Лабораторна робота №1

Варіант 4

1. а) $\hat{\theta}_{ОММ}$, де ~~$\xi = 0{,}6\ \mathcal{E}xp(\theta) + 0{,}4\ \mathcal{E}xp(0{,}25)$~~

$$\xi = \begin{cases} \mathcal{E}xp(\theta), & p_1 = 0{,}6 \\ \mathcal{E}xp(0{,}25), & p_2 = 0{,}4 \end{cases}$$

$X = (X_1, \dots, X_n)$ к. в., $X_i \doteq \xi$.

За методом моментів: $\mathbb{E}\xi = \overline{X}$

$$\mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} x f_\xi(x)\,dx$$

$$\cancel{F_\xi(x) =} \quad f_\xi(x) = \sum_{k=1}^{2} f_{\xi_k}(x)\cdot p_k = 0{,}6\ f_{\xi_1}(x) + 0{,}4\ f_{\xi_2}(x) \ominus$$

$\xi_1 \doteq \mathcal{E}xp(\theta)$

$\xi_2 \doteq \mathcal{E}xp(0{,}25)$

$$f_{\mathcal{E}xp(\lambda)}(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$$

$$\ominus\ 0{,}6\cdot\theta e^{-\theta x}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x) + 0{,}4\cdot 0{,}25\, e^{-0{,}25x}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$$

$$\cancel{\mathbb{E}\xi = 0{,}6\int_0^{+\infty} x\,\theta e^{-\theta x}dx + 0{,}1\int_0^{+\infty} e^{-0{,}25x}dx = \left| \begin{matrix} t = \theta x & dx = \frac{dt}{\theta} \\ x = \frac{t}{\theta} & \end{matrix}\right| =}$$

$$\cancel{= \frac{0{,}1}{-0{,}25}\cdot e^{-0{,}25x}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} + 0{,}6\,\theta\,\frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}\frac{t}{\theta}e^{-t}dt =}$$

$$\cancel{= 0{,}4 + 0{,}6\cdot\frac{1}{\theta} = \frac{0{,}6}{\theta} + 0{,}4 = \overline{X} \Rightarrow \hat{\theta}_{ОММ} = \frac{0{,}6}{\overline{X}-4}}$$

$$\mathbb{E}\xi = 0{,}6\int_{\mathbb{R}} x\,\theta e^{-\theta x}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)dx + 0{,}4\int_{\mathbb{R}} x\,0{,}25\cdot e^{-0{,}25}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)dx =$$

$$= 0{,}6\cdot\frac{1}{\theta} + 0{,}4\cdot\frac{1}{0{,}25} = \frac{0{,}6}{\theta} + 1{,}6 = \overline{X} \Rightarrow \hat{\theta}_{ОММ} = \frac{0{,}6}{\overline{X}-1{,}6}$$

б) Нехай $h: \mathbb{R}\to\mathbb{R}: x \mapsto x$ — моментна функція.

$\forall t \in \Theta = (0,+\infty)\ H(t) = \mathbb{E}_t h(\xi) = \mathbb{E}_t[\xi] = \frac{0{,}6}{t} + \cancel{0{,}4}\ 1{,}6$ є скінченним

Перевіримо умови теореми про асимптотичну нормальність ОММ:

1. $\exists H(t)\ \nexists\ \forall t \in \Theta$

2. $D_\theta\xi = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_\xi(x)dx - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{1{,}2}{\theta^2} + 12{,}8 - \left(\frac{0{,}6}{\theta} + 1{,}6\right)^2 < +\infty$

$$= \frac{256\theta^2 - 480\theta + 2\ldots}{25\theta^2}$$

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 f_\xi(x)dx = 0{,}6\int_0^{+\infty} x^2\theta e^{-\theta x}dx + 0{,}4\cdot\int_0^{+\infty} x^2\cdot 0{,}25 e^{-0{,}25x}dx =$$

$$= 0{,}6\cdot\mathbb{E}[\mathcal{E}xp(\theta)^2] + 0{,}4\cdot\mathbb{E}[\mathcal{E}xp(0{,}25)^2] =$$

$= 0{,}6\left(D[Exp(\theta)] + \cancel{E}\frac{1}{\theta^2}\right) + 0{,}4 \cdot \left(D[Exp(0{,}25)] + 16\right) =$

$= 0{,}6 \cdot \frac{2}{\theta^2} + 0{,}4 \cdot 32 = \frac{1{,}2}{\theta^2} + 12{,}8$

3. $H^{-1}(t) = \frac{0{,}6}{t - 1{,}6}$

$y = \frac{0{,}6}{x} + 1{,}6 \iff y - 1{,}6 = \frac{0{,}6}{x} \iff \frac{0{,}6}{y - 1{,}6} = x$

4. $H'(t) = -\frac{0{,}6}{t^2} \in C(\{\theta\}),\ \forall \theta \in (0, +\infty) = \Theta$

$H'(\theta) \neq 0 \quad \forall \theta \in \Theta$

5. $\exists \varepsilon > 0\ [\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon] \in \Theta\ \forall \theta \in \Theta.$

Тоді $\hat{\theta}_{ОММ}$ є асимптотично нормальною з коефіцієнтом розсіювання $\sigma^2(\theta) = \frac{D_\theta h(\xi)}{(H'(\theta))^2} = \frac{256\theta^2 - 48\theta + 21}{25\theta^2} \cdot \frac{\theta^4}{0{,}36} =$

$= \frac{256\theta^4 - 48\theta^3 + 21\theta^2}{9}$, тобто $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{w} N(0, \sigma^2(\theta)),\ n \to \infty$

$\hat{\theta}_n \xrightarrow{w} N\left(\theta, \frac{\sigma^2(\theta)}{n}\right),\ n \to \infty$

$\theta = 2 \Rightarrow E[\hat{\theta}_n] \approx 2$

$D[\hat{\theta}_n] \approx \frac{3796}{9n}$ ← використано ~~в~~ теоретичну дисперсію, а не вибіркову

d) Асимптотичний довірчий інтервал $(\hat{\theta}_n^-, \hat{\theta}_n^+)$ рівня довіри $1 - \alpha$:

$\hat{\theta}_n^{\pm} = \hat{\theta}_n \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma(\theta)}{\sqrt{n}} \approx \hat{\theta}_n \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma(\hat{\theta}_n)}{\sqrt{n}}$ ~~, де $\sigma(\hat{\theta}_n) = s$, $s^2 = \frac{\sum_{i=1}(\theta_i - \bar{\theta})^2}{n-1}$~~

$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow z_{1-\alpha/2} = z_{1-0{,}025} \approx 1{,}96$

$\hat{\theta}_n^{\pm} \approx \hat{\theta}_n \pm 1{,}96 \frac{\sigma(\hat{\theta}_n)}{\sqrt{n}}$