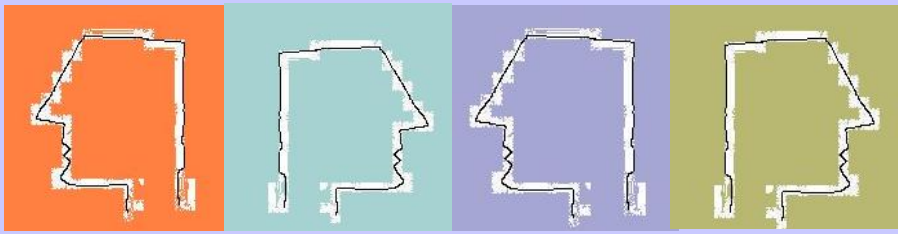
Dafür ein bisschen mathematische Basic...



Gleichungen

1. Binomische Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Binomische Formel $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. Binomische Formel $(a - b) * (a + b) = a^2 - b^2$

Rechenregeln

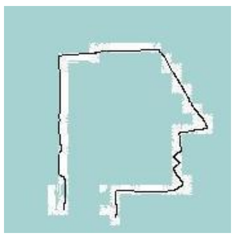
$a + b + c = (a + b) + c$ $a * b * c = (a * b) * c$	**Assoziativgesetz**
$a + b = b + a$ $a * b = b * a$	**Kommutativgesetz**
$(a + b) * c = a* c + b * c$	**Distributivgesetz**

Ein bisschen auflösen…

(1)

$5x = 15$
$x = ?$

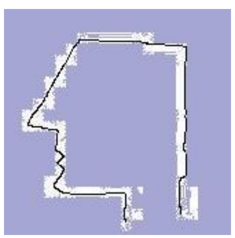
$5x = 15 \quad | \; :5$
$x = 3$



(2)

$40 + 20x = 20$
$x = ?$

$40 + 20x = 20 \quad | \; :20$
$2 + x = 1 \quad | \; -2$
$x = -1$



(3)

$4 - 3 + x = 5 - 2$
$x = ?$

$4 - 3 + x = 5 - 2$
$1 + x = 3 \quad | \; -1$
$x = 2$

---

(4)

$3 + 5 * 2 + 5x = 10$
$x = ?$

$3 + 5 * 2 + 5x = 10$
$3 + 10 + 5x = 10$
$13 + 5x = 10 \quad | \; -13$
$5x = -3 \quad | \; :5$
$x = -0{,}6$

Lineare Gleichungssysteme 1

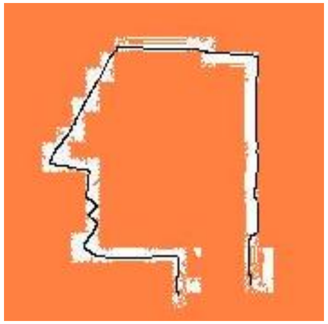
Definition

Ein lineares Gleichungssystem ist eine Menge von linearen Gleichungen mit einer oder mehrerer Unbekannten.

Es hat entweder genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen.

Lösungsverfahren

Gleichsetzung
Addition
Einsetzung
Gauss-Verfahren



Beispiele

(1)
(1) $y = x - 5$
(2) $y = 2x + 3$

(2)
(1) $5x + 3y = 14$
(2) $2x - 2y = -4$

(3)
(1) $y = 6x$
(2) $y/3 + x = 33$

(4)
(1) $5x - 4y + z = -3$
(2) $2x - y - 3z = 10$
(3) $3x - y - z = 4$

Lösungen

(1) Gleichsetzung

(1) y = x - 5

(2) y = 2x + 3

x - 5 = 2x + 3 (- x / + 5)

x = - 8

y = - 8 - 5 = - 13

L [-8 -13]

(2) Addition

(1) 5x + 3y = 14 | * 2

(2) 2x - 2y = - 4 | * 3

kleinstes gemeinsames Vielfaches suchen:
x (10); y (6)

(1) 10x + 6y = 28

(2) 6x - 6y = -12

→ Addition

(1+2) 16x = 16 | : 16

x = 1 → Einsetzen (in 1 oder 2)

5 + 3y = 14 | - 5

3y = 9 | : 3

y = 3

L [1 3)]

(3) Einsetzung

(1) y = 6x

(2) y/3 + x = 33

6x/3 + x = 33

2x + x = 33

3x = 33 | : 3

x = 11

y = 66

L [11 66]

Lineare Gleichsetzungsverfahren 3

Lösungen

(4) Gauss-Verfahren

(1) 5x - 4y + z = -3
(2) 2x - y -3z = 10
(3) 3x - y - z = 4

Gesucht: Lösungstripel (x y z), das alle 3 Gleichungen erfüllt

x	y	z	rechte Seite	
5	-4	1	-3	$\vert \cdot (-2)$
2	1	-3	10	$\vert \cdot 5$
3	-1	-1	4	

x	y	z	rechte Seite	
5	-4	1	-3	$\vert \cdot (-3)$
0	13	-17	56	
3	-1	-1	4	$\vert \cdot 5$

x	y	z	rechte Seite	
5	-4	1	-3	$\vert \cdot (-3)$
0	13	-17	56	
3	-1	-1	4	$\vert \cdot 5$

x	y	z	rechte Seite	
5	-4	1	-3	
0	13	-17	56	$\vert \cdot (-7)$
0	7	-8	29	$\vert \cdot 13$

Lösungen *(Fortsetzung)*

x	y	z	rechte Seite	
5	-4	1	-3	
0	13	-17	56	$\mid \cdot(-7)$
0	7	-8	29	$\mid \cdot 13$

+

„Dreiecksgestalt"

x	y	z	rechte Seite
5	-4	1	-3
0	13	-17	56
0	0	15	-15

Rückwärts einsetzen, d.h. ab 3. Zeile aufwärts

15z = -15 $\boxed{z = -1}$

13y - 17z = 56   13y + 17 = 56   13y = 39 $\boxed{y = 3}$

5x - 4y + z = -3   5x -12 -1 = -3   5x - 13 = -3   5x = 10 $\boxed{x = 2}$

L [2 3 -1]

Summenzeichen

Endwert

Sigma

$$\sum_{i=m}^{n} x_i$$

Folgenglied

Laufindex

Startwert

Beispiele:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\sum_{i=3}^{8} x_i = x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

Allgemein:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + (\ldots) + x_n$$

Konstanter Faktor (Distributivgesetz)

konstanter Faktor c

$$\sum_{i=1}^{n} \boxed{c} * x_i = \boxed{c} * \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= (\boxed{c}x_1 + \boxed{c}x_2 + \boxed{c}x_3 + (\ldots) + \boxed{c}x_n)$$

$$= \boxed{c} * (x_1 + x_2 + x_3 + (\ldots) + x_n)$$

Punktrechung vor Strichrechnung!

Summe (Assoziatives/Kommutatives Gesetz)

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$= ((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + (\ldots) + (x_n + y_n))$$

$$= ((x_1 + x_2 + x_3 + (\ldots) + x_n) + (y_1 + y_2 + y_3 + (\ldots) + y_n))$$

Aber:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i * y_i) \neq \sum_{i=1}^{n} x_i * \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Lineare Funktionen

Definition

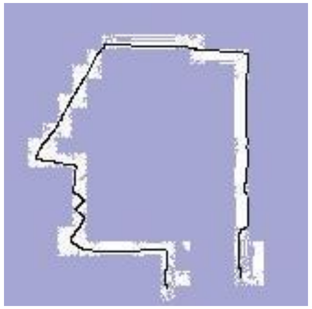
Eine lineare Funktion ist eine Funktion, deren Funktionsgraph eine Gerade ist.

Allgemeine Form

$y = m * x + b$

oder:

$f(x) = m * x + b$



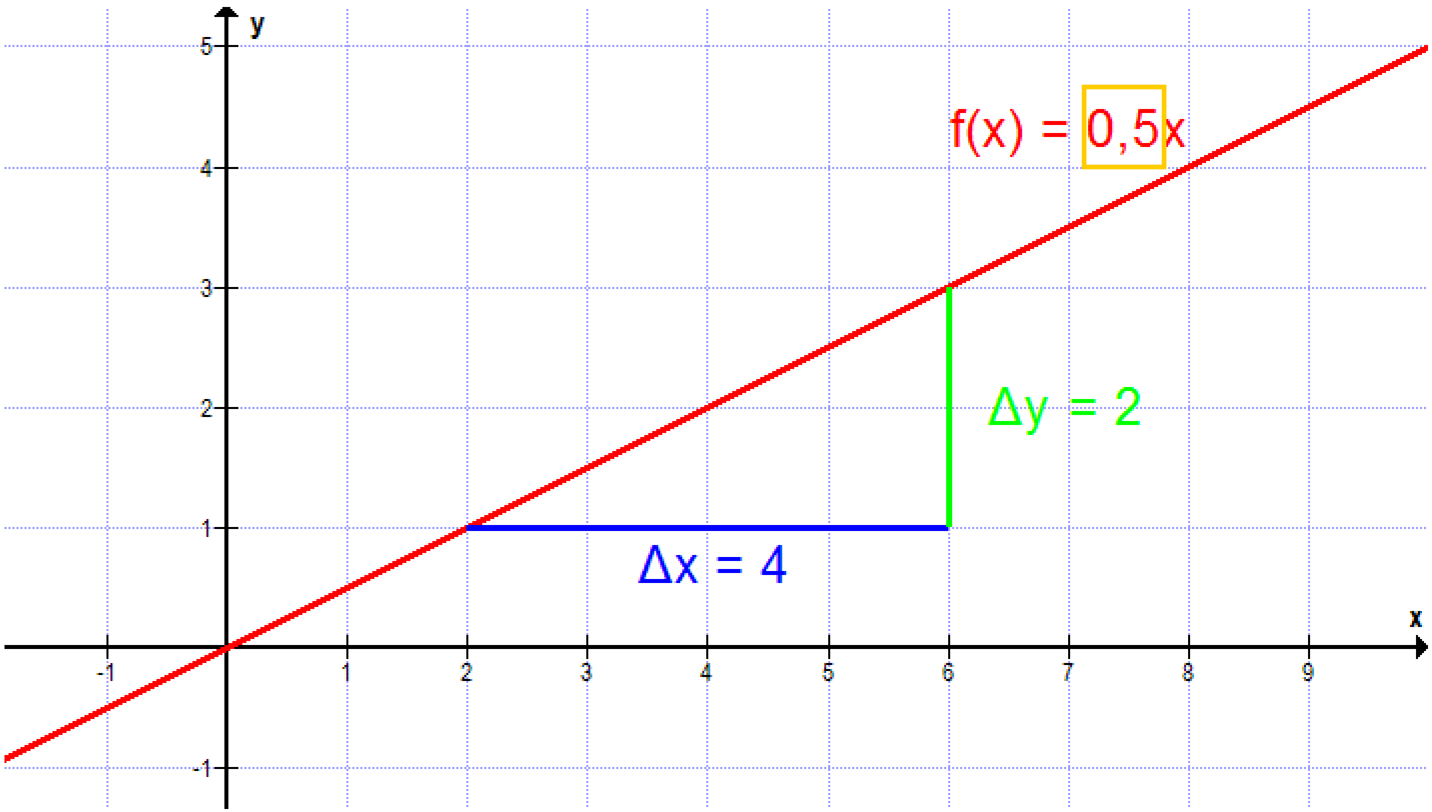
Die Variable Y ist eine Funktion der Variable X; f(x)=y.

m ist der Faktor (Koeffizient) von x und bezeichnet die **Steigung**.

b ist eine **Konstante** und bezeichnet die **Schnittstelle** mit der y-Achse.

Regressionsanalyse

Beispiel Gerade → **Lineare Funktion**



P1(x1|y1)
P2(x2|y2)

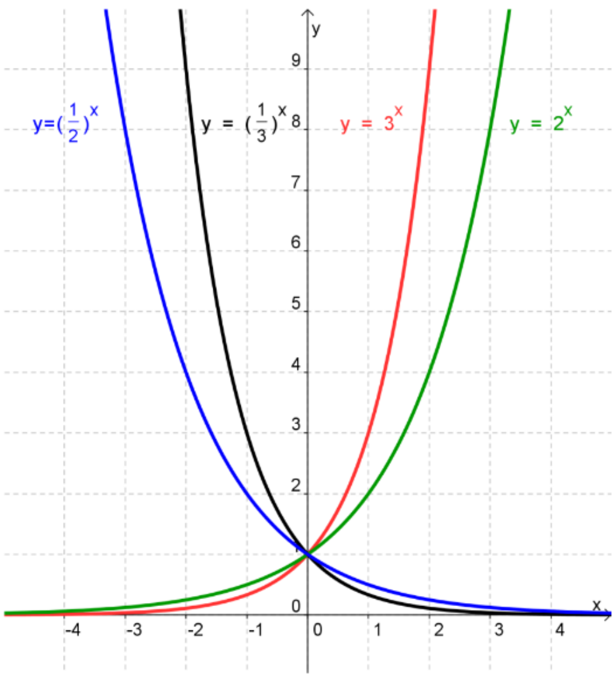
Steigung m $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ → **an jedem Punkt P der Geraden gleich**

Definition

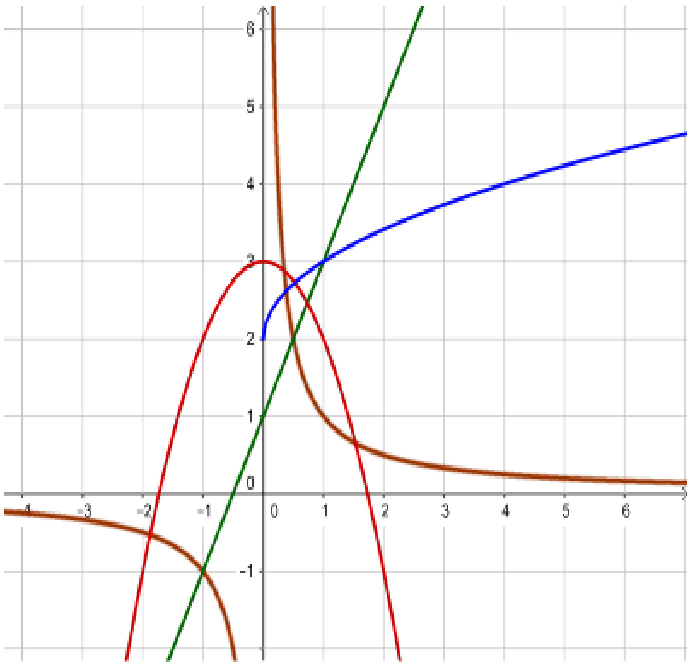
Eine nichtlineare Funktion ist eine Funktion, deren Funktionsgraph eine Kurve ist.

Formen

Exponentialfunktion: $y = a^x$

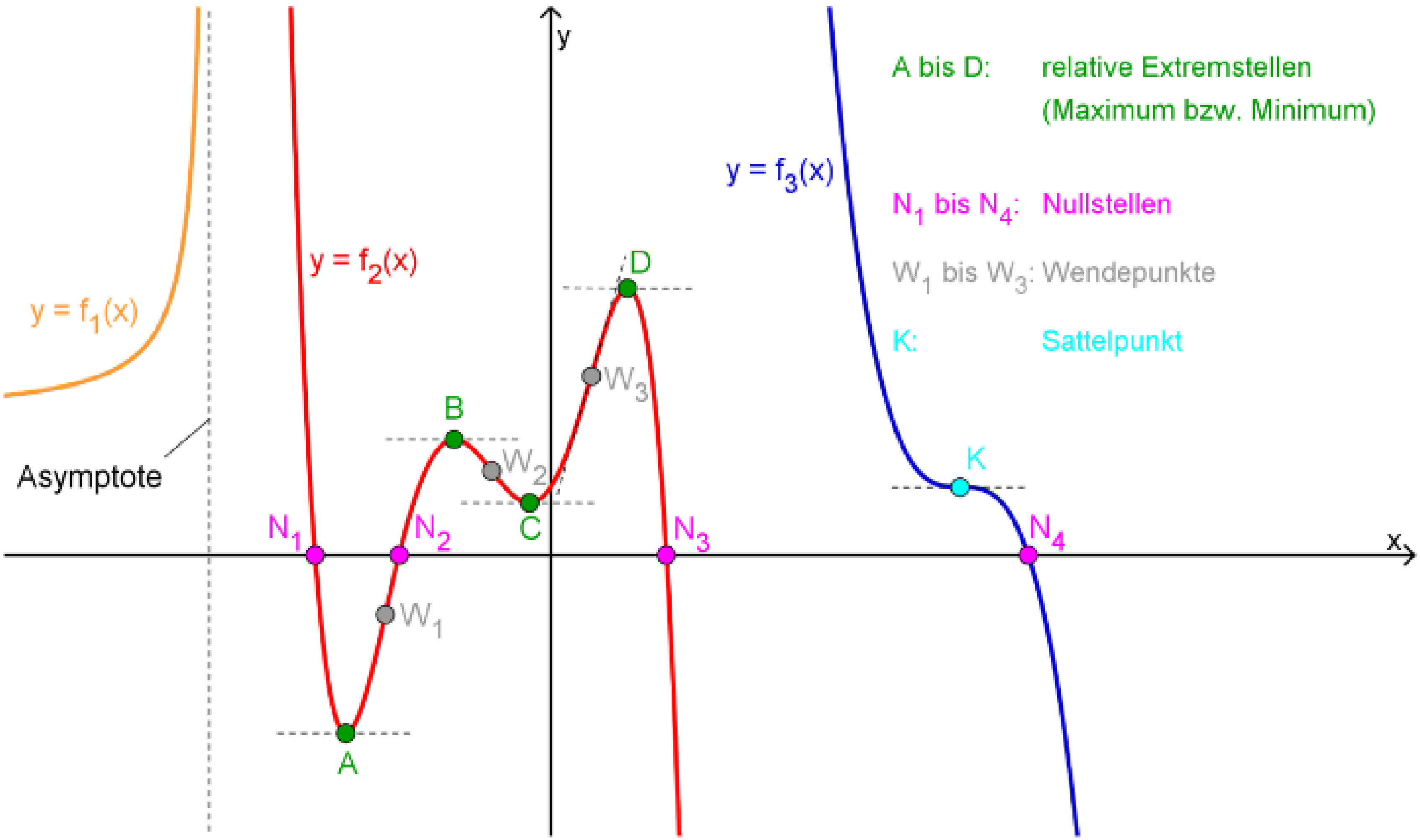


Potenzfunktion: $y = x^n$



Nichtlineare Funktionen

Charakteristische Punkte



Maximum

Punkt eines Graphen dessen benachbarte Punkte (vorher und nachher) einen kleineren y-Wert aufweisen. Die Tangente an den Graphen verläuft in diesem Punkt parallel zur x-Achse bzw. ihre Steigung ist gleich Null.

Minimum

Punkt eines Graphen dessen benachbarte Punkte einen grösseren y-Wert aufweisen. Die Tangente an den Graphen verläuft in diesem Punkt parallel zur x-Achse bzw. ihre Steigung ist gleich Null.

Wendepunkt

Punkt eines Graphen in dem sich die Kurve von der einen Seite der Tangente auf die andere Seite der Tangente wendet. Die Tangente im Wendepunkt heisst Wendetangente.

Sattelpunkt

Punkt eines Graphen bei dem die Wendetangente parallel zur x-Achse verläuft bzw. ihre Steigung gleich Null ist.

Nullstellen

Jene Stellen einer Funktion, bei denen der Graph die x-Achse schneidet bzw. wo die y-Werte gleich Null sind.

Asymptoten

Sind Geraden oder Kurven, die man als Tangenten von Funktionen im Unendlichen auffassen kann. Der Graph der Funktion nähert sich der Asymptote, erreicht sie aber nie! (asymptos ist griechisch und bedeutet «nicht zusammenfallend»)

Spezielle Funktion: exponentielles Wachstum

Definition

$$G = G_0 * a^{t/\tau}$$

$$G_0 = G \;/\; a^{t/\tau}$$

G	Größe, die exponentiell von der Zeit t abhängt
G_0	Wert der Größe G im Zeitpunkt t = 0
a	Wachstums- oder Abnahmefaktor, bezogen auf die Zeitspanne τ
t	Zeit
τ	Zeitspanne, auf die sich a bezieht

Beispiel

Eine Bakterienkultur mit exponentiellem Wachstum:
nach 25min, Dichte = 500, nach 45min Dichte = 1.200

τ = 20min (45-25), a = 1200/500 = 2,4

$G_0 = 500 \;/\; 2{,}4^{25/20} = \sim 167$

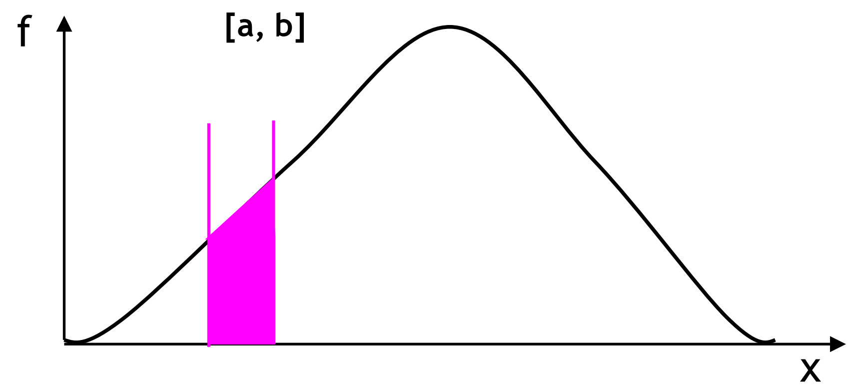
$\boxed{\text{Wachstumsfunktion } G = 167 * 2{,}4^{t/20\text{min}}}$

Quelle: Frommenwiler

Integrale

Definition

Ein **bestimmtes integral** ist definiert als die Fläche, die von dem Graphen der Funktion f auf dem Intervall [a, b] eingeschlossen wird, wobei die vertikalen Linien x = a und x = b als Begrenzung dienen.



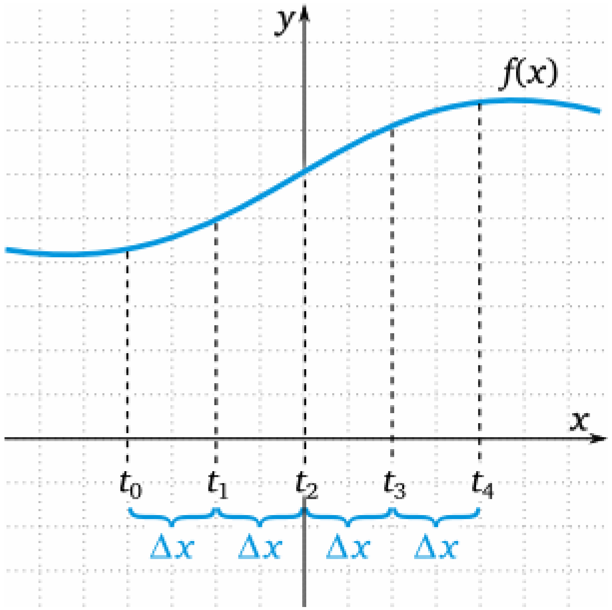
Um den Flächeninhalt dieses Bereiches zu berechnen, unterteilt man die Fläche in (unendlich schmale) Rechtecke der Breite Δx und der Höhe f(x). Die Summe des Produkts f(x)∗Δx ist der entsprechende Flächeninhalt.

$$\int_a^b f(x) * \Delta x$$

Definition

Das Riemann-Integral ist eine Methode zur numerischen Integration. Die Fläche unter dem Graphen wird mit Hilfe von Formen, in diesem Falle Rechtecke, berechnet.

Zerlegung der Fläche (Intervall [a,b]) in n Teilintervalle t_n.



$$\boxed{\Delta x = \frac{b - a}{n}}$$

$$t_n = a + \Delta x * n \longrightarrow t_0 = a,\ t_n = b$$

Bestimmtes Integral

Notation

Differential

[a,b]: Grenzen $\int_a^b \boxed{f(x)}\,\boxed{d}\,\boxed{x}$ Integrationsvariable

Integrand:
zu integrierende Funktion

Berechnung

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

gesucht: Stammfunktion F

Beispiel

$$f(x) = x^1 \longrightarrow F(x) = \frac{1}{n+1} * x^{n+1} = \frac{x^2}{2}$$

$$\int_0^1 x\,dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Unbestimmtes Integral

= Stammfunktion plus Konstante C
(**Integrationskonstante**)

Beispiele Stammfunktionen

Konstante Funktion

$$\int a \, dx = a * x$$

Potenzfunktion

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} * x^{n+1}$$

Exponentialfunktion

$$\int e^x \, dx = e^x$$

Logarithmusfunktion

$$\int \ln(x) \, dx = x + x * \ln(x)$$

Sinusfunktion

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

Grundbegriffe

Beispiel Würfeln

Zufallsexperiment

beliebig wiederholbar

nach bestimmten Regeln durchgeführt

Ergebnis muss unsicher (= zufällig) sein

(Zufalls-)Ereignis (A)

Ergebnis eines Zufallsexperiments

Elementarereignis

nicht in weitere Ereignisse zerlegbar

$E = \{4\}$

Ereignis

Klasse/Menge von Elementarereignissen

$A = \{1,3,5\}$

Ereignisraum

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Jedes Ereignis ist eine Teilmenge des Ereignisraums und besteht aus mindestens einem Elementarereignis.

Grundbegriffe

Sicheres Ereignis

Menge aller Elementarereignisse des Ereignisraums (eines dieser Ereignis *muss* auftreten

$A = \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Beispiel Würfeln

Komplementäre Ereignisse

alle Elementarereignisse, die nicht zum Ereignis A gehören. Die Vereinigung von A und Nicht-A führt zum sicheren Ergebnis.

$A = \{1,3,5\} \quad \bar{A} = \{2,4,6\} \quad A \cup \bar{A} = \{1,2,3,4,5,6\}$

Wahrscheinlichkeit P

Definition

P(A) = Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A

$$= \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der insgesamt möglichen Ereignisse}}$$

Laplace-Experiment:

Alle Elementarereignisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit.

Beispiel

Würfeln: wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, eine 1 oder 2 zu würfeln?

$$\boxed{P(1,2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$$

Kolmogorov-Axiome

(1) Die Wahrscheinlichkeit für ein Zufallsereignis liegt zwischen Null und Eins.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

(2) Die Wahrscheinlichkeit für ein sicheres Ereignis is gleich 1.

$$P(A_{sicher}) = 1$$

(3) Für zwei disjunkte (trennscharfe) Ereignisse gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Regeln

Additionssatz zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit von (A oder B)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Multiplikationssatz zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit von (A und B)

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Komplementaritätssatz zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Auftretens von A

$$P(A) = 1 - P(B)$$

Gegenwahrscheinlichkeit

Kombinatorik 1

Permutation

Wie viele Möglichkeiten gibt es, verschiedene Objekte in einer Reihenfolge anzuordnen?

Beispiel: 3 Menschen, 3 Stühle

N!

3! = 3 * 2 * 1 = 6

Variation

Anordnung mit vorgegebener Reihenfolge

Beispiel: Skat, 32 Karten, nacheinander Kreuz Ass, Pik Ass, Herz Ass, Karo Ass

32 * 31 * 30 * 29 = 863.040 *mögliche Reihenfolgen der ersten 4 Karten*

$$P = \frac{1}{863.040}$$

Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Reihenfolge

Allgemein

$$\boxed{\frac{n!}{(n-k)!}}$$

n Anzahl Objekte

k ausgewählte Objekte

Kombinatorik 2

Kombination

zufällige Auswahl von k Objekten aus n Objekten, ohne Zurücklegen und ohne bestimmte Reihenfolge

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! * k!}$$

- Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Binomialkoeffizient

Beispiel Lotto

n= 49 Kugeln (insgesamt mögliche Ereignisse)
k= 6 richtige Kugeln (günstige Ereignisse)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! * k!}$$

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{(49-6)! * 6!} = \frac{49!}{43! * 6!} = 13983816$$

$$P(6er\ im\ Lotto) = \frac{1}{13983816} = 7{,}1 * 10^{-8} = 0{,}000000071$$

Es gibt insgesamt 13983816 mögliche Kombinationen, sechs Kugeln aus 49 Kugeln zu ziehen. Nur eine davon ist die richtige Kombination.

Messwerte: Skalenniveau

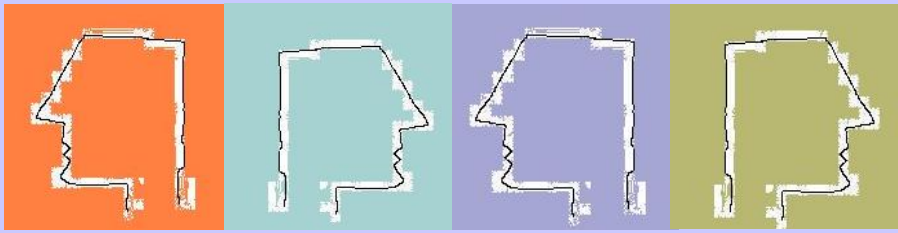
		Messniveau	Mathematische Eigenschaften der Messwerte	Beschreibung der Messwerteigenschaften	Beispiele
Zunahme des Informationsgehalts	nicht-metrische Daten	Nominalskala	$A = A \neq B$	<u>Klassifikation:</u> Die Messwerte zweier Untersuchungseinheiten sind identisch oder nicht-identisch.	<u>dichotom:</u> ▪ Geschlecht (m./w.) <u>polytom:</u> ▪ Parteien (CDU / SPD / FDP)
		Ordinalskala	$A > B > C$	<u>Rangordnung:</u> Messwerte lassen sich auf einer Messdimension als kleiner / größer /gleich einordnen.	<u>Präferenz- u. Urteilsdaten:</u> Marke X gefällt mir besser, gleich gut, weniger als Marke Y.
	metrische Daten	Intervallskala	$A > B > C$ und $A - B = B - C$	<u>Rangordnung und Abstandsbestimmung:</u> Die Abstände zwischen Messwerten sind angebbar.	▪ Temperatur (Celsius) ▪ Geburtsjahr
		Rationalskala	$A = x * B$	<u>Absoluter Nullpunkt:</u> Neben Abstandsbestimmungen können auch Messwert-verhältnisse berechnet werden.	▪ Alter ▪ Jahresumsatz ▪ Artikelumfang

Verteilung einzelner Messwerte / einzelner Variablen im Datensatz

ÜBERBLICK

BEREINIGUNG

DESKRIPTION



Häufigkeiten

Kategorie k	Strichliste	abs. Häufigkeiten	rel. Häufigkeiten (%-Werte)
bis unter 500	|	1	0,8
500 bis unter 1000	||||| ||||| ||	12	9,2
1000 bis unter 1500	||||| ||||| ||||| |||||	20	15,4
1500 bis unter 2000	||||| ||||| ||||| ||||| ||||	24	18,5
2000 bis unter 2500	||||| ||||| ||||| ||||| ||	22	16,9
2500 bis unter 3000	||||| ||||| ||||| |||	18	13,8
3000 bis unter 3500	||||| ||||| |	11	8,5
3500 bis unter 4000	||||| ||||	9	6,9
4000 und mehr	||||| ||||| |||	13	10,0
		n = 130	100

$$\boxed{p_j = \frac{f_j}{n}}$$

Häufigkeiten 2

Jetzt geht es um Radio, Fernsehen, Tageszeitungen und das Internet. Unabhängig davon, wieviel Zeit Sie für die einzelnen Medien aufwenden, möchte ich jetzt von Ihnen wissen, wie häufig Sie Fernsehen nutzen: mehrmals täglich (1), täglich, mehrmals pro Woche, einmal pro Woche, mehrmals im Monat, seltener oder nie (7).

		Häufigkeit	Prozent	Gültige Prozente	Kumulierte Prozente
Gültig	1 mehrmals täglich	777	17,3	17,3	17,3
	2 täglich	3045	67,7	67,7	84,9
	3 mehrmals pro Woche	460	10,2	10,2	95,1
	4 einmal pro Woche	59	1,3	1,3	96,5
	5 mehrmals im Monat	39	,9	,9	97,3
	6 seltener	54	1,2	1,2	98,5
	7 nie	66	1,5	1,5	100,0
	Gesamt	4500	100,0	100,0	

(Studie Massenkommunikation 2005)

Häufigkeiten 3

(TV-Nutzung gestern / Min.)

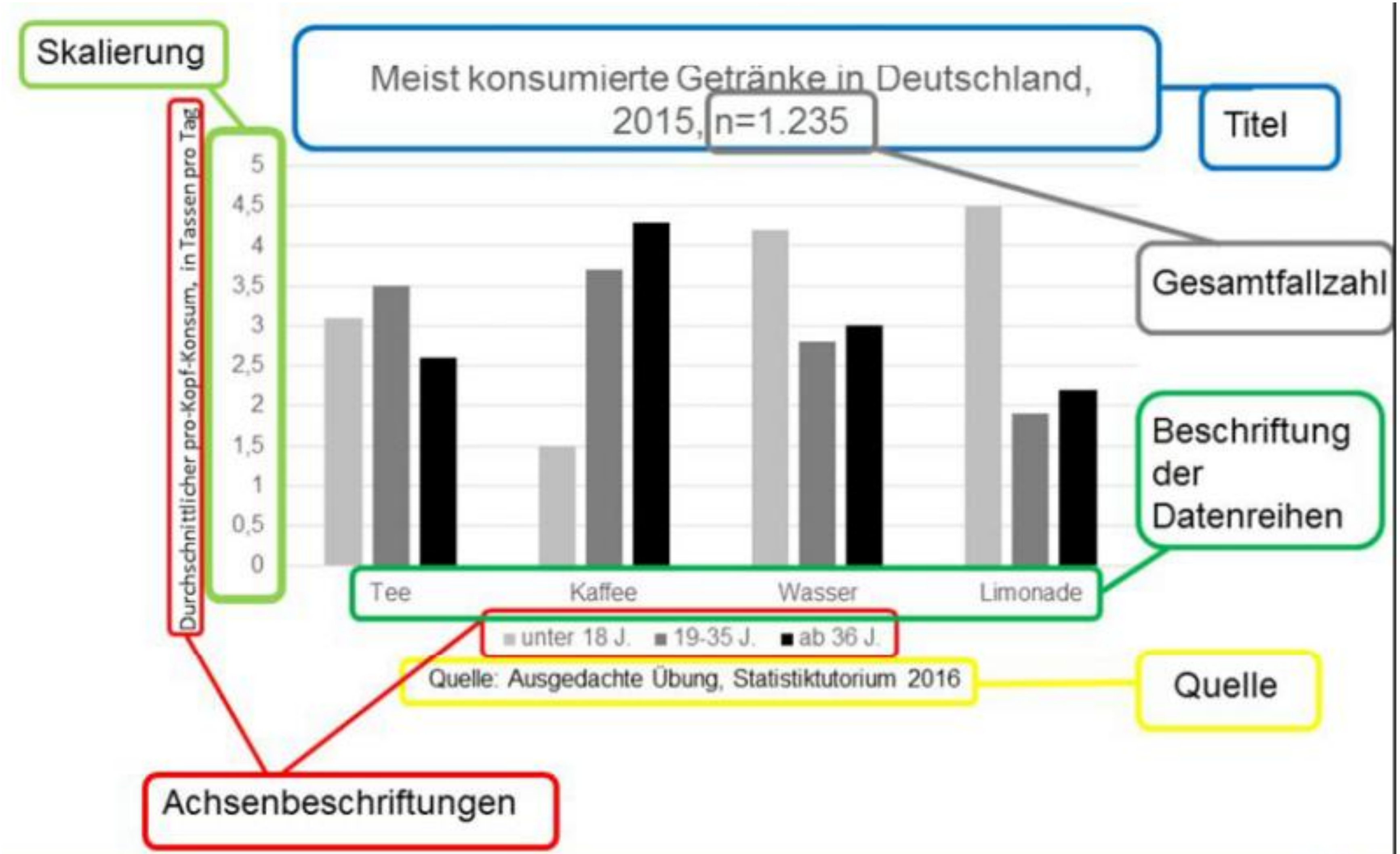
TV_min

N	Gültig	54
	Fehlend	124

TV_min

		Häufigkeit	Prozent	Gültige Prozente	Kumulierte Prozente
Gültig	1	1	,6	1,9	1,9
	2	2	1,1	3,7	5,6
	5	3	1,7	5,6	11,1
	10	1	,6	1,9	13,0
	15	3	1,7	5,6	18,5
	20	4	2,2	7,4	25,9
	30	6	3,4	11,1	37,0
	45	1	,6	1,9	38,9
	50	1	,6	1,9	40,7
	60	13	7,3	24,1	64,8
	90	5	2,8	9,3	74,1
	100	2	1,1	3,7	77,8
	120	4	2,2	7,4	85,2
	180	2	1,1	3,7	88,9
	200	2	1,1	3,7	92,6
	240	3	1,7	5,6	98,1
	360	1	,6	1,9	100,0
	Gesamt	54	30,3	100,0	
Fehlend	0	123	69,1		
	System	1	,6		
	Gesamt	124	69,7		
Gesamt		178	100,0		

CHECKLISTE DIAGRAMME



CHECKLISTE TABELLE

Titel
Gesamtfallzahl
Stat. Maßzahl

Tabelle 7: Lieblingsfarbe nach Geschlecht* (n=166, Angaben in Prozent)

	Geschlecht		
Farbe	**m**	**w**	**Gesamt**
schwarz	5,3	14,0	**11,5**
braun	7,9	2,6	**3,8**
grün	21,1	20,2	**20,6**
weiß	7,9	7,9	**7,9**
blau	39,5	24,6	**27,9**
gelb	0,0	7,0	**5,1**
rot	18,4	23,7	**23,3**
Gesamt	**100,0**	**100,0**	**100,0**

*Geschlossene Frage: Welche der im Folgenden aufgefürten Farben ist Ihre Lieblingsfarbe?

Quelle: Umfrage zur Vorlesung Methoden II (SoSe2013)

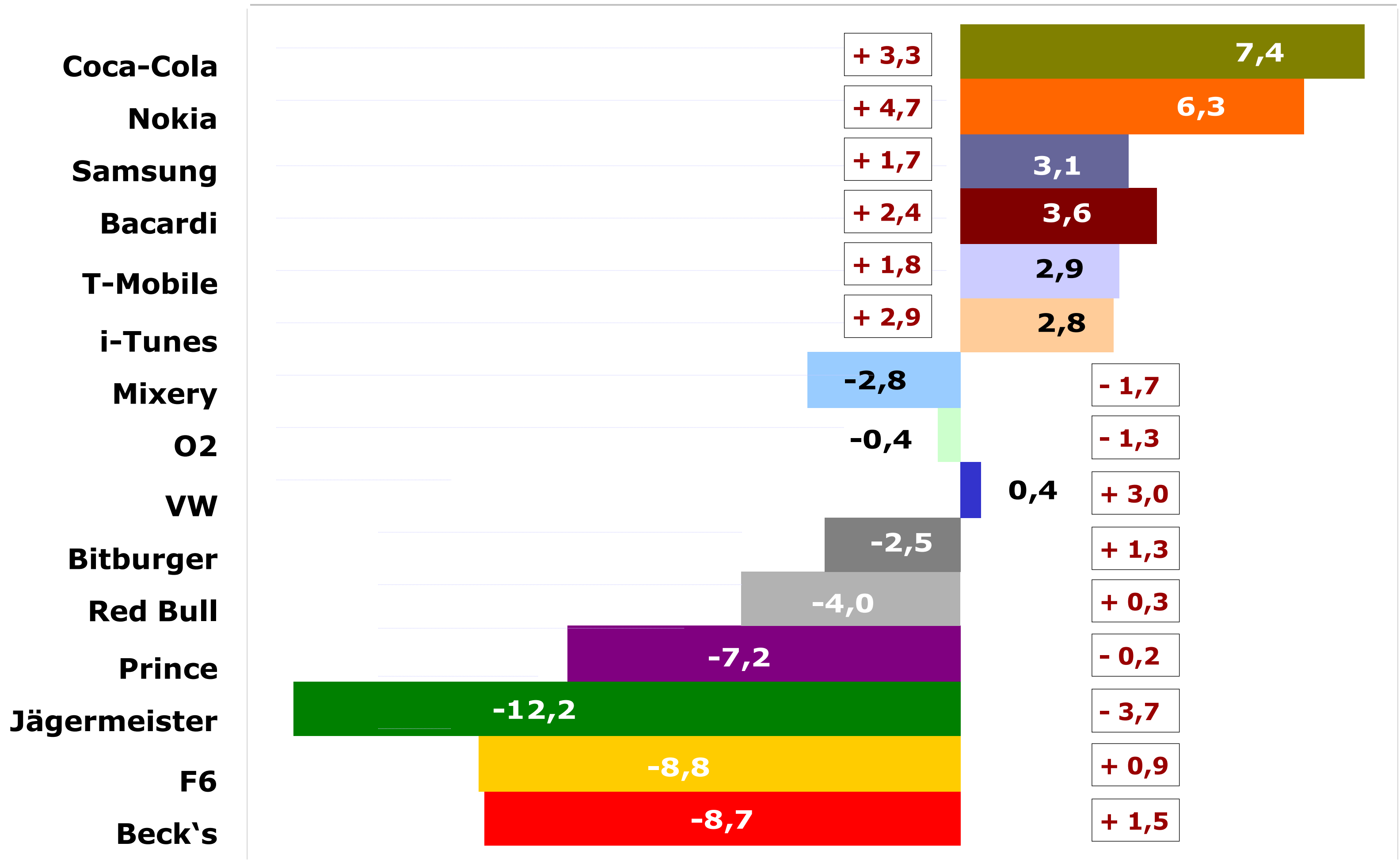
Kategorien
(aussagekräftige Beschriftung)

Datenquelle

DARSTELLUNG VON BEWERTUNGSSKALEN

Wie glaubwürdig finden Sie das Engagement der folgenden Firmen und Marken im Bereich Musik?

Differenz der %-Anteile sehr glaubwürdig/glaubwürdig und unglaubwürdig/sehr unglaubwürdig



(Differenz zur 2. Welle; in 1. Welle nicht gefragt) **Basis: alle Befragten; n = 1.008; in %**