Grupe

October 25, 2021

Grupoid $\mathcal{G} = (G, *)$ je **grupa** akko

1. je operacija $*$ asocijativna, tj. ako je $\mathcal{G}$ polugrupa (asocijativni grupoid),
2. postoji levi neutralni element, tj.

$$\exists e \in G, \forall x \in G, e * x = x,$$

3. za svaki element $x \in G$ postoji njemu levi inverzni element $x' \in G$, tj.

$$\forall x \in G, \exists x' \in G, x' * x = e.$$

Grupa u kojoj važi komutativni zakon zove se **komutativna** ili **Abelova grupa**.

U grupi uvek važi:

- levi neutralni element je istovremeno i desni neutralni element, pa je to onda neutralni element i on je jedinstven,
- levi inverzni elementi su istovremeno i desni inverzni elementi, pa su to inverzni elementi i oni su jedinstveni,
- zakon kancelacije, jer je svaka grupa asocijativna, ima neutralni i inverzne elemente.

Primer: Da li su sledeći uređeni parovi grupe?

$(\mathbb{N}, +)$ NE jer ne postoji neutralni element $(0 \notin \mathbb{N})$

$(\mathbb{Z}, +)$ DA, i to Abelova

$(\mathbb{Q}, +)$ DA, i to Abelova

$(\mathbb{R}, +)$ DA, i to Abelova

$(\mathbb{N}, \cdot)$ NE jer ne postoji inverzni za broj, postoji samo za 1, $1 \cdot 1 = 1$

$(\mathbb{Q}, \cdot)$ NE jer 0 nema inverzni element

$(\mathbb{C}, +)$ DA $a+bi \in \mathbb{C}$, $(-a-bi) + a + bi = 0$ i to Abelova

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ NE jer nemaju svi elementi inverzne $2 \cdot \overset{?}{\square} = 1$

$(\{-1, 0, 1\}, +)$ NE $1 + 1 \notin \{-1, 0, 1\}$

$(\mathbb{I} \setminus \{0\}, \cdot)$. NE $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \notin \mathbb{I} \setminus \{0\}$

Grupa $(A, \cdot)$ se naziva multiplikativna grupa i u njoj se neutralni elemenat označava sa 1 i čita "jedinica grupe", a inverzni elemenat od x se označava sa x^{-1}.

Grupa $(A, +)$ se naziva aditivna grupa i u njoj se neutralni elemenat označava sa 0 i čita "nula grupe", a inverzni od x se označava sa $-x$.

$(A, \cdot) \quad 1 \quad x^{-1}$

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \quad 1 \quad 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$(A, +) \quad 0 \quad -x$

$(\mathbb{Z}, +) \quad 0 \quad -2$

$(G, *)$ e

$\emptyset \neq H \subseteq G$

$(H, *)$

Neka su $\mathcal{H} = (H, *)$ i $\mathcal{G} = (G, *)$ grupe. Tada je $\mathcal{H}$ **podgrupa** grupe $\mathcal{G}$ akko je $H \subseteq G$ i operacija $*$ iz $\mathcal{H}$ je restrikcija operacije $*$ iz $\mathcal{G}$.

Neutralni elemenat grupe je takođe neutralni elemenat i svake njene podgrupe.

$(\mathbb{R}, +)$ 0

$(\mathbb{Z}, +)$ 0

$(\{0\}, +)$

Svaka grupa ima bar dve podgrupe, takozvane trivijalne podgrupe:

- podgrupu koja se sastoji samo od neutralnog elementa i
- celu grupu koja je uvek sama sebi podgrupa.

$(G, *)$

$\emptyset \neq H \subseteq G$

$*$ ZATVORENA

$e \in G$ neutralni u G

i $e \in H$

$x \in G$, $x' \in G$ njegov inverzni

$x \in H \Rightarrow x' \in H$

$(H, *)$

Da bi $\mathcal{H} = (H, *)$ bila podgrupa grupe $\mathcal{G} = (G, *)$, gde je $\emptyset \neq H \subseteq G$, dovoljno je da operacija $*$ bude zatvorena u H, da neutralni element grupe $\mathcal{G}$ pripada skupu H i da za svako $x \in H$ njegov inverzni elemenat u $\mathcal{G}$ pripada skupu H.

Lagranžova teorema: Ako je $\mathcal{G}$ konačna grupa i $\mathcal{H}$ podgrupa grupe $\mathcal{G}$, tada je broj svih elemenata grupe $\mathcal{G}$ deljiv brojem svih elemenata podgrupe $\mathcal{H}$.

$\mathrm{card}(G) = 9$ H

$\mathrm{card}(H) \in \{3, 1, 9\}$

Primer: Primeri podgrupa:

- $(\mathbb{R}, +)$ je podgrupa grupe $(\mathbb{C}, +)$,
- $(\mathbb{Q}, +)$ je podgrupa grupa $(\mathbb{R}, +)$ i $(\mathbb{C}, +)$,
- $(\mathbb{Z}, +)$ je podgrupa grupa $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ i $(\mathbb{C}, +)$,
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je podgrupa grupe $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$,
- $((0, \infty), \cdot)$ je podgrupa grupa $\underline{(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)}$ i $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$,
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ je podgrupa grupa $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ i $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Primer: Grupoid $(G, \circ)$ kod kog je $G = \{e, a, b, c\}$, a operacija $\circ$ zadata tablicom

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$\mathrm{card}(G) = 4$

podgrupe mogu imati 1, 2 ili 4 elemente

e je неутрални el.

$e \circ e = e$
$a \circ a = e$
$b \circ b = e$
$c \circ c = e$

je Abelova grupa i naziva se Klajnova grupa. Klajnovu grupu karakteriše to da je svaki elemenat sam sebi inverzan.

– TRIVIJALNE PODGRUPE SU $(G, \circ)$ ✓, $(\{e\}, \circ)$ ✓

$\cancel{(\{a\}, \circ)}$ – PODGRUPA MORA DA SADRŽI NEUTRALNI ELEMENAT GRUPA

– BROJ ELEMENATA PODGRUPE MORA DA DELI BROJ EL. GRUPE

KANDIDATI ZA PODGRUPE SU: $(\{e, a\}, \circ)$, $(\{e, b\}, \circ)$, $(\{e, c\}, \circ)$

$(\{e, a\}, \circ)$ ✓ $(\{e, b\}, \circ)$ ✓ $(\{e, c\}, \circ)$ ✓

$\circ$	e	a
e	e	a
a	a	e

✓

$\circ$	e	b
e	e	b
b	b	e

$\circ$	e	c
e	e	c
c	c	e

✓

Primer: Naći sve podgrupe Klajnove grupe.

- trivijalne: $(\{e\}, \circ)$, $(G, \circ)$

- netrivijalne: Kako na osnovu Lagranžove teoreme broj elemenata podgrupe mora da deli broj elemenata grupe, to Klajnova grupa može da ima samo podgrupe sa 1, 2 ili 4 elementa. Sa 1 i 4 elementa su trivijalne podgrupe, a sa 2 moraju sadržati neutralni elemenat pa su kandidati za netrivijalne podgrupe

$(\{e, a\}, \circ)$ $\qquad$ $(\{e, b\}, \circ)$ $\qquad$ $(\{e, c\}, \circ)$

$\circ$	e	a
e	e	a
a	a	e

$\circ$	e	b
e	e	b
b	b	e

$\circ$	e	c
e	e	c
c	c	e

.

Direktnom proverom iz tablica vidi se da ovo jesu grupe, pa Klajnova grupa osim trivijalnih ima i tri netrivijalne podgrupe.

Napomena: Kako izomorfizam prenosi osobine sa jednog na drugi grupoid to znači da ako su dva grupoida izomorfna i ako je jedan od njih grupa biće i drugi.

$(G, *)$ - grupoid, $(H, \circ)$ - grupoid

$h : G \to H$ izomorfizam

$(G, *)$ - asocijativan $\Rightarrow$ $(H, \circ)$ - asocijativan

$e \in G$ n.e u $(G, *)$ $\Longrightarrow$ $h(e)$ n.e u $(H, \circ)$

x' inverzni el. $x \in G$ u $(G, *)$ $\Rightarrow$ $h(x')$ inverzni el. za $h(x)$ u $(H, \circ)$

$\Rightarrow$ $(G, *)$ grupa $\Longrightarrow$ $(H, \circ)$ grupa

$\equiv_n$

$(\mathbb{Z}_3 \ , \oplus)$

$\uparrow$

$\{0,1,2\}$

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$(\mathbb{Z}_4 \ , \oplus)$

$\uparrow$

$\{0,1,2,3\}$

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2