1.4. Визначити час виконання програми у явному вигляді.

a) $T(n) = \begin{cases} 1, & n \le a,\ a > 0 \\ T(n-a) + 1, & n > a \end{cases}$

$ka < n \le (k+1)a$

$\cancel{n > a} \Rightarrow T(n) = T(n-a) + 1 = T(n-2a) + 2 =$

$n - ka \le a$

$= T(n-3a) + 3 = \ldots = T(n-ka) + k = k + 1 \ominus$

$ka < n \le (k+1)a \Rightarrow k < \frac{n}{a} \wedge k \ge \frac{n}{a} - 1 \Rightarrow k \in [\frac{n}{a} - 1, \frac{n}{a})$

у найгіршому випадку $\ominus \frac{n}{a} + 1$

b) $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ T(n-1) + 2^n, & n \ge 1 \end{cases}$

$T(n) = T(n-1) + 2^n = T(n-2) + 2 \cdot 2^n = T(n-3) + 3 \cdot 2^n = \ldots =$

$= T(0) + n \cdot 2^n = n \cdot 2^n + 1$

c) $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 2T([n/2]) + 1, & n \ge 2 \end{cases}$

$n = 2^m \Rightarrow T(n) = 2T(2^{m-1}) + 1 = 2(2T(2^{m-2}) + 1) + 1 =$

$= 2^2 \cdot T(2^{m-2}) + 2 + 1 = 2^2 \cdot (2 \cdot T(2^{m-3}) + 1) + 2 + 1 =$

$= 2^3 T(2^{m-3}) + 2^2 + 2 + 1 = \ldots = 2^k \cdot T(2^{m-k}) + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i = \ldots =$

$= 2^m \cdot T(1) + \sum_{i=0}^{m-1} 2^i = \sum_{i=0}^{m} 2^i = \frac{1 \cdot (2^{m+1} - 1)}{1} = 2^{m+1} - 1 = 2 \cdot 2^{\log_2 n} - 1 =$

$= 2n - 1$

d) $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ a \cdot T([n/a]) + n, & n \ge 2,\ a \ge 2 \end{cases}$

$n = a^m \Rightarrow T(n) = a \cdot T(a^{m-1}) + a^m = \cancel{a^2 \cdot T(a^{m-2}) + 2 \cdot a^m} =$

$\cancel{= a^3 T(a} = a(a \cdot T(a^{m-2}) + a^{m-1}) + a^m = a^2 \cdot T(a^{m-2}) + a^{m+1} + a^m =$

$= a^2(a \cdot T(a^{m-3}) + a^{m-2}) + 2a^m = a^3 \cdot T(a^{m-3}) + 3a^m = \ldots = a^m \cdot T(1) +$

$+ ma^m = \{m = \log_a n\} = a^{\log_a n}(1 + m) = n(1 + \log_a n) = n + n\log_a n$