

Linearne transformacije

1. Za date funkcije ispitati da li su linearne transformacije i za one koje jesu naći matricu i rang.
 - (a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x^2 - y, x + y)$;
 - (b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (2x - y, 3x, y + 1)$;
 - (c) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x - y + 2z, -x + 3y + z)$;
 - (d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = 3x + 2y - z$;
 - (e) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + y, 0)$;
 - (f) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x, \cos(xy))$;
 - (g) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \sqrt{x}$;
 - (h) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x$;
 - (i) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$;
 - (j) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (\ln 2 \cdot x, x + y)$.
2. Za sledeće funkcije diskutovati po realnim parametrima kada su linearne transformacije i u slučaju kada jesu naći njihove matrice i odrediti rang.
 - (a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (ax + y^b, bx - z)$;
 - (b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = ax + bxy + cy$;
 - (c) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (2^{ay}x + yz^b, ax + by + cz)$;
 - (d) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = ((ax - b)y, x + ab)$;
 - (e) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = \left(\frac{ax+b}{bx+a} + y, \sin(bx) + az\right)$;
 - (f) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x \cdot 5^{(a-1)y+b}, (\ln b)y^2, ax + cy)$.
3. Za date funkcije ispitati da li su linearne transformacije i za one koje jesu naći jezgro, sliku, rang i matricu.
 - (a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x - 3y, -2x + 6y, 3x - 9y)$;
 - (b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + y + z, 2x - 3y + 5z, -2x - 7y + z)$.
4. Neka su linearne transformacije $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definisane sa $f(x, y) = (2x - y, x + 3y)$ i $g(x, y) = (-x + y, 3x - 2y)$.
 - (a) Odrediti kopoziciju $f \circ g$.
 - (b) Napisati matrice M_f i M_g linearnih transformacija f i g .
 - (c) Naći linearnu transformaciju h koja odgovara matrici $M_f \cdot M_g$ i uporediti je sa $f \circ g$.
 - (d) Odrediti f^{-1} i g^{-1} ako postoje.
5. Neka su linearne transformacije $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisane sa $f(x, y, z) = (x - 2y, y + z, -2x + y - z)$ i $g(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x - z, 2y + 4z)$.
 - (a) Napisati matrice M_f i M_g linearnih transformacija f i g i odrediti njihov rang.
 - (b) Odrediti $f \circ g$, f^{-1} , $\ker(g)$ i $\text{Im}(g)$.
6. Dati su vektori $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (3, -1, 1)$ i $\vec{v} = (x, y, z)$. Neka su f, g i h funkcije date sa:
 $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = \vec{a} \times \vec{v} + (\vec{a} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{b}$;
 $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x, y, z) = (y, z)$;
 $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, h(x, y) = (x - 2y, 2x + y, -y)$.
Dokazati da je funkcija $F = h \circ g \circ f$ linearna transformacija i odrediti njenu matricu.
7. Za sledeće funkcije ispitati, odnosno diskutovati po parametrima da li su linearne transformacije i u slučajevima kada jesu naći njihovu matricu, jezgro, sliku i rang.

- (a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(\vec{v}) = \frac{\vec{n} \times \vec{v}}{|\vec{n}|}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{n} = (-1, 1, 2)$;
- (b) $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $g(\vec{v}) = (\vec{n} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{m}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{n} = (1, 1, q)$, $\vec{m} = (0, 1, 0)$;
- (c) $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $h(\vec{v}) = (\vec{n} \times \vec{v}) \cdot \vec{n} \cdot \vec{m} + 2(\vec{v} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{j}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{n} = (1, 1, 2)$, $\vec{m} = (0, p)$, $\vec{j} = (0, 1)$.
8. Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ data je sa $f(1, -1) = (-3, 6)$ i $f(-2, 1) = (2, -4)$. Odrediti $f(x, y)$ i odgovarajuću matricu M_f linearne transformacije f , a zatim naći njen rang. Da li postoji f^{-1} ?
9. Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data je sa $f(1, -1, 1) = (0, 2, 1)$, $f(2, 0, 3) = (-2, 13, 3)$ i $f(-1, 2, 0) = (-2, 5, -1)$. Odrediti $f(x, y, z)$, a zatim naći $\ker(f)$ i $\text{Im}(f)$.
10. Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data je sa $f(1, -1, 0) = (1, 0, 1)$, $f(1, 2, -4) = (0, -1, 2)$ i $f(-2, 0, 3) = (-1, 1, 0)$. Odrediti $f(x, y, z)$ i odgovarajuću matricu M_f linearne transformacije f , a zatim izračunati $f(-1, 3, 0)$.

ZA VEŽBU IZ SKRIPTE

Zadatak 12.1; 12.2; 12.7; 12.8 (uzeti da je $g(x, y, z) = (x, y)$)