# RELACIJE

**Uređen par** elemenata $a$ i $b$, u oznaci $(a,b)$ je $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$, gde je $a$ prva komponenta, a $b$ druga komponenta uređenog para.

Napomena: $(b,a) = \{\{b\},\{a,b\}\}$ pa za $a \neq b \Rightarrow (a,b) \neq (b,a)$.
$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

**Dekartov proizvod** skupova $A$ i $B$ je skup svih uređenih parova čija je prva komponenta iz skupa $A$, a druga komponenta iz skupa $B$, tj. $A \times B = \{(a,b) \,| a \in A \wedge b \in B\}$.

*Primer:* $A = \{1,2,3\}$, $B = \{x,y\}$
$A \times B = \{(1,x),(1,y),(2,x),(2,y),(3,x),(3,y)\}$
$B \times A = \{(x,1),(x,2),(x,3),(y,1),(y,2),(y,3)\}$
Na osnovu ovog primera može se zaključiti da Dekartov proizvod nije komutativan, tj. $A \times B \neq B \times A$.

**Dekartov kvadrat** skupa $A$ je $A^2 = A \times A = \{(a_1,a_2) \,| a_1, a_2 \in A\}$.

*Primer:* $A = \{1,2,3\}$
$A^2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

**Binarna relacija** je bilo koji podskup od $A \times B$, tj. $\rho \subseteq A \times B$.

Ako uređen par $(x,y)$ pripada relaciji $\rho$ kaže se da su $x$ i $y$ u relaciji $\rho$ i piše se $(x,y) \in \rho$ ili $x\rho y$.

**Binarna relacija skupa** $A$**,** je bilo koji podskup od $A^2$, tj. $\rho \subseteq A^2$.

Kako je $\emptyset \subseteq A^2$ i $A^2 \subseteq A^2$ to su $\emptyset$ i $A^2$ sigurno relacije skupa $A$, i one se nazivaju prazna i puna relacija.

Relacije koje imaju konačno mnogo elemenata se mogu zadati na više načina. Neka je $A = \{1,2,3\}$ i $\rho \subseteq A^2$ tada se $\rho$ može zadati na sledeće načine:

- nabrajanjem elemenata: $\rho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2)\}$
- pomoću drugih relacija: $\rho = \left\{(x,y) \in A^2 | x^2 + y \leq 6\right\}$
- tablično:

| $\rho$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| 2 | $\top$ | $\top$ | $\perp$ |
| 3 | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ |

- grafički.

Relacije koje imaju beskonačno mnogo elemenata mogu se zadati pomoću drugih relacija ili se mogu opisati rečima govornog jezika.

*Primer *:* $A = \{1,2,3\}$

$\rho_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$

$\rho_2 = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$

$\rho_3 = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

$\rho_4 = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$

$\rho_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$

**Inverzna relacija** relacije $\rho$ je $\rho^{-1} = \{(y,x) \,|\, (x,y) \in \rho\}$

*Primer:* Inverzne relacije relacija iz Primera * su:

$\rho_1^{-1} = \{(1,1),(2,1),(1,2),(2,2),(3,3)\}$

$\rho_2^{-1} = \{(2,1),(3,1),(2,2),(3,2),(2,3),(3,3)\}$

$\rho_3^{-1} = \{(1,1),(3,1),(1,3),(2,3),(3,3)\}$

$\rho_4^{-1} = \{(2,1),(3,1),(3,2)\}$

$\rho_5^{-1} = \{(1,1),(2,1),(3,1),(2,2),(3,2)\}$

Osnovne osobine binarne relacije $\rho$ skupa $A \neq 0$:

- **refleksivnost (R)**: $(\forall x \in A)\, x\rho x$
- **simetričnost (S)**: $(\forall x, y \in A)\,(x\rho y \Rightarrow y\rho x)$
- **antisimetričnost (A)**: $(\forall x, y \in A)\,(x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y)$ ili $(\forall x, y \in A)\,((x\rho y \wedge x \neq y) \Rightarrow \rceil\,(y\rho x))$
- **tranzitivnost (T)**: $(\forall x, y, z \in A)\,((x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow x\rho z)$

*Primer:* Ispitati osobine relacija iz Primera *.

Relacija je u isto vreme simetrična i antisimetrična akko za svaki njen par važi da su mu komponente jednake, jer ako se pojavi par čije su komponente različite $(a,b) \in \rho$, $a \neq b$ , tada simetričnost zahteva da njemu simetričan par pripada relaciji, tj. $(b,a) \in \rho$, ali onda antisimetričnost zahteva da bude $a = b$ što je u kontradikciji sa pretpostavkom da su komponente različite.

Relacija $\rho \subseteq A^2$ je **relacija ekvivalencije (RST)** akko je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

*Primer:* relacija jednakosti $=$ na skupu realnih brojeva, relacija paralelnosti $\parallel$ na skupu svih pravih u prostoru, relacija podudarnosti na skupu svih duži, relacija $\rho_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,4),(4,3),(5,5)\}$ na skupu $A = \{1,2,3,4,5\}$,....

Svaka relacija ekvivalencije $\rho$ definisana na skupu $A$ vrši particiju tog skupa, tj. jednoznačno određuje neke neprazne podskupove skupa $A$ od kojih su svaka dva disjunktna, a njihova unija je skup $A$. Važi i obrnuto. Za datu particiju skupa $A$ može se definisati relacija $\rho$ na skupu $A$ tako što će proizvoljna dva elementa biti u relaciji $\rho$ akko pripadaju istom podskupu te particije. Ovako definisana relacija je RST relacija.

*Primer:* $A = \{1,2,3,4,5\}$

- RST relaciji $\rho_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(4,5),(5,4)\}$ jednoznačno odgovara particija $\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$,
- RST relaciji $\rho_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$ jednoznačno odgovara particija $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$,
- RST relaciji $\rho_3 = A^2$ jednoznačno odgovara particija $\{\{1,2,3,4,5\}\}$,
- particiji $\{\{1\},\{2\},\{3,4,5\}\}$ jednoznačno odgovara relacija ekvivalencije $\rho_4 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3),(4,5),(5,4)\}$ ,
- particiji $\{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$ jednoznačno odgovara relacija ekvivalencije $\rho_5 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(4,5),(5,4)\}$ .

Na nekom konačnom skupu $A$ može se definisati onoliko relacija ekvivalencije koliko ima particija.

*Primer:* Sve particije skupa $A = \{1,2,3\}$ su: $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, $\{\{1\},\{2,3\}\}$, $\{\{2\},\{1,3\}\}$, $\{\{3\},\{1,2\}\}$, $\{1,2,3\}$, što znači da se na skupu $A$ može definisati najviše 5 različitih RST relacija.

Neka je $\rho \subseteq A^2$ relacija ekvivalencije skupa $A$ , neka $x \in A$ i neka je sa $C_x$ označen skup svih elemenata $y \in A$ koji su u relaciji $\rho$ sa elementom $x$, tj. $C_x = \{y | x\rho y \wedge y \in A\}$. Tada se skup $C_x$ naziva **klasa ekvivalencije** elementa $x$, u odnosu na relaciju $\rho$. Skup svih klasa ekvivalencije zove se **faktor skup** ili količnički skup i označava sa $A/\rho$.

Osobine klasa ekvivalencije: neka je $\rho$ RST relacija skupa $A$

- klase ekvivalencije su, zbog refleksivnosti relacije $\rho$, neprazni skupovi jer $\forall x \in A$, $x \in C_x$ ,
- zbog simetričnosti relacije $\rho$ važi da za $\forall x, y \in A$, $x \in C_y \Leftrightarrow y \in C_x$.,
- klase ekvivalencije $C_x$ i $C_y$ skupa $A$ se ili poklapaju ili su disjunktne, tj. $\forall x, y \in A$, $C_x = C_y \vee C_x \cap C_y = \emptyset$,
- unija svih klasa ekvivalencije skupa $A$, u odnosu na relaciju $\rho$ je sam skup $A$.

*Primer:* Neka je $\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,2)\}$ relacija ekvivalencije skupa $A = \{1,2,3\}$,. Klase ekvivalencije skupa $A$ u odnosu na relaciju $\rho$ su $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2,3\} = C_3$, a faktor skup je $A/\rho = \{C_1, C_2\} = \{\{1\}, \{2,3\}\}$.

Na osnovu prethodnih osobina može se zaključiti da su klase ekvivalencije neprazni podskupovi skupa $A$ koji su međusobno disjunktni i čija unija je skup $A$, tj. da je faktor skup skupa $A$ u odnosu na relaciju $\rho$ jedna particija skupa $A$.

Relacija $\rho \subseteq A^2$ je **relacija poretka (RAT)** akko je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Uređen par $(A, \rho)$ je parcijalno uređen skup akko je $A \neq 0$ i $\rho$ RAT relacija skupa $A$.

*Primer:* relacije $\leq$ i $\geq$ na skupu prirodnih brojeva, relacija deli $|$ na skupu prirodnih brojeva, relacija
$\rho_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,4), (3,4), (3,5)\}$ na skupu $A = \{1,2,3,4,5\}$,....

Neka je $\rho$ relacija poretka skupa $A$. Tada je:

- $a \in A$ **najmanji** elemenat skupa $A$ akko $\forall x \in A$, $a \rho x$, tj.

  $a \in A$ najmanji elemenat skupa $A$ akko je on u relaciji sa svakim elementom,
- $a \in A$ **najveći** elemenat skupa $A$ akko $\forall x \in A$, $x \rho a$, tj.

  $a \in A$ najveći elemenat skupa $A$ akko je svaki elemenat u relaciji sa njim,
- $a \in A$ **minimalni** elemenat skupa $A$ akko $\rceil (\exists x \in A)(x \rho a \wedge x \neq a)$, tj.

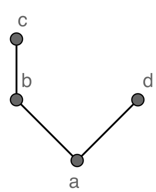
  $a \in A$ minimalni elemenat skupa $A$ akko ni jedan drugi elemenat nije u relaciji sa njim osim njega samog,
- $a \in A$ **maksimalni** elemenat skupa $A$ akko $\rceil (\exists x \in A)(a \rho x \wedge x \neq a)$, tj.

  $a \in A$ maksimalni elemenat skupa $A$ akko nije u relaciji ni sa jednim drugim elementom osim sa samim sobom.

Grafik relacije poretka naziva se **Haseov dijagram**. Svakoj relaciji poretka jednoznačno odgovara jedan Haseov dijagram i obrnuto, na osnovu Haseovog dijagrama se jednoznačno može rekonstruisati relacija poretka kojoj odgovara posmatrani Haseov dijagram.

*Primer:* Relacija $\rho = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (a,c), (a,d), (b,c)\}$ je relacija poretka skupa $A = \{a,b,c,d\}$.

- najmanji elemenat: $a$
- najveći elemenat: nema
- minimalni elemenat: $a$
- maksimalni elemenat: $c$, $d$




Ako postoji najmanji elemenat on je jedinstven.
Ako postoji najveći elemenat on je jedinstven.
Minimalnih i maksimalnih elemenata može biti više.
Ako postoji njamanji elemenat on je i jedini minimalni elemenat.
Ako postoji najveći elemenat on je i jedini maksimalni elemenat.

Primer:

- Relacija $\leq$ u skupu $\mathbb{N}$: jedini minimalni i najmanji elemenat je 1, a najvećeg i maksimalnog elementa nema.
  Relacija $\geq$ u skupu $\mathbb{N}$: jedini maksimalni i najveći elemenat je 1, a najmanjeg i minimalnog elementa nema.
- Relacija deli u skupu $\mathbb{N}$ definisana je sa $m|n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, n = km$. Najmanji i jedini minimalni elemenat je 1, a najvećeg i maksimalnog elementa nema.
  Relacija deli na skupu $A = \{2,3,5,12\}$. Najmanji i najveći elemenat ne postoje, minimalni elementi su 2, 3 i 5, a maksimalni 5 i 12.
- Relacija $\subseteq$ u partitivnom skupu nekog skupa $A \neq 0$. Jedini minimalni i najmanji elemenat je $\emptyset$, a jedini maksimalni i najveći elemenat je $A$.