CHAPTER-5

सदिशों का योग, अन्तर एवं वियोजन

[Addition, Subtraction and Resoulution of Vectors]

अदिश राशि (Scalar Quantity) -: ऐसी भौतिक राशि जिसमे केवल परिमाण होता है।

सदिश राशि (Vector Quantity) -: परिमाण व दिशा दोनो होता है।

सदिश राशि का निरूपण (Representation of a vector)

$$\overrightarrow{AB}$$

सदिश राशि को तीरयुक्त रेखाखंड $\overrightarrow{AB}$ द्वारा प्रदर्शित करते है तथा सदिश $\overrightarrow{AB}$ के परिमाण, दिशा को व्यक्त करने के लिए छोटे तीरयुक्त अक्षरो $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ या $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ का प्रयोग किया जाता है। $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$

Terminology (शब्दावली)

① सदिश का मापांक (Modulus of a vector) -:

किसी सदिश का मापांक वह धनात्मक राशि है जो उस सदिश के परिमाण को बताता है।

जैसे सदिश $\overrightarrow{AB}$ या $\vec{a}$ का मापांक $= |\overrightarrow{AB}|$ या $|\vec{a}|$ से निरूपित करते है।

शून्य सदिश (Null vector) -: जिस सदिश का आदि एवं अन्तिम बिन्दु संपाती हो, शून्य सदिश कहलाता है इसका मापांक शून्य और इसकी दिशा अज्ञात होती है इसे $\vec{0}$ या $\vec{AA}$ या $\vec{BB}$ से प्रदर्शित करते है।

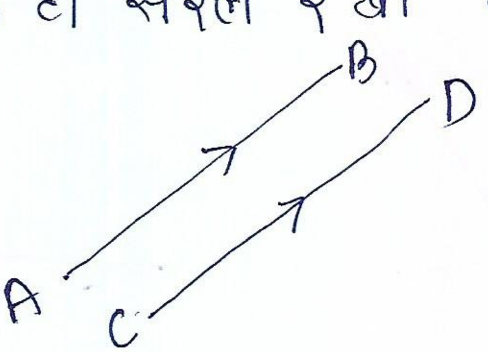
(iii) एकांक या इकाई सदिश (Unit Vector) -: जिस सदिश का मापांक इकाई हो उसे Unit vector कहते हैं। इकाई सदिश के ऊपर प्रतीक ^ लगाकर सूचित करते हैं। जैसे - $\hat{a}$, सदिश $\vec{a}$ की दिशा में इकाई सदिश है।
इसका मान $\vec{a}$ सदिश मे उसके मापांक से भाग देकर प्राप्त किया जाता है।

अर्थात् $\hat{a} = \dfrac{\vec{a} \text{ की दिशा में इकाई सदिश}}{\text{सदिश } \vec{a} \text{ का मापांक } |\vec{a}|}$

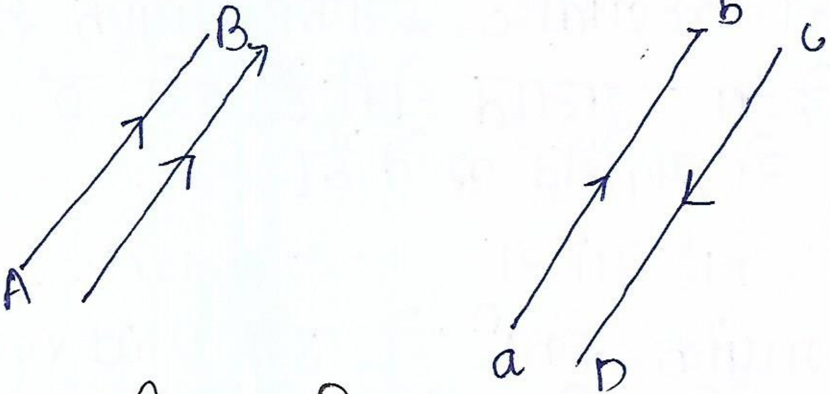
$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

(iv) समान सदिश (Equal vectors) -:
(i) यदि दो सदिशों के मापांक बराबर हो
(ii) और उनकी दिशा एक ही दिशा मे हो
तब $\vec{AB} = \vec{CD}$ है क्योंकि $|\vec{AB}| = |\vec{CB}|$ है

(v) संरेखीय सदिश (callinear Vectors) -: दो सदिश समरेख होंगे यदि वे एक ही रेखा मे हो या एक ही सरल रेखा के समान्तर हो।



समदिश एवं असमदिश सदिश (Like Vectors and Unlike Vectors) :-



समतलीय सदिश (Coplanar Vector) :-

वे सदिश जो एक ही तल मे हो या जिनकी दिशायें एक ही तल के समानांतर हो,

ऋण सदिश (Negative Vectors) :-

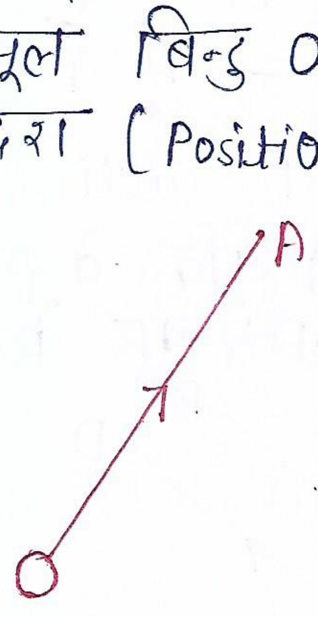
यदि दो सदिशों के मापांक बराबर हों किन्तु दिशायें विपरीत हों तो वे परस्पर ऋणात्मक सदिश -

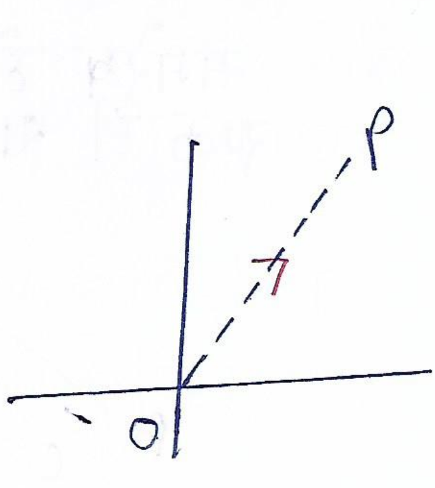
If $\vec{AB} = \vec{a}$ तो $\vec{BA} = -\vec{a}$

M Imp

स्थिति सदिश (Position Vector) :-

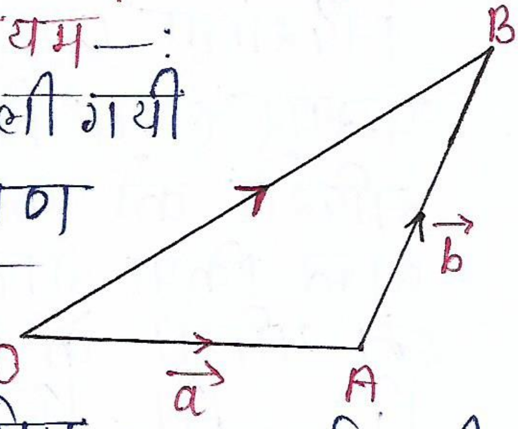
माना O मूल बिन्दु है और A कोई अन्य बिन्दु है, तो सदिश $\vec{OA}$ को मूल बिन्दु O के सापेक्ष बिन्दु A का स्थिति सदिश (Position Vector) कहते हैं।





सदिशों का योगफल (Addition of Vectors)

(i) सदिश योग का त्रिभुज नियम -:



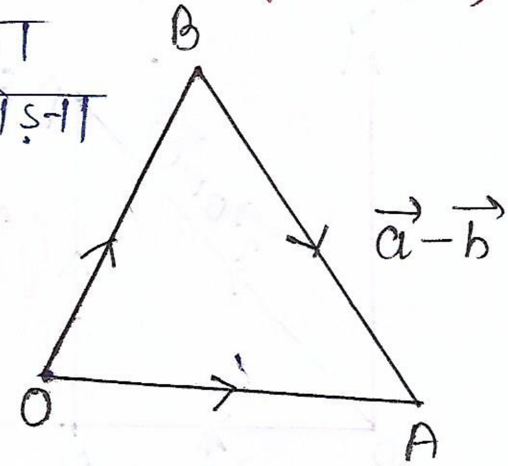
यदि किसी त्रिभुज की क्रम से ली गयी दो भुजाएँ, दो सदिशों के परिमाण तथा दिशा को निरुपित करें तो विपरीत क्रम में ली गई त्रिभुज की तीसरी भुजा सदिशों के योग अथवा परिणामी को सूचित करती है।

यहाँ $\vec{a}$ और $\vec{b}$ कोई दो सदिश है।
तथा स्थिति सदिश $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$
तब

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$$

सदिशों को घटाना (Subtraction of vector) -:

$\vec{a}$ से सदिश $\vec{b}$ को घटाने का अर्थ है कि $-\vec{b}$ को $\vec{a}$ से जोड़ना
अर्थात $\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$



यहाँ -:

$\vec{OA} = \vec{a}$
$\vec{OB} = \vec{b}$
$\vec{BO} = -\vec{b}$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{OA} - \vec{OB}$$

$\boxed{\vec{BA} = \vec{OA} + (\vec{BO})}$ $\boxed{\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}}$

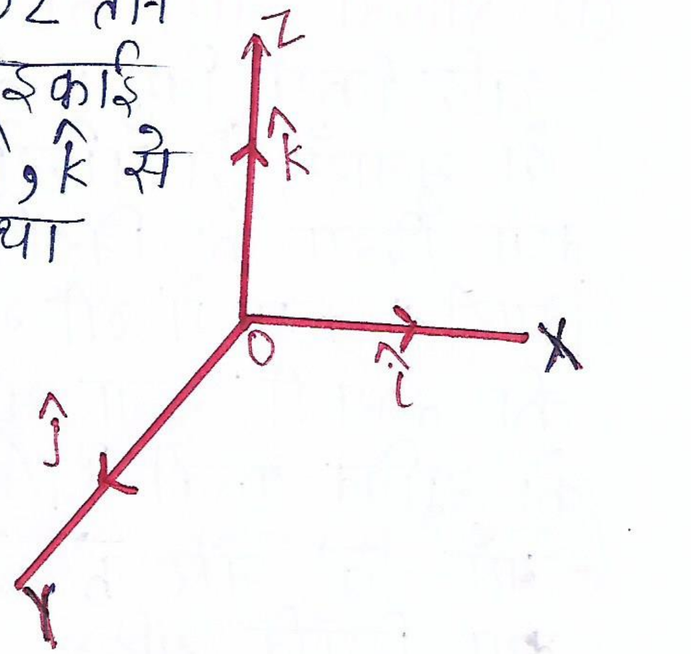
Properties of Addition of Vectors

(i) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ [क्रम विनिमेय)
(ii) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

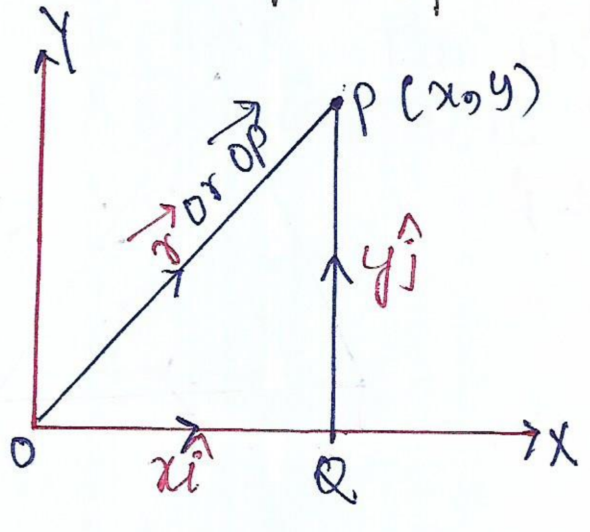
समकोणिक इकाई सदिश [Rectangular Unit Vectors]

निर्देशांको OX, OY तथा OZ तीन परस्पर लम्ब दिशाओ मे इकाई सदिशों को क्रमश: $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ से व्यक्त किया जाता है। तथा इन सदिशो के लिए

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$



समकोणीय इकाई सदिशों के पदो में किसी बिन्दु का स्थिति सदिश (Position Vector of a point in Terms of Perpendicular Unit Vectors)



(i) (Two - dimensional space) :- यदि द्विविमीय आकाश मे P(x, y) कोई बिन्दु है तो

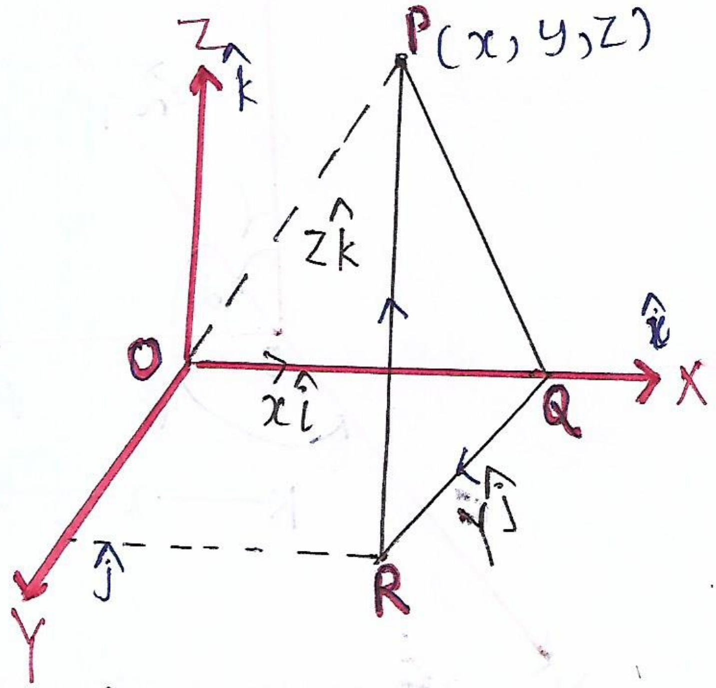
P का Position vector $\vec{OP} = \vec{r} = \vec{OQ} + \vec{QP}$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad \text{(equation)}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(ii) Three-dimensional space -:

त्रिविमीय आकाश मे कोई बिन्दु $P(x,y,z)$ है तब P का स्थिति सदिश $\vec{OP} = \vec{r}$



$$\vec{OP} = \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$|\vec{OP}| = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + k^2}$$

प्रमेय -: यदि दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के घटक

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

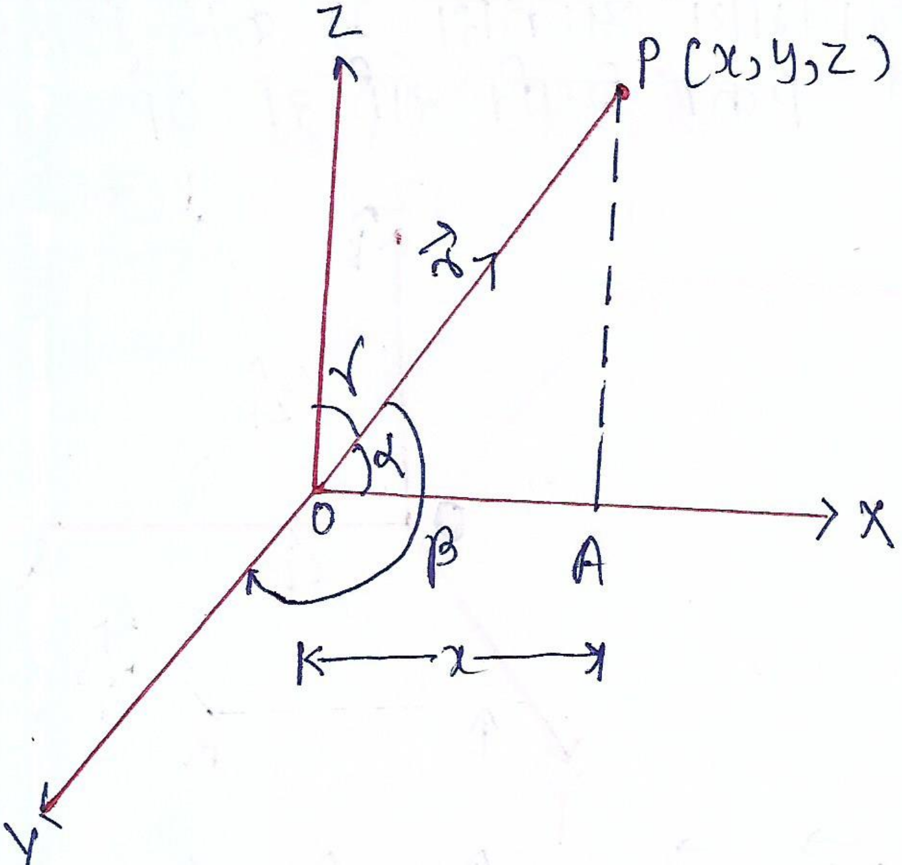
$$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$$

तब $\vec{a}$ का $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

इसी प्रकार

$\vec{b}$ का $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + c_2^2}$

दिक् कोज्याएँ (Direction cosines)



कोई सदिश समकोणिक अक्षो की धनात्मक दिशाओ के साथ जो कोण बनाता है, उनकी कोज्याओं (cosines) को दिक् कोज्यायें कहलाती हैं। माना कोई सदिश $\vec{OP}$ समकोणिक अक्षो OX, OY तथा OZ की धनात्मक दिशाओ के ~~मध्य~~ साथ क्रमश: α, β तथा γ कोण बनाता है, तो $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ उनकी दिक् कोज्यायें कहलाती हैं। इसे सामान्यत: l, m, n से denote करते हैं।

अर्थात् $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$

जहाँ α, β, γ (direction angles) हैं

तथा $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \geq \pi$

if $\vec{OP} = \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

तथा $\vec{OP}$ की दिक् कोज्यायें $\cos\alpha, \cos\beta$ व $\cos\gamma$ है

तब $\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\hat{i} \text{ का गुणांक}}{\vec{r} \text{ का मापांक}}$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\hat{j} \text{ का गुणांक}}{\vec{r} \text{ का मापांक}}$$

$$\cos\gamma - \frac{z}{|\vec{r}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\hat{k} \text{ का गुणांक}}{\vec{r} \text{ का मापांक}}$$

Note —

दिक् कोज्यायों के वर्गों का योगफल हमेशा 1 होता है।

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} = 1$$

$$\boxed{l^2 + m^2 + n^2 = 1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}$$

$P = (x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q = (x_2, y_2, z_2)$

तब इनके दिक अनुपात $= (x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)$

तब दिक् कोज्याए

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{r}$$

$$\cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{r}$$

$$\cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{r}$$

जहाँ $r = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$