Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Лабораторна робота №2

з навчального курсу «Чисельні методи»

«Методи розв’язання СЛАР»

Виконала:

студентка 2 курсу

факультету кібернетики

спеціальність «Інформатика»

групи К-27

Кузьмяк Анна

***Постановка задачі***

Розв’язати СЛАР прямим методом (перша задача у кожному варіанті), знайти для неї обернену матрицю та обчислити визначник. Обчислити число обумовленості.

Розв’язати другу задачу ітераційним методом до досягнення точності 0.001. У якості альтернативної умови зупинки дати можливість вказати кількість ітерацій.

**Методом Гаусса з вибором головного елемента розв’язати систему рівнянь,**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 7 | 2 | 3 | 0 | х | Х1 | = | 32 |
| 0 | 3 | 2 | 6 | Х2 | 47 |
| 2 | 5 | 1 | 0 | Х3 | 23 |
| 0 | 1 | 4 | 2 | Х4 | 29 |

**Методом Якобі розв’язати систему рівнянь,**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 | 0 | 1 | 0 | х | Х1 | = | 12 |
| 0 | 3 | 0 | 2 | Х2 | 19 |
| 1 | 0 | 5 | 1 | Х3 | 27 |
| 0 | 2 | 1 | 4 | Х4 | 30 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

***Теоретичні відомості***

Методи розв’язування СЛАР поділяються на прямі та ітераційні. При умові точного виконання обчислень прямі методи за скінчену кількість операцій в результаті дають точний розв’язок.

**Метод Гаусса.** Запишемо рівняння у вигляді

, де .

Перший крок методу Гаусса полягає у виключенні невідомого з усіх рівнянь, починаючи з другого, тобто в переході до системи

Продовжуючи цей процес виключення, отримаємо СЛАР з верхньою трикутною матрицею вигляду

Коефіцієнти системи обчислюють за формулами

(3.3)

за умови

Систему (3.3) можна розв’язати за формулами

**Метод Гаусса з вибором головного елемента.** Його застосовують тоді, коли головний елемент на k-му кроці На кожному кроці виключають чергове невідоме за допомогою рівняння з найбільшим за модулем коефіцієнтом при відповідному невідомому. Головний елемент можна вибирати такими способами:

а). за рядком –

у цьому разі на кожному кроці потрібно відповідно перенумерувати змінні;

б). за стовпцем –

тоді на кожному кроці потрібно відповідно перенумерувати рівняння;

в). за всією матрицею.

Алгоритм вибору головного елемента можна записати в матричному вигляді за допомогою матриці перестановок.

*Елементарною матрицею перестановок*  називається матриця, отримана з одиничної матриці перестановкою k-го та l-го рядків.

Із цього означення випливає, що матриця відрізняється від матриці перестановкою k-го та l-го рядків, а матриця – перестановкою k-го та l-го стовпців. Тоді алгоритм прямого ходу методу Гаусса з вибором головного елемента за стовпцем має вигляд:

де – матриця перестановок на *k-*му кроці.

**Метод Якобі.** Припустімо, що діагональні коефіцієнти невиродженої матриці *A* ненульові (). Якщо деякі , то цього можна досягти, переставивши деякі рядки чи стовпці матриці. Розділивши *i*-те рівняння на , отримаємо таку СЛАР:

Задамо якесь початкове наближення . Наступні наближення обчислимо за формулами

Метод збігається, якщо виконуються умови діагональної переваги матриці *A*

*.* Якщо ж виконуються нерівності то правдива така оцінка точності:

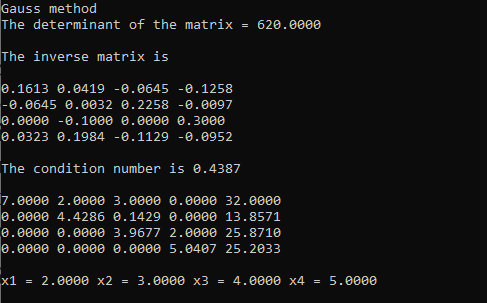
.

Ітерації виконують, поки не буде отримано потрібну кількість цифр у компонентах розв’язку чи до виконання умови .

1. **Методом Гаусса з вибором головного елемента розв’язати систему рівнянь,**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 7 | 2 | 3 | 0 | х | Х1 | = | 32 |
| 0 | 3 | 2 | 6 | Х2 | 47 |
| 2 | 5 | 1 | 0 | Х3 | 23 |
| 0 | 1 | 4 | 2 | Х4 | 29 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Результати обчислень:



Окрім розв’язання СЛАР, методом Гаусса знаходимо визначник і обернену матрицю. Визначник знаходимо приведенням матриці до верхньотрикутного вигляду і множенням діагональних елементів. Оберенену матрицю можна знайти, якщо біля заданої матриці дописати одиничну матрицю і за допомоги [елементарних перетворень](http://ua.onlinemschool.com/math/library/matrix/elementary_matrix/) перетворити задану матрицю на одиничну, тоді матриця, отримана за допомоги одиничної, буде оберненою матрицею до початкової.

Також знаходимо число обумовленості як добуток норми заданої матриці на норму оберненої.

1. **Методом Якобі розв’язати систему рівнянь,**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 | 0 | 1 | 0 | х | Х1 | = | 12 |
| 0 | 3 | 0 | 2 | Х2 | 19 |
| 1 | 0 | 5 | 1 | Х3 | 27 |
| 0 | 2 | 1 | 4 | Х4 | 30 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

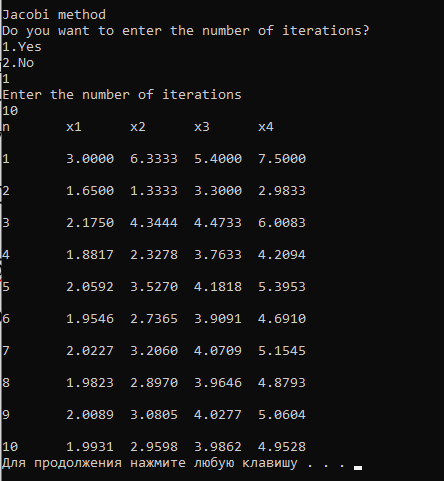
Перевіримо виконання умови діагональної переваги: 4>|0|+|1|+|0|, 3>|0|+|0|+|2|, 5>|1|+|0|+|1|, 4>|0|+|2|+|1|. Найменша різниця між правою та лівою частинами нерівності – у другому рівнянні. Тому . В якості першого наближення візьмемо вектор (0,0,0,0).

Кількість ітерацій за формулою:

*.*

Як критерій зупинки можемо задати кількість ітерацій або задану точність (.

Результати обчислень:

-кількість ітерацій дорівнює 10; 

-критерій зупинки – досягнення заданої точності.

