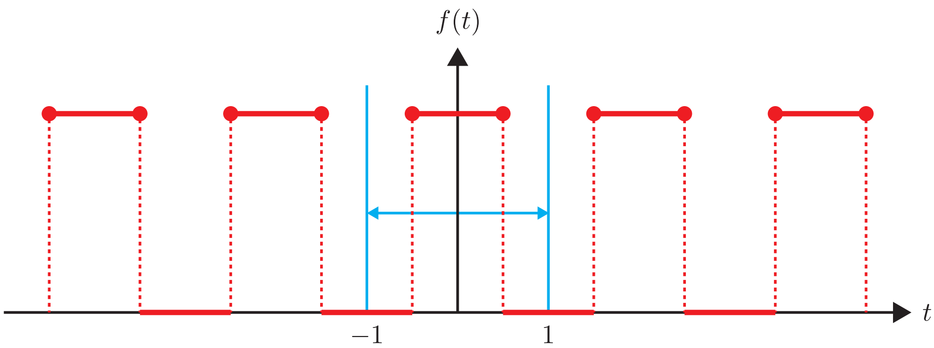


図 1.8　$f(t)$ のグラフ

周期が 2 なので、上に記した公式の T は $T = 1$ となる。

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(t)\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1/2}^{1/2}\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t \tag{1.38}$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(t)\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1/2}^{1/2}\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t \tag{1.39}$$

a_n は偶関数の積分、b_n は奇関数の積分である。そのため、b_n は 0 である。また、a_0 は 1 の幅 1 の積分なので 1 である。$n \geq 1$ のとき、

$$a_n = \left[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

となる。これは n が 0 でない偶数のときは 0 となるから、$n = 2k - 1$ $(k \geq 1)$ として、

$$a_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right) = \frac{2}{(2k-1)\pi}(-1)^{k-1} \tag{1.40}$$

とかける。ゆえに、$f(t)$ の Fourier 級数展開は

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi}(-1)^{k-1} \cos((2k-1)\pi t) \tag{1.41}$$

となる。ここで、$f_N(t)$ を

$$f_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{(2k-1)\pi}(-1)^{k-1} \cos((2k-1)\pi t) \tag{1.42}$$

とおくと、$N \to \infty$ のときに $f_N(t) \to f(t)$ となる。図 1.9 は $N = 1, 2, 4, 8$ のときの $f_N(t)$ を表している。N が大きくなるほど、$f_N(t)$ が元の $f(t)$ に近づくことがわかる。ただ、N を大きくしても 0 から 1 に変わる瞬間、1 から 0 に変わる瞬間での振動（**リップル**）は消えないことが確認できる。リップルが見られるものの三角関数の重ね合わせにより周期関数を再現することが可能であることがわかった。このように周期関数を三角関数を用いて表現することが可能になるからこそ、基本的な正弦波の性質を把握することが重要なのである。

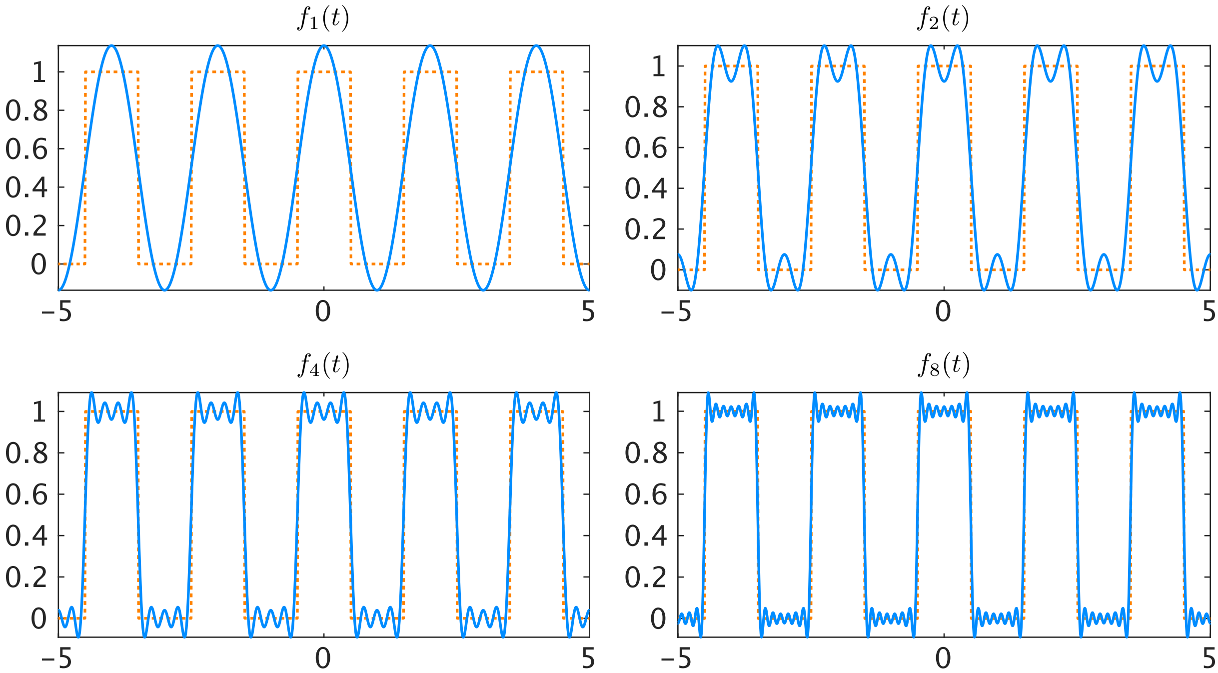


図 1.9　$f(t)$ のグラフ

第 2 章　波の重ね合わせ

第 1 章では、波動方程式、ダランベールの解、正弦波の式、Fourier 級数展開といった数学的に高度な内容も含めて、波を把握するための基本的な内容を紹介した。この章では 2 つ以上の波が同時に 1 点に到達した時にどのような現象が見られるかを考えていく。その際は重ね合わせの原理により、個々の波が引き起こす変位の和を考えていくことになる。

第 2 章では、高校物理の教科書では光や音と関連づけて議論される内容を光や音とは独立に正弦波の式やダランベールの解をベースに数式を多用して議論していく。これは干渉や回折、反射などは光や音に特有の性質ではないことによる。2.2 節では波の干渉に関して記す。この内容は高校物理では光の干渉と合わせて説明されることが多いが、干渉自体は光に限らず波動全般で成立する。その後のうなり、反射、定在波も高校物理では音と関連づけて紹介される。この章では、1 次元ではなく、2 次元、3 次元の世界で議論を行う。3 次元的な場合でも波の伝播を把握するのに役立つホイヘンスの原理と、それを用いることで導出できる境界面での反射の法則、屈折の法則について説明する。

2.1　ホイヘンスの原理

波が空間的に伝播する様子は、波源や空間の特徴（媒質の密度、振動の性質など）がわかっていれば、それらを適切に考慮して波動方程式を解くことで把握できる。しかし、実際の現象を把握する場合、これらの条件は複雑であるために波動方程式の解を求めるのが容易ではない。ホイヘンスの原理はこのような数学的な困難な場合でも波の伝播の様子を理解するのに役立つルールである。

2.1.1　波面とは？

波が伝播する領域が 1 次元ではなく、2 次元、3 次元となった時、波源から送り出される波は円形や球面状の波として外側に広がっていく。水面に水滴が 1 滴落ちたときに円形の波紋が広がる様子は Youtube(1) などで動画を見るとよくわかる。

円形の波紋が広がるとき、位相が等しい点を連ねた面を**波面**という。空間が一様な場合は、等方的に一様な速さで波が伝わるので、波源からの距離が等しい点は位相が等しいので波面は円形になる。波面が平面になる波を**平面波**、波面が球面になる波を**球面波**という。波面は波の進む向きと直交する。波源から十分遠方では球面波のカーブが十分小さく、ほとんど平面波のように見なすことができる。

2.1.2　ホイヘンスの原理

ホイヘンスの原理

ある瞬間の波面上の全ての点は新たに 1 つの波源となって球面波（**素元波**）を送り出す。空間に広がる波は素元波の重ね合わせとして伝播し、短い時間が経った後の波面は、各素元波の波面に共通に接する曲面（包絡面）である。

(1) https://youtu.be/ZahF4y_cllQ,　https://youtu.be/EdJzRsFiDr0

図 2.1　水面波の波面

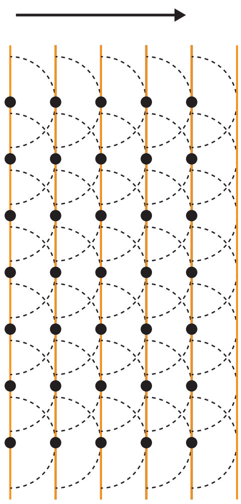


図 2.2　平面波の波面

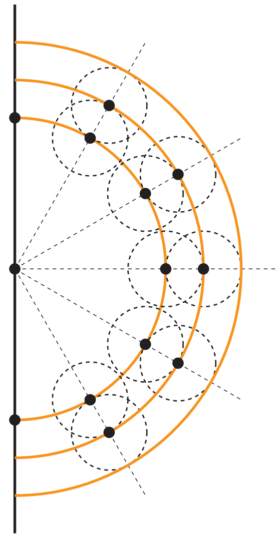


図 2.3　球面波の波面

ホイヘンスの原理を利用すると、波面がどのように移動して波が伝播するかを把握することができる。よく考えると包絡線は波が進む前方だけでなく、後方も考えることができる。後方に進む波については自然現象と矛盾する。ただ、幾何学的かつ容易に波の伝播を理解できるのがホイヘンスの原理の強みである。

2.1.3　反射の法則

波は異なる物質との境界で反射や屈折を起こす。このときの波の進行方向については、**反射の法則**と**屈折の法則**がある。これは数式を用いて導出することもできるが、ここではホイヘンスの原理を用いて幾何学的に導く。その前に入射角と反射角を定義しよう。

平面波の場合、波の進む方向は 1 方向で固定となる。そのため、向きを表すベクトルは波を表現する 1 つの方法となる[(2)]。入射角と反射角については、入射する（反射する）波の進行方向と境界面の法線のなす角によって定義される。図 2.4 の境界面の法線と入射波の進行方向のなす角 θ_i が**入射角**である。一方で、境界面の法線と反射波の進行方向のなす角 θ_j が**反射角**である。

[(2)] この波の進行方向を表すベクトルとしては、**波数ベクトル** $\boldsymbol{k}$ が大学の波動論の教科書では登場する。

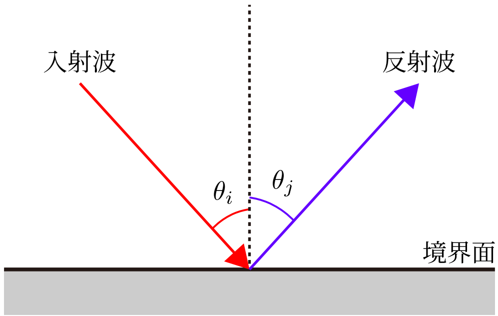


図 2.4　入射角と反射角

反射の法則

波が境界面で反射するとき、**入射角と反射角の大きさは等しい**。

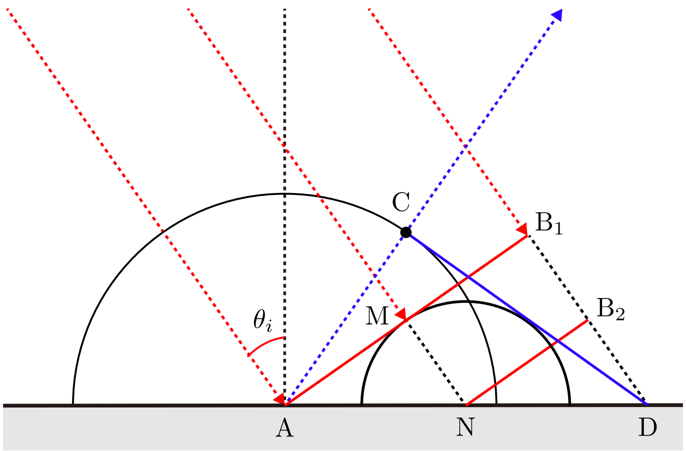


図 2.5　反射の法則とホイヘンスの原理

この反射の法則をホイヘンスの原理を利用して証明しよう。入射波の波面が図 2.5 のような直線 AB_1 で表されるとする。このとき、点 A は境界面上にあるので、点 A からは反射の元となる素元波が生じる。入射波と反射波は同じ媒質内を進むので波の進行速度は同じである。そのため、点 B_1 が境界面上の点 D_1 に到達したとき、点 A から広がる素元波（円）は $\|B_1D_1\|$ を半径とする円である。

同じように直線 AB_1 上の点 M が境界面上の点 N に到達したときの平面波の波面が直線 NB_2 であったときを考える。点 B_2 が境界面上の点 D_1 に到達したとき、点 A から広がる素元波（円）は $\|B_2D_1\|$ を半径とする円である。この操作を直線 AB_1 上の任意の点について行うと、円をたくさん描くことができる。こうすると、各円に接する直線は反射波の波面となる。この各円に接する直線は、点 D から各円に引いた接線である。このような幾何学的な特徴がわかると、後は中学校で習う三角形の合同を考えることで、反射の法則が得られる。具体的には次の手順をふめばよい。

- 直線 CD は円の接線であるから、図 2.5 において、$\angle ACD = 90°$ である。
- 直角三角形 ACD と直角三角形 DB_1A に注目すると、辺 AD が共通で、辺 AC と辺 B_1D の長さが等しい。
- 直角三角形の合同条件「斜辺とその他の 1 辺の長さがそれぞれ等しい」が成立するので、直角三角形 ACD と直角三角形 DB_1A は合同である。

- 三角形 ACD は直角三角形であることから、$\theta_j = \angle\mathrm{CDA}$ である。一方、直角三角形 ACD と直角三角形 $\mathrm{DB_1A}$ は合同なので、$\angle\mathrm{CDA} = \angle\mathrm{B_1AD}$ である。また、図 2.5 より $\theta_i = \angle\mathrm{B_1AD}$ が成立する。
- ゆえに、$\theta_i = \theta_j$ が成立する。

2.1.4　屈折の法則

屈折角は、入射角や反射角と同様に、屈折した後の波の進行方向と境界面の法線のなす角によって定義される。一般に波の進行方向が変わる媒質の境界面で発生する。媒質が異なると波の進む速度が異なることによる。

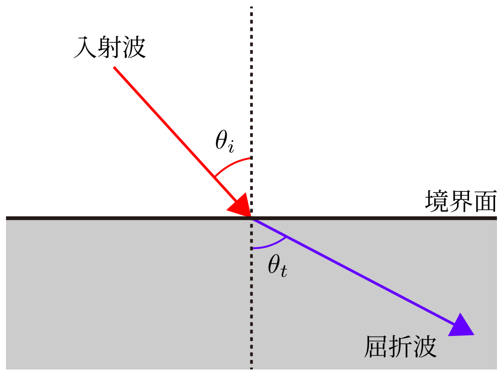


図 2.6　入射角と屈折角

屈折の法則（スネルの法則）

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{v_1}{v_2} \tag{2.1}$$

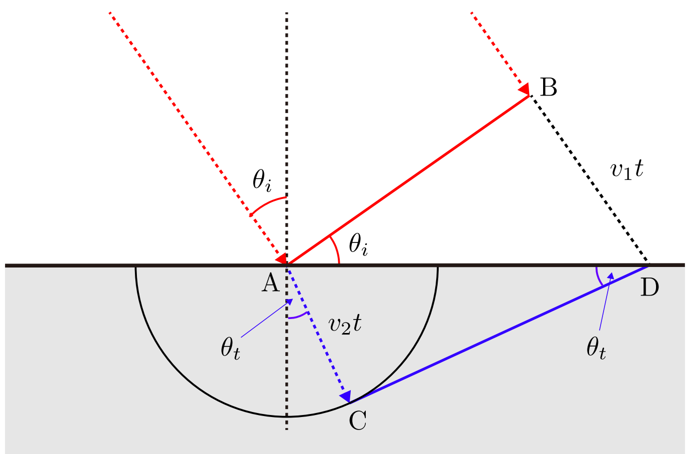


図 2.7　屈折の法則とホイヘンスの原理

個人的には、屈折の法則の方が反射の法則よりも簡単に説明できると思う。まず、ある時刻における入射波の波面が直線 AB で表されるとする。点 B が点 D に到達するのに要する時間を t とする。また、上の空間での波の速さを v_1 とし、下の空間での波の速さを v_2 とする。このとき、点 A が時間 t 経ったのちに点 C に到達したとする。この様子は点 A を中心とする半径 $v_2 t$ の円によって表現できる。すると、図 2.7 のよ

うになるが、三角形 ABD と三角形 ACD のそれぞれで AD の長さを表すと、

$$\mathrm{AD} = \frac{v_1 t}{\sin\theta_i} = \frac{v_2 t}{\sin\theta_t}$$

となる。この式を変形すると、式 (2.1) が得られる。

波の振動数 f は媒質の変化によって波が屈折しても変化しない(3)ので、式 (2.1) の比は λ_1/λ_2 と波長の比で表すこともできる。

2.2　波の干渉

2 つ以上の波が同時に 1 点に到達した時、波が互いに強めあったり弱めあったりすることが観測される。これを**波の干渉**という。波の干渉は様々な分野で使用される物理現象である。特に、2 つの波の波長 $\lambda \propto 1/k$ や角振動数 $\omega \propto 1/T$ が同じ 2 つの波の干渉を考える場合は、どのような状況であれ、経路差が波長の整数倍、あるいは位相差が 2π の整数倍の時は干渉して強め合うという結論が得られる。

2.2.1　振幅の減衰が無視できる場合

高校物理の教科書や山本義隆先生の「新・物理入門」では振幅の減衰を無視して、空間中を正弦波が伝播する状況を仮定し、この状況下で 2 つの波が同時に 1 点に到達した場合を考えている。まずは、このように振幅の減衰を無視できる場合を考えることで、波の干渉を議論する際の手順をマスターしよう。

空間中の異なる 2 点に波源 $\mathrm{S_1}$、$\mathrm{S_2}$ があるとする。2 つの波源では同一の振幅、同一の振動数の波が発生している場合を考える。ここで時間原点を適切に選ぶことで、空間上の点 P で観測される 2 つの波源からの波がそれぞれ

$$y_1(t) = A\sin(\omega t - kr_1) \tag{2.2a}$$

$$y_2(t) = A\sin(\omega t - kr_2 + \delta) \tag{2.2b}$$

と書けるとする。ここで、r_1, r_2 はそれぞれ $\|\overrightarrow{\mathrm{S_1P}}\|, \|\overrightarrow{\mathrm{S_2P}}\|$ を表すとし、δ は 2 つの波源から発生する波の初期位相の差を表す。また、$A > 0$ とする。

このとき、点 P で観測される波は重ね合わせの原理より $y_1 + y_2$ で表すことができる(4)。

$$\begin{aligned} y_\mathrm{P}(t) &= y_1(t) + y_2(t) \\ &= A\sin(\omega t - kr_1) + A\sin(\omega t - kr_2 + \delta) \\ &= 2A\sin\left(\omega t - k\frac{r_1 + r_2}{2} + \frac{\delta}{2}\right)\cos\left(k\frac{r_2 - r_1}{2} - \frac{\delta}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

(3) この事実を証明するのはここまでの内容ではできないので、ここではそういうものだと受け入れてほしい。数式を使って議論すると、反射の法則、屈折の法則だけでなく、振動数が変化しないことも示すことができる。

(4) 式変形の際に使用する三角関数の「和積の公式」を記しておく。この公式は加法定理の公式から容易に導ける公式であるため、特別に覚えておく必要はない。しかし、いざ使いたいと思った時にすぐに思い出せないので、私は非常に困っている。

和積の公式

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \\ \sin A - \sin B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \\ \cos A + \cos B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \\ \cos A + \cos B &= -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

これより、合成波の振幅は $\left|2A\cos\left(k\frac{r_2-r_1}{2}-\frac{\delta}{2}\right)\right|$ であり、それが r_1, r_2, δ により変化することがわかる。この式から、r_1, r_2, δ をうまくとって、

$$k\frac{r_2-r_1}{2}-\frac{\delta}{2}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, \quad (n \text{ は整数}) \tag{2.4}$$

とすれば、振幅は常に 0 になる。この条件について、左辺は点 P で観測される個々の波の位相差 $k(r_2-r_1)-\delta$ の半分である。ここで、この位相差を $\Delta\phi$ と書くことにすると、上の条件は

$$\Delta\phi=(2n+1)\pi, \quad (n \text{ は整数}) \tag{2.5}$$

となる。これが 2 つの波が干渉して弱めあう条件である。また、式 (2.4) の波数 k を $k=2\pi/\lambda$ と書いて変形すると、

$$r_2-r_1=\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda+\frac{\delta}{2\pi}\lambda, \quad (n \text{ は整数}) \tag{2.6}$$

と書くことができる。このように波の干渉条件は距離を用いて表現することもできる。ここで、いくつかの補足事項を記す。

- 高校物理の教科書では、干渉して弱めあう条件として、$r_2-r_1=\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda$ と書かれているが、これは 2 つの波源から発生する波が同一振幅、同一周波数だけでなく、同一位相であることを仮定することで得られる式である。干渉して弱めあう条件については、式 (2.5) のような「位相差が $(2n+1)\pi$ となること」の方が本質的である。
- 式 (2.6) の右辺に出てくる $\frac{\delta}{2\pi}\lambda$ について、$\delta=2\pi$ の時は、この項は λ になる。この項は位相差のうち、波源による効果を位相ではなく、対応する波長で表現する項と言える。この式から 2π の位相差が 1 波長に対応することがわかる。

今度は逆に干渉して強め合う条件を考える。それは、合成波の振幅 $\left|2A\cos\left(k\frac{r_2-r_1}{2}-\frac{\delta}{2}\right)\right|$ の cos の中身が

$$k\frac{r_2-r_1}{2}-\frac{\delta}{2}=n\pi, \quad (n \text{ は整数}) \tag{2.7}$$

となるときである。このときは振幅が $2A$ と一番大きくなる。この条件は位相差 $\delta\phi$ を使うと、

$$\Delta\phi=2n\pi, \quad (n \text{ は整数}) \tag{2.8}$$

となり、距離を用いて表すと、

$$r_2-r_1=n\lambda+\frac{\delta}{2\pi}\lambda, \quad (n \text{ は整数}) \tag{2.9}$$

となる。

波の干渉

同一振幅、同一周波数の波を発する 2 つの波源から生じた波が干渉して強め合う条件は、観測点 P での 2 つの波の位相差 $\Delta\phi$ によって決まる。n を整数として、

- $\Delta\phi=2n\pi$ のときは、干渉して強め合う。
- $\Delta\phi=(2n+1)\pi$ のときは、干渉して弱め合う。

2.2.2　腹の位置と双曲線

観測点 P が 2 つの波が干渉して強め合う点であるとき、その点を**腹**といい、逆に干渉して弱めあう点であるとき、その点を**節**という。ここでは、腹と節の位置の分布について記す。

簡単のために、次のような状況設定を考える。

- 波が 2 次元的に（円形波が）伝播するものとする。
- 2 つの波源の位置が $(-c, 0), (c, 0)$ となるように xy 座標系を設定する。ここで $c > 0$ である。
- 2 つの波源から発せられる波は同一振幅、同一周波数、同一位相であるとする。

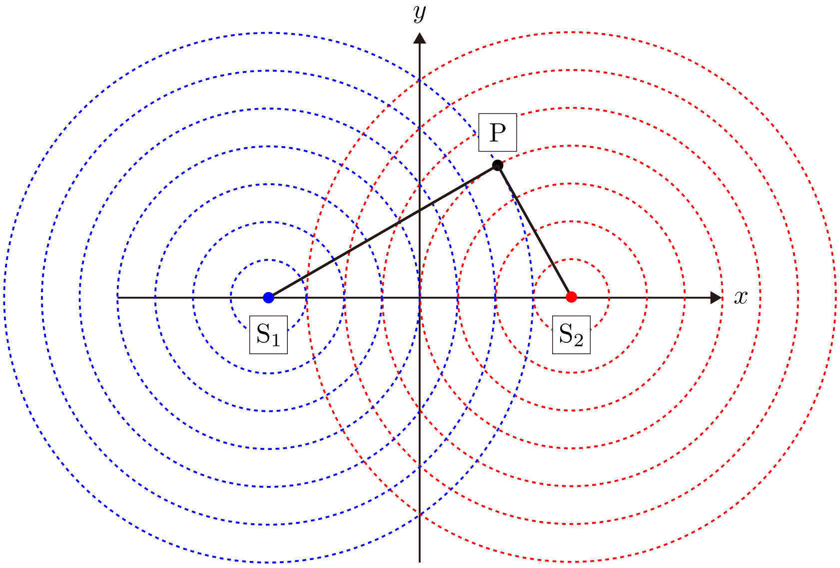


図 2.8　2 つの波源から発生した 2 つの波が 2 次元的に伝播する様子

このとき、観測点 $P(x, y)$ で波が強め合う条件は、

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = n\lambda \tag{2.10}$$

となる。この式を頑張って整理する。

$$\begin{gathered}
(x+c)^2+y^2+(x-c)^2+y^2-2\sqrt{\{(x+c)^2+y^2\}\{(x-c)^2+y^2\}} = n^2\lambda^2 \\
x^2+y^2+\left(c^2-\frac{n^2\lambda^2}{2}\right) = \sqrt{\{(x+c)^2+y^2\}\{(x-c)^2+y^2\}} \\
\left(x^2+y^2+\left(c^2-\frac{n^2\lambda^2}{2}\right)\right)^2 = \{(x+c)^2+y^2\}\{(x-c)^2+y^2\} \\
x^4+y^4+\left(c^2-\frac{n^2\lambda^2}{2}\right)^2+2x^2y^2+2(x^2+y^2)\left(c^2-\frac{n^2\lambda^2}{2}\right) = (x^2-c^2)^2+y^2(2x^2+2c^2)+y^4 \\
\therefore\ -c^2n^2\lambda^2+\frac{n^4\lambda^4}{4}+4c^2x^2-n^2\lambda^2x^2-n^2\lambda^2y^2 = 0 \\
\therefore\ (4c^2-n^2\lambda^2)x^2-n^2\lambda^2y^2 = \frac{1}{4}n^2\lambda^2(4c^2-n^2\lambda^2)
\end{gathered} \tag{2.11}$$

この式 (2.11) は、波の強め合う点の集合が表す図形の方程式であり、$4c^2 - n^2\lambda^2$ の符号によって、どのような図形を表すかが変わる。でも、距離の差を考える時は $|n\lambda| < 2c$ が成立する(5)ので、ここでは $4c^2 - n^2\lambda^2 > 0$ の場合のみ考えればよい。

(5) 図 2.8 において、S_1 と S_2 の座標が $(-c, 0)$ と $(c, 0)$ であるとする。このとき、三角形の性質から $\overrightarrow{S_1P}$ と $\overrightarrow{S_2P}$ の大きさ（長さ）の差（の絶対値）は、$\overrightarrow{S_1S_2}$ の大きさより小さい。この条件は $|n\lambda| < 2c$ と書くことができる。

$4c^2 - n^2\lambda^2 > 0$ の場合について、$x = x'/2, y = y'/2$ と変数変換をすると、x'-y' 座標系においては、

$$(4c^2 - n^2\lambda^2)x'^2 - n^2\lambda^2 y'^2 = n^2\lambda^2(4c^2 - n^2\lambda^2)$$

と書ける。これを変形すると、

$$\frac{x'^2}{n^2\lambda^2} - \frac{y'^2}{4c^2 - n^2\lambda^2} = 1 \tag{2.12}$$

となる。そのため、x'-y' 座標系において、双曲線の焦点は $(\pm\sqrt{(n^2\lambda^2) + (4c^2 - n^2\lambda^2)}, 0) = (\pm 2c, 0)$ となる。x-y 座標系に直すと、$(\pm c, 0)$ となる。これは波源の位置と一致する。従って、波が強め合う点（腹）の集合は、2 つの波源を焦点とする双曲線である。また、$4c^2 - n^2\lambda^2 > 0$ より、$|n| < 2c/\lambda$ となる。そのため、2 つの波源と観測点の距離の差の候補は有限個であることがわかり、それは c の値を決定することで決まることがわかる。

式 (2.11) や式 (2.12) で表される双曲線群について、$c = 2\lambda,\ \lambda = 1$ の場合を考える。このとき、$|n| < 4$、つまり、$n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ である。各 n に対応する双曲線をプロットすると、図 2.9 のようになる。

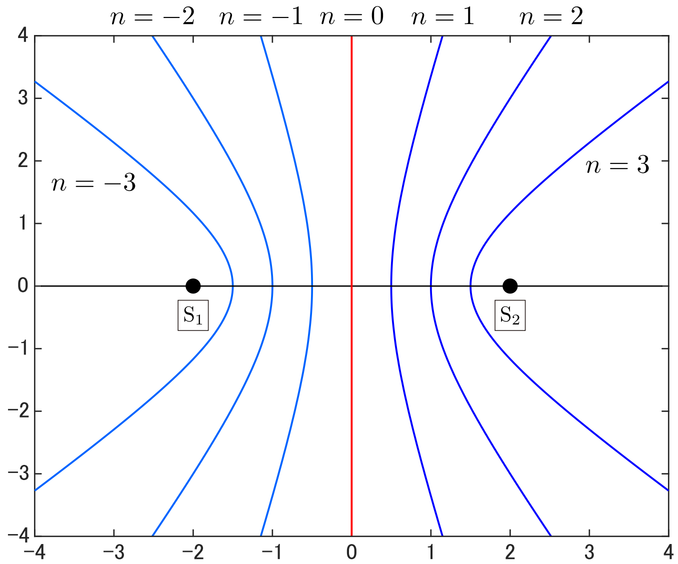


図 2.9　腹の位置を表す双曲線

2.2.3　振幅の減衰も考慮した場合

ここまでは振幅の減衰を考えなかった。ここからは振幅の減衰も考慮した一般的な場合について考える。3 次元的に波が伝播するときの振幅の減衰については $1/r$（r は波源からの距離）で記述するのが適切であることが知られている。ここでは、この事実を受け入れて先に進むことにする。2 つの波源から同一振動数、同一位相[6]の球面波が発生しているときの干渉を考えよう。観測点 P がそれぞれの波源から距離 r_1, r_2 の距離にあるとする。時間原点を適切に選ぶことで、空間上の点 P で観測される 2 つの波源からの波がそれぞれ

$$y_1(t) = \frac{A_1}{r_1}\sin(\omega t - kr_1) \tag{2.13a}$$

$$y_2(t) = \frac{A_2}{r_2}\sin(\omega t - kr_2) \tag{2.13b}$$

[6] ここでは、同一位相の場合のみを考えるが、同一位相ではない場合は、波源の位相差を用いて r_1 や r_2 を修正して、見かけ上の r_1 や r_2 で議論すればよい。

で表されるとする。ここで、A_1, A_2 は 2 つの波源における波の振幅を表す。このときに点 P で観測される波は重ね合わせの原理より、

$$
\begin{aligned}
y_{\mathrm{P}}(t) &= y_1(t) + y_2(t) \\
&= \frac{A_1}{r_1}\sin(\omega t - kr_1) + \frac{A_2}{r_2}\sin(\omega t - kr_2) \\
&= \left(\frac{A_1}{r_1}\cos kr_1 + \frac{A_2}{r_2}\cos kr_2\right)\sin\omega t - \left(\frac{A_1}{r_1}\sin kr_1 + \frac{A_2}{r_2}\sin kr_2\right)\cos\omega t \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

となる。三角関数の合成公式より、A_0 と δ を

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \sqrt{\left(\frac{A_1}{r_1}\cos kr_1 + \frac{A_2}{r_2}\cos kr_2\right)^2 + \left(\frac{A_1}{r_1}\sin kr_1 + \frac{A_2}{r_2}\sin kr_2\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{A_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{A_2}{r_2}\right)^2 + \frac{2A_1A_2}{r_1r_2}(\cos kr_1\cos kr_2 + \sin kr_1\sin kr_2)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{A_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{A_2}{r_2}\right)^2 + \frac{2A_1A_2}{r_1r_2}\cos k(r_1 - r_2)} \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

$$
\tan\delta = \frac{\dfrac{A_1}{r_1}\sin kr_1 + \dfrac{A_2}{r_2}\sin kr_2}{\dfrac{A_1}{r_1}\cos kr_1 + \dfrac{A_2}{r_2}\cos kr_2} \qquad (2.16)
$$

により定めると、

$$
y_{\mathrm{P}}(t) = A_0\sin(\omega t - \delta) \qquad (2.17)
$$

となる。

2.3 うなりと群速度

2.4 波の反射

2.4.1 固定端反射

2.4.2 自由端反射

2.5 定在波

第 3 章　音の物理

第 4 章　幾何光学の基礎

4.1　光の反射と屈折

4.1.1　反射の法則

4.1.2　屈折の法則

4.1.3　全反射

4.2　レンズの性質

第 5 章　光の干渉

第 6 章　光の回折

6.1 回折格子

6.2 単スリット

6.3 多重スリット

付録 A　発展的な数学の話

この chapter では高校数学で登場しない数学の話を記す。TEX ノートの力学編に記した内容を波動編に合わせて少し内容を変えて記す。ここで記す内容は以下の通りである。

- **行列**：この TEX ノートでは連立一次方程式を効率的に解くツールとして基礎の基礎を紹介する。多変数関数を用いて記述される現象の解析には不可欠の道具で、大学ではより込み入った議論がなされる。
- **テイラー展開**：テイラー展開は関数をべき級数の無限和で表す際の数学的ツールの 1 つである。テイラー展開により、関数 $f(x)$ の $x = 0$ の近くのふるまいを低次の関数で近似的に把握することが可能であり、本 TEX ノートでもこのために導入する。

A.1　行列に関する基本事項

現在の高校数学では行列を扱わない。旧課程では行列の簡単な計算を取り扱っていたそうだ。特に連立方程式を解く際は、行列を使うと、かなり楽に解くことができる。この section では行列の基本的なことを導入する。この Section の内容は、東京大学の理系 1 年生が春学期の最初に習う「数理科学基礎」のテキスト[1]の内容を参考にしながら、高校物理の話を理解する際に必要だと思われる内容のみ取り上げる。

A.1.1　行列とは何か

まず、押さえておきたいのが、高校の教科書では、ベクトルの成分を (a, b) のように書くが、大学では**ベクトル**といったら、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

のように数字を縦に並べたものをさす。数字を縦に並べると場所をとるので、スペースの都合上、数字を横に並べて書くこともある。このような場合は

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}^{\top} \tag{A.2}$$

と書く。記号 $\top$ は縦方向を横方向に直したことを表す。式 (A.1) のような**列ベクトル**のことをいう。この section では、ベクトルといえば、上記のような列ベクトルのことを表すことにする。

さて、平面ベクトル $\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ の係数 $a,\ b,\ c,\ d$ を抜き出して、以下のように書いたものを考える。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

[1]私が初めてこの行列に関する section を作成した時は、大学内でのみ配布されていた補助資料を利用した。その補助資料が書籍化されたものが、付録編 48 ページの『大学数学ことはじめ』です。この section は『大学数学ことはじめ』の第 1 部の第 8 章と第 14 章 §4 の内容をもとに作成した。

このように実数[2]を縦横に並べてカッコで括ったものを**行列**[3]という。

さらに、行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

と約束する。これを**行列とベクトルの積**という。

例 A.1 (行列とベクトルの積の計算)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times(-1)+(-1)\times 3 \\ 1\times(-1)+0\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A.1.2　一次変換と行列

平面上の点 (x, y) に対して、点 $(ax+by, cx+dy)$ を対応させること

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

を (平面上の) **一次変換**という。ここで、式 (A.4) より、一次変換は次のように書くこともできる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

これより、一次変換とは、ベクトルに左からある行列をかける操作でもあるといえる。特に、行列 A を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ としたとき、ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、式 (A.6) のように対応させることを**行列 A の定める一次変換**という。

A.1.3　一次変換の行列表示

前の subsection で書いた通り、一次変換とは、ベクトルに行列を左から作用させることである。行列 A を左からかける一次変換 (行列 A の定める一次変換) を F_A とする。すると、ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して、$F_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と書ける。ここで**線形性**という概念を定義する。

定義 A.2 (線形性)　平面上の一次変換 F と、ベクトル $\boldsymbol{v_1}$ と $\boldsymbol{v_2}$、および実数 k に対して、次の 2 つの式が成り立つとき、F は**線形性**を持つといい、一次変換 F は**線形変換**であるという。

$$F(\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2}) = F(\boldsymbol{v_1}) + F(\boldsymbol{v_2}) \tag{A.7}$$

$$F(\lambda\boldsymbol{v_1}) = \lambda \cdot F(\boldsymbol{v_1}) \tag{A.8}$$

---

[2]「複素数」でも良いが、この TEX ノートでは虚数の場合を使わないので、実数と書いた。この次の subsection で書くが、一次変換を二次元平面上の点から点へと移す対応関係として、この TEX ノートでは捉えることにする都合で、「複素数」とは書かなかった。

[3] この TEX ノートでは「行列」と記したら、4 個の数が縦に 2 個、横に 2 個並んだ式 (A.3) のようなものを指すことにする。大学で習う数学で登場する「行列」は

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

と縦に m 個、横に n 個の計 mn 個の数が並んだものをさす。

命題 A.3 (線形変換の行列表示) 行列の定める平面の一次変換は線型性をもつ。つまり、その行列を A としたとき、以下の 2 つの式が成立する。

$$A(\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2}) = A(\boldsymbol{v_1}) + A(\boldsymbol{v_2}) \tag{A.9}$$

$$A(\lambda \boldsymbol{v_1}) = \lambda \cdot A(\boldsymbol{v_1}) \tag{A.10}$$

証明 行列 A とベクトル $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ を以下のようにおいて、あとは頑張って計算することで示すことができる。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

□

命題 A.4 (線形変換の行列表示) 平面上の一次変換 F が線型性を持つならば、変換 F はある行列 A の定める一次変換に一致する。この行列 A は、

$$A = [F(\boldsymbol{e_1})\ F(\boldsymbol{e_2})] \tag{A.11}$$

と表され、変換 F の**表現行列**という。ただし、$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である[(4)(5)]。

証明 $F(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ と行列 A を用いてかけたとする。ここで、$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と表すことにすると、

$$F(\boldsymbol{e_1}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad F(\boldsymbol{e_2}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

となる。そのため、$F(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ と書けるなら、

$$A = [F(\boldsymbol{e_1})\ F(\boldsymbol{e_2})]$$

である。そこで、(逆に) 行列 A を上記のように定めると、任意のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は、$\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2}$ と書けるので、F の線型性より、

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{v}) = F(x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2}) &= xF(\boldsymbol{e_1}) + yF(\boldsymbol{e_2}) \\ &= x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = A\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

となり、任意の $\boldsymbol{v}$ に対して、$F(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ となる。 □

命題 A.5 (線形変換の合成) **線型変換を組み合わせて得られる変換も線型性を持つ**ことが知られている (証明は省略)。つまり、

1. ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し、行列 B で定まる変換 F_1 を行い、ベクトル $B\boldsymbol{v}$ に変換。
2. この $B\boldsymbol{v}$ に、行列 A で定まる変換 F_2 を行い、ベクトル $A(B\boldsymbol{v})$ に変換

の 2 つの変換をまとめて、一気にベクトル $\boldsymbol{v}$ を $A(B\boldsymbol{v})$ に変換する一次変換 G を考えたとき、この G が線型性を持つということが知られている。

(4)『線型代数学』(足助太郎・東京大学出版会) の 100 ページに記されている $\boxed{\text{定理 3.5.4}}$ の証明をもとにわかりやすいようにした。

(5) この証明は $\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ という特別な場合を考えて、行列 A がどのような条件を満たせば良いかをまず考える。つまり、必要性から攻めていく。その後、導いた条件は実は任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対しても正しいことを確認する (十分性の check) という論法をこの証明では採用している。

A.1.4 行列の積

命題 A.5 より、行列 $A,\ B$ とベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、

$$\boldsymbol{v} \longrightarrow A(B\boldsymbol{v}) \tag{A.12}$$

は線型性を持つ。したがって、この変換の行列表示を考える際は、前のページの命題 A.4 より、この変換の行列表示は、$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がどう移るかを考えれば良い。$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br \\ cp+dr \end{pmatrix} \tag{A.13}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aq+bs \\ cq+ds \end{pmatrix} \tag{A.14}$$

となるので、式 (A.12) の線型変換の行列表示は、$\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$ となる。

ここで、行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と行列 $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ の積 AB を

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix} \tag{A.15}$$

と約束する。

例 A.6 (行列と行列の積の計算)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times1+2\times2 & 1\times0+2\times2 \\ 0\times1+2\times2 & 0\times0+2\times2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

A.1.5 逆行列

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と行列 $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ の積 AB が

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たすとする。このとき、右辺の行列を**単位行列**といい、E と表す。2 つの行列 $A,\ B$ に対して、

$$AB = BA = E \tag{A.16}$$

が成立するとき、B を A の**逆行列**といい、A^{-1} と表す。ここで逆行列について次の命題が成立する。

命題 A.7 (2×2 行列の逆行列) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、$AB = BA = E$ を満たす B、すなわち A の逆行列 A^{-1} は、

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & -\dfrac{b}{ad-bc} \\ -\dfrac{c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \tag{A.17}$$

と表される。このとき、$ad - bc$ を行列 A の**行列式**といい、$\det A$ と表す。行列 A が逆行列を持つには、$\det A \neq 0$ であることが必要である。

証明 この命題の証明は、

$$\begin{cases} ap + br = 1 \\ aq + bs = 0 \\ cp + dr = 0 \\ cq + ds = 1 \end{cases}$$

を満たす p, q, r, s を求めて、行列の形で表すと、式 (A.17) のようになることを確認すれば良い。 □

例 A.8 (逆行列を求める) $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求める。行列式 $\det A$ を求めると、

$$\det A = 5 \times 2 - 6 \times (-3) = 28$$

となるから、逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{28}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{28} \\ -\frac{3}{14} & \frac{5}{28} \end{pmatrix}$$

である。

A.1.6 行列と連立一次方程式

連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$$

を、ある点 $\boldsymbol{v} = (x, y)$ に対して、行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を左から作用させると、点 (m, n) にうつるとみなせば、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \tag{A.18}$$

と、連立方程式を行列を用いて書くことができる。

これは $A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ と書けるので、A の逆行列を左からかけると、

$$\underbrace{A^{-1}A}_{E}\boldsymbol{v} = A^{-1}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \tag{A.19}$$

となる。このように逆行列をベクトルに作用させることで、連立方程式を解くことができる。

さて、この計算過程から単位行列 E に関する重要な性質がわかった。最後に、その性質を書いて、行列の説明は終わりにしよう。

Remark

単位行列 E と任意のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、

$$E\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$$

である。つまり、単位行列 E を左からかけてもベクトルは変化しない。

例 A.9 (逆行列を用いて連立方程式を解く)

$$\begin{cases} 5x - 3y = 7 \\ 6x + 2y = 5 \end{cases}$$

この連立方程式を行列を使って表すと、$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ として、

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

とかける。よって、A の逆行列 A^{-1} を使って、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 29 \\ -17 \end{pmatrix}$$

A.2　テイラー展開

行列の次にテイラーの定理と**テイラー展開**を確認する。テイラーの定理自体は高校数学の範囲内で証明することが可能である。河合塾のハイパー東大理類コース (2016 年度の呼び方) の演習問題にテイラーの定理を証明する問題があった。

この chapter ではテイラーの定理、テイラー展開の導出過程を記すが、この TEX ノートのタイトルが「高校物理を振り返る」であるため、大学で習う数学のような厳密性は気にしないで書くことにした。そうは言うけれど、『解析入門』（杉浦光夫・東京大学出版会）や『微分積分学』（難波誠・裳華房）をもとに作成する。

ここからの先の議論では、厳密には微分して出てくる関数の連続性も要求される場合がある。しかし、高校物理の内容を扱っている限り、テイラー展開したい関数が、微分すると連続でない関数になることはないので、この TEX ノートでは関数の連続性は満たされていると仮定する。

A.2.1　ロルの定理

この TEX ノートでは厳密性をあまり気にしないので、いきなり**ロルの定理**を登場させることにする。というより、しっかりした数学書なら極大、極小とは何かをしっかり定義してからロルの定理の話に入る。

定理 A.10 (ロルの定理)　$\mathbf{R}$ (実数全体の集合) の有界閉区間 $a \leq x \leq b$ で連続で、開区間 $a < x < b$ で微分可能な実数値関数 $f(x)$ が $f(a) = f(b)$ を満たすならば、次の 2 つの条件を満たす c が存在する。

$$f'(c) = 0, \qquad a < c < b$$

証明　ここではアバウトな (感覚的な) 証明をする。厳密な証明は探してください。

(1) $f(x)$ が定数関数の時は、任意の x に対して、$f'(x) = 0$ なので、OK。

(2) $f(x)$ が定数関数でない時は、図 A.1 のように、a と b の間に、$f(a) = f(b)$ よりも大きい、または小さい値が存在する。両端 $(x = a, b)$ での $f(x)$ の値は等しいから、必ず、元に戻ろうとする。ゆえに、ある $c \in (a, b)$ で、極大あるいは極小となる。

□

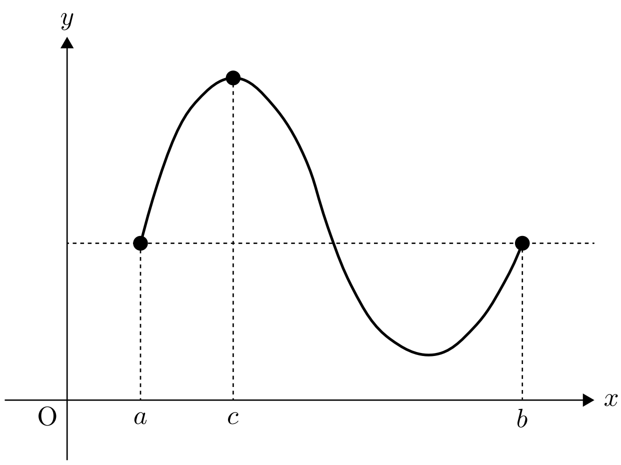


図 A.1　ロルの定理のイメージ

A.2.2 平均値の定理

ロルの定理を利用することで、高校数学で出てきた「**平均値の定理**」が証明できる。平均値の定理は教科書にのっているけれど、入試問題で出てきたときには、頭の片隅に絶対ないあの定理です。

この $\TeX$ ノートでは平均値の定理を紹介するだけにとどめるが、『解析入門』では平均値の定理を利用して、数学の問題を解く際は当たり前のことのように使っている性質を証明している。

定理 A.11 (平均値の定理) $a<b$ とする。$f(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続で、$a<x<b$ で微分可能ならば、次の 2 つの条件を満たす c が存在する。

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a), \qquad a<c<b$$

証明 k を定数として、$g(x)=f(x)-kx$ という関数を考える。今、定数 k を $g(a)=g(b)$ となるように定める。つまり、$k=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ と k を定めれば良い。

この時、$g(a)=g(b)$ より、ロルの定理から、$a<c<b$ を満たすある c が存在して、$g'(c)=f'(c)-k=0$ が成り立つ。ゆえに、$k=f'(c)$ であり、平均値の定理が示された。 □

A.2.3 テイラーの定理

ロルの定理を準備すると、本題の「**テイラーの定理**」を証明できる[(6)]。

定理 A.12 (テイラーの定理) n を 1 以上の整数として、実数 a,b を $a<b$ を満たすようにとる。区間 $I=[a,b]$ で n 回微分可能な実数値関数 $f(x)$ に対して、

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \tag{A.20}$$

を満たす c $(a<c<b)$ が存在する。ただし、$f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の第 k 階導関数を表す。

証明 数 A を次の式を満たすように定める。

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{A}{n!}(b-a)^n$$

次に新しい関数 $F(x)$ を次の式で定義する。

$$F(x)=f(b)-\left\{f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(b-x)+\frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}+\frac{A}{n!}(b-x)^n\right\}$$

このとき、関数 $F(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続で、$a<x<b$ で微分可能であり、$F(a)=F(b)$ を満たす。すると、ロルの定理より、$F'(c)=0$ $(a<c<b)$ を満たす c が存在する。$F'(x)$ は次のようにかける。

$$\begin{aligned}
&F'(x)\\
&\quad=-\left\{f'(x)+\frac{f''(x)}{1!}(b-x)+\frac{f^{(3)}(x)}{2!}(b-x)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\right\}\\
&\qquad+\left\{f'(x)+\frac{f''(x)}{1!}(b-x)+\frac{f^{(3)}(x)}{2!}(b-x)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-2)!}(b-x)^{n-2}+\frac{A}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\right\}\\
&\quad=-\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}+\frac{A}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}
\end{aligned}$$

(6) テイラーの定理の証明については、『数学シリーズ 微分積分学』(難波誠・裳華房) を参考にした。

ゆえに、$x = c$ を代入すると、

$$0 = F'(c) = -\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1} + \frac{A}{(n-1)!}(b-c)^{n-1}$$

となり、$A = \dfrac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}$ となることが示され、テイラーの定理が証明された。 □

A.2.4 テイラー展開

テイラーの定理は、$a > b$ の場合も成立することが知られている。さて、式 (A.20) の b を x に置き換えることで、テイラー展開の基礎となる式が得られる。

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{A.21}$$

この式 (A.21) の右辺の最後の 1 項 $\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ のことを**剰余項**といい、$R_n(x)$ と表す。$R_n(x)$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ を満たすなら、$f(x)$ は無限級数でかけることがわかる。

テイラー展開

$f(x)$ が a を含む区間 I で、何回でも微分可能で、I 上の任意の点 x で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ を満たすならば、$f(x)$ は I 上で、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned} \tag{A.22}$$

と表される。これを $x = a$ を中心とする**テイラー展開**という。

A.2.5 指数関数と三角関数のテイラー展開

この subsection は具体的な関数のテイラー展開を求める。求めるのは、e^x と $\sin x$, $\cos x$ である。特に、$x = 0$ を中心とするテイラー展開を考える。(これを**マクローリン展開**ということもある)

e^x のテイラー展開

まず、テイラー展開できるかどうか調べるために、$R_n(x)$ の $n \to \infty$ の極限が 0 になるかどうかを調べる。$f(x) = e^x$ とし、$0 \leq |x| < a(< +\infty)$ とする。e^x は何回微分しても e^x なので、

$$0 \leq |R_n(x)| = \left|\frac{e^c}{n!}x^n\right| \leq \frac{|e^c|}{n!}|x|^n < \frac{e^a}{n!}a^n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となる[7]。よって、$n \to \infty$ で $R_n(x) \to 0$ となる。したがって、e^x は $x = 0$ を中心にテイラー展開できる。テイラー展開の公式を使うと、$-a < x < a$ において、

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{A.23}$$

[7] $a > 0$ の時、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ が成立することを使った。

となる。

$\sin x$ のテイラー展開

$f(x) = \sin x$ とし、$0 \leq |x| < a(< +\infty)$ とする。$\sin x$ を微分すると、

$$\sin x \to \cos x \to -\sin x \to -\cos x \to \sin x \to \cdots$$

となる。そのため、任意の x に対して、$0 \leq |f^{(n)}(x)| \leq 1$ となる。e^x の場合と同様に $R_n(x)$ を考える。

$$0 \leq \left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n \right| \leq \frac{1}{n!}|x|^n < \frac{a^n}{n!} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

したがって、$\sin x$ は $x = 0$ を中心にテイラー展開できる。$f^{(n)}(0)$ は、

$$0 \to 1 \to 0 \to -1 \to 0 \to \cdots$$

となるから、テイラー展開の公式を使うと、$-a < x < a$ において、

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \tag{A.24}$$

となる。

$\cos x$ のテイラー展開

$\sin x$ と同じように考えると、$\cos x$ のテイラー展開は以下のようになる。

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \tag{A.25}$$

指数関数と三角関数のテイラー展開

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{A.23}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \tag{A.24}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \tag{A.25}$$

A.2.6 三角関数の近似

$\sin x$ と $\cos x$ のテイラー展開の式、式 (A.24) と式 (A.25) を見ると、$|x|$ が非常に小さいなら、$|x^n|$ $(n \geq 2)$ は十分小さく無視できる。そのため、

$$\sin x \to x \qquad \cos x \to 1 \tag{A.26}$$

と近似できることがわかる[8]。この近似は、物理現象の概形を把握する時や物理の入試問題を解くときに使われる。

では、$\sin x$ と x の差がどれぐらいか調べてみよう。$\sin x$ と x のグラフは以下の図 A.2 のようになる。両者のグラフは、$x = 0$ の近くでは一致しているように見える。これを $x = 0$ の周りだけに注目して拡大すると、図 A.3 のようになる。図 A.3 から分かるように、$|x|$ が非常に小さい時、$\sin x$ と x の差は十分小さく、$\sin x$ を近似的に x とみなしても良いだろう。

[8] $\cos x$ については定数 1 と近似する場合が不適切な場合があり、そのような時は、$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ と近似することがある。

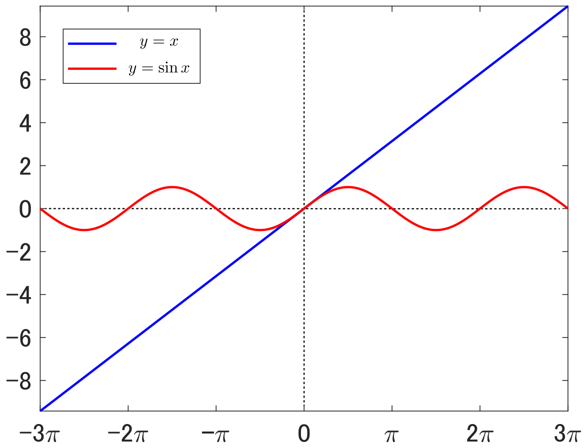


図 A.2　$\sin x$ と x のグラフ (1)

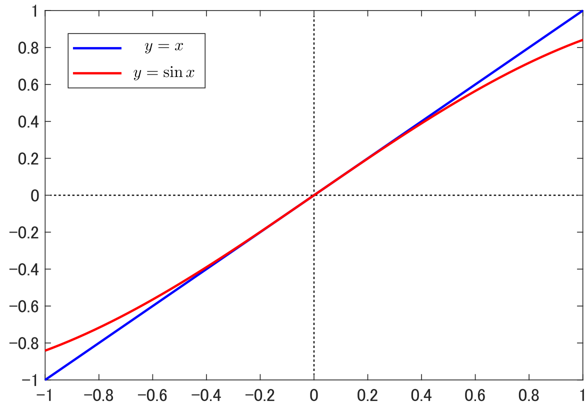


図 A.3　$\sin x$ と x のグラフ (2)

A.2.7　テイラー展開による一次近似

Δx を微小量とする。一変数関数 $f(x+\Delta x)$ を x のまわりでテイラー展開すると、

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}(\Delta x)^2 + \cdots \tag{A.27}$$

となる。ここで、$|\Delta x|$ が十分小さいとき、Δx の 2 次以上の項は無視できる。そのため、$|\Delta x|$ が十分小さいとき、

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \tag{A.28}$$

と近似できる。この近似は非常によく使われる近似で重要である。図 A.4 はこの式のイメージを図にしたものである。

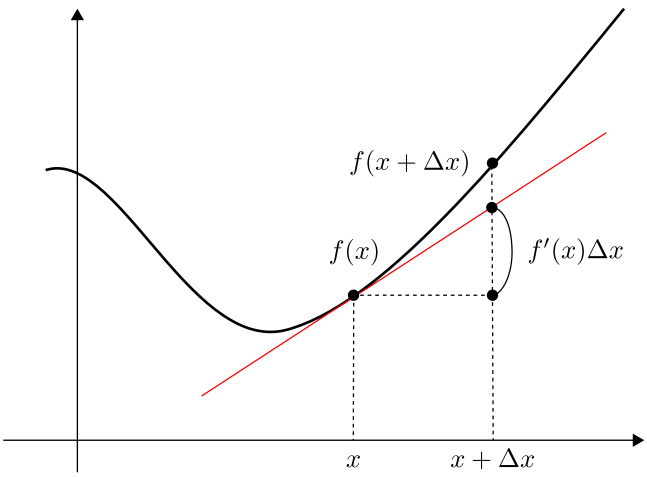


図 A.4　1 次元の Taylor 展開を視覚的に捉える

ここで、式 (A.28) を利用して得られる近似公式を紹介する。それは $f(x) = x^a$ の $x = 1$ のまわりのテイラー展開を利用した近似である。ここで a は 0 または 1 でない実数とする。$f'(x) = ax^{a-1}$ なので、$x = 1$ のまわりのテイラー展開は

$$f(1+\Delta x) = (1+\Delta x)^a \approx f(1) + f'(1)\cdot\Delta x = 1 + a\Delta x$$

と書ける。

$(1+x)^a$ の線形近似

$|x|$ が十分小さい時、次の近似式が成立する。

$$(1+x)^a \approx 1+ax \tag{A.29}$$

この近似式を使った例として、高校物理や大学入試でよく出てくるのに次の式がある。

$$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x, \quad \sqrt{1-x} \approx 1-\frac{1}{2}x \tag{A.30}$$

続けて、こんな感じの大学入試問題ではよく見かける近似について考える。

$$\sin(\theta_0+\Delta\theta) \approx \sin\theta_0 + \cos\theta_0 \Delta\theta$$

これは加法定理と $\sin x \to x,\ \cos x \to 1$ の近似を使うことで導くことができる。

$$\sin(\theta_0+\Delta\theta) = \sin\theta_0\cos\Delta\theta + \cos\theta_0\sin\Delta\theta \approx \sin\theta_0 + \cos\theta_0\Delta\theta$$

でも、sin の微分が cos になるので、式 (A.28) で $f(x)=\sin x$ とすることでこの近似式をすぐに得られる。わざわざ加法定理を使わなくても、テイラー展開がわかれば自明の結果といえる。

付録 B 参考文献

このTEXノートを作成する上で参考にした書物を記す。筆者がオススメする本ではないことだけ注意してほしい。

大学受験対策用の参考書

(1) 山本義隆『新・物理入門 (駿台受験シリーズ) 増補改訂版』 (駿台文庫)

(2) 山本義隆『新・物理入門問題演習 (駿台受験シリーズ) 改訂版』 (駿台文庫)

(3) 服部嗣夫『難問題の系統とその解き方 物理』 (ニュートンプレス)

(4) 浜島清利『名問の森 物理 力学・熱・波動 1 (河合塾シリーズ)』 (河合出版)

(5) 杉山忠男『理論物理への道標 (上)』(河合出版)

河合塾の浪人生のハイパー東大理類コース (2016 年度) の学生に配られたテキストの 1 冊に『物理 基礎理論』というものがあった。このテキストは、『理論物理への道標』と内容や記述のレベルにおいて類似している点が多かった。大学に合格してから、中古の『理論物理への道標』を読んだ。このTEXノートの記述の一部は、『物理 基礎理論』を参考にしている箇所がある。

(6) 吉田弘幸『はじめて学ぶ物理学 学問としての高校物理 (上)』(日本評論社)

この本は、タイトルにもあるように高校物理に関してまとめた参考書であるが、高校物理のテキストコーナーにはほとんど並べられていない。『東大の先生！文系の私に超わかりやすく数学を教えてください』という本を書店の「話題の本コーナー」で見かけるが、この吉田先生の本も、高校生用の参考書というより、この本のような「一般の人にわかりやすく物理を教えますよ」的な本と同種と勘違いされている。でも、実際は『新・物理入門』や『理論物理への道標』のように、著者が理想とする教え方を書物という形でまとめた参考書である。

(7) 鈴木健一『東大の物理 25 カ年 [第 5 版] (難関校過去問シリーズ)』(教学社)

(8) 2020 物理基礎・物理 重要問題集 (数研出版)

(9) 2014 物理入試問題集 (数研出版)

(10) 2015 物理入試問題集 (数研出版)

(11) 2018 物理入試問題集 (数研出版)

(12) 改訂版 物理基礎 (数研出版)

(13) 改訂版 物理 (数研出版)

(14) 高校物理の備忘録 (`https://physnotes.jp`)

(15) 木村光一『数学 微分方程式・複素整数 分野別 標準問題精構』(旺文社)

現在の高校数学の内容が、大学で習う数学や物理学とどのように結びつくのか、その橋渡し的存在として書かれた本である。内容は非常に難しい。このTEXノートは高校数学や高校物理のレベルを十分逸脱しているが、その何十倍もこの本は難しい。高校数学の数学 3 の副読本として書いたと「はじめに」に記されているが、数学が

好きすぎて、大学生が使うような数学書を読んでいるような、本当に意欲のある高校生のためだけに書かれた本と言ってもよいだろう。

私が書けることはこれぐらいである。後は Amazon のレビューなどを読んでほしい。

大学生用参考書 (数学や物理の参考書)

(1) 松尾厚『大学数学ことはじめ』(東京大学出版会)

(2) 難波誠『数学シリーズ 微分積分学』(裳華房)

(3) 足助太郎『線型代数学』(東京大学出版会)

(4) 有山正孝『基礎物理学選書 8 振動・波動』（裳華房）