2.8. Нехай $f(n) = \sqrt{n}$ та $g(n) = \log n$. Доказати, що $f(n) + g(n) = O(\sqrt{n})$

Достатньо довести, що $g = O(\sqrt{n})$. Тоді $f(n) + g(n) =$

$= \{\sqrt{n} = O(\sqrt{n})\} = O(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n}) = O(\sqrt{n})$

Нехай $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $h(x) := \sqrt{x} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Розглянемо

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_2 x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x \ln 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x} \ln 2} = 0.$$

Тоді $\forall \varepsilon > 0 \ \exists C > 0 : \forall x \geq C : \left| \frac{\log_2 x}{\sqrt{x}} \right| < \varepsilon$.

Нехай $\varepsilon > 0$ фіксоване, $C > 0$ фіксоване. Тоді $|\log_2 x| =$

$= \{x > C\} = \log_2 x < \varepsilon |\sqrt{x}| = \{x > C\} = \varepsilon \sqrt{x}$.

Для $g|_{\mathbb{N}}$, $h|_{\mathbb{N}}$, $d := \varepsilon$, $n_0 = [C] + 1$ маємо:

$\forall n \geq n_0 : \log_2 n < d\sqrt{n}$. Отже, $g = O(\sqrt{n})$.

Отже, $f(n) + g(n) = O(\sqrt{n})$.