PRONALAZAK MINIMUMA POMOĆU GRADIJENTA

Anna Bissinger

1 Zadatak 1

Koristeći se testom drugih parcijalnih derivacija nađite ekstreme funkcije f i odredite njihov karakter (minimum, maksimum, sedlasta točka).

1. Parcijalne derivacije prvog reda

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(4x^2 + y^2 + 4) = 8x$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(4x^2 + y^2 + 4) = 2y$$

Gradijent funkcije $f(x, y)$ je $\nabla f = (8x, 2y)$.

2. Stacionarne točke

Izjednačimo sve parcijalne derivacije prvog reda sa nulom i pronađemo nepoznanice.

$$f_x = 0 \implies 8x = 0 \implies x = 0$$
$$f_y = 0 \implies 2y = 0 \implies y = 0$$

Dakle, stacionarna točka je $(0, 0)$.

3. Parcijalne derivacije drugog reda

Parcijalne derivacije drugog reda potrebne su nam za karakter.

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(8x) = 8 \cdot 1 = 8$$
$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2y) = 2 \cdot 1 = 2$$
$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(2y) = 0$$
$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(8x) = 0$$

4. Karakter dobivamo pomoću Hessianove determinante

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 16 - 0^2 = 16$$

Množili smo glavnu dijagonalu sa sporednom i dobili da je D = 16.

Budući da je $\det(\mathbf{D}) = 16 > 0$ i $f_{xx} = 8 > 0$, stacionarna točka $(0, 0)$ je **lokalni minimum**.

2 Zadatak 2

Grafički prikažite graf razina funkcije $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 4$.

Python kod za graf razina funkcije

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definiramo funkciju
def f(x, y):
    return 4*x**2 + y**2 + 4

# Kreiranje mreže točaka u xy ravnini
x = np.linspace(-3, 3, 400)
y = np.linspace(-3, 3, 400)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z = f(X, Y)

# Crtanje kontura
plt.figure(figsize=(10, 8))
contour = plt.contour(X, Y, Z, levels=10, cmap='viridis')
plt.clabel(contour, inline=1, fontsize=10)
plt.title('Konture funkcije $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 4$')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.grid(True)
plt.colorbar(contour)
plt.savefig('konture.png')
plt.show()
```

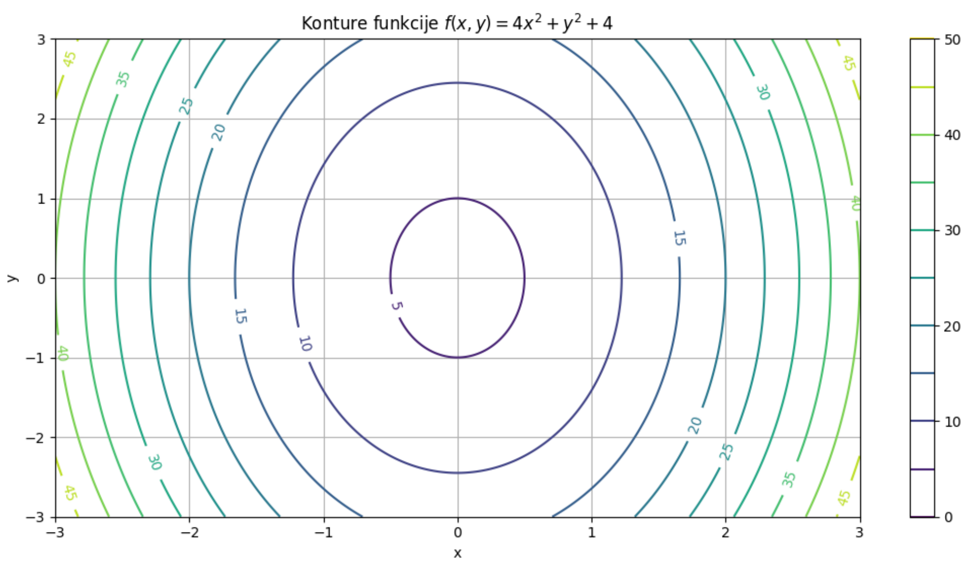

Figure 1: Konture funkcije $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 4$