5. 2. 4. $G = \left\langle \underset{a}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}, \underset{b}{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \right\rangle$; $f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\cancel{= a^{-2} = b^3}$

$a = f^{-2}$

$b = f^3$

$g \in G.$ $ord(g) < \infty \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}: \ g^m = e \Leftrightarrow$

G комутативна $\Rightarrow \exists n, k \in \mathbb{Z}: \ g = a^n b^k$

$\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}: \ (a^n b^k)^m = (f^{-2n+3k})^m = f^{-2nm+3km} = e \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ | f – матриця Фібоначчі | $\Leftrightarrow -2nm + 3km = 0 \Leftrightarrow 3k = 2n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \frac{2n}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 0 \pmod 3 \\ k = 2n/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists p \in \mathbb{Z}: \ n = 3p \\ k = 2p \end{cases}$ (*) $\Rightarrow$

$\Rightarrow g = a^{3p} b^{2p} = (a^3 b^2)^p = e^p = e$

$ord(g) < \infty \Rightarrow g = e \Rightarrow G$ – група без скруту.

5. Розглянемо відображення $\varphi: 2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z} \to G: (2p, 3m) \mapsto a^p b^m$

φ – гомоморфізм, оскільки: $\forall (2n_1, 3k_1), (2n_2, 3k_2)$, $n_1, k_1, n_2, k_2 \in \mathbb{Z}$:

$\varphi((2n_1, 3k_1)(2n_2, 3k_2)) = \varphi((2n_1 + 2n_2, 3k_1 + 3k_2)) =$

$= a^{n_1+n_2} b^{k_1+k_2} = (a^{n_1} b^{k_1})(a^{n_2} b^{k_2}) = \varphi((2n_1, 3k_1)) \cdot \varphi((2n_2, 3k_2))$

φ – епіморфізм, оскільки: $\forall g \in G \ \exists (n, k) \in 2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$:

$\varphi((n,k)) = g$, де $\cancel{g =}$ $n = 2p$, $k = 3m$ для $g = a^p b^m$.

(*) $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{(n,k) \in 2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z} \mid n = 3p \wedge k = 2p$ для деякого $p \in \mathbb{Z}\} = \{(6p, 6p) \mid p \in \mathbb{Z}\}$.

За основною теоремою про гомоморфізми:

$(2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}) / \mathrm{Ker}\,\varphi \cong G$.