Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Examen Final del curso ÁLGEBRA LINEAL – 1105

(6 Puntos) **I**. Responda falso o verdadero, justificando matematicamente su respuesta.

(i) El conjunto $Q = \{p(x) \in P_2[x] \mid p(x) = p(-x)\}$ es un subespacio vectorial del espacio $P_2[x]$ de polinomios de grado menor o igual a 2.

(ii) Si $A\vec{x} = \vec{b}$ es un sistema de ecuaciones lineales con infinitas soluciones, entonces los vectores columna de la matriz cuadrada A son linealmente independientes.

(iii) Si A es una matriz ortogonal, entonces $\det A = \pm 1$.

(iv) Si A y B son matrices 3×3 y $\det A = 2$, $\det B = 4$, entonces $\det\left(\frac{1}{2}(A^{-1}B)^T\right) = \frac{1}{2}$.

(6 Puntos) **II**. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

(i) Encuentre el núcleo (espacio nulo) $N(A)$ de A, una base para $N(A)$ y su dimensión.

(ii) Encuentre el rango (espacio imagen) $R(A)$ de A, una base para $R(A)$ y su dimensión.

(7 Puntos) **III**. Sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y el plano $W^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x + 2y + 3z = 0\}$, su complemento ortogonal.

(i) Halle una base ortogonal $B_{W^\perp}$ para $W^\perp$.

(ii) Halle una base B_W para W.

(iii) Halle una base ortogonal B para $\mathbb{R}^3$ que contenga un vector de $W^\perp$.

(iv) Encuentre la proyección del vector $\vec{\mathbf{x}} = (1,1,1)$ sobre el subespacio $W^\perp$.

(v) Encuentre dos vectores $\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2 \in \mathbb{R}^3$ tales que $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}_1 + \vec{\mathbf{x}}_2$, con $\vec{\mathbf{x}}_1 \in W$ y $\vec{\mathbf{x}}_2 \in W^\perp$.

(vi) Encuentre la matriz de cambio de base de la base canónica B_o de $\mathbb{R}^3$ a la base B.

(vii) Encuentre las coordenadas del vector $\vec{b}$ en la base B.

(6 Puntos) **IV**. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(i) Demuestre que los valores propios de A son 1 y 3.

(ii) Encuentre los vectores propios de A correspondientes a cada valor propio.

(iii) Calcule las multiplicidades algebraica y geométrica de cada valor propio y diga si la matriz A es diagonalizable, en caso de serlo encuentre las matrices D diagonal y C invertible tales que $A = CDC^{-1}$.

Tiempo máximo: 2 horas.
Recuerde que no está permitido el uso de textos, tablas, apuntes ni calculadoras, y que todo teléfono celular debe estar apagado.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

Exámen Final de Algebra Lineal.

El juramento del uniandino dice: **"Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad"**

NOMBRE ____________________________ **CODIGO**__________ **FIRMA**______________

Justifique en forma clara y matemáticamente cada una de sus respuestas.

1. Considere el sistema lineal de ecuaciones $\begin{cases} x_1 \qquad - 2x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 - x_3 - 7x_4 = 4 \end{cases}$

   a) Encuentre todas las soluciones del sistema.

   b) Dé una solución particular del sistema.

2. Sea H el subespacio $H = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 / \ 2x + 3y - z = 0\}$.

   a) Halle una base ortogonal para H.

   b) Halle la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = [1, 2, 3]$ sobre el subespacio H.

3. Sea $T : P_3 \to P_3$ la transformación lineal definida por
   $T(p(x)) = x\dfrac{d}{dx}(p(x)) - 2p(x)$.

   a) Halle la matriz de representación estandar de T relativa a la base ordenada $E = \{1, x, x^2, x^3\}$.

   b) Halle una base (de polinomios) para el $\text{Ker}(T)$ y la nulidad de T.

   c) Halle una base (de polinomios) para la $\text{Im}(T)$ y el rango de T.

4. Para la matriz $A = \begin{bmatrix} -8 & -9 & -12 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ con polinomio característico$p(\lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda + 2)^2$ halle matrices C invertible y D diagonal, tales que $A = CDC^{-1}$.

5. En las siguientes proposiciones escriba falso (F) ó verdadero (V) según sea el caso. En caso de ser falso puede justificar mediante un contra-ejemplo, en caso verdadero justifique únicamente mediante un argumento matemático.

   a) Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores ortogonales y unitarios. Si $\vec{u} = \vec{v}\cos\theta + \vec{w}\sin\theta$, θ un ángulo cualquiera, entonces $\|\vec{u}\| = 1$.

   b) La recta $L: \ x = 1 - 2t, \ \ y = t, \ \ z = 1 + t$ es paralela al plano $\Pi: \ \ x + y + z = 5$.

   c) Existe alguna matriz A ortogonal tal que $\text{Det}(A) = 2$.

   d) Sea V un espacio vectorial y $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ un conjunto de n vectores de V. Si cualquier vector $\vec{v} \in V$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores de B, entonces B necesariamente es una base para V.

NOTA: No se permite el uso de textos, apuntes, calculadoras ni dispositivos electrónicos!

TIEMPO MÁXIMO: 2 Horas.

Universidad de los Andes — Departamento de Matemáticas

Mate 1105 Algebra Lineal

Examen Final

Nombre:______________________________ Código:______________

1. Considere el conjunto $H = \left\{ A \in M_{2\times 2} \mid A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix} \right\}$

   a) Muestre que H es un subespacio vectorial.

   b) Halle una base para $H^{\perp}$. (El complemento ortogonal de H)

   c) Para la matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, halle matrices $M_H \in H$ y $M_{H^{\perp}} \in H^{\perp}$ de tal manera que $M = M_H + M_{H^{\perp}}$.

2. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ 2x+y \\ y \end{bmatrix}$ y las bases ordenadas $B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ y $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

   a) Hallar la matriz asociada a la transformación lineal con respecto a las bases BB' $(R_{BB'})$.

   b) Halle la imagen de T y su dimensión.

   c) Determine si T es uno a uno y halle la dimensión del núcleo de T.

3. Sea A una matriz 2×2 con polinomio característico $P(\lambda) = 2\lambda^2 + \lambda - 1$.

   a) Es A invertible?

   b) Es A diagonalizable?

   c) Suponga que A es diagonalizable mediante $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Halle la matriz A.

4. Halle todos los valores de a para que la matriz $\begin{bmatrix} a & a-1 & 1-a \\ a-2 & a & 2-a \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ sea invertible.

5. *a*) Si $A_{n\times n}$ es una matriz ortogonal, muestre que $(Ax)\cdot(Ay) = x\cdot y$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$

   b) Muestre que si λ es un valor propio de A con vector propio asociado v y $B = CAC^{-1}$, entonces λ es una valor propio de B con vector propio asociado Cv.

Tiempo 120 minutos.

[1] El juramento del uniandino dice: “Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad”