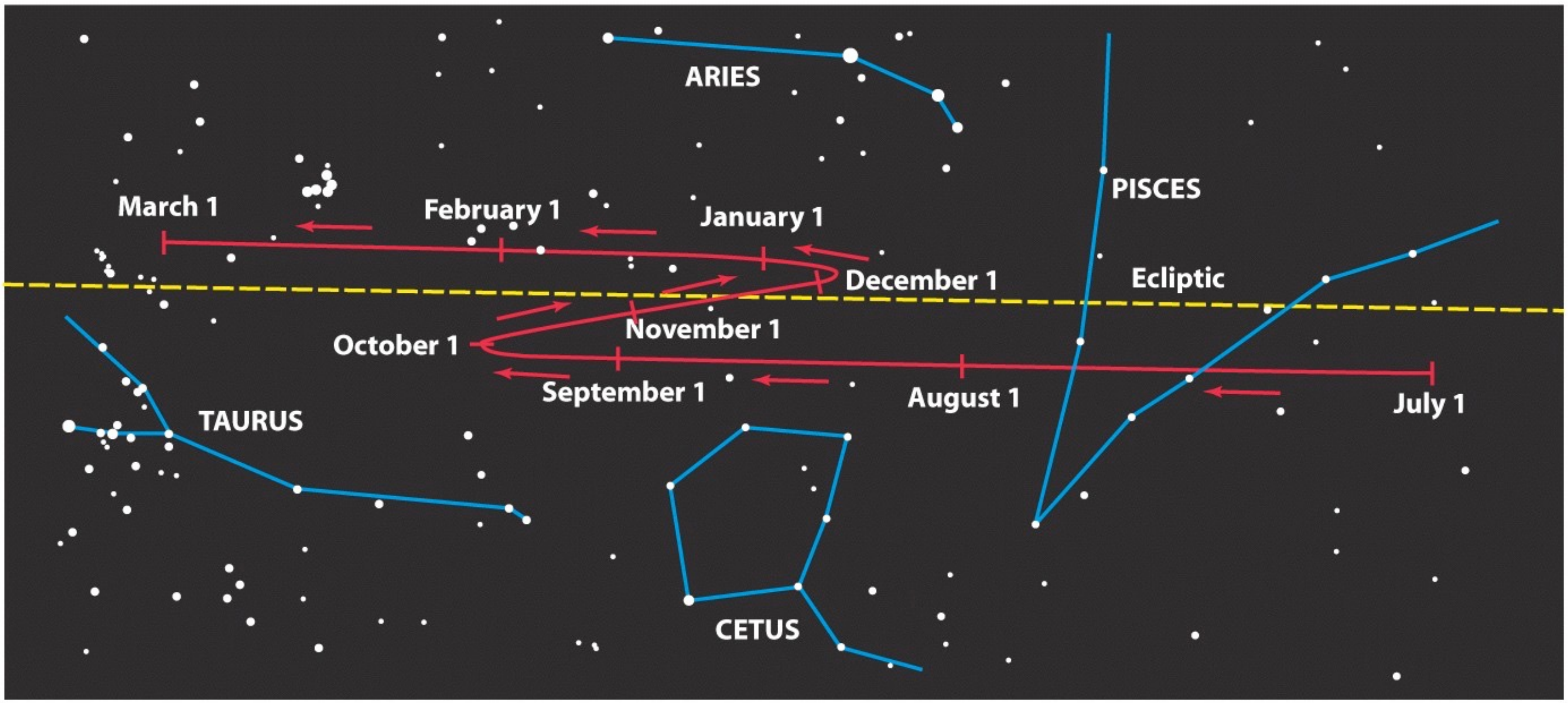
Movimientos de los cuerpos celestes

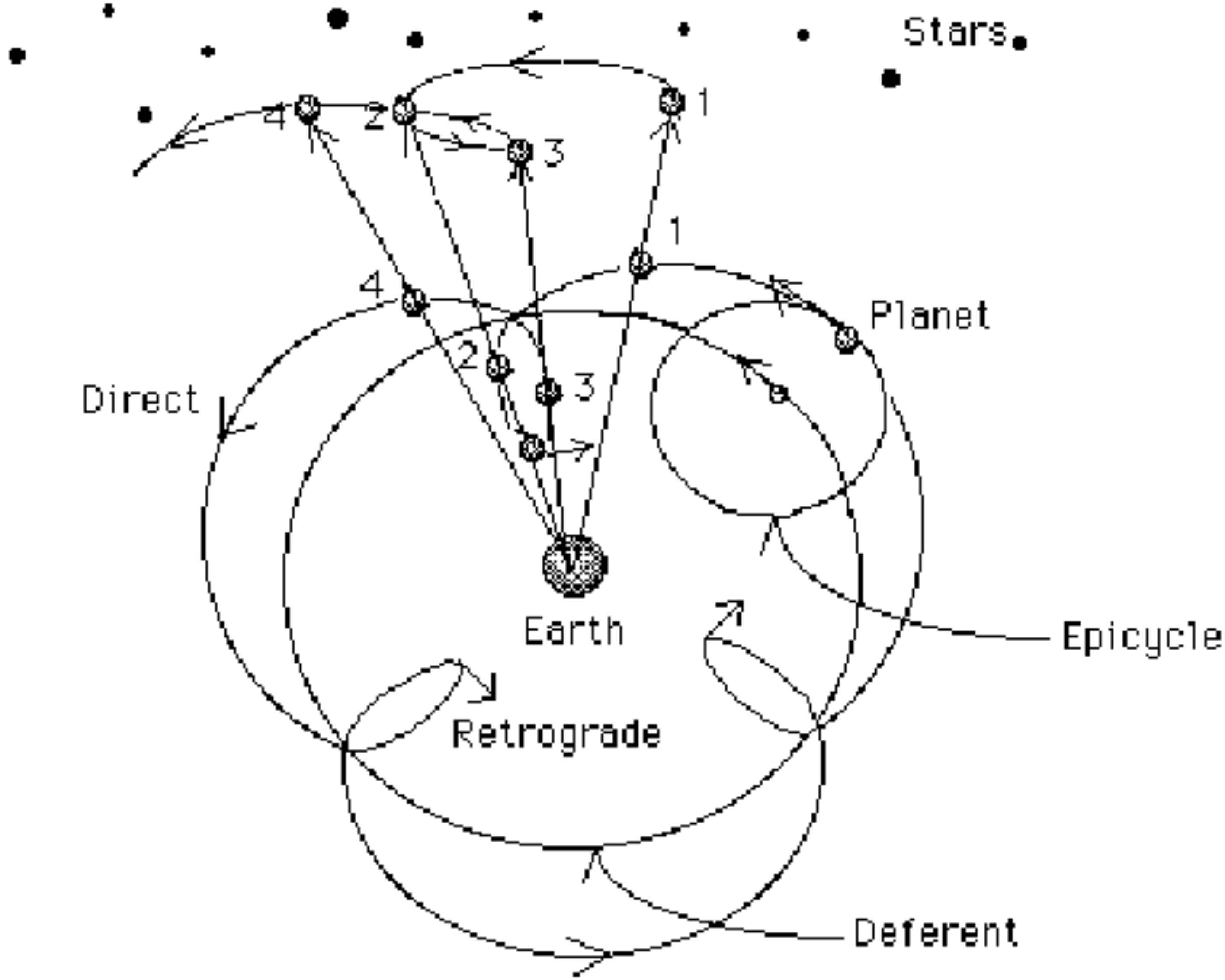
Temas selectos en la Enseñanza de la Astronomía

Prof. Benjamín Calvo-Mozo
Universidad Nacional de Colombia
Sede Bogotá, Facultad de Ciencias
Observatorio Astronómico Nacional

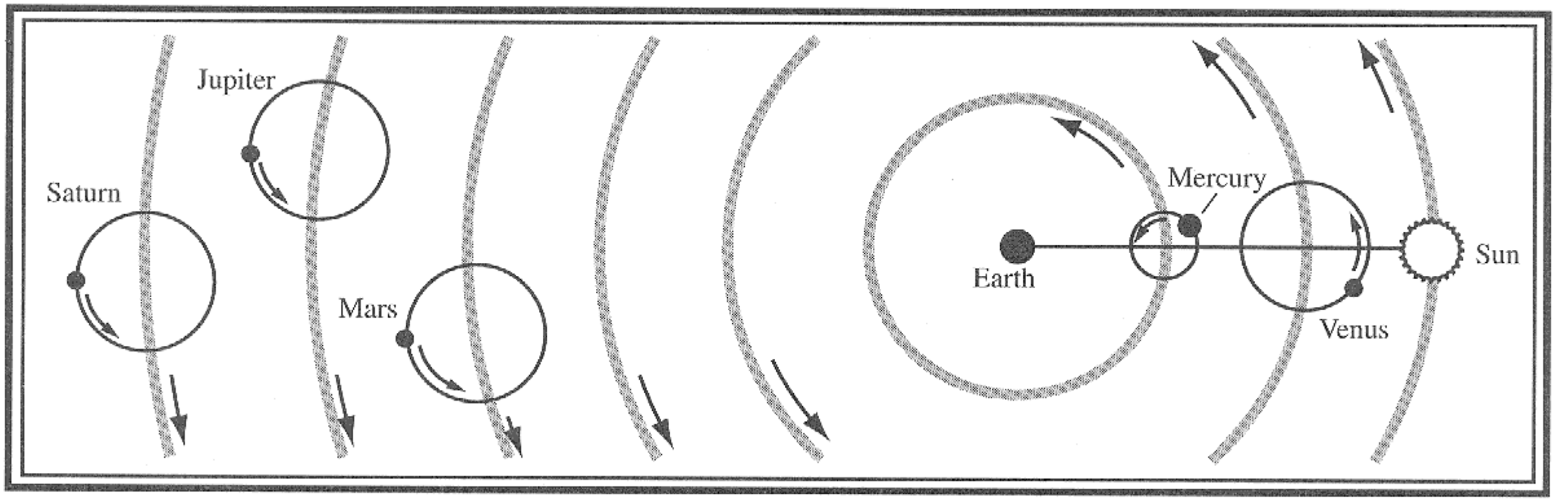

GRAPHIA



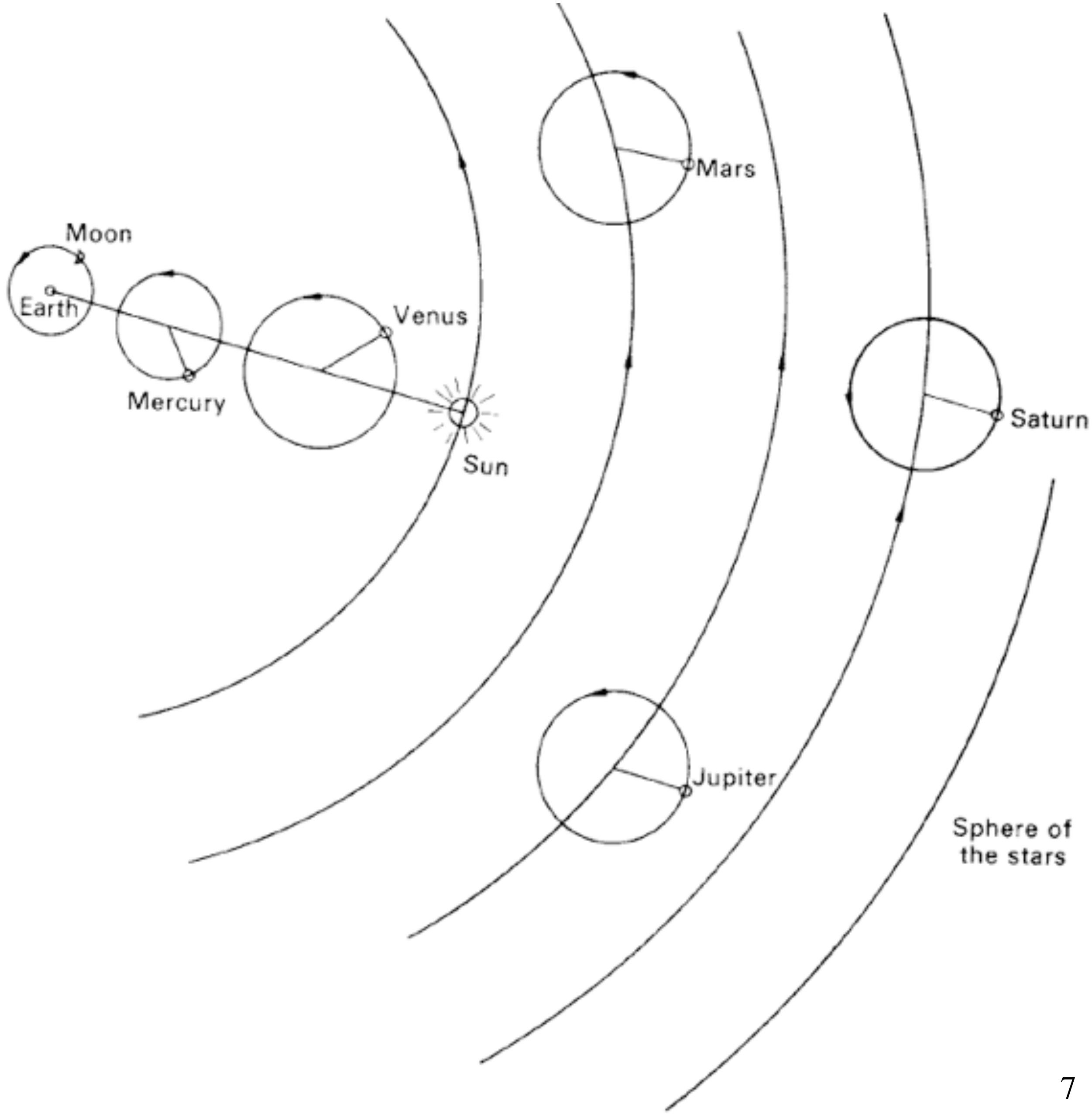
ARIES
PISCES
March 1
February 1
January 1
December 1
Ecliptic
October 1
November 1
September 1
August 1
July 1
TAURUS
CETUS



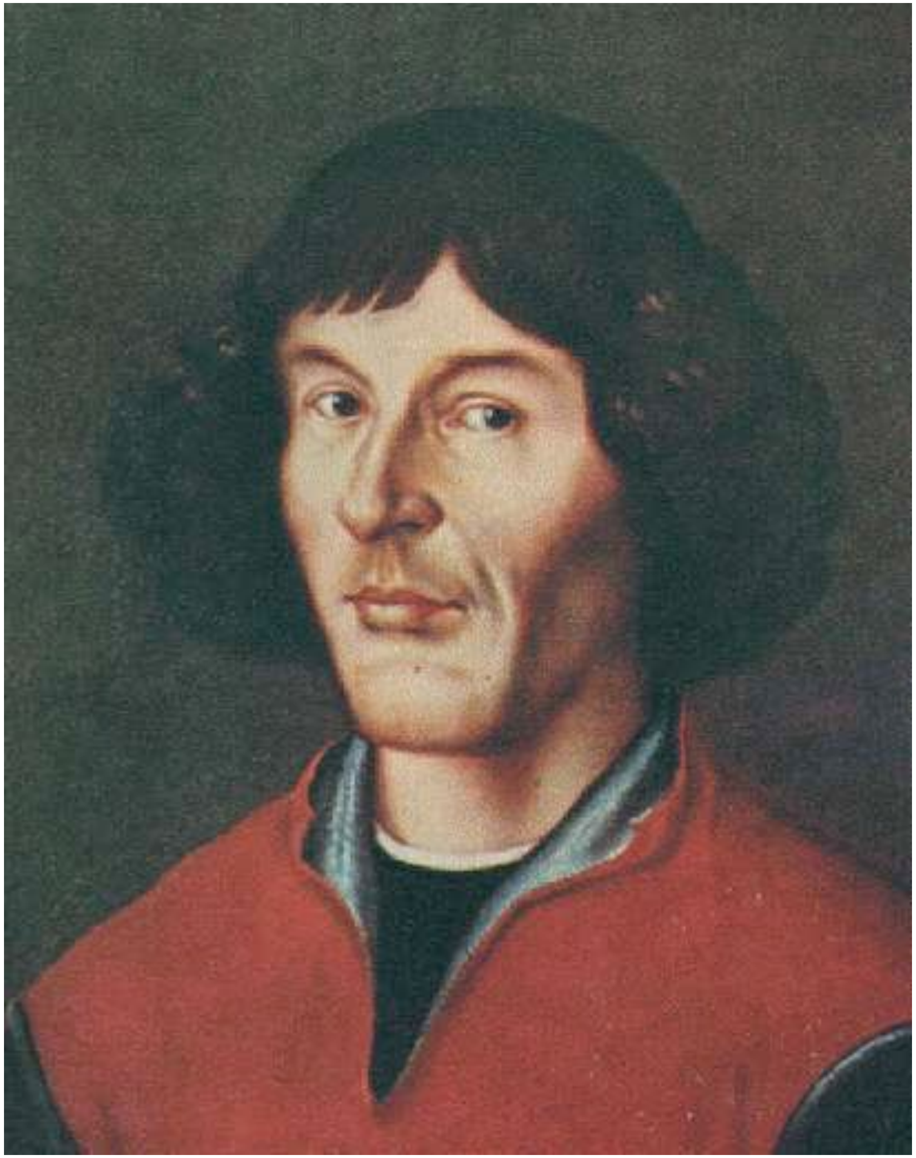
Stars
1
2
3
4
1
2
3
4
Planet
Direct
Earth
Epicycle
Retrograde
Deferent



Jupiter
Saturn
Mars
Mercury
Earth
Sun
Venus


Moon
Earth
Mercury
Venus
Sun
Mars
Saturn
Jupiter
Sphere of
the stars

De Revolutionibus Orbium Coelestium, 1ª edición 1643



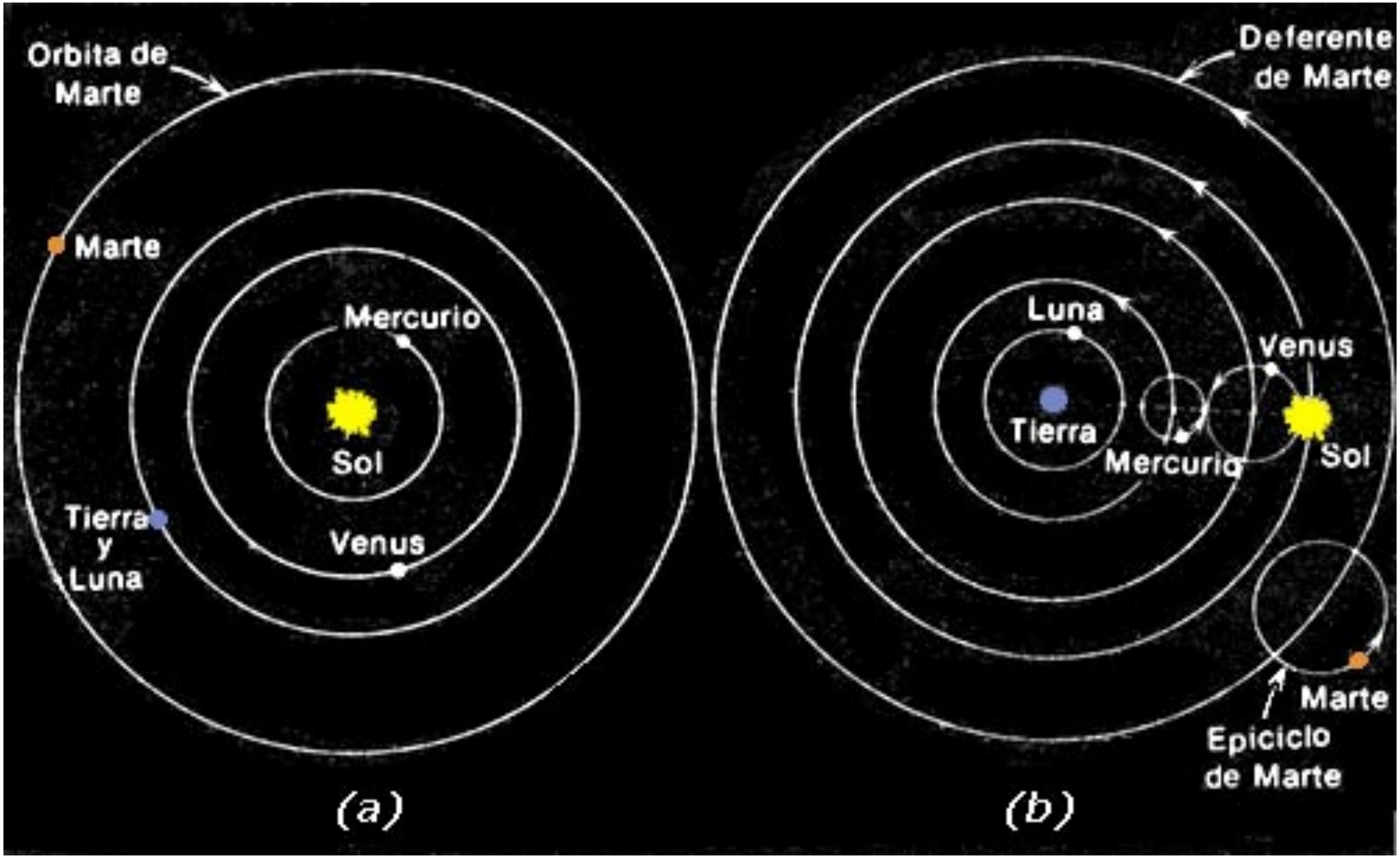
Nicolaus Copernicus (1473-1543)

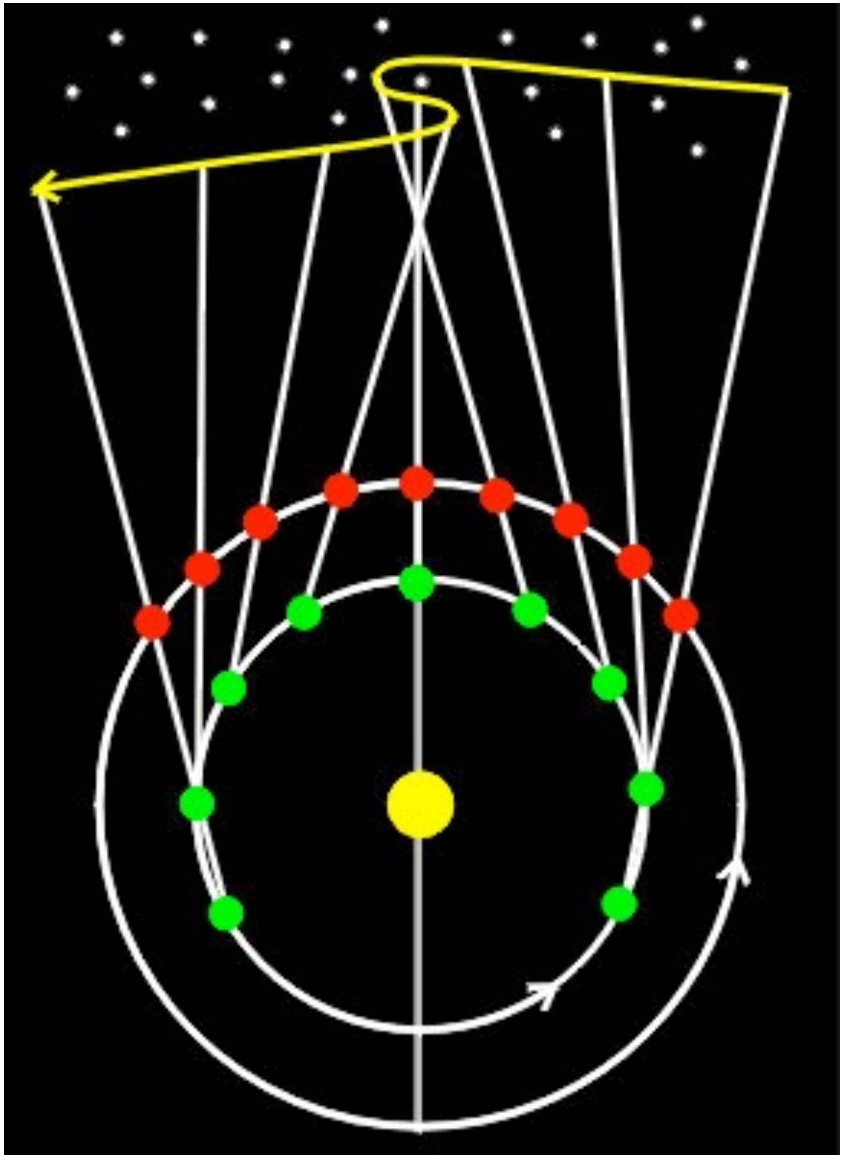
NICOLAI CO-
PERNICI TORINENSIS
DE REVOLVTIONIBVS ORBI-
um cœleſtium, Libri VI.

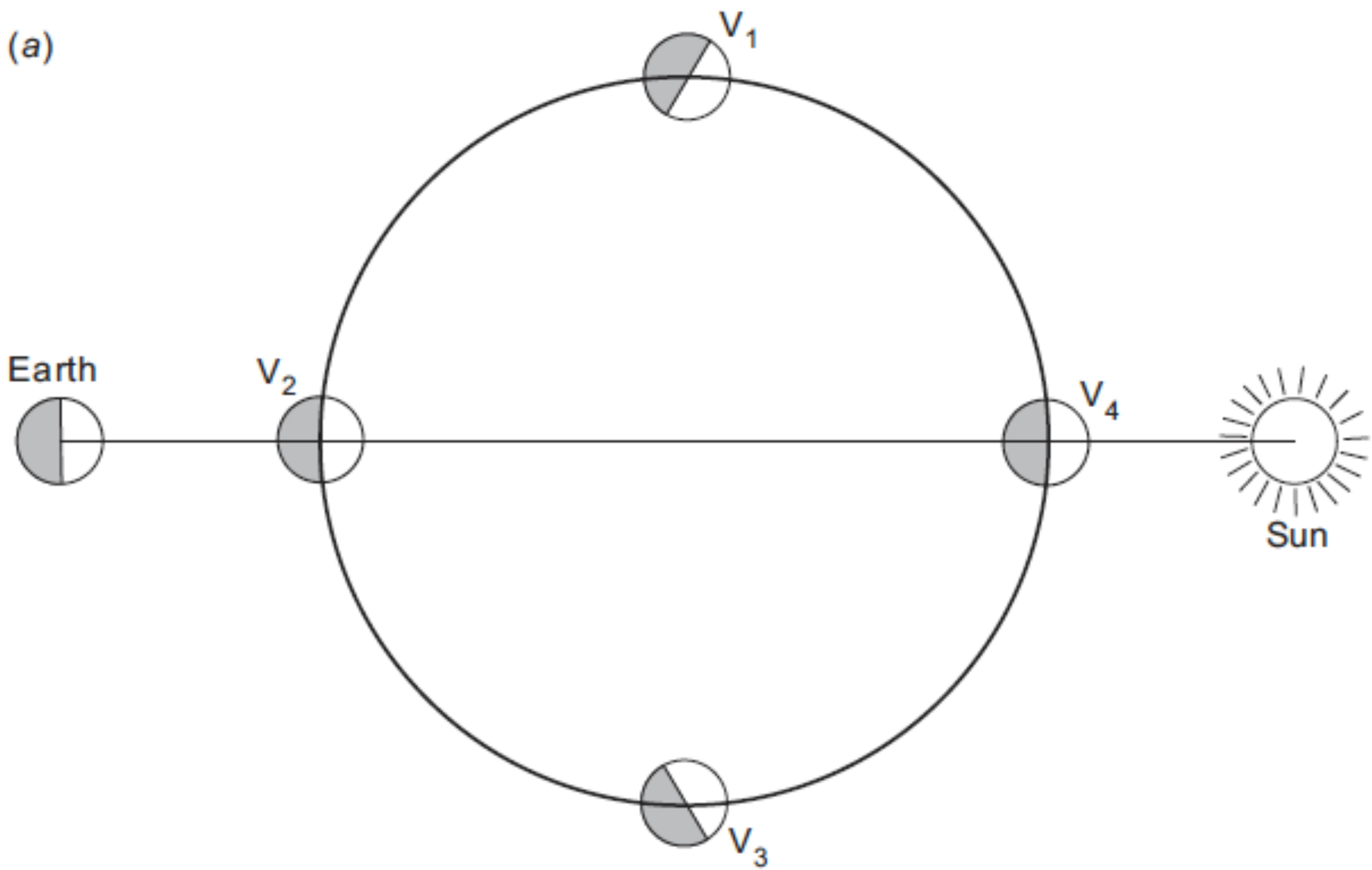
Habes in hoc opere iam recens nato, & ædito, ſtudioſe lector, Motus ſtellarum, tam fixarum, quàm erraticarum, cum ex ueteribus, tum etiam ex recentibus obſeruationibus reſtitutos: & nouis inſuper ac admirabilibus hypotheſibus ornatos. Habes etiam Tabulas expeditiſſimas, ex quibus eoſdem ad quoduis tempus quàm facilli me calculare poteris. Igitur eme, lege, fruere.

Ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω.

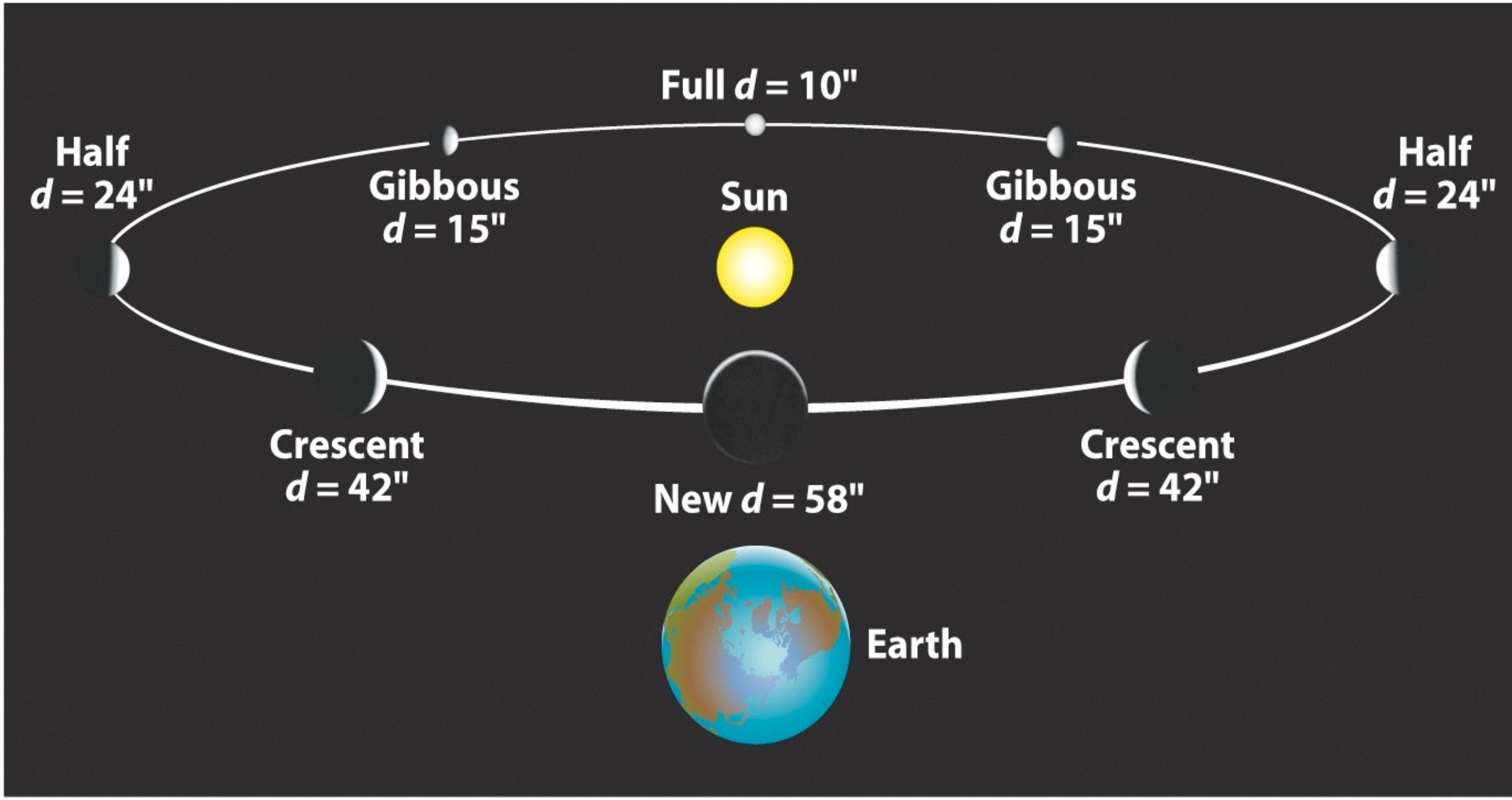
Norimbergæ apud Ioh. Petreium,
Anno M. D. XLIII.


Orbita de Marte
Marte
Mercurio
Sol
Tierra y Luna
Venus
(a)
Deferente de Marte
Luna
Tierra
Venus
Mercurio
Sol
Marte
Epiciclo de Marte
(b)



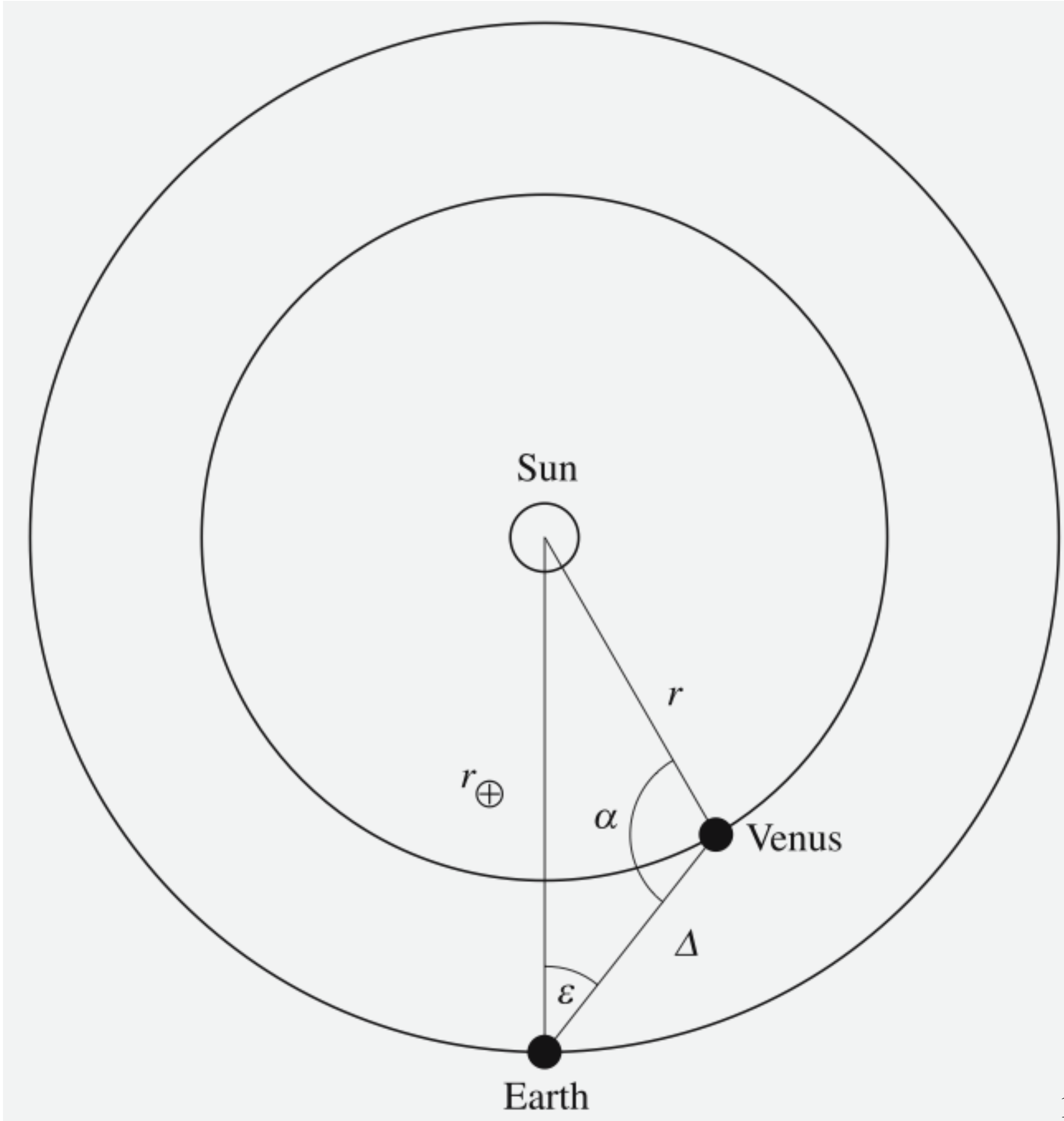


Fases de Venus en el modelo geocéntrico NO corresponde a la secuencia observada con el telescopio.

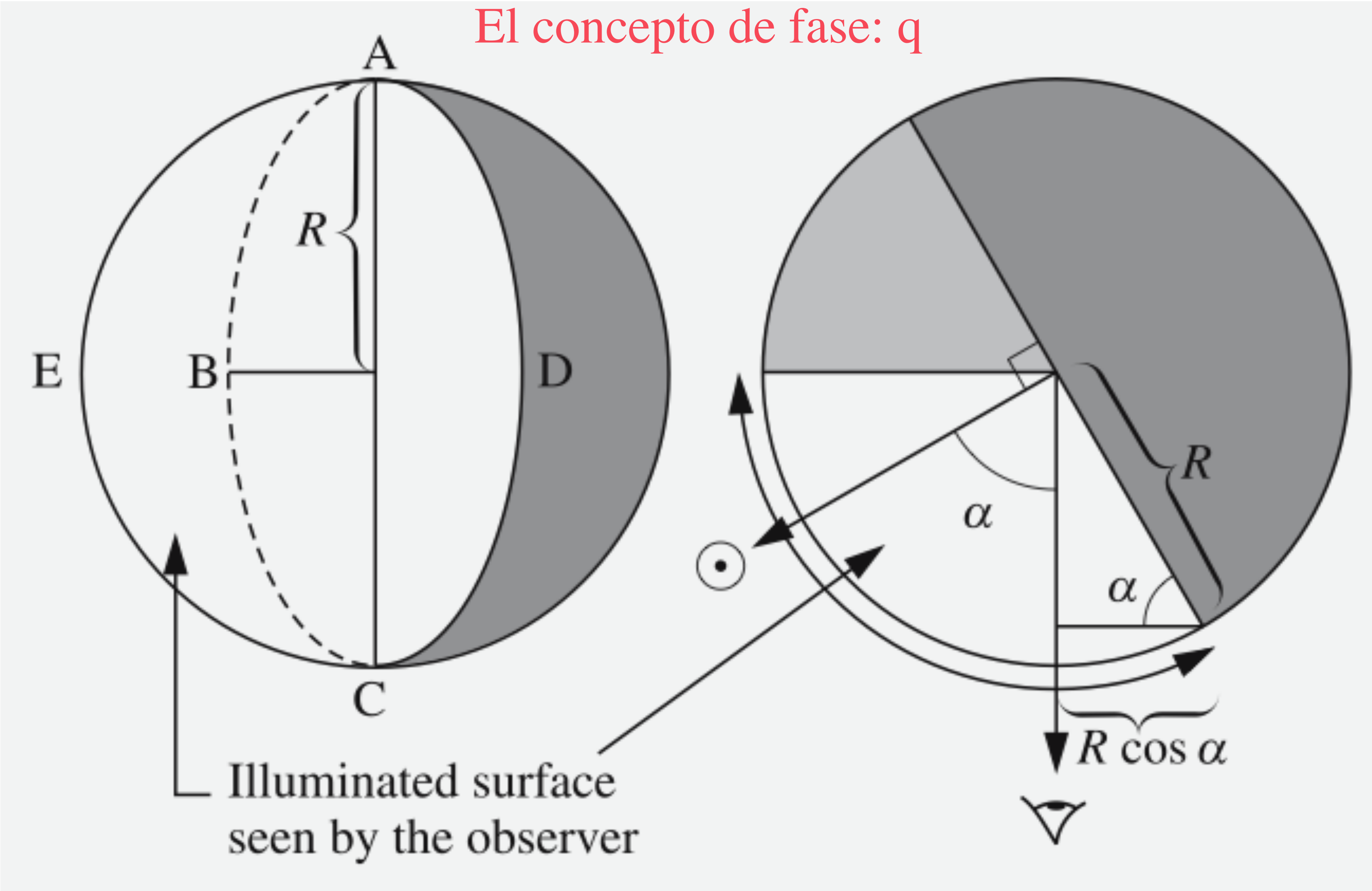


Fases de Venus según el modelo geocéntrico, corresponden a lo observado en el telescopio.

Ángulo de fase de un planeta inferior

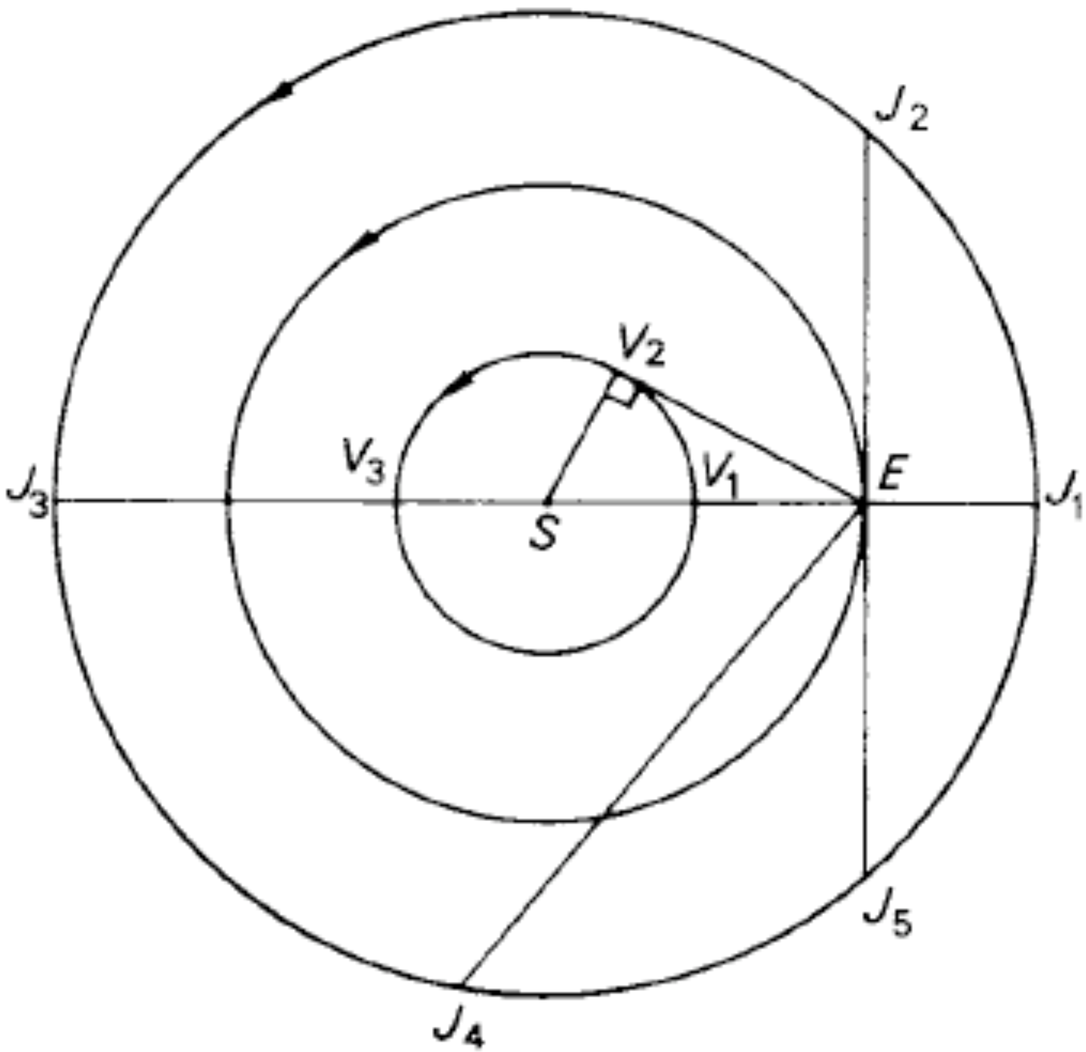


El concepto de fase: q



$$q = \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)$$

Configuraciones Planetarias

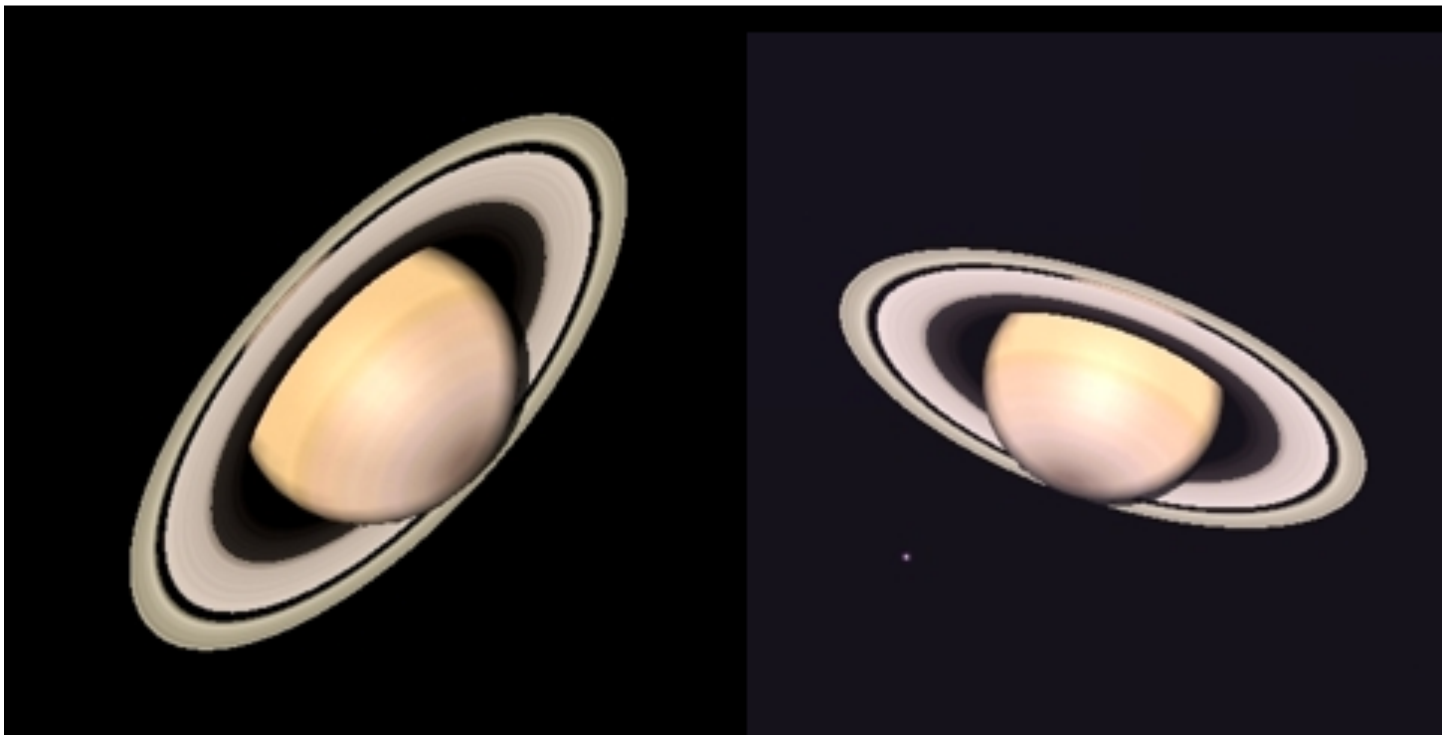


Oposiciones de Júpiter

Fecha	Distancia a la Tierra (10^6km)	Diámetro (segundo-arco)	Magnitud aparente
2012 dic 03	609.0	48.4	-2.8
2014 ene 05	630.0	46.8	-2.7
2015 feb 06	650.1	45.4	-2.6
2016 mar 08	663.4	44.5	-2.5
2017 abr 07	666.3	44.3	-2.5

Oposiciones de Saturno

Fecha	Distancia a la Tierra (UA)	Diámetro (segundo-arco)	Magnitud aparente
2012 abr 15	8,7196	19.2	- 0.05
2013 abr 28	8.8162	19.0	- 0.19
2014 may 10	8.8997	18.6	- 0.28
2015 may 23	8.9667	18.4	- 0.32
2016 jun 03	9.0149	18.3	- 0.34

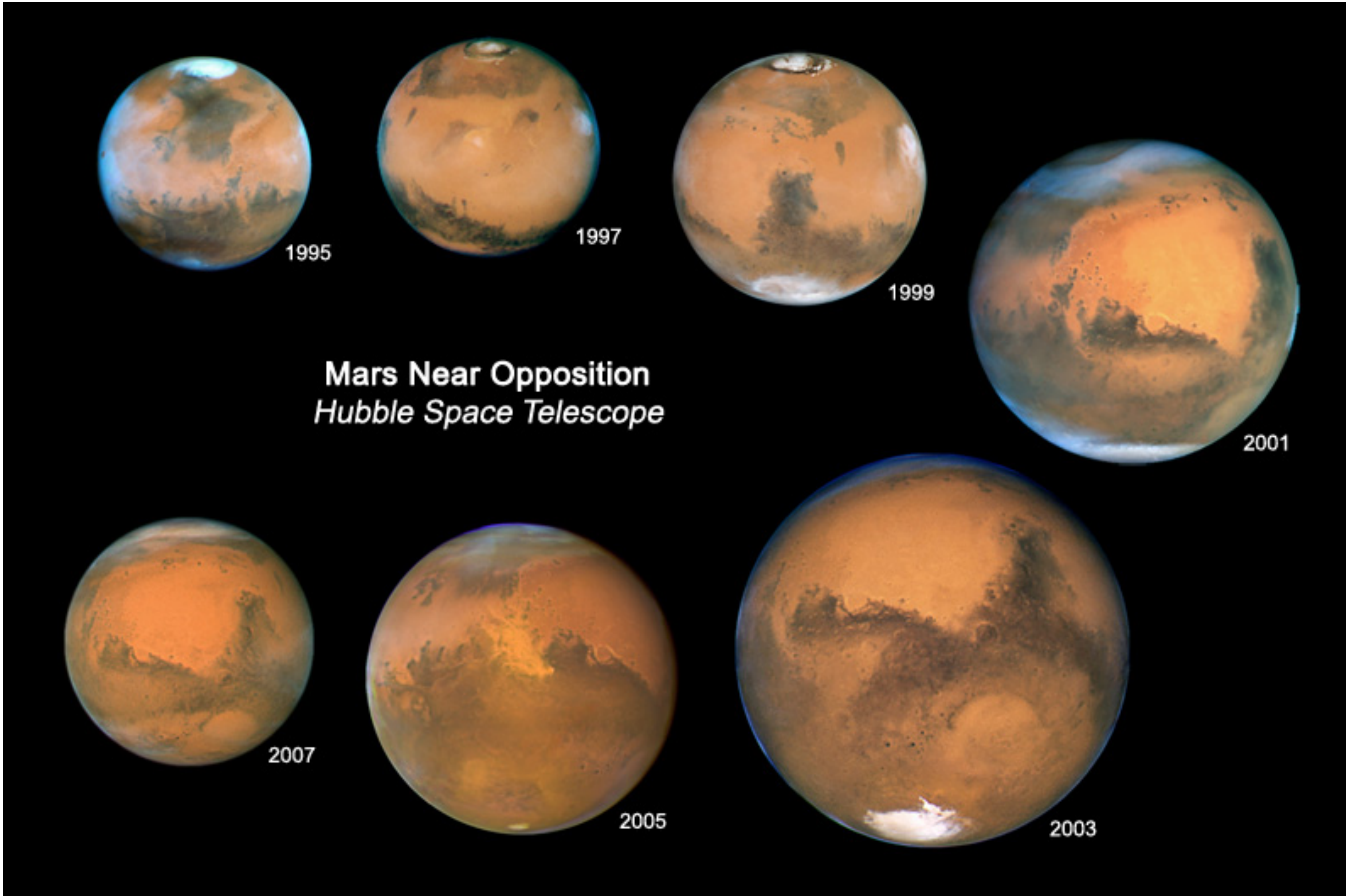


Tamaño de Saturno en Oposición

Tamaño de Saturno en Conjunción

Oposiciones de Marte

Fecha	Distancia a la Tierra (UA) x100	Diámetro (segundo-arco)
2003 ago 23	373	25.1
2005 nov 07	470	19.8
2007 dic 28	600	15.5
2010 ene 29	664	14.0
2012 mar 03	674	14.0
2014 abr 08	621	15.1
2016 may 22	509	18.4


Mars Near Opposition
Hubble Space Telescope
1995
1997
1999
2001
2007
2005
2003

Conjunciones inferiores y superiores de Venus y Mercurio

- Conjunción superior: Planeta inferior posterior al Sol. Se puede presentar ocultación del planeta por el Sol.

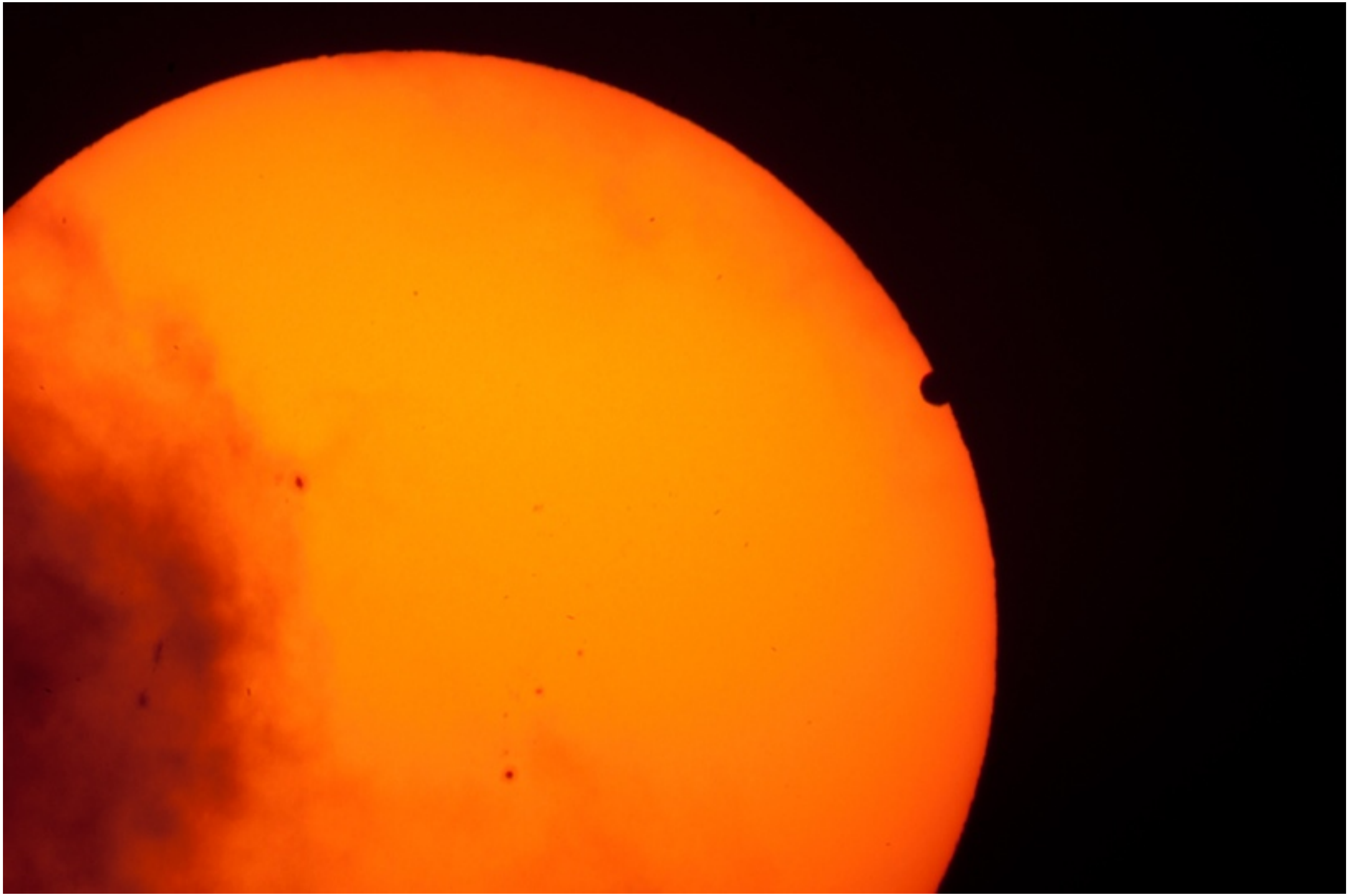
- Conjunción inferior: Planeta inferior anterior al Sol. Se puede presentar **tránsito** del planeta por el frente del disco solar (como un micro-eclipse).

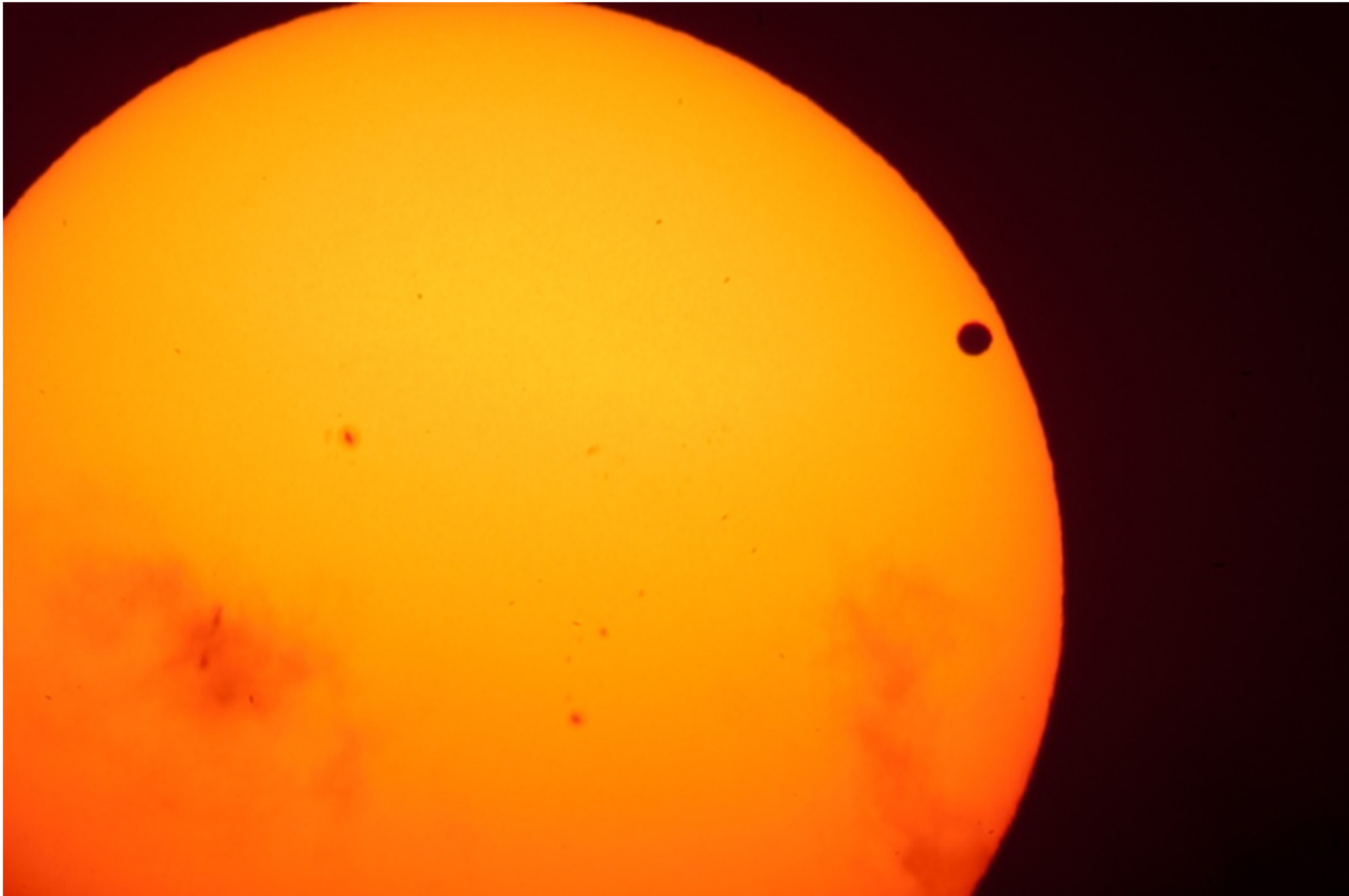
- Tránsitos de Mercurio recientes/próximas: mayo 7/2003, noviembre 8/2006, mayo 9/2016, noviembre 11/2019, noviembre 13/2032, noviembre 7/2039, mayo 7/2049....

Cada: 7, 13 o 33 años en noviembre, 13 o 33 años en mayo.

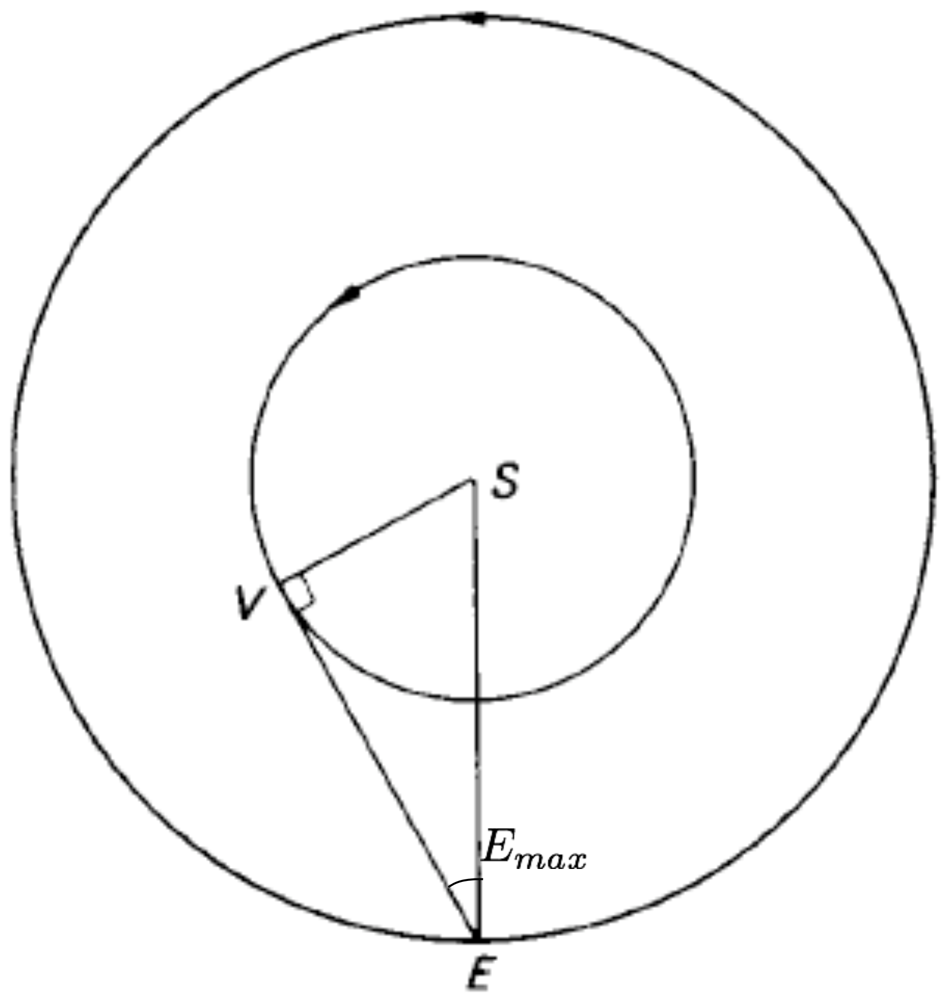
- Tránsitos de Venus recientes/próximas: junio 8/2004, junio 5-6/2012, diciembre 11/2117, diciembre 8/2115, diciembre 8/2125, junio 11/2247, ...

Cada: 105.5, 8, 121, 8 años, etc.





Planeta inferior (interior)

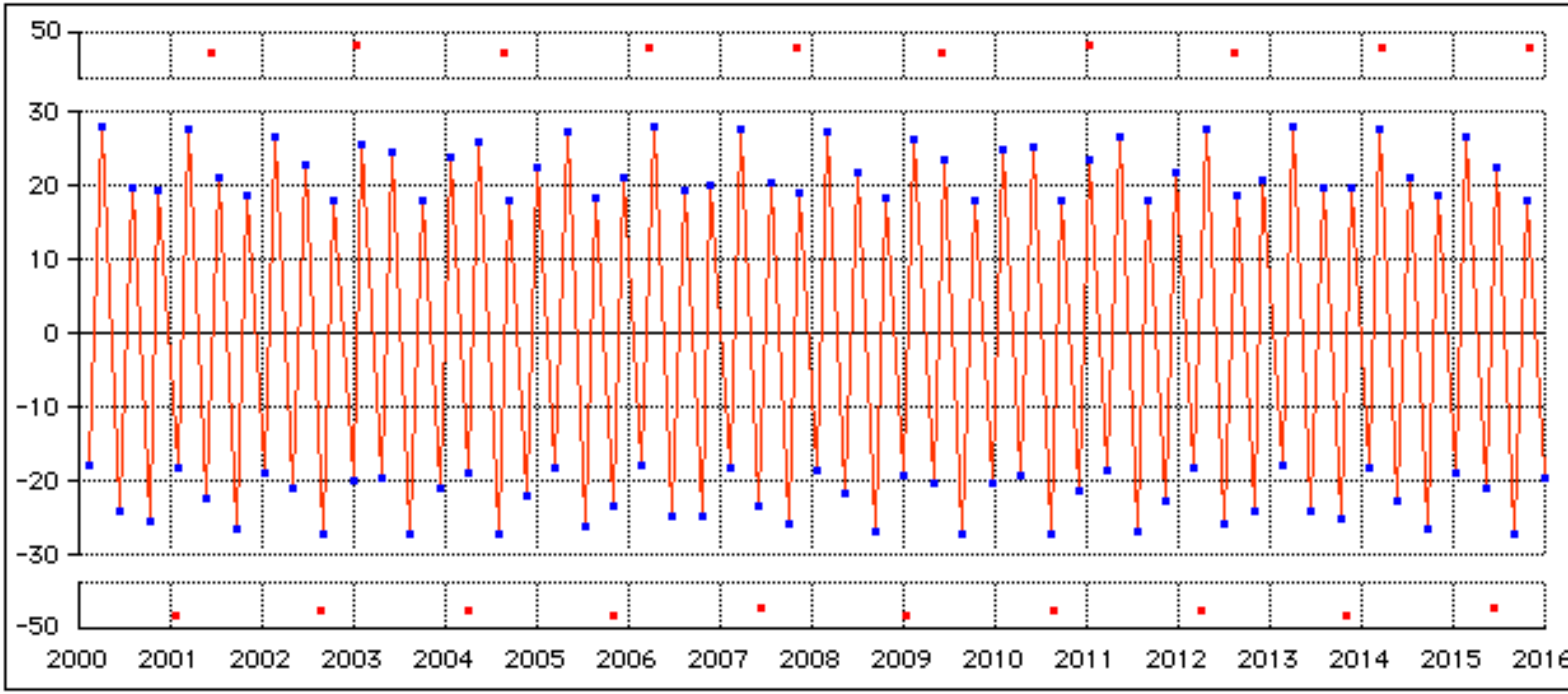


$$R_V = (1\,\mathrm{UA}) \times \sin E_{max} \; < \; 1\,\mathrm{UA}$$

Elongaciones Mercurio

- Mercurio tiene una órbita de excentricidad grande, aproximadamente 0.206
- Las elongaciones del planeta varían considerablemente a lo largo del año y de los años. Entre 2000 y 2015, se tiene:
- Elongaciones este: entre 18.1º y 27.4º
- Elongaciones oeste: entre 17.9º y 27.4º

Cuadro comparativo elongaciones de Venus (azul) y Mercurio(rojo)
Positivas las elongaciones Oeste y negativas las elongaciones Este.



Las máximas elongaciones de Venus están entre 45.8º y 47.0º (E-oeste), y entre -45.4º y -47.1º (E-oeste)
Cuadro de J. Giesen (febrero de 2006).

Períodos sinódico y sidéreo

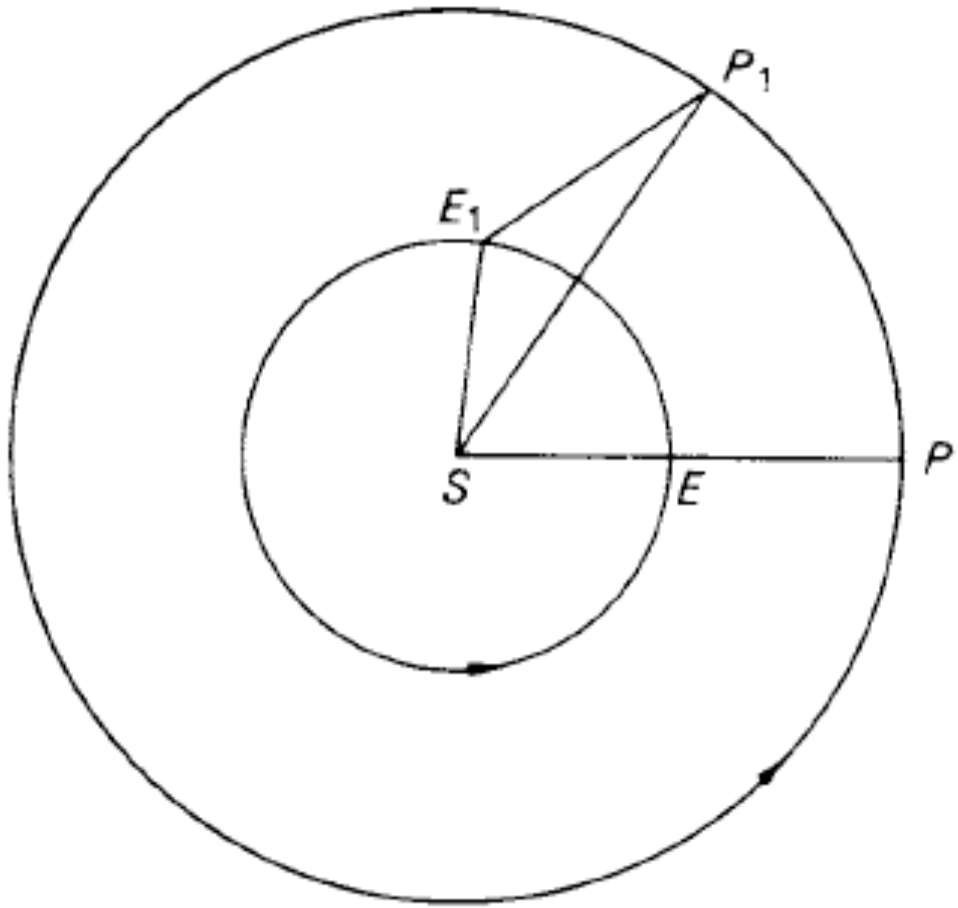
$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}$$

$$\frac{1}{583{\cdot}9} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{365{\cdot}25}$$

$$\frac{1}{T_1} = \frac{365{\cdot}25 + 583{\cdot}9}{583{\cdot}9 \times 365{\cdot}25}$$

$$T_1 = 224{\cdot}7 \text{ days.}$$

Planeta superior (exterior)



$$\theta = (n_{\oplus} - n_P)t$$

$$\theta = 360\left(\frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_P}\right)t$$

$$\theta = 360\frac{t}{S}.$$

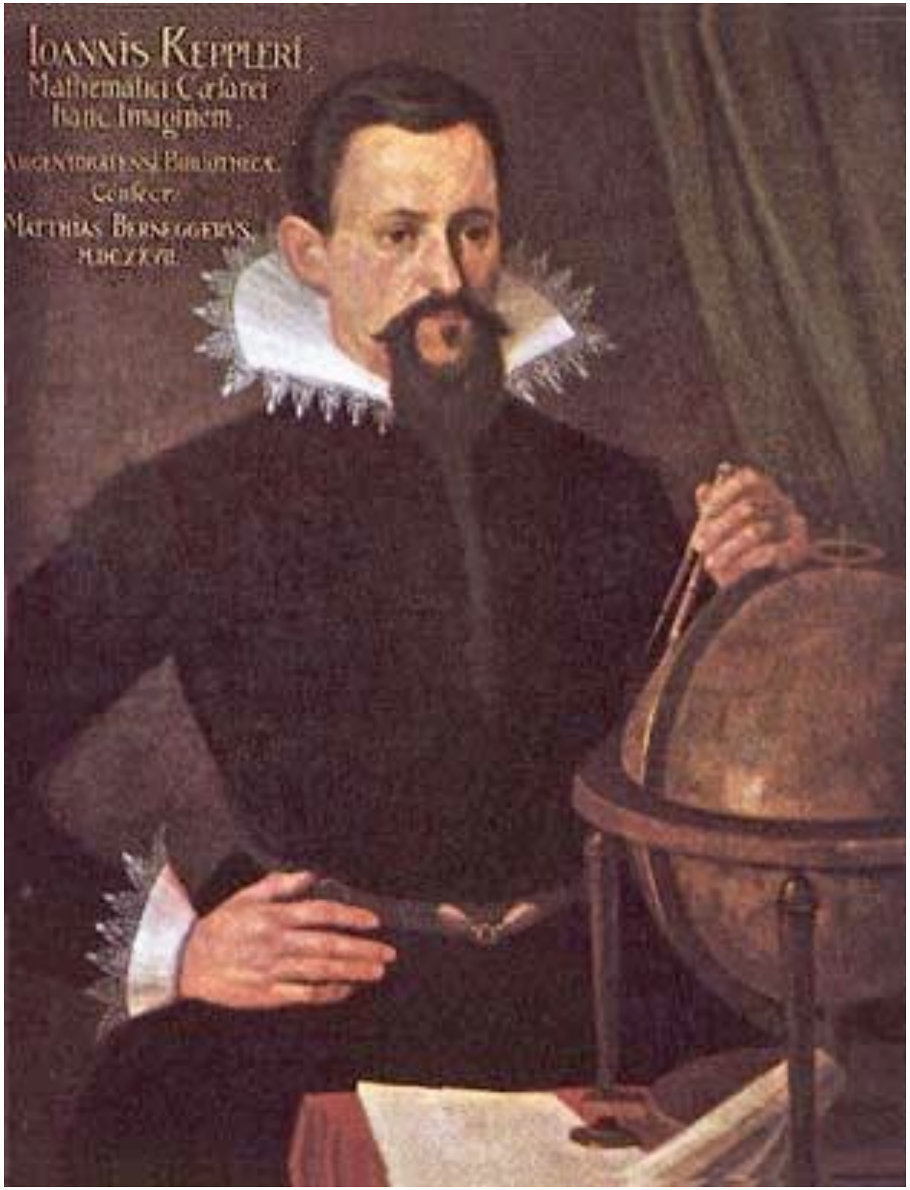
Cálculo de distancia planeta externo

$$\angle E_1 P_1 S = 180 - \angle S E_1 P_1 - \angle E_1 S P_1.$$

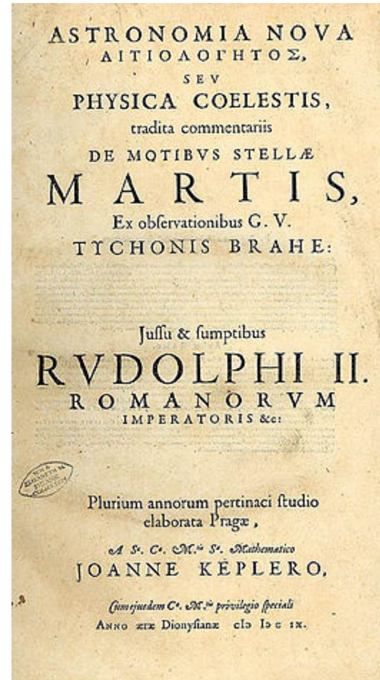
$$\frac{\sin P_1 E_1 S}{S P_1} = \frac{\sin E_1 P_1 S}{S E_1}$$

$$\frac{S P_1}{S E_1} = \frac{\sin P_1 E_1 S}{\sin E_1 P_1 S}$$

Tycho Brahe (1546-1601)



Johannes Kepler
(1571-1630)

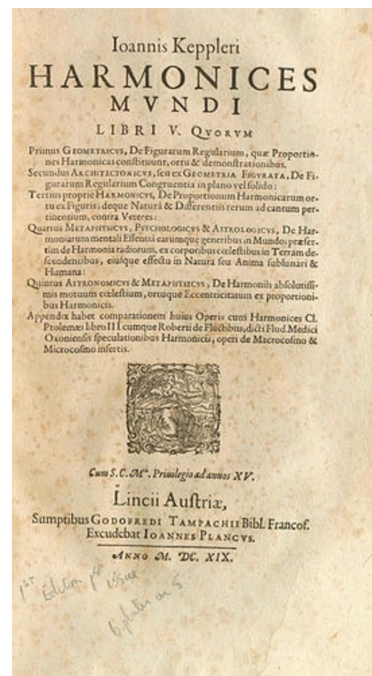

ASTRONOMIA NOVA
ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΤΟΣ,
SEV
PHYSICA COELESTIS,
tradita commentariis
DE MOTIBVS STELLÆ
MARTIS,
Ex observationibus G. V.
TYCHONIS BRAHE:

Jussu & sumptibus
RVDOLPHI II.
ROMANORVM
IMPERATORIS &c:

Plurium annorum pertinaci studio
elaborata Pragæ,

A S. C. M.tis S. Mathematico
JOANNE KEPLERO,

Cum ejusdem C. M.tis privilegio speciali
ANNO æræ Dionysianæ CIƆ IƆ C IX.


Ioannis Keppleri
HARMONICES
MVNDI
LIBRI V. QVORVM

Primus GEOMETRICVS, De Figurarum Regularium, quæ Proportiones Harmonicas constituunt, ortu & demonstrationibus.
Secundus ARCHITECTONICVS, seu ex GEOMETRIA FIGVRATA, De Figurarum Regularium Congruentia in plano vel solido:
Tertius propriè HARMONICVS, De Proportionum Harmonicarum ortu ex Figuris; deque Naturâ & Differentiis rerum ad cantum pertinentium, contra Veteres:
Quartus METAPHYSICVS, PSYCHOLOGICVS & ASTROLOGICVS, De Harmoniarum mentali Essentiâ earumque generibus in Mundo; præsertim de Harmonia radiorum, ex corporibus cœlestibus in Terram descendentibus, eiusque effectu in Natura seu Anima sublunari & Humana:
Quintus ASTRONOMICVS & METAPHYSICVS, De Harmoniis absolutissimis motuum cœlestium, ortuque Eccentricitatum ex proportionibus Harmonicis.
Appendix habet comparationem huius Operis cum Harmonices Cl. Ptolemæi libro III. cumque Roberti de Fluctibus, dicti Flud Medici Oxoniensis speculationibus Harmonicis, operi de Macrocosmo & Microcosmo insertis.

Cum S. C. M.tis Privilegio ad annos XV.

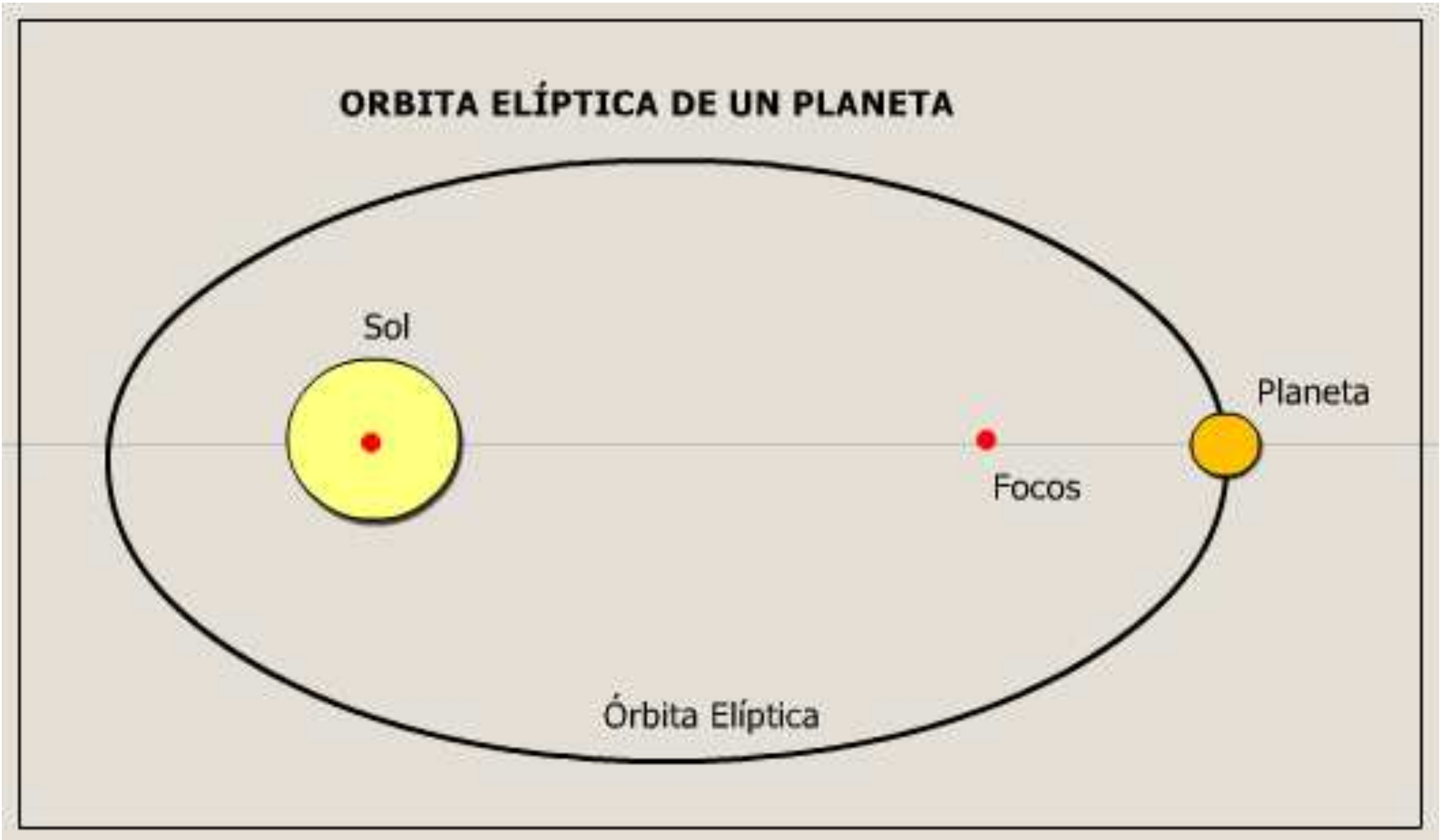
Lincii Austriæ,
Sumptibus GODOFREDI TAMPACHII Bibl. Francof.
Excudebat IOANNES PLANCVS.

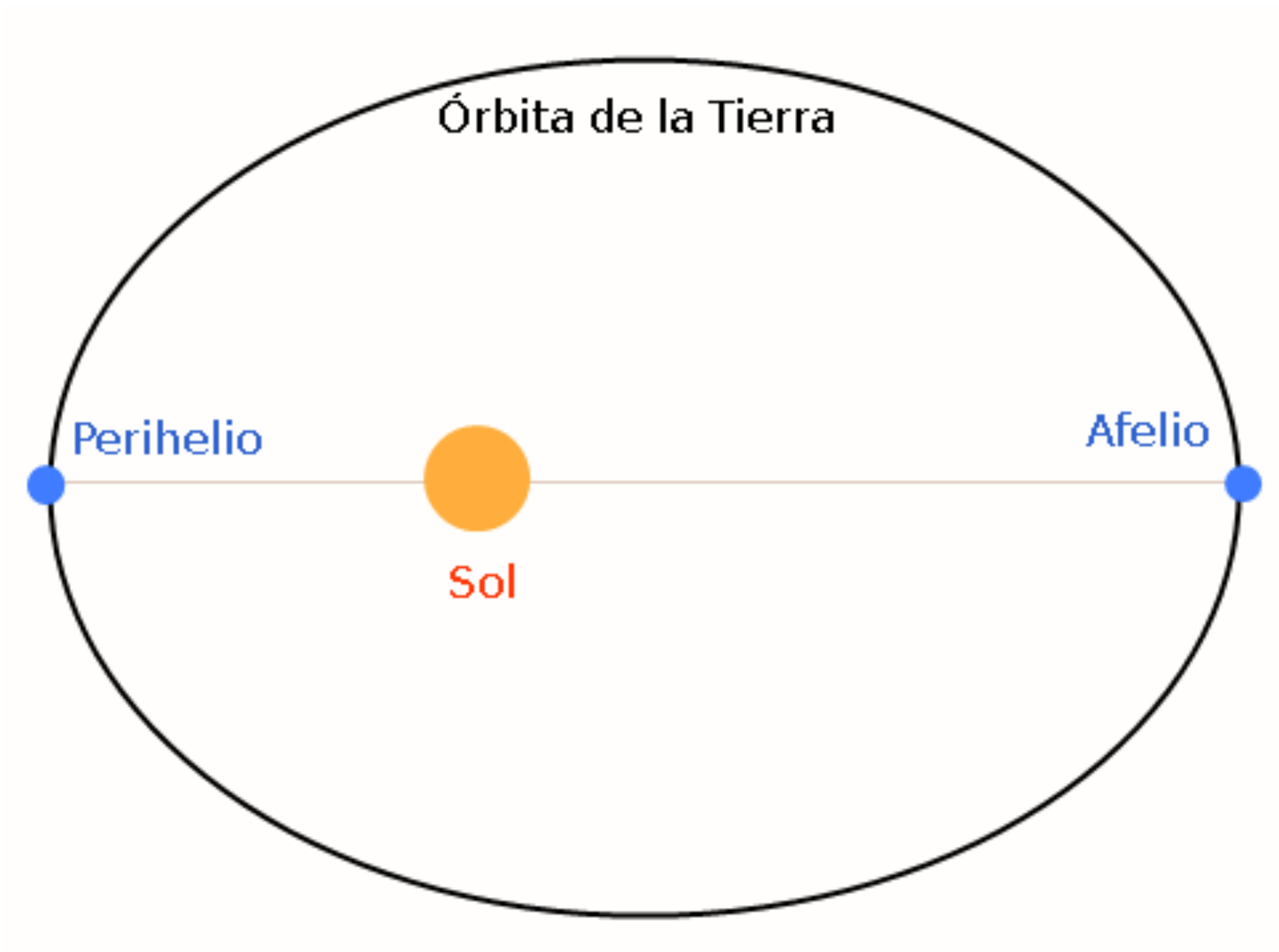
ANNO M. DC. XIX.

Astronomia Nova 1609
Primeras dos leyes.

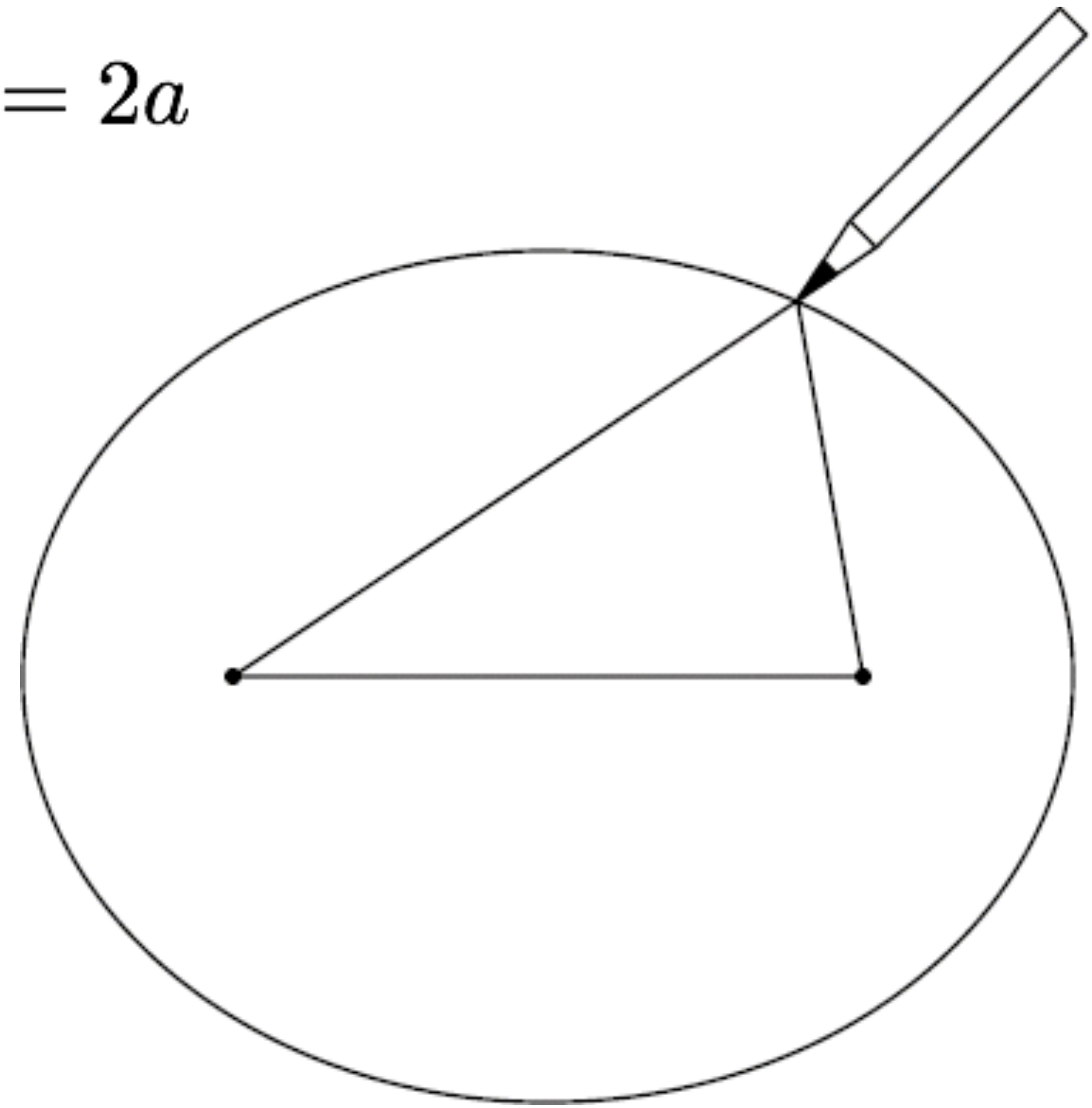
Armonices Mundi 1619
Tercera ley.

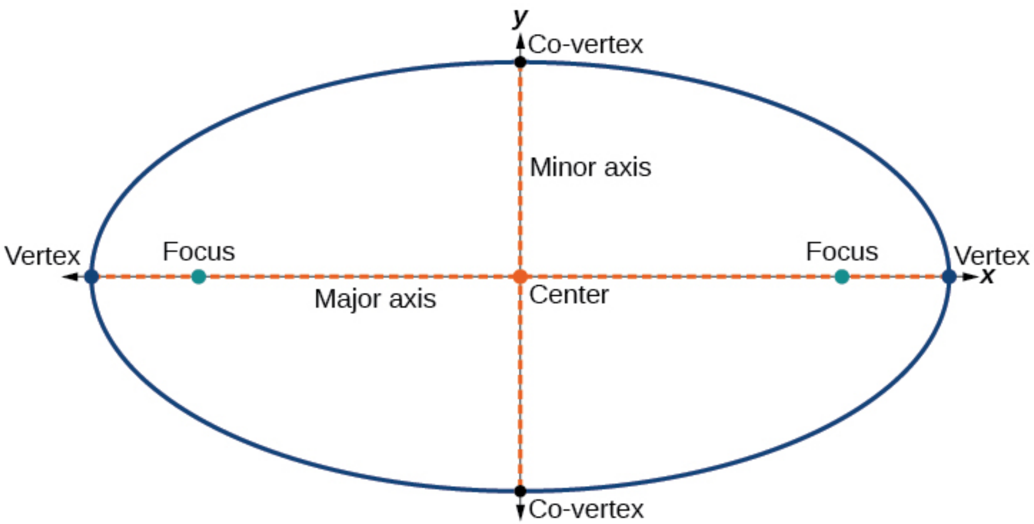
Primera ley de Kepler: el planeta sigue una **órbita elíptica** con el Sol en uno de sus focos.




Órbita de la Tierra
Perihelio
Afelio
Sol

$$r + r' = 2a$$

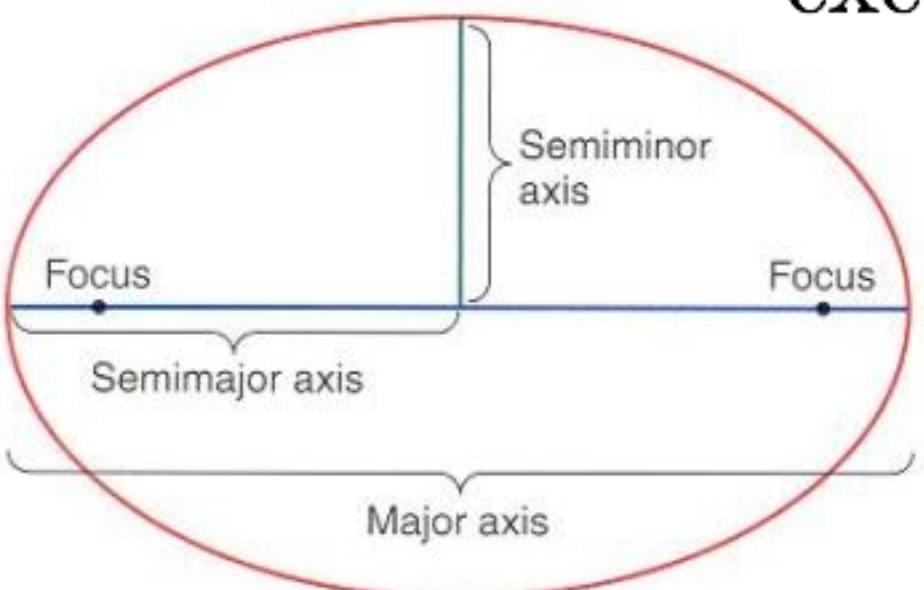




Semieje mayor: a

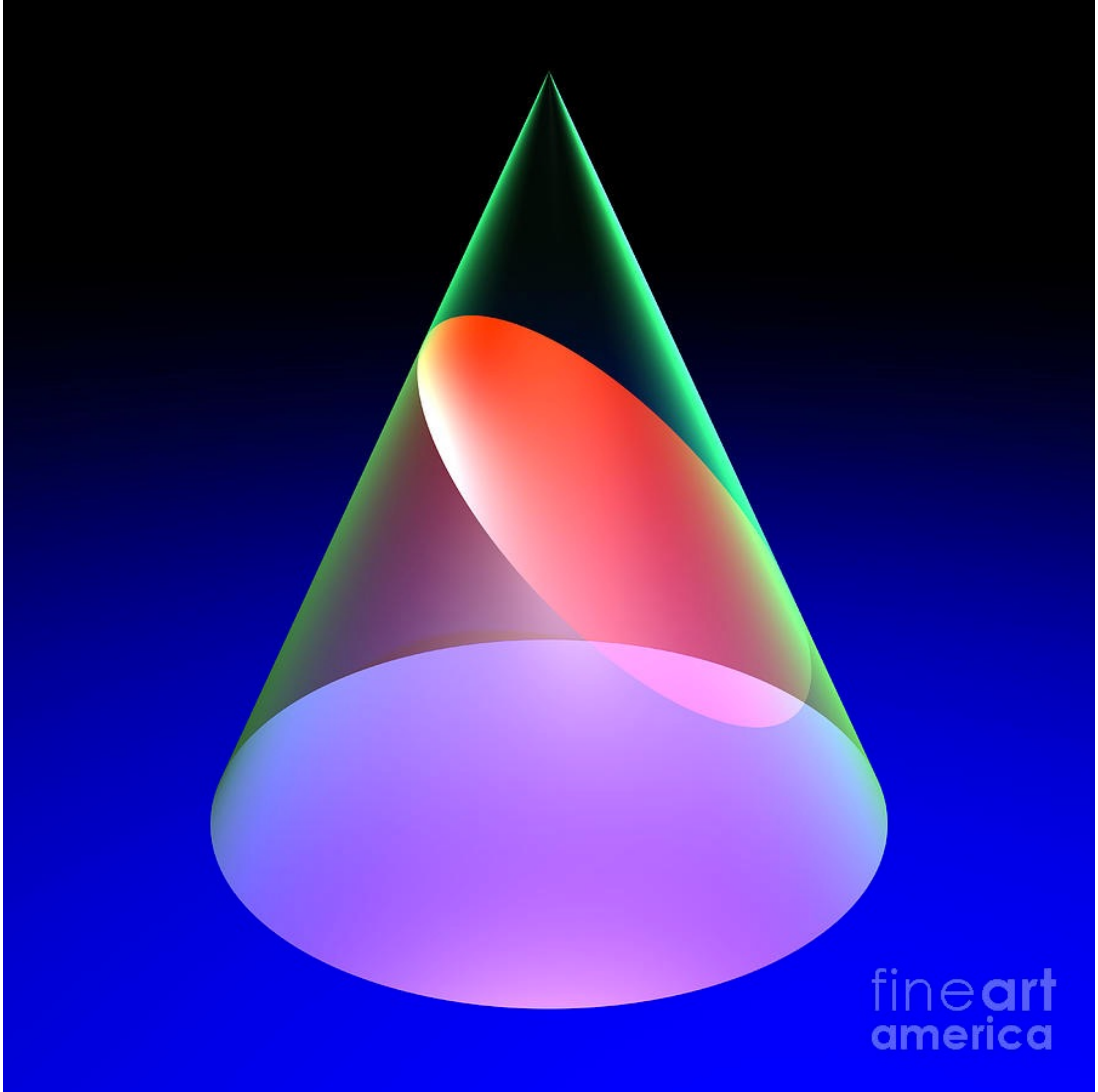
Semieje menor: b

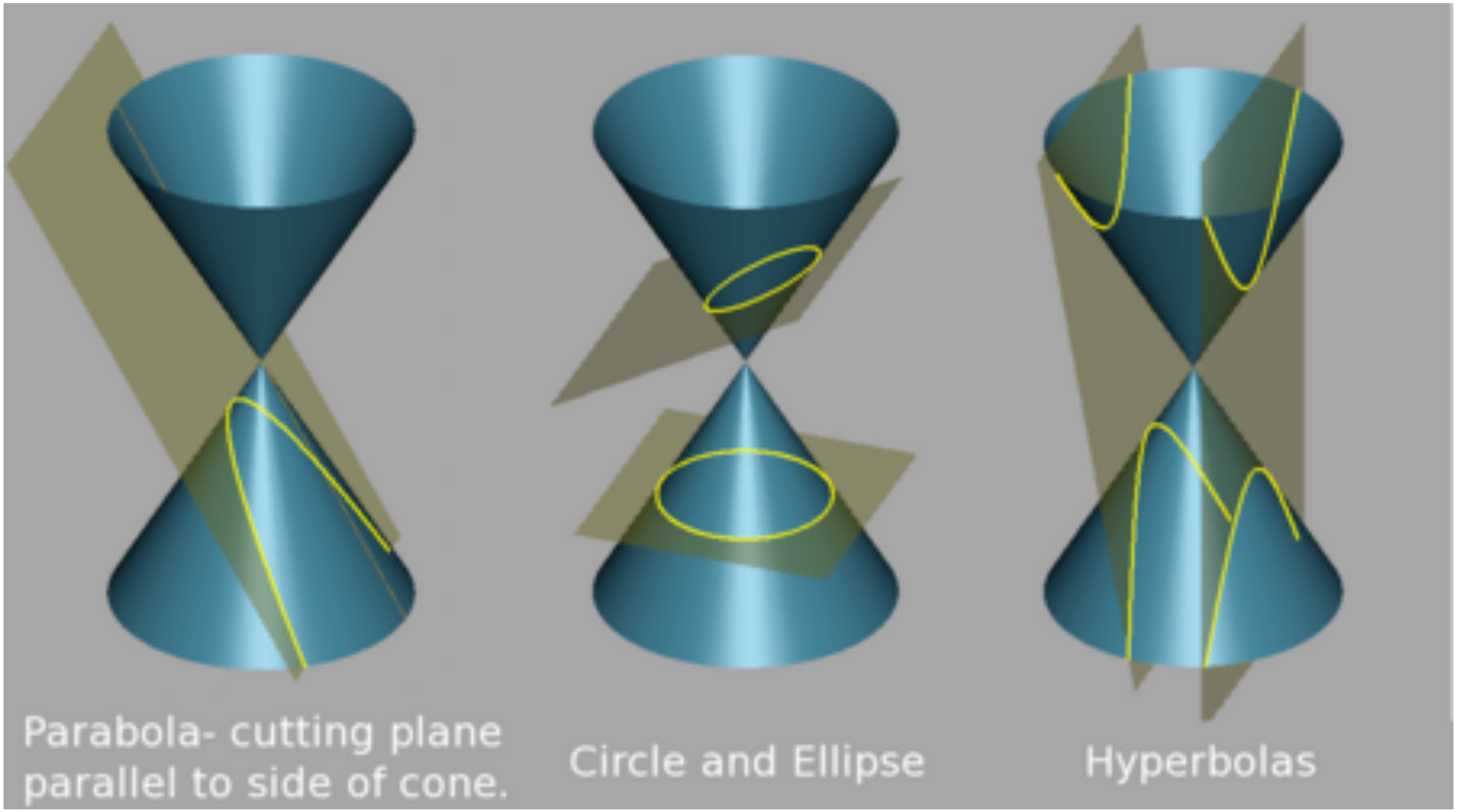
$$\text{excentricidad: } e = \frac{\overline{FF'}}{2a}$$

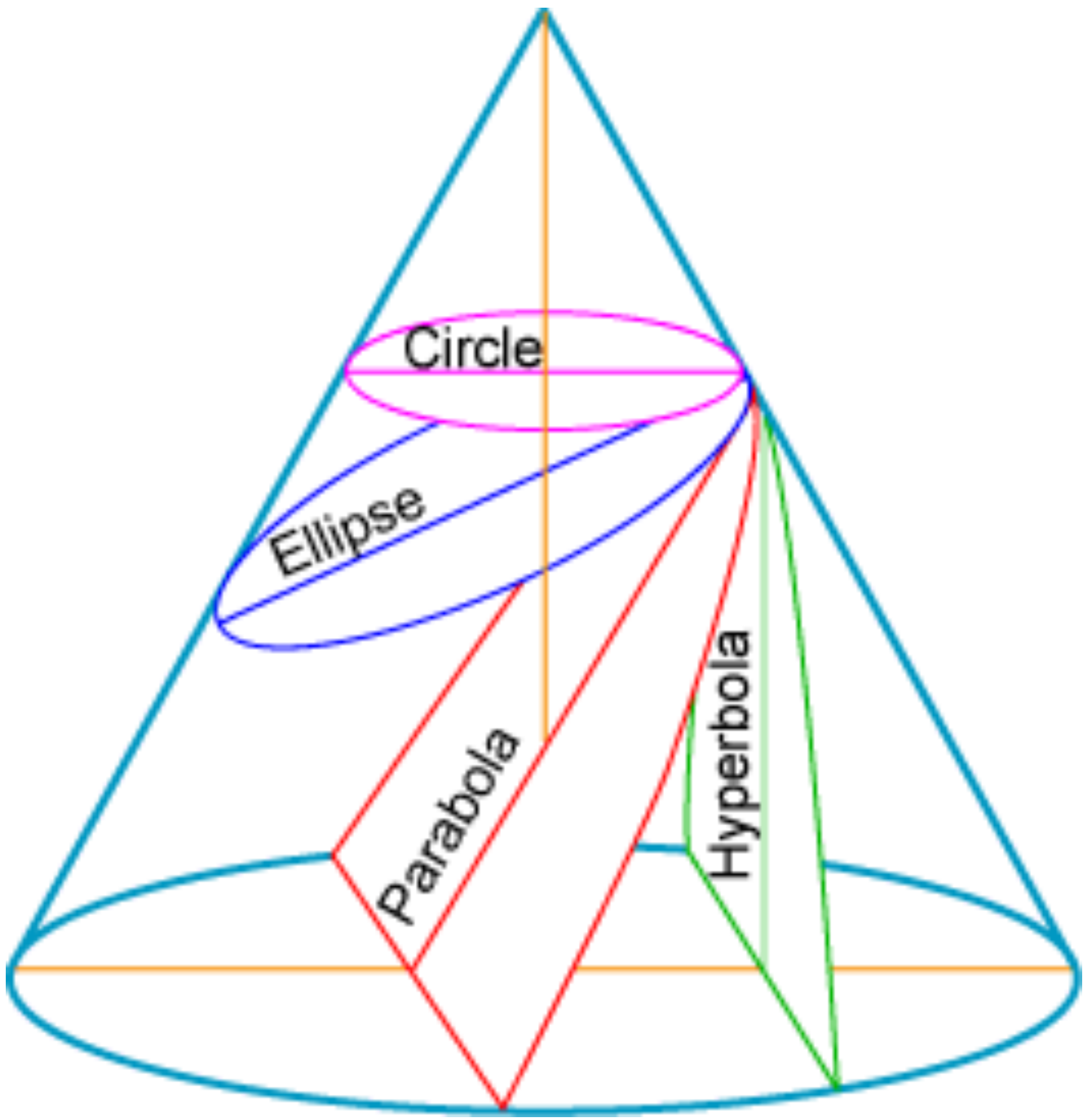


$$\text{en elipses: } 0 < e < 1$$

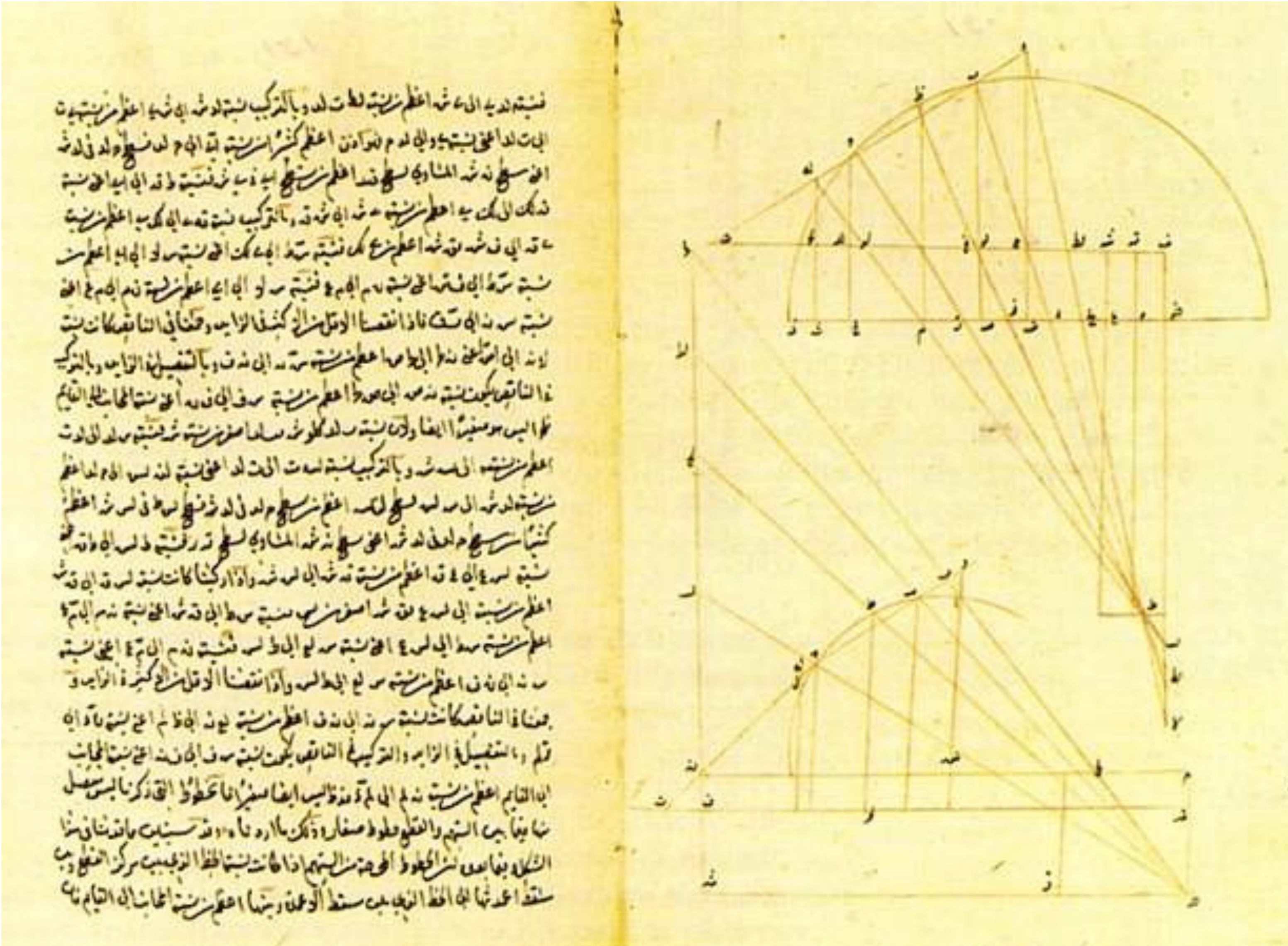
$$\overline{OF} = \overline{OF'} = ae$$




Parabola- cutting plane
parallel to side of cone.
Circle and Ellipse
Hyperbolas


Circle
Ellipse
Parabola
Hyperbola

Libro de Apolonio en versión árabe



Descripción de la órbita cónica en coordenadas polares:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

En donde p es el semilado recto, e la excentricidad; en el problema de los dos cuerpos:

$$p = \frac{h^2}{\mu}$$

Distancia entre focos: $\overline{FF'} = 2\,\overline{OF} = 2ae$

pericentro: $r_{min} = a(1-e)$

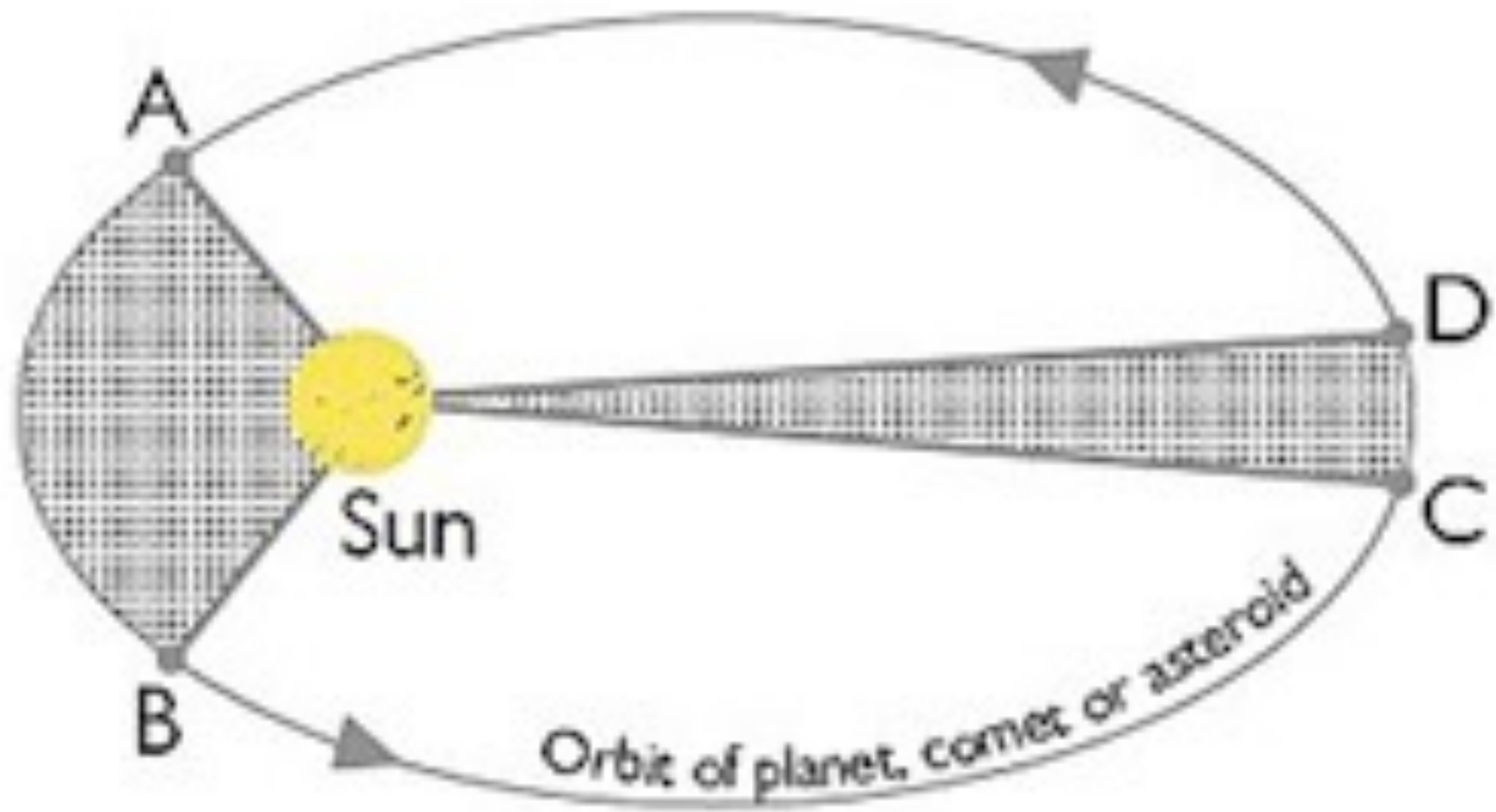
apocentro: $r_{max} = a(1+e)$

$b = a\sqrt{1-e^2}$ $\overline{OF} = \overline{OF'} = ae$

semilatus rectum: $p = a(1-e^2)$

$A = \pi ab$

Segunda ley de Kepler: el radio vector del planeta barre **áreas iguales en tiempo iguales**.

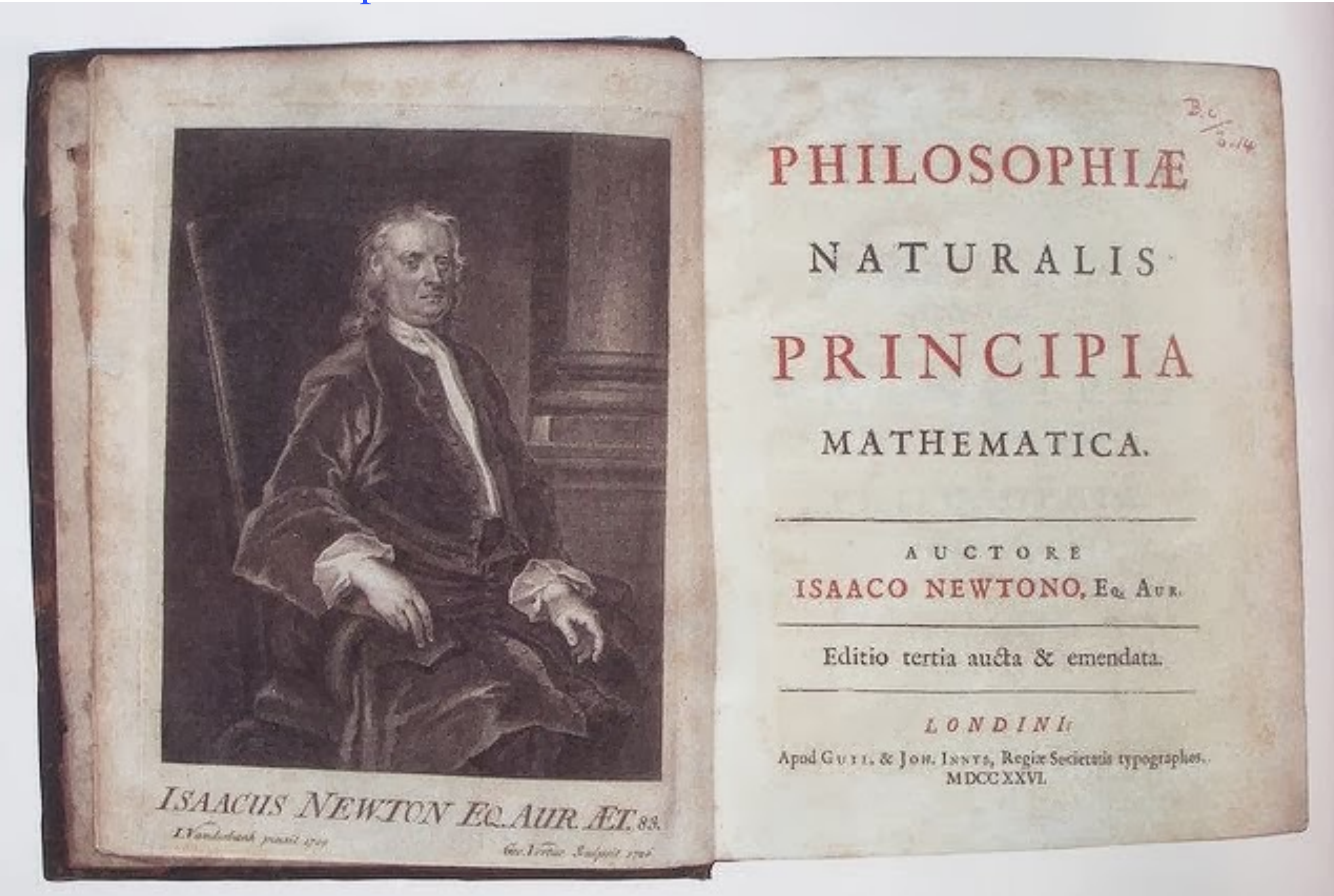


Tercera Ley de Kepler: El **cuadrado del período** sidéreo es directamente proporcional al **cubo de la distancia media** del planeta al Sol. En el problema de los dos cuerpos:

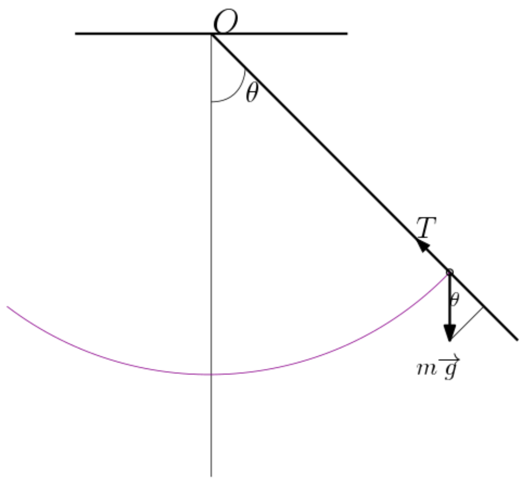
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)} a^3$$

$$\mu = G(M_1 + M_2)$$

Principios Matemáticos de la Filosofía Natural



Ediciones: 1687, 1713, 1726.



$$T - m_g g \cos\theta = 0$$

$$m_i l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta$$

$$\text{Si } \theta \ll 1, \text{ se tiene:} \sin\theta \simeq \theta$$

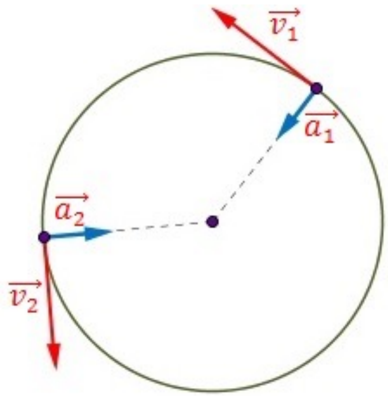
Se deduce: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_i}{m_g}\frac{l}{g}}$$

Pero “lo observado” es: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Entonces: $$m_i = m_g$$

$$\text{Período sidéreo Lunar: } 27^{d}.321529 \approx 2.36 \times 10^{6}\text{s}$$

$$\text{Distancia media Tierra-Luna: } 384401\text{km} \approx 3.84 \times 10^{8}\text{m}$$



$$a_c = \omega^2 R,\ \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Para la Luna, asumiendo movimiento circular uniforme, tenemos:

$$a_c \simeq 2.7 \times 10^{-3}\,\text{m/s}^2$$

Si la acción de atracción de la Luna y el de un objeto que cae sobre la superficie terrestre fuera la misma entonces habría una dependencia con la distancia, pues el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie es del orden de $9.8 \ m/s^2$. Cómo hallar esa dependencia con la distancia? Si asumimos que la fuerza con que el Sol atrae los planetas es de la misma naturaleza que llamaremos la fuerza de gravedad, podemos aplicar una ley fruto de las observaciones, la tercera ley de Kepler, para encontrar tal dependencia con la distancia. Como las excentricidades de Venus, la Tierra, Júpiter y Saturno son relativamente pequeñas, respectivamente 0.0068, 0.0167, 0.0484, 0.0541, podemos pensar que para estos planetas considerar una órbita circular en primera aproximación no es una hipótesis muy descabellada. Para Marte y Mercurio esta suposición no es aplicable por cuanto sus excentricidades son aproximadamente iguales a 0.0934 y 0.2056 aproximadamente.

Entonces, bajo la consideración de un planeta que gira alrededor del Sol siguiendo una órbita (en primera aproximación), podemos volver a usar:

$$a_c = \omega^2 R,\ \omega = \frac{2\pi}{T}$$

De modo tal que:

$$F = ma = \frac{4m\pi^2 R}{T^2}$$

De acuerdo con la tercera ley de Kepler, si R es el radio de la órbita asumiéndola circular:

$$K = R^3/T^2, \text{ o bien: } T^2 = R^3/K$$

De modo tal que al reemplazar T2 en la ecuación de fuerza, obtenemos:

$$F = 4\pi^2 K \frac{m}{R^2}$$

Así obtenemos una ley de gravedad que decae con el inverso del cuadrado de la distancia.

Ley de gravitación universal:

$$\vec{F}_{grav} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{u}$$

En donde el vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ va del cuerpo de masa M al de masa m, y la fuerza es la gravitacional sobre la partícula de masa m. En el problema de los dos cuerpos:

$$\vec{F}_1 = \frac{GM_1M_2}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{F}_2 = -\frac{GM_1M_2}{r^3}\vec{r}$$

Si en las últimas dos expresiones aplicamos la segunda ley de Newton, s
tiene:

$$M_1\vec{a}_1 = \frac{GM_1M_2}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r$$

$$M_2\vec{a}_2 = -\frac{GM_1M_2}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r$$

En donde el vector unitario está definido en la dirección que va desde la partícula de masa M_1 a la de masa M_2.

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \qquad\qquad \vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

Si en las dos ecuaciones de movimiento simplificamos la respectiva masa y luego restamos, obtenemos:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r$$

La anterior expresión representa el movimiento relativo de un astro con respecto al otro. Como los movimientos se realizan en un plano, expresaremos nuestras descripciones en un sistema de coordenadas polares, la cual tiene una componente radial y otra angular, cada uno con un vector unitario asociado:

$$\hat{e}_r = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$

$$\hat{e}_\theta = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta$$

Los vectores unitarios en las direcciones cartesianas x, y son fijos en el espacio; en cambio, los vectores unitarios asociados a las variables radial y angular se mueven con la partícula.

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta \qquad \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{e}_r)$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2r\dot{\theta})\hat{e}_\theta$$

Si aplicamos esta expresión en coordenadas polares de la aceleración relativa de los dos cuerpos en el problema dinámico relativo, se obtienen dos ecuaciones, una radial y otra angular:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

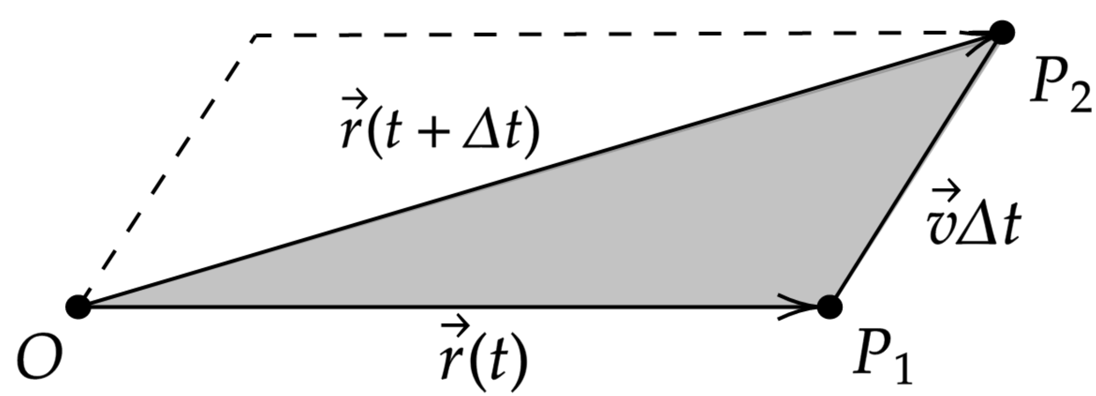
La segunda expresiones de las dos anteriores, es decir, la de la componente angular, se multiplica por r y se llega a la conclusión de que existe una constante de movimiento, la cual denotamos *h* y representa el momento angular por unidad de masa:

$$h = r^2\dot{\theta} : \text{constante}$$

Teniéndose por tanto que el momento angular por unidad de masa se conserva durante el movimiento. La cantidad *h*/2 representa además la tasa temporal con la que el radio vector relativo barre un área en el plano orbital. En el caso solar, representa el área que por unidad de tiempo barre el radio vector heliocéntrico del planeta, confirmando la tercera ley de Kepler:

$$\Delta A/\Delta t = h/2 : \text{constante}$$

$$\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}\Delta t = \frac{1}{2}(r\hat{e}_r) \times (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) = \frac{h}{2}\hat{k}$$



De este modo, en el intervalo de tiempo igual al período T, el radio vector barre toda la elipse, es decir, barre un área igual al de la elipse. Entonces:

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{h}{2}$$

$$\frac{h}{2} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}$$

Pero el “semi-latus rectum” es igual a:

$$p = \frac{h^2}{\mu} = a(1-e^2)$$

Así, elevando al cuadrado la expresión de la segunda ley de Kepler y teniendo en cuenta las dos formas de ver el semilado recto de la elipse:

$$\frac{\mu a(1-e^2)}{4} = \frac{\pi^2 a^4 (1-e^2)}{T^2}$$

Entonces llegamos a la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3$$

O bien, si tenemos en cuenta que: $\mu = G(M_1 + M_2)$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)} a^3$$

Analicemos ahora la ecuación dinámica radial:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}$$

Teniendo en cuenta:

$$h = r^2\dot{\theta} : \text{constante}$$

La cambiamos a: $$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{\mu}{r^2}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta} = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dr}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)$$

$$u = \frac{1}{r},$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = hu^2\frac{d}{d\theta}\left[hu^2\left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\right)\right] = -hu^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

Si tenemos en cuenta además que:

$$-r\dot{\theta}^2 = -r\frac{h^2}{r^4} = -h^2u^3,\ -\frac{\mu}{r^2} = -\mu u^2$$

Entonces la parte radial de la ecuación de movimiento en el problema de los dos cuerpos es:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = \mu/h^2$$

La solución de esta ecuación se compone de dos términos, la solución de la ecuación homogénea, u_H, y la solución particular, u_P; la suma de las dos nos da la solución general.

$$u_H = A\cos(\theta + \alpha) \qquad u_P = \mu/h^2$$

En donde A, α son dos constantes a determinar por las condiciones del problema. Por ejemplo, si $u_H = A$ cuando el ángulo es nulo, entonces tenemos que la otra constante es nula: $\alpha = 0$

Así, nuestra solución es igual a:

$$\frac{1}{r} = u = A\cos\theta + \mu/h^2$$

Sea *e* un número real no-negativo. Re-definamos nuestras constantes de modo tal que:

$$h^2/\mu = p, \;\; A = e/p$$

De este modo llegamos a que la solución de la dinámica Newtoniana al problema de los cuerpos es una cónica:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

En donde *p* es el semi-lado recto de la cónica, mientras que *e* es la excentricidad de la misma.

Si: e=0 tenemos un círculo de radio p.

Si: 0<e<1 tenemos una elipse.

Si e=1 tenemos una parábola.

Si: e>1 tenemos una hipérbola.

Ecuación dinámica: $$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r$$

Multiplicando por la velocidad a ambos lados:

$$\dot{\vec{r}} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r}\hat{e}_r \cdot \dot{\vec{r}}$$

El término de la izquierda:

$$\dot{\vec{r}} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r}\hat{e}_r \cdot \dot{\vec{r}}$$

El término de la derecha:

$$-\frac{\mu}{r^2}\hat{e}_r \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{e}_r \cdot (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) = -\mu\frac{\dot{r}}{r^2}$$

Este último término se puede re-escribir como:

$$-\frac{\mu}{r^2}\hat{e}_r \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dr}\left(\frac{\mu}{r}\right)$$

Entonces obtenemos:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r}\right) = 0$$

Obtenemos así la Integral de la Energía:

$$\frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r} : \text{constante}$$

Para averiguar el valor de la constante o integral de la energía la evaluamos en el perihelio:

$$\frac{1}{2}V_p^2 - \frac{\mu}{r_p} = \frac{h^2}{r_p^2} - \frac{\mu}{r_p} = \frac{\mu a(1-e^2)}{2a^2(1-e)^2} - \frac{\mu}{a(1-e)}$$

Por tanto:

$$E = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

Constantes de movimiento en el problema de los dos cuerpos:

- Momento angular por unidad de masa, h.

$$h = r^2\dot{\theta} : \text{constante}$$

- Constante de la energía por unidad de masa. El extremo derecho es válido en el caso del movimiento elíptico.

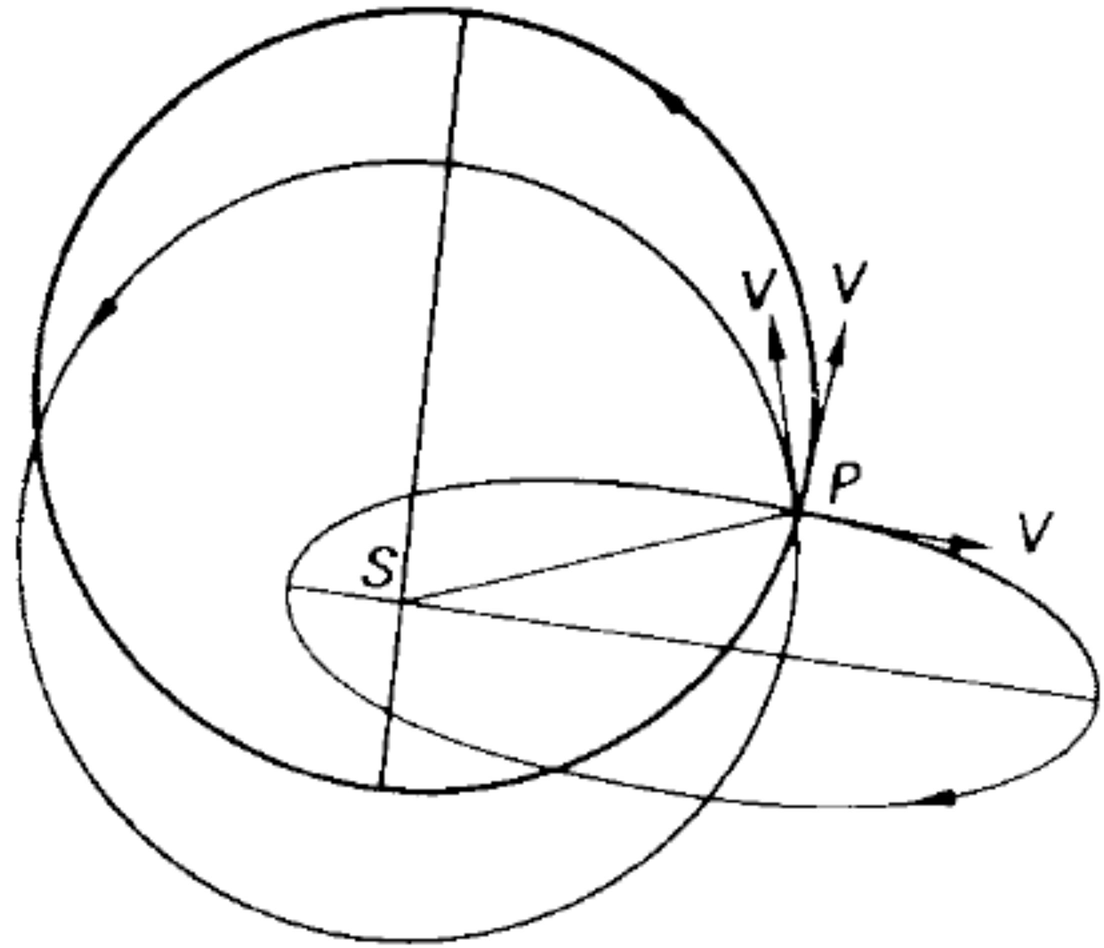
$$E = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

Como: $$r^2\dot{\theta}^2 = \frac{h^2}{r^2}$$

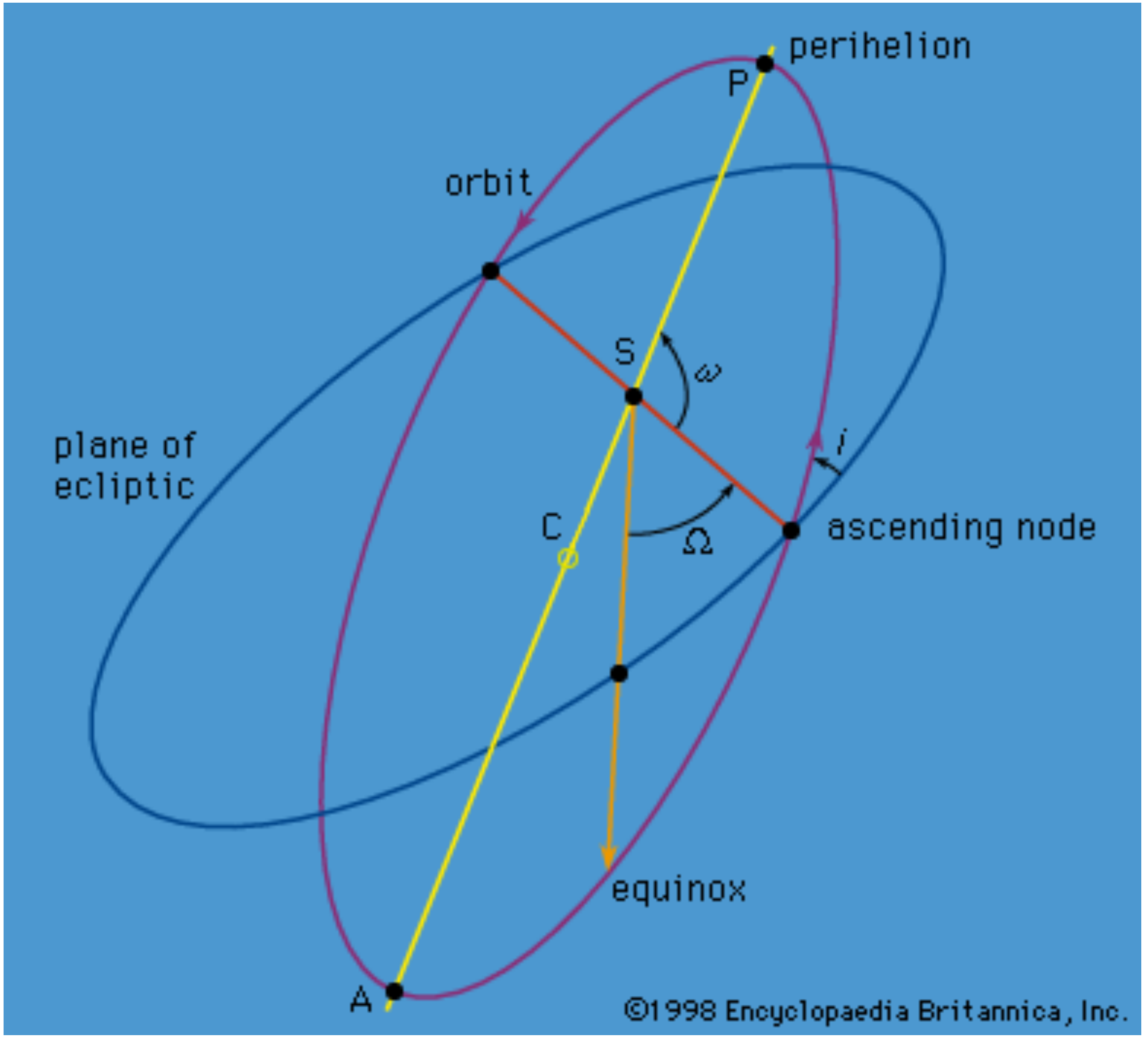
$$E = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \left(-\frac{\mu}{r} + \frac{h^2}{2r^2}\right)$$

Definimos la “energía potencial efectiva”:

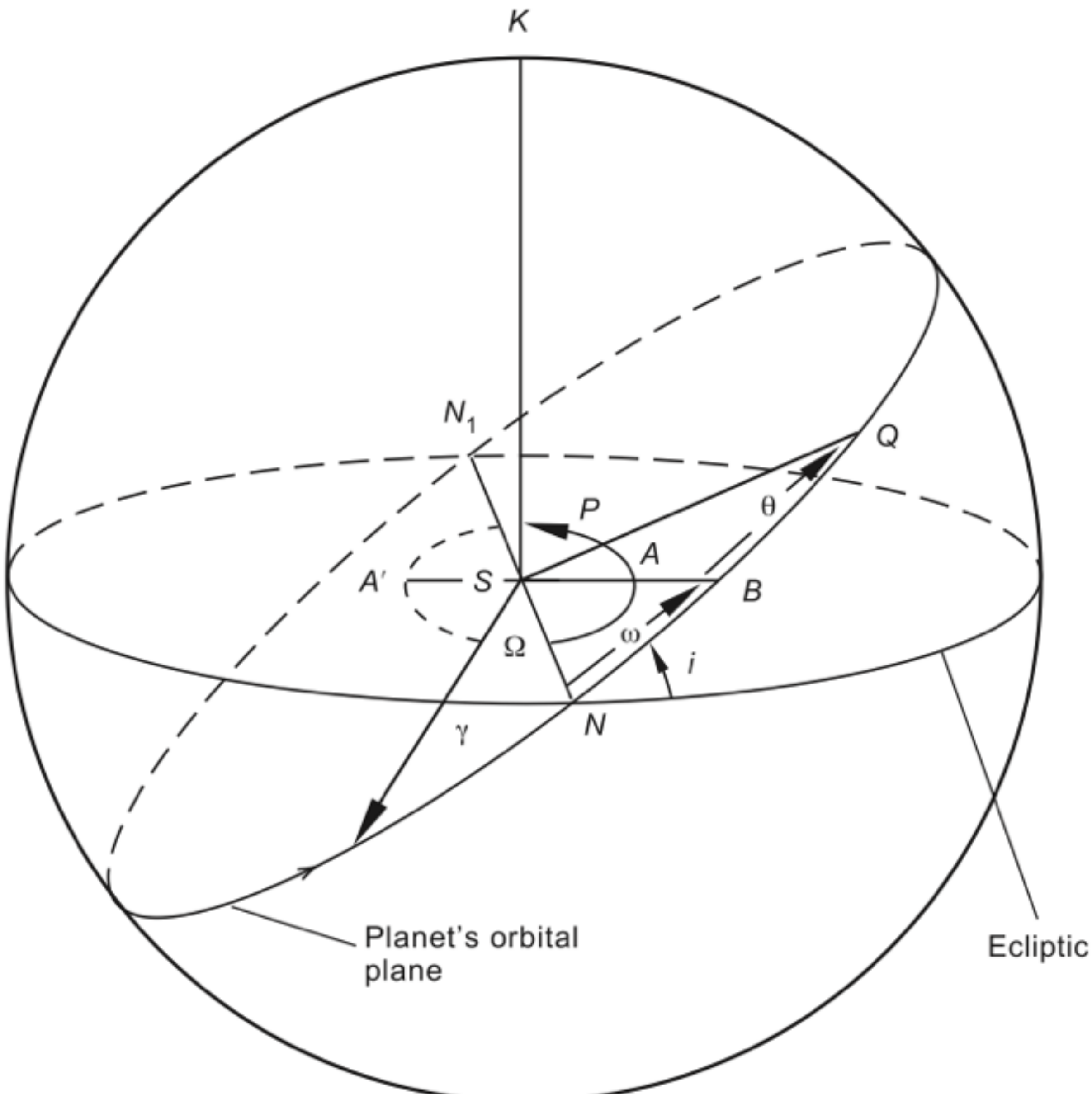
$$U_{ef}(r) = -\frac{\mu}{r} + \frac{h^2}{2r^2}$$


V
V
P
V
S

En el problema Newtoniano de los dos cuerpos, la solución del problema, es decir, la forma de la órbita, depende tanto de la energía como del momento angular. Como tenemos una cónica, dicha forma se puede expresar mediante el valor de la excentricidad e:



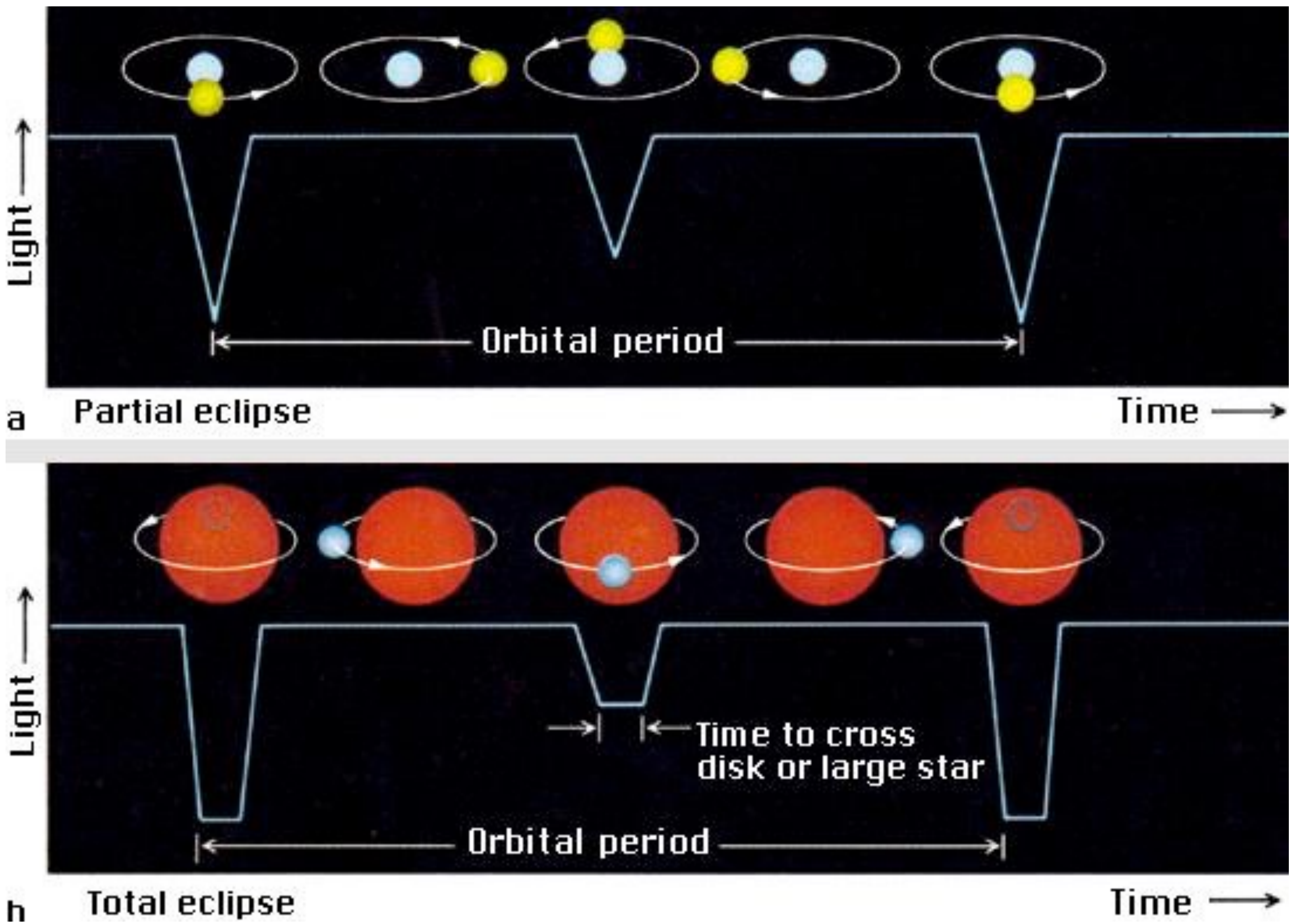
perihelion
P
orbit
S
ω
plane of ecliptic
i
C
Ω
ascending node
equinox
A
©1998 Encyclopaedia Britannica, Inc.

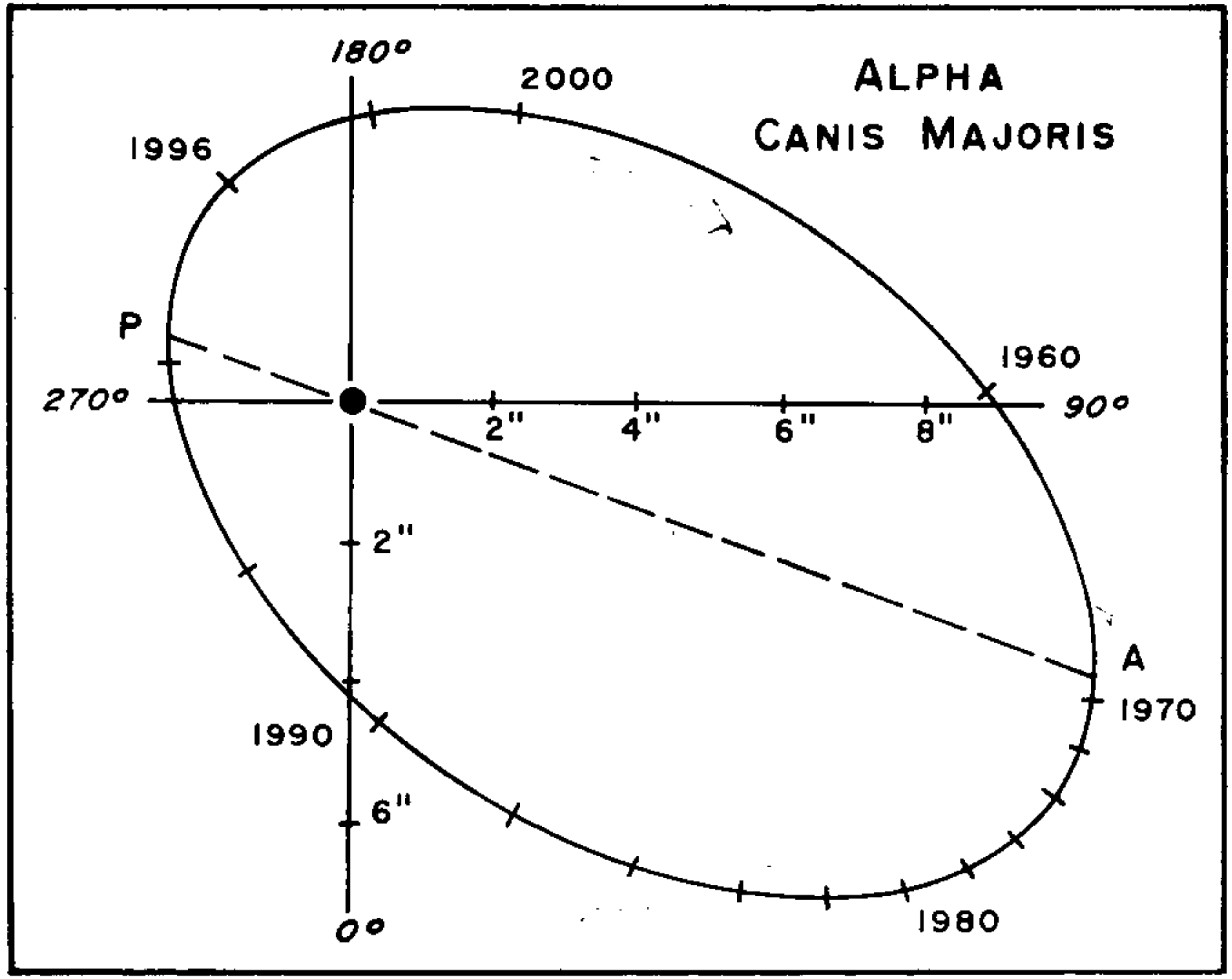


K
N1
Q
P
θ
A
A′
S
B
ω
Ω
i
N
γ
Planet's orbital
plane
Ecliptic

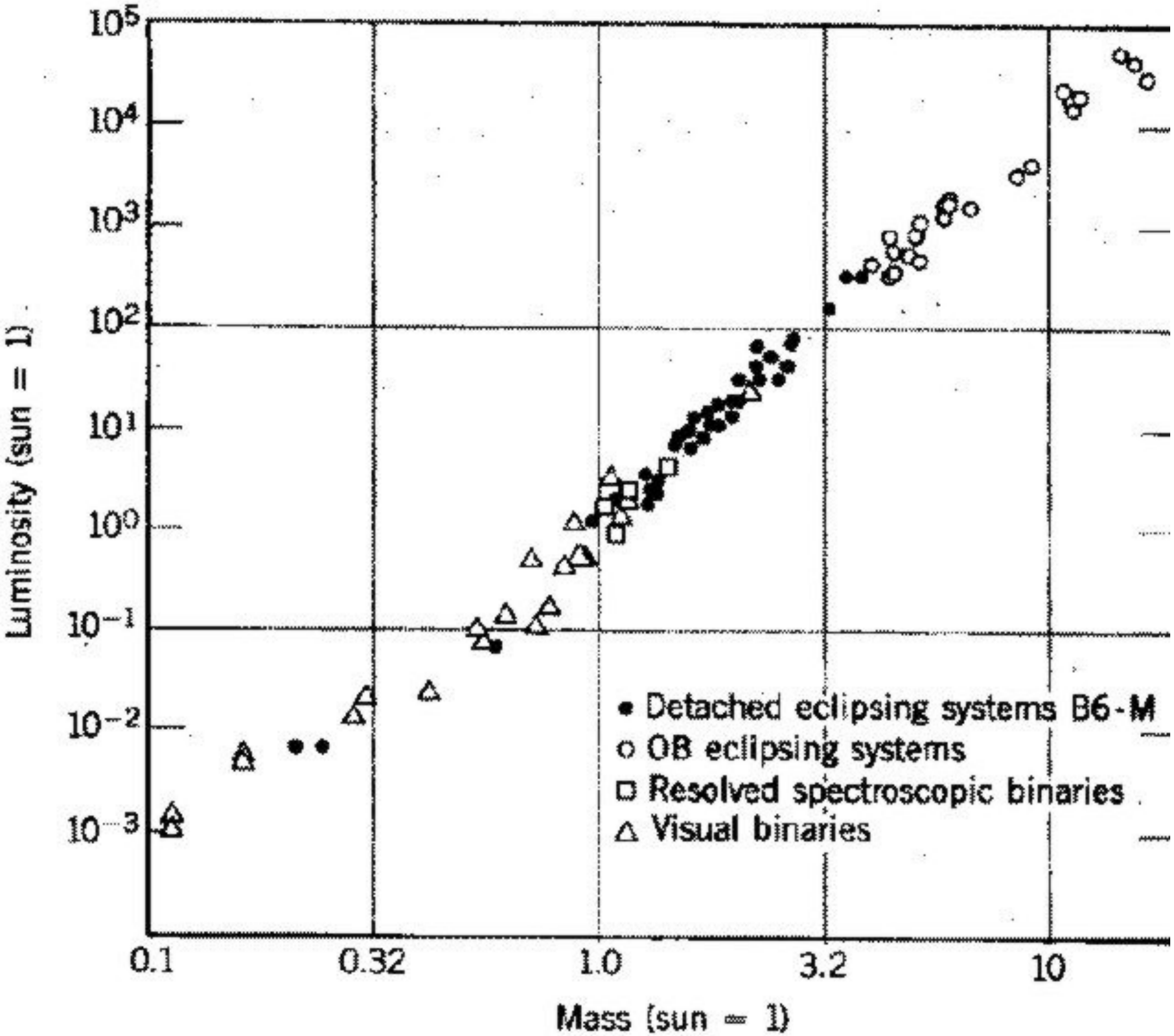

binary
stars
80% of the stars in our galaxy
are binary stars


digitalblasphemy.com

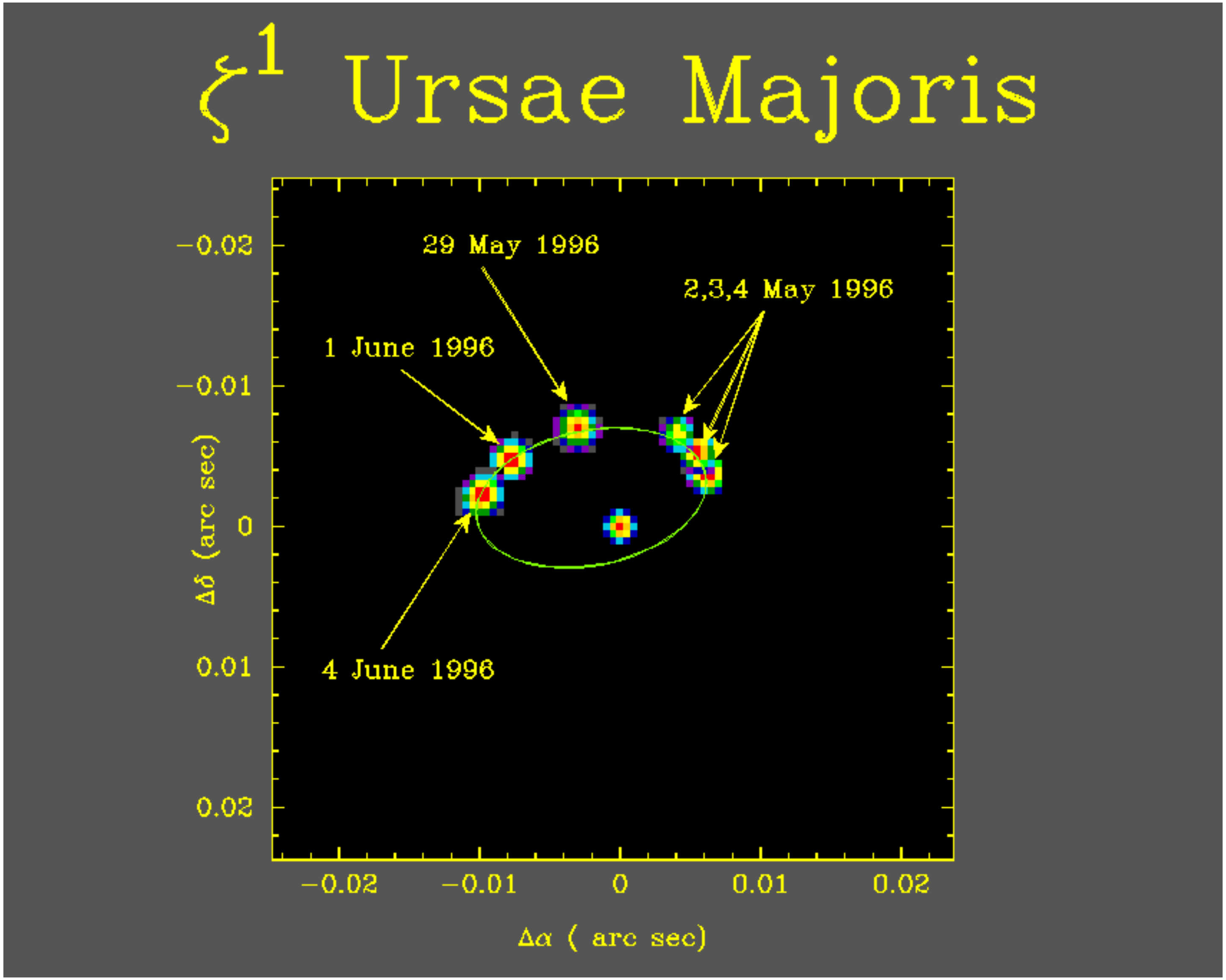

Light
Orbital period
a
Partial eclipse
Time
Light
Time to cross
disk or large star
Orbital period
h
Total eclipse
Time



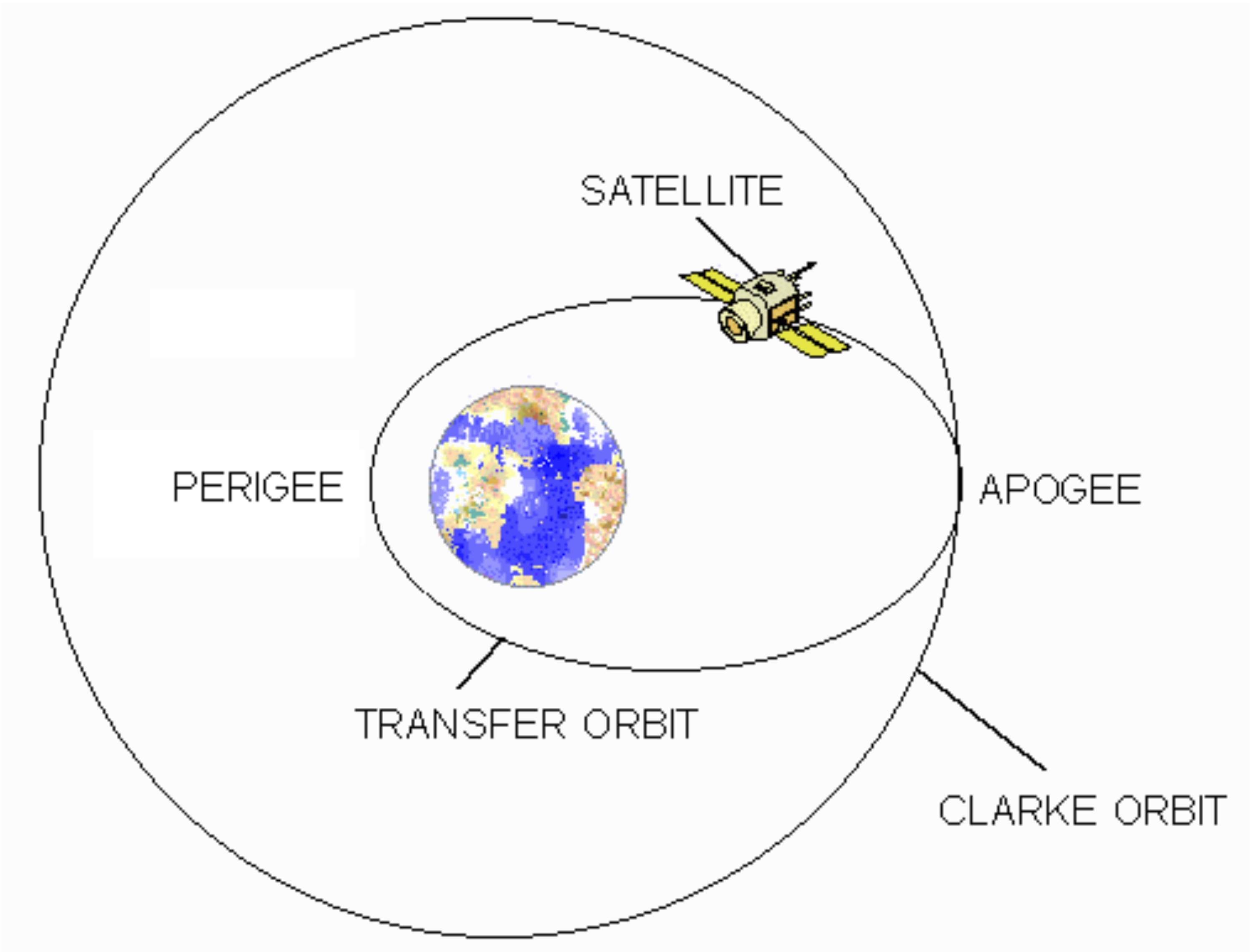
ALPHA
CANIS MAJORIS
180°
2000
1996
P
1960
270°
90°
2"
4"
6"
8"
2"
A
1970
1990
6"
1980
0°

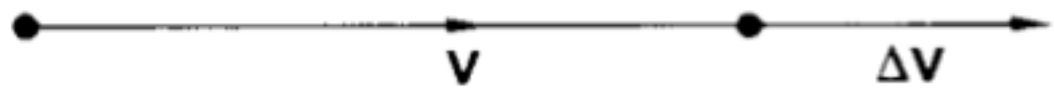


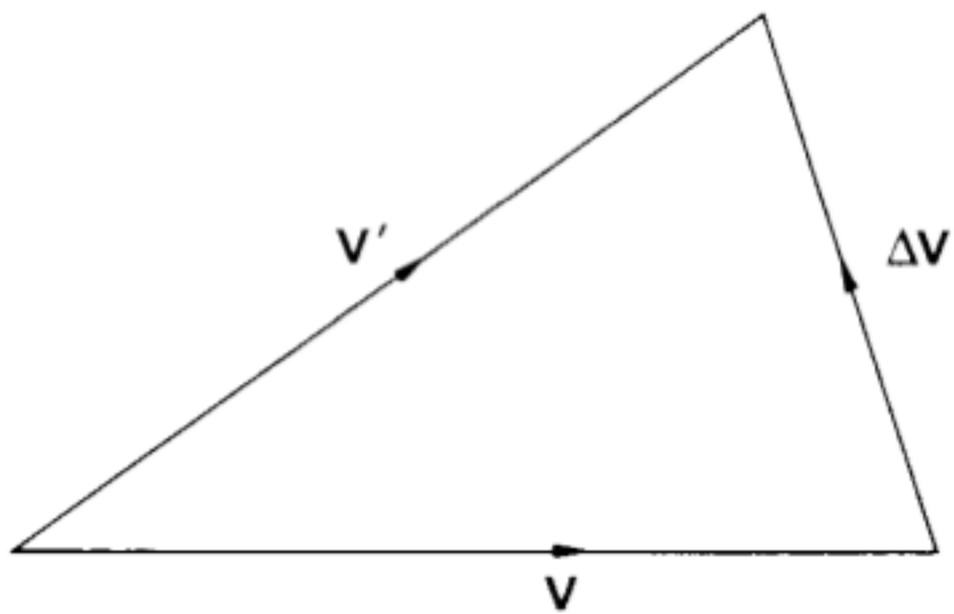
The mass – luminosity relation for stars, as determined from binary systems, in which the individual masses can be found.

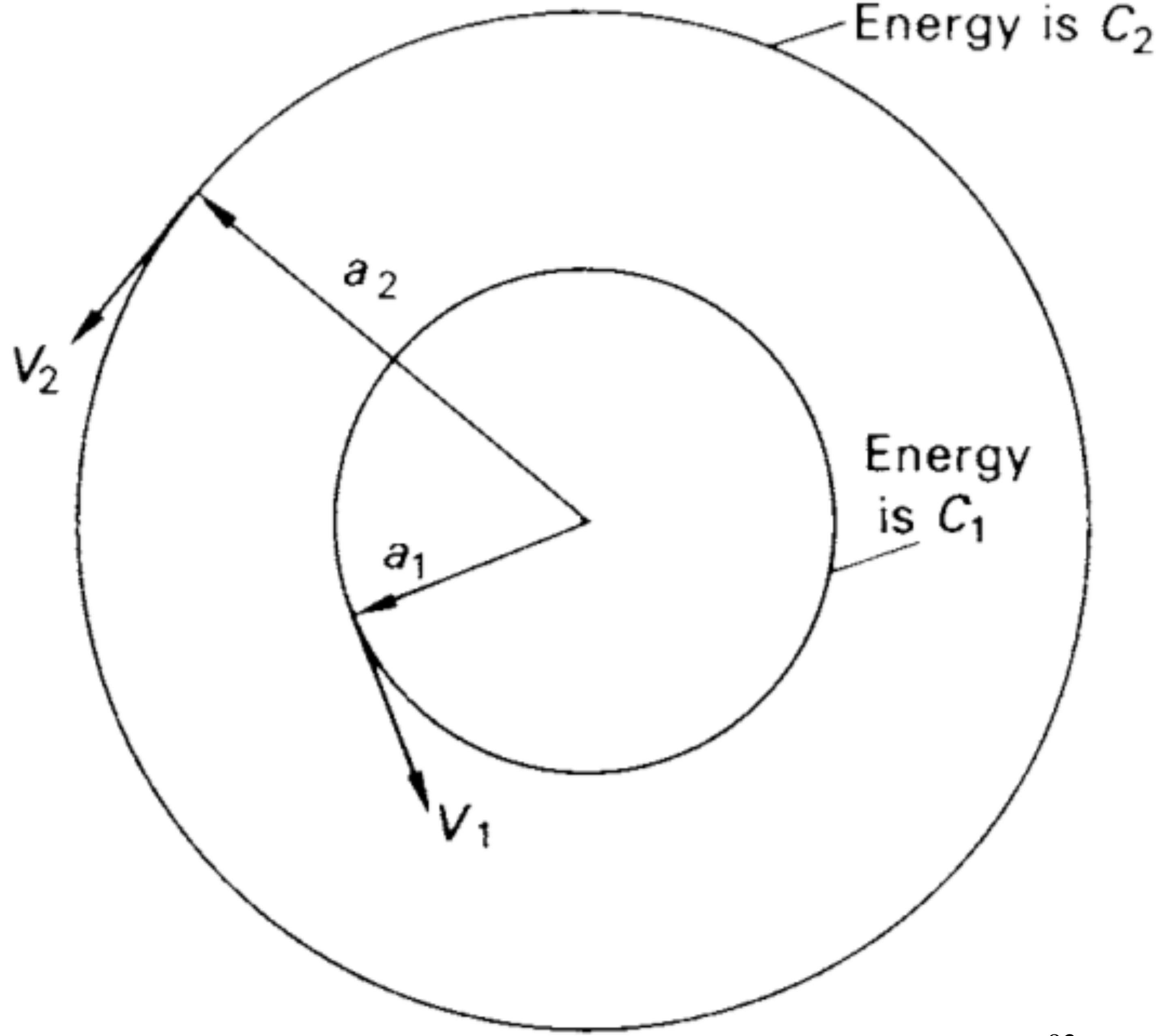


ζ¹ Ursae Majoris
29 May 1996
2,3,4 May 1996
1 June 1996
4 June 1996
−0.02
−0.01
0
0.01
0.02
Δδ (arc sec)
Δα (arc sec)


SATELLITE
PERIGEE
APOGEE
TRANSFER ORBIT
CLARKE ORBIT

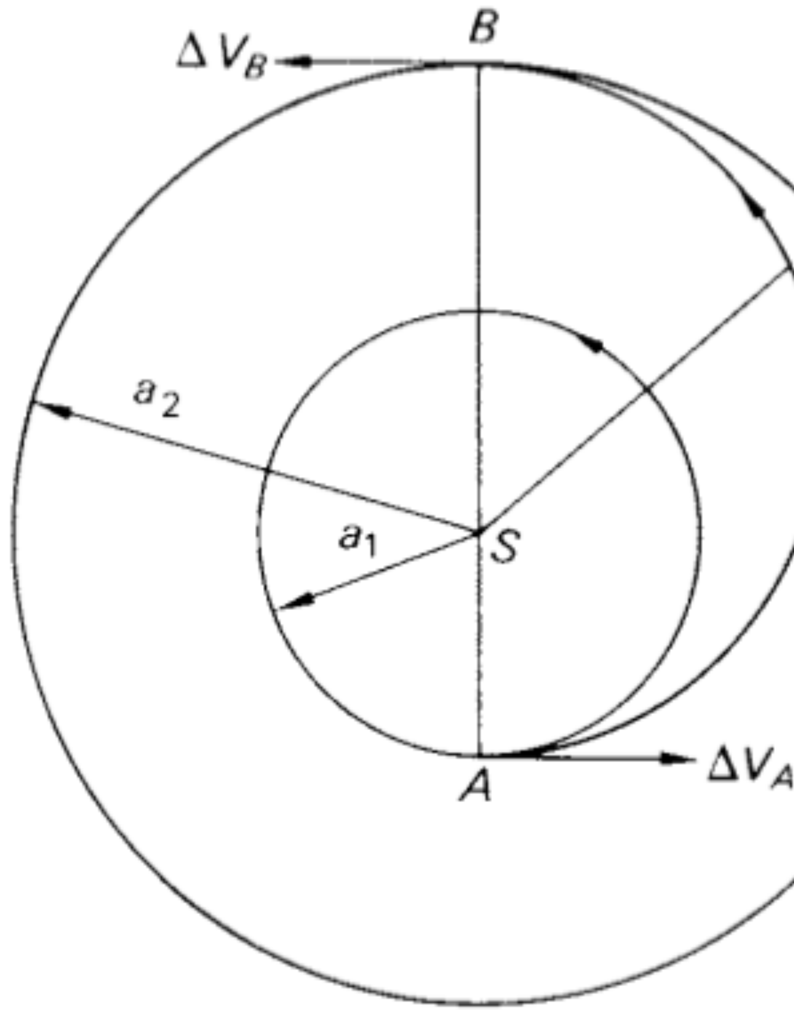

V
ΔV


V′
ΔV
V


Energy is C_2
a_2
V_2
Energy is C_1
a_1
V_1

$$E_1 = -\frac{\mu}{a_1}$$

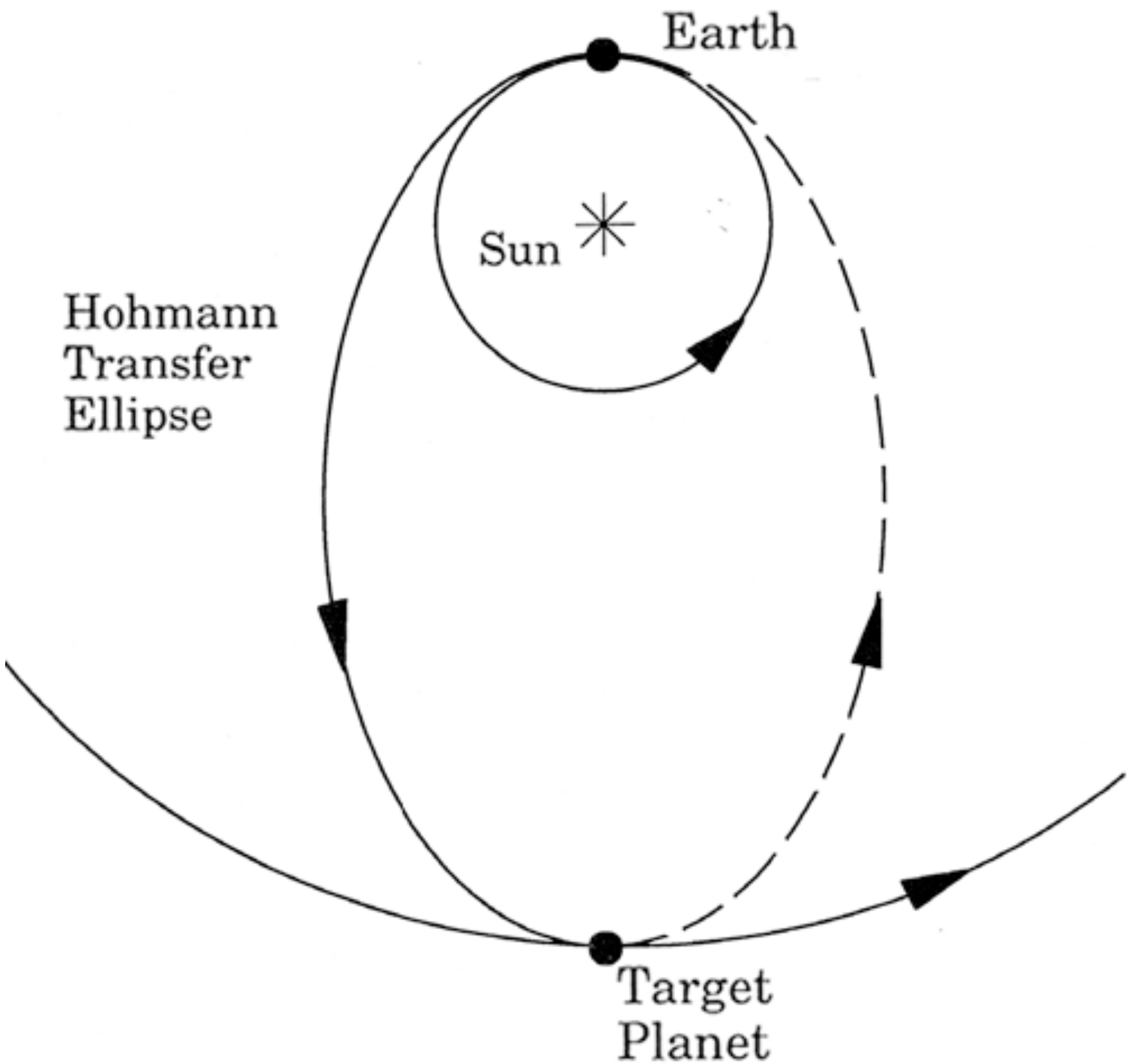
$$E_2 = -\frac{\mu}{a_2}$$

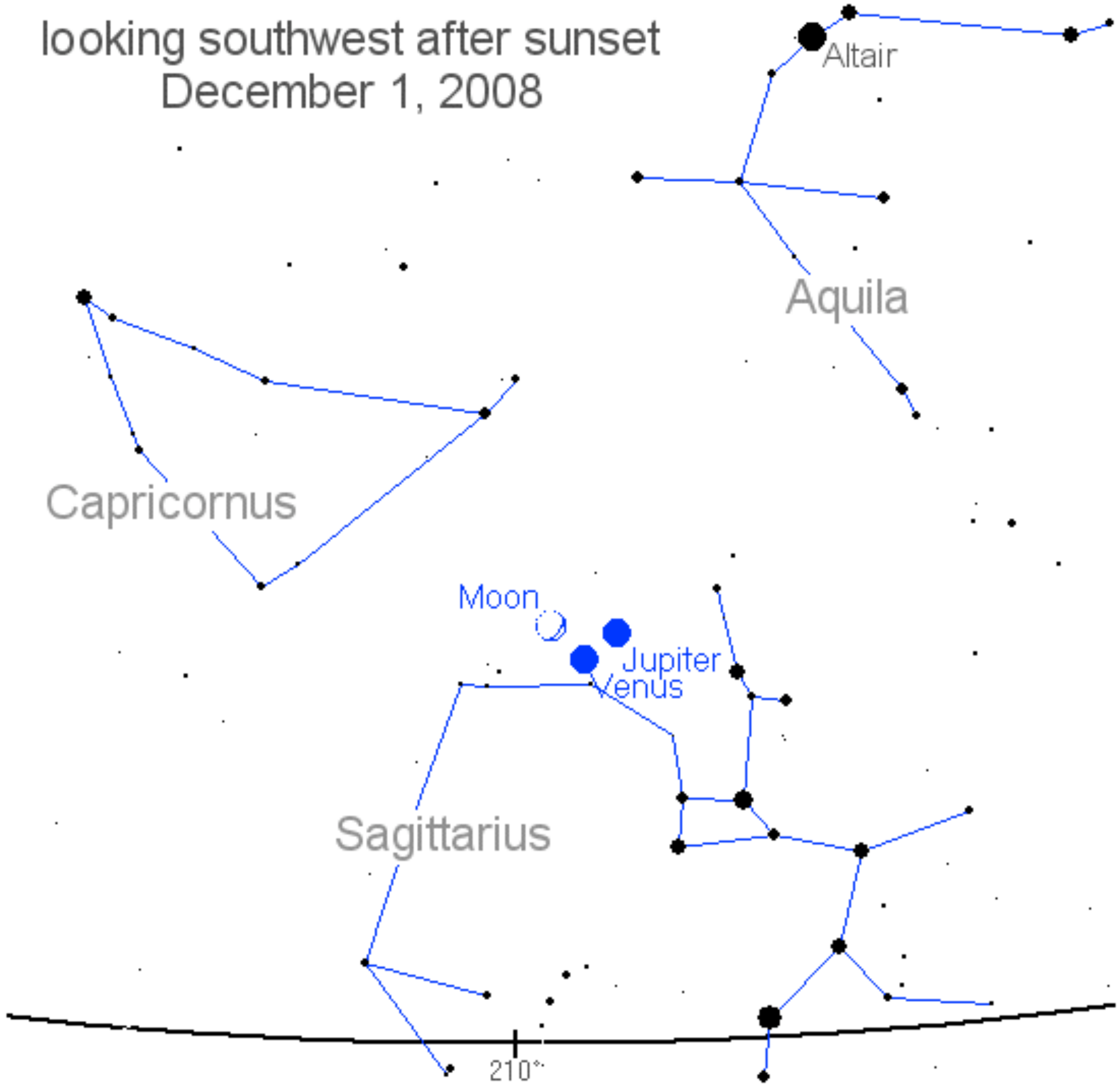


B
ΔV_B
P
a_2
a_1
S
A
ΔV_A

$$\Delta V_A = \left(\frac{\mu}{a_1}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{2a_2}{a_1 + a_2}\right)^{1/2} - 1 \right]$$

$$\Delta V_B = -\left(\frac{\mu}{a_1}\right)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{2a_1}{a_1 + a_2}\right)^{1/2} \right]$$


Earth
Sun
Hohmann
Transfer
Ellipse
Target
Planet


looking southwest after sunset
December 1, 2008
Altair
Aquila
Capricornus
Moon
Jupiter
Venus
Sagittarius
210°