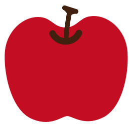
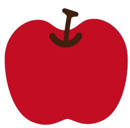
$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

高校物理を振り返る
力学編
anmitsu48



universal gravitation



まえがき

学部時代に高校物理のことを振り返ることになったことがこのノートの作成のきっかけであった。本ノートは私が東大合格を目指して河合塾で予備校生活を送っている際に作成した物理のノートをベースとしている。当時（2016 年度）、ノートの作成にあたり参考にしたのは、駿台の山本義隆先生が書かれた『新・物理入門』[1]、ウェブサイト「高校物理の備忘録」（`https://physnotes.jp`）[2] と、河合塾のテキストと授業ノートである。このノートは浪人生であるにもかかわらず、受験勉強をほったらかして作ったノートで、基本的には高校で習う数学で理解可能な物理の理論だけがただ書かれているノートであった。基本的には『新・物理入門』を自学自習し、その内容を整理したものである。ただ入試で高得点を取るためのテクニックを習得するのではなく、物理学の本質を（高校数学のレベルで理解可能な範囲は）理解するのが重要であるという考えの下で作成した。実際は受験勉強からの逃避が主な目的であったが。

そのノートを 2018 年春から、大学で習ったことや、アルバイトで貯めたお金で買ったその他の物理の参考書（本ノート作成にあたり参考にした書籍は後述の「参考文献」に記す。）を参考に加筆・修正して、本ノートを作成した。ただ自分の気の向くままに書き続けているため、いまだに完成はしていない。

さて、本ノートの流れだが、色々と考えた結果、河合塾の『物理のエッセンス』[3](1)の流れをベースとすることにする（ただし、剛体に関する記述は一番最後とする）。また、本ノートでは高校の数学 3 の内容の理解を前提として論を展開する。そのため、「必要に応じて」ではなく「必要であるため」、高校の物理の教科書では使用されない微分・積分を適宜利用する。微分・積分を使用するのは、私自身も微分・積分の導入により近いが進んだためである(2)。「微積物理」だから

(1) 『物理のエッセンス』は受験勉強を始めた段階で最初に手をつける物理の参考書としては適切なレベルであると思われる。上位大学を目指す受験生なら、『物理のエッセンス』レベルの内容は秋の模試までにはある程度は理解できているのが望ましい。しかし、実際はそうではないということを、本ノートの作成中に痛感している。

(2) 私の高校時代の 3 年生の時の物理の先生（佐藤先生）は必要なところで微分や積分を用いて授業を行っていた。浪人時代の杉山先生の授業も、高校物理では「微積物理」と呼ばれる方法で授業をしていた。高校 2 年生の時の物理基礎の授業の担当教員は、佐藤先生ではなかった。その先生は、頑張って微分や積分を避けようとしていて、私は、イマイチ教科書の内容、受験に役立つテクニックを完璧に理解できなかった。私の卒業した高校は公立高校で、数 2 の微分積分は 2 学期の後半から扱った。そのため、物理基礎の授業で先生が微分積分を使うことはなかった。

高校物理の力学を理解できたのかどうかはわからない。ただ、間違いなく微分・積分の考えの導入は、私にプラスの影響を与えて、私の物理の理解を促進させたと思っている。

本ノートには高校物理で習う内容、または高校物理の知識だけで考えることが可能な発展的な内容しか載せないつもりである。教科書や参考書とは違い、力学分野の内容の本質を中心に記すことを目指し、うわべだけのことはできるだけ記さないように努めた。力学の本質を論じるうえで必要な数学のうち、高校の数学3までに習う内容は何の断りもなく利用する。それより高度な数学、大学で習う数学については高校の数学3をベースに導入の議論をしっかり記述してから利用する。微分積分や行列、微分方程式など高校物理の教科書では出てこないような数学を利用した議論を展開していくが、本論あるいは付録部分に詳細な説明を載せるので、適宜参照して頂ければ内容を理解できると考えている。

本ノートのタイトルは「高校物理を振り返る」であるが、高校物理の教科書のレベルを遥かに逸脱するレベルの議論を展開する。このようなノートの作成を通して、高校レベルの力学を自分なりに再構成することができ、そして物理の面白さを感じることができた。読者の方も本ノートを読み、物理の面白さを少しでも理解できると幸いである。

anmitsu48
2022 年 8 月 28 日

目次

第 1 章

運動の記述

第 1 章では力学で一番重要な運動の記述法について考える。「力学は運動方程式が全て！」と教える先生は多いかもしれない。しかし、運動方程式を導入するより前に運動自体をどのように記述するかが重要になる。そこで、第 1 章では、今後の議論の基盤となる、座標系、速度、加速度の概念を導入し、簡単な運動について位置や速度、加速度の時間変化を追跡する方法を示す。

1.1　座標系

物体の運動を考えるためには、物体の位置をどう記述するかを決める必要がある。

図 1.1　Google Map で「国会議事堂」と検索した結果（検索日：2022/8/20）

地球上の位置を表現する際は緯度と経度が利用される。Google Map で「国会議事堂」と検索し、国会議事堂の位置を右クリックすると、国会議事堂の位置の緯度と経度が図 1.1 のように表示される。図 1.1 では国会議事堂の緯度は（北緯）35.67603 度で、経度は（東経）139.74478 度であると表示されている。

この 35 度や 139 度という値は地球上のどこかを 0 度としたときの値である。位置を定義するには位置の基準が必要となり、その基準として**原点** O が導入される。そして、原点 O に対し、各点がどのような位置にあるかを、1 次元的な問題を考える際は 1 つの値、2 次元的な問題を考える際は 2 つの値、3 次元的な問題を考える際は 3 つの値を用いて記述する。

1.1.1　質点

1.1.1 節では文献 [4] の記述に基づいて「質点」という概念を説明する。力学において物体の運動を記述する際、その位置の表現方法として最も単純なものが**質点**による表現である。この質点の考えでは、物体の形状や大きさを無視してある一点に物体の力学的な特性（質量など）が集中していると考える。

基本的に高校物理の力学分野に出てくる題材は大きさをもつ。ただ、物体の形が時間的に変化しない場合には代表点の位置を把握すれば物体の位置の変化を追跡するには十分である。この点については、大きさをもった物体を質点の集まりとみなした場合に、その重心はその物体の全質量に等しい質量をもつ質点の運動と等価であることを示せることが保証してくれる。この性質は剛体の部分の話で再度紹介する。

また、対象とする系の大きさに比べて、物体の大きさが十分小さい場合には質点とみなすことは適切といえる。高校物理の力学分野では万有引力や天体の運動の話が登場する。天体の大きさは何千キロのサイズであるが、太陽の周りの交点などを考える場合は、その交点が起こる空間のスケールはこの天体の大きさよりも十分大きいため、天体自身を点（質点）とみなすことは適切といえる。

以上の理由からこの後の議論では物体は質点とみなして議論を進める。

1.1.2　1 次元の場合

1 次元的な運動は直線上の運動である。直線上の位置の記述は数直線の考えを適用することができる。適当な位置に原点を設定し、その後で正の方向を設定す

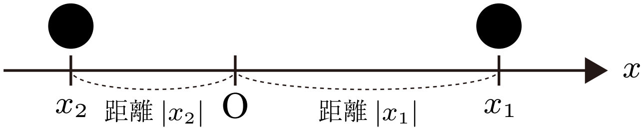


図 1.2　1 次元上の物体の位置の表現方法

れば、図 1.2 のように、1 次元座標系の設定ができる。原点に対して正の方向に $x_1(>0)$ で表される点があるとき、その点と原点の距離は $|x_1| = x_1$ である。逆に、原点に対して正の方向に $x_2(<0)$ で表される点があるとき、その点と原点の距離は $|x_2| = -x_2$ である。このように原点からの距離を用いることで 1 次元的な運動をする物体の位置を表すことができる。

1.1.3　2 次元の場合

2 次元的な運動は平面上の運動である。平面上の位置の記述には 2 つの量が必要となる。適当な位置に原点を設定した後に原点で直交する 2 軸（この 2 軸を x 軸と y 軸とする）を設定する。2 軸を使った位置の記述方法としては次の 2 つの方法がある。

- **直交座標系による表現**：原点から x, y それぞれの方向にどれだけ移動した位置であるかを基に位置を表す。
- **極座標系による表現**：ある点の原点からの距離と、原点とその点を結ぶベクトル（位置ベクトル）とある 1 つの軸がなす角度の 2 つの量を利用して位置を表す。

図 1.3 の点 P の表現方法について、直交座標系では (x, y) と表現するが、極座標系では (r, θ) と表現する。なお、θ は x 軸の正の方向と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角度とする。図 1.3 より、(x, y) と (r, θ) の間には

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{1.1}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x} \tag{1.2}$$

の関係がある[(1)]。極座標系は円運動の解析において有用である。極座標系の詳細

(1) $y = \tan x$ を満たす x を $x = \arctan y$ と表すことがある。これは三角関数の逆関数で**逆三角**

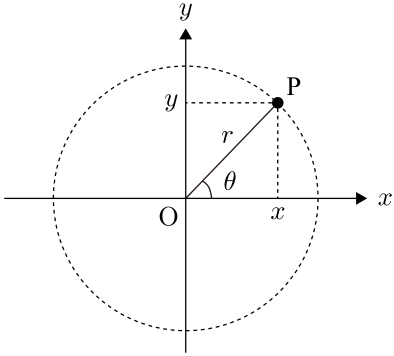


図 1.3　2 次元上の物体の位置の表現方法

については円運動の解析の章で紹介する。

1.1.4　3 次元の場合

3 次元的な運動は空間上の運動である。平面上の位置の記述には 3 つの量が必要となる。適当な位置に原点を設定した後に原点で直交する 3 軸（この 3 軸を x, y, z 軸とする）を設定する。3 軸を使った位置の記述方法としては代表的なものに次の 3 つがある。

- **直交座標系による表現**：原点から x, y, z それぞれの方向にどれだけ移動した位置であるかを基に位置を表す。
- **極座標系による表現**：原点と適当な点 P を結ぶベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の大きさ r、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と z 軸のなす角 θ、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の xy 平面への射影と x 軸のなす角 ϕ の 3 つを用いて位置を表す。（図 1.4 参照）
- **円柱座標系による表現**：円柱の中心軸の方向を z 方向とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の xy 平面への射影ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を極座標表示したときの r, θ と原点からの z 方向の変位を用いて位置を表す。（図 1.4 参照）

関数という。三角関数は周期関数であるため、$y = \tan x$ について y を一つ選んだ時、対応する x は無数にある。そこで多くの場合、x の範囲として $-\pi/2 < x < \pi/2$ の範囲を考えることを前提とする。なお、$\arctan x$ は書物によっては $\tan^{-1} x$ と表すものもあるが、この表記は $1/\tan x$ との紛らわしいので本ノートでは使用しない。

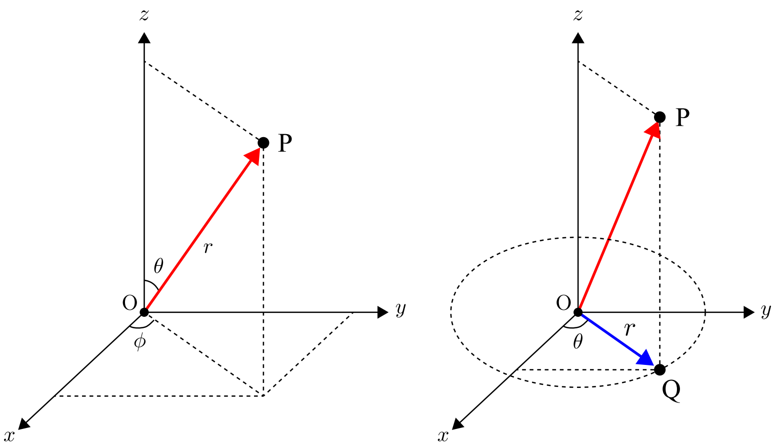


図 1.4　3 次元上の物体の位置の表現方法（左図：極座標系、右図：円柱座標系）

この場合、直交座標系、極座標系、円柱座標系のそれぞれを用いて、位置を $(x, y, z), (r, \theta, \phi), (r, \theta, z)$ と表した場合、直交座標系と極座標系の表現の間には

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta \tag{1.3}$$

の関係が成立する。また、直交座標系と円柱座標系の間には

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z \tag{1.4}$$

の関係が成立する。ここで $z = z$ は直交座標系と円柱座標系の両者で z 座標の表現方法が同一であることを表す。

高校物理では 3 次元の極座標や円柱座標系を使用する機会は出てこないが、このように表現できることは大学で学ぶ物理を理解する上で重要である。大学入試の数学を解くうえでも有用かもしれない。

1.1.5　原点と座標軸の向きの任意性

物理の問題を考える際は、どのような座標系を使用するかという点だけでなく、どのように座標軸を設定するかも重要である。多くの場合、2 次元的な運動を考える際は左右方向と上下方向を直交する 2 軸とし、左右方向の正の向きは右向き、上下方向の正の向きは上向きとする。しかし、必ずしもこの向きに座標軸を設定する必要はない。図 1.5 の黒色で描かれた直交する x, y 軸をもつ座標系を Σ とす

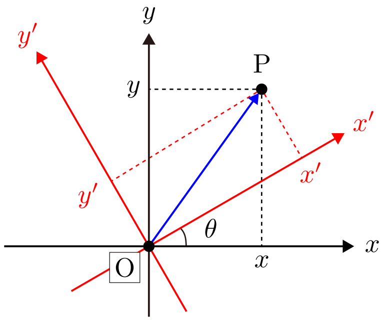


図 1.5　2 次元平面内での直交する座標系の設定方法。共通の原点を含む座標系は無数に存在する。

る。また、赤色で描かれた直交する x', y' 軸をもつ座標系を Σ' とする。Σ' は Σ と共通の原点をもち、その共通の原点に対して反時計回りに θ 回転させることで得られる座標系である。自明なことであるが共通の原点をもつ座標系は無数に存在する。そのため、原点 O を一箇所に決定するだけでは不十分である。直交する 2 軸をどの方向に設定するかが重要である。

例えば、この後の落体の運動では落下する方向を y 軸の正の方向として座標を設定して議論を行う。一方で、放物運動では左右方向に x 軸（右向きが正)、上下方向に y 軸（上向きが正）をとる。そして、斜面に沿った物体の運動では斜面に沿う方向とそれに垂直な方向に座標軸を設定する。斜面に沿う方向については斜面を下る運動を考えるなら、下る方向を正にとって議論することが多い。

座標軸の方向だけでなく、その正の向きにも任意性があることがわかった。これは 2 次元、3 次元における極座標表示や円柱座標表示も一意に決まらないことに対応する。先ほど、式 (1.1)〜式 (1.4) のように極座標表示や円柱座標表示を定義したが、それらは図 1.3 や図 1.4 のように座標軸とその正の向き、さらに角度 θ, ϕ を定めた場合の表記である。これらの取り方が変われば表現方法も変わることに注意する必要がある。

座標系の設定については問題を解きやすいように適切に定めるのがよい。今後様々な設定の方法が出てくるが、それはそう設定すると楽に議論できることが知られているからである。天下り的かもしれないが、最初はそうするものだと思って読み進めるのが良い。本ノートでは座標系の取り方で問題の解きやすさが大きく変わることについても紹介する。

1.2　速度と加速度

1.2.1　速度

時刻 t で位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ にある物体が非常に短い時間 Δt の間に $\boldsymbol{r}(t+\Delta t) = (x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t))$ に動いたとする。この時、物体の**変位**を

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t) \tag{1.5}$$

と定義する。単位時間あたりの平均の変位はこれを Δt で割ることで求めることができる。

$$\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \tag{1.6}$$

この量を「**平均の速度**」という。高校物理の教科書には「**瞬間の速度**」という考え方も登場する。これは式 (1.6) で時間間隔 Δt を 0 に近づけた時の極限である。$\Delta t \to 0$ の極限は位置 $\boldsymbol{r}(t)$ の t での微分になる。これから出てくる速度は基本的に平均の速度ではなく、瞬間の速度である。

速度

物体の位置が $\boldsymbol{r}(t)$ という時間 t の関数で記述されるとき、

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} \right) \tag{1.7}$$

を物体の**速度**という。また、速度ベクトルの大きさ

$$v(t) = |\boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2} \tag{1.8}$$

を物体の**速さ**という。

平均の速度は式 (1.6) で定義され、それは図 1.6 の $\overrightarrow{\mathrm{PP}'}$ に平行なベクトルである。$\Delta t \to 0$ とすると、点 P' は徐々に点 P に近づき、$\Delta t \to 0$ の極限、すなわち点 P における速度ベクトルは、物体の移動軌跡を表す曲線の接線として定義される。

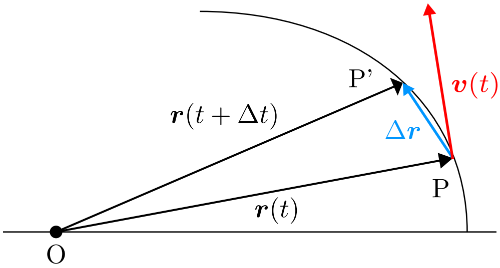


図 1.6　変位ベクトルと速度ベクトル。速度ベクトルは移動軌跡の接線である。

1.2.2　加速度

物体の速度が一定である運動は日常生活の中では稀である。そのため、速度が時間的にどう変化するか、あるいは速度の時間微分がどう変化するかを追跡することが重要である。力学では速度の時間微分として**加速度**が定義される。

加速度

物体の位置が $\boldsymbol{r}(t)$、速度が $\boldsymbol{v}(t)$ という時間 t の関数で記述されるとき、

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_y(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_z(t)}{\mathrm{d}t}\right) \tag{1.9}$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2}\right) \tag{1.10}$$

を物体の**加速度**という。

この加速度は後述する運動方程式が、質量と加速度の積が加えられた力に等しいという形式で与えられることもあり、力学の議論を理解する上では極めて重要な量である。

1.2.3　位置・速度・加速度の関係

上述のように位置、速度、加速度はそれぞれ時間微分によって結びつけられている。これは逆に時間積分によって結びつけられていると考えることもできる。1 次元の場合について、積分を利用して位置と速度を表現することを考えよう。

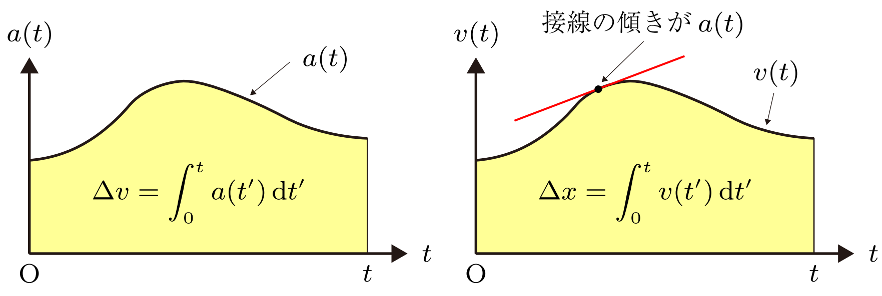


図 1.7　a-t グラフ、v-t グラフ

加速度 a は速度 v の時間微分 $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ で与えられることに注意すると、時刻 0 と時刻 t の間での速度変化は次のように表すことができる。

$$\Delta v = v(t) - v(0) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}v(t')}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t' = \int_0^t a(t')\,\mathrm{d}t' \tag{1.11}$$

$$\therefore\quad v(t) = v(0) + \int_0^t a(t')\,\mathrm{d}t' \tag{1.12}$$

同様に、速度 v は $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ と書き表すことができるので、次の式も成立する。

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t')\,\mathrm{d}t' \tag{1.13}$$

積分といえば数学の問題では面積を考える。高校物理の問題では横軸を時間 t、縦軸を加速度 a、あるいは速度 v とするグラフを考えることが有用な場合が多い。図 1.7 に時間と加速度、速度の関係を示すグラフ（a-t グラフ、v-t グラフ）を示す。数式から明らかであるが図 1.7 の黄色の部分は速度の変化分、あるいは位置の変化分を表す。特に $t = 0$ のときの加速度 $a(0)$ や速度 $v(0)$ が 0 ならば、この面積の値は時刻 t における速度や位置を表す。また、v-t グラフについては $v(t)$ を表す曲線の接線が $a(t)$ を表すことも重要なポイントである。

1.3　等加速度直線運動

本節では 1 次元の運動について、特に加速度 a が一定の場合について少々掘り下げていく。$a(t) = a = \mathrm{const.}$ のとき、式 (1.12) は

$$v(t) = v(0) + at \tag{1.14}$$

となる。これを使うと $x(t)$ は

$$x(t) = x(0) + \int_0^t (v(0) + at')\,\mathrm{d}t' = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1.15}$$

となる。式 (1.14) と式 (1.15) から t を消去すると、

$$\{v(t)\}^2 - \{v(0)\}^2 = 2a\{x(t) - x(0)\} \tag{1.16}$$

という関係式が得られる[(2)]。

ここでは別の方法で式 (1.16) を導出する方法を紹介する。式 (1.15) の両辺に a をかけて整理すると、

$$a\{x(t) - x(0)\} = \int_0^t a \cdot v(t')\,\mathrm{d}t'$$

となる。$a = \dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$ であることと $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v^2) = 2v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ であることから、

$$a\{x(t) - x(0)\} = \int_0^t \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{1}{2}\{v(t')\}^2\right)\right]\mathrm{d}t' = \frac{1}{2}\left(\{v(t)\}^2 - \{v(0)\}^2\right)$$

となる。この式を変形すると、式 (1.16) が得られる。このような式変形はエネルギー保存則の導出でよく使われる方法なのでおさえておきたい。ここまでに得られた 3 つの式を以下のようにまとめておこう。

等加速度運動の式

$$v(t) = v(0) + at \tag{1.14}$$

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1.15}$$

$$\{v(t)\}^2 - \{v(0)\}^2 = 2a\{x(t) - x(0)\} \tag{1.16}$$

---

(2) t を消去することで式 (1.16) が得られることについては教科書にのっていると思うので、そちらを参照してほしい。本ノートおよび教科書にも記さない方法としては、式 (1.16) の両辺を 2 乗した

$$\{v(t)\}^2 = \{v(0)\}^2 + 2v(0)at + a^2t^2$$

と式 (1.15) を比較する方法が考えられる。この式の右辺の第 2 項と第 3 項を $2a$ で割ったものが式 (1.15) の右辺の第 2 項と第 3 項に一致することから、すぐに式 (1.16) を導出することができる。

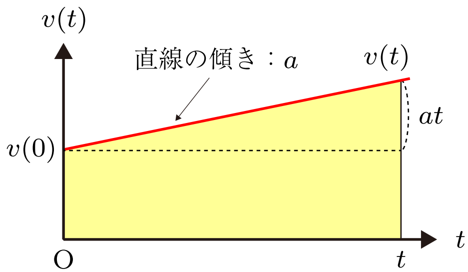


図 1.8　1 次元の等加速度直線運動の v-t グラフ

さて、等加速度直線運動について v-t グラフを考えよう。図 1.8 に 1 次元の等加速度直線運動の v-t グラフを示した。等加速度直線運動では $v(t) = v(0) + at$ であるため、v-t グラフは傾き a、切片 $v(0)$ の直線になる。この v-t グラフから式 (1.15) は容易に導出することができる。図 1.8 の黄色の部分の面積を考えると、長方形部分の面積が $v(0)t$、直角三角形の部分の面積が $\dfrac{1}{2}at^2$ であることから、

$$x(t) - x(0) = v(0)t + \frac{1}{2}at^2$$

となることがわかる。

1.4　放物運動

本節では等加速度直線運動の公式を利用して簡単に解析が可能な放物運動を取り扱う。図 1.9 のように原点 O (0, 0) に小物体をおき、時刻 $t = 0$ に x 軸と角 θ をなす方向に初速 $\boldsymbol{v_0} = (v_0 \cos\theta, v_0 \sin\theta)$ を加える。このあと、小物体がどのような運動をするか考える。ただし、小物体には y 軸負方向に重力が働く以外には何の力も働かないとし、空気抵抗は無視できるとする。

詳細は後述するが、この運動では x 方向の加速度が $a_x = 0$ で、y 方向の加速度が $a_y = -g$ となる。そのため、時刻 t における速度 $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ は

$$v_x = v_0 \cos\theta, \quad v_y = v_0 \sin\theta - gt \tag{1.17}$$

となる。また、時刻 t における位置 $\boldsymbol{r} = (x, y)$ は

$$x = (v_0 \cos\theta)t, \quad y = (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.18}$$

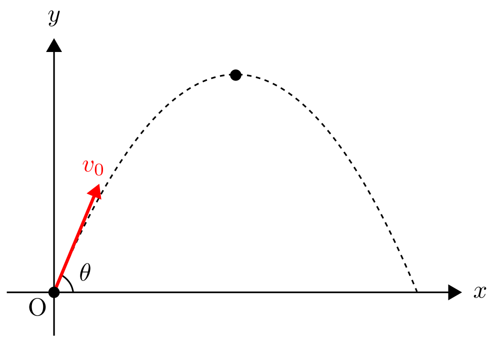


図 1.9　放物運動（斜方投射）のイメージ図

と書ける。これらの式を利用することで小物体の位置、速度の時間追跡を行うことが可能である。

x, y 座標の時間変化がわかれば、物体が x, y 平面上を通過する軌跡の形状を把握することができる。式 (1.18) から t を消去すると、

$$
\begin{aligned}
y &= (\tan\theta)x - \frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}x^2 \\
&= -\frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}\left(x - \frac{{v_0}^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2 + \frac{(v_0\sin\theta)^2}{2g} \\
&= -\frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}\left(x - \frac{{v_0}^2\sin 2\theta}{2g}\right)^2 + \frac{(v_0\sin\theta)^2}{2g}
\end{aligned} \tag{1.19}
$$

となり、小物体の描く軌道の方程式が得られる[3]。この式は放物線の方程式である。

さて、この式から y 座標の最大値は $y_{\max} = \dfrac{(v_0\sin\theta)^2}{2g}$ であることがわかる。そして、最大高さに到達するまでに要する時間 t は $t = \dfrac{x}{v_0\cos\theta} = \dfrac{v_0\sin\theta}{g}$ であ

[3] xy 平面での軌道を把握するには $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ を利用する方法も考えられる。式 (1.17) と式 (1.18) より

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{v_0\sin\theta - gt}{v_0\cos\theta} = \tan\theta - \frac{g}{v_0\cos\theta}t = \tan\theta - \frac{g}{(v_0\cos\theta)^2}x
$$

とかけるので、これを x について積分して $(x, y) = (0, 0)$ を通過するという条件を利用して整理すると、式 (1.19) が得られる。

る。この時の y 方向の速度は

$$v_y = v_0 \sin\theta - g \cdot \frac{v_0 \sin\theta}{g} = 0$$

となる。つまり、放物線軌道の頂点では y 方向の速度 $v_y = 0$ である。これは、$y(t)$ が極大となるためには $\dot{y} = v_y = 0$ を満たすことが必要であるという数学的な要請もしっかり満たしている。

ここで、直線 $y = 0$ (x 軸) を地面とすると、どのような θ を選択すると最も遠くまで届くかは興味のあることの 1 つである。式 (1.19) より、もう一度 $y = 0$ に到達する際の x 座標は ${v_0}^2 \sin 2\theta / g$ であり、$\sin 2\theta$ に比例する。そのため、$\theta = \pi/4$ のときにもう一度 $y = 0$ に到達する際の x 座標が最大になり、最も遠くまで到達する。

1.5　空気抵抗を受ける落体の運動

本節では空気抵抗を受ける落体の運動の解析を通して、簡単な微分方程式の解析方法を示す。

1.6　相対運動

参考文献

[1] 山本義隆『新・物理入門（駿台受験シリーズ）増補改訂版』（駿台文庫）
[2]「高校物理の備忘録」https://physnotes.jp
[3] 浜島清利『物理のエッセンス 力学・波動 四訂版（河合塾シリーズ）』 (河合出版)
[4] 山内恭彦『一般力学 増訂第 3 版』（岩波書店）
[5] 松尾厚『大学数学ことはじめ 新入生のために』（東京大学出版会）