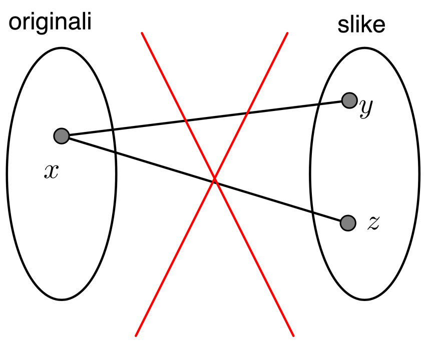
FUNKCIJE

Funkcija $f \subseteq A \times B$ je binarna relacija kod koje ne postoje dva različita uređena para sa jednakim prvim komponentama, tj. za koju važi

$$\forall x, y, z\ ((x, y) \in f\ \wedge\ (x, z) \in f \Longrightarrow y = z)\,.$$

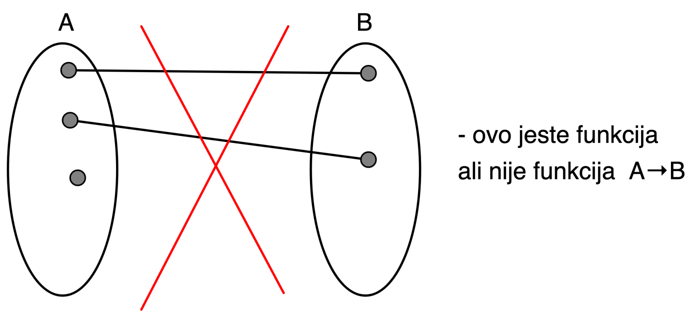


Uobičajeno je da se umesto $(x, y) \in f$ piše $y = f\,(x)$.

Domen (oblast definisanosti) funkcije f je $\mathcal{D}(f) = \{x \mid \exists y, (x, y) \in f\}$, tj. skup svih prvih komponenti parova iz f. Elementi domena se nazivaju originali.

Kodomen (skup vrednosti) funkcije f je $\mathcal{K}(f) = \{y \mid \exists x, (x, y) \in f\}$, tj. skup svih drugih komponenti parova iz f. Elementi kodomena se nazivaju slike.

Funkcija f iz skupa A u skup B, u oznaci $f : A \longrightarrow B$, je ona funkcija kod koje je $A = \mathcal{D}(f)$, a $\mathcal{K}(f) \subseteq B$, tj. ona funkcija kod koje je skup svih prvih komponenti tačno skup A, a skup svih drugih komponenti je podskup skupa B.



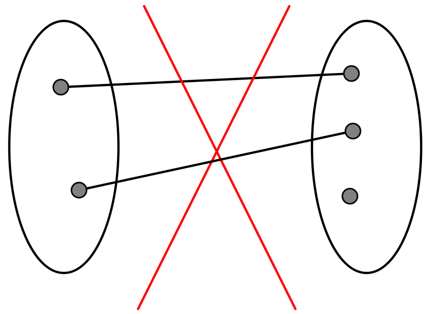
Primer: Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b\}$.

- $f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$ jeste $f : A \longrightarrow B$;
- $f_2 = \{(1, a), (2, b)\}$ jeste funkcija ali nije $f : A \longrightarrow B$ jer elemenat $3 \in A$ nema sliku;
- $f_3 = \{(1, a), (1, b), (2, a), (3, b)\}$ nije funkcija jer se elemenat $1 \in A$ preslika u dve slike, u a i u b. Čim nije funkcija ne može biti ni $f : A \longrightarrow B$.

Funkcija $f : A \longrightarrow B$ je **sirjektivna, ("na")**, što se označava sa $f : A \overset{\text{"}na\text{"}}{\longrightarrow} B$, ako je $\mathcal{K}(f) = B$, tj. ako se svaki elemenat skupa B pojavljuje bar jednom kao druga komponenta u f.

Dakle,

$$f : A \overset{\text{"}na\text{"}}{\longrightarrow} B \text{ ako } (\forall y \in B)\,(\exists x \in A)\, y = f(x).$$



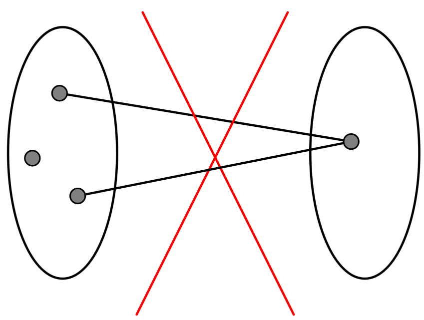
Napomena: Da bi se ispitivala sirjektivnost funkcije nije dovoljno da funkcija bude samo funkcija, neophodno je da bude funkcija skupa A u skup B.

Primer: Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b\}$.

- $f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$ jeste $f : A \overset{"na"}{\longrightarrow} B$;
- $f_2 = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$ jeste $f : A \longrightarrow B$, ali nije $f : A \overset{"na"}{\longrightarrow} B$ jer se nijedan elemenat skupa A ne preslika u elemenat $b \in B$;
- $f_3 = \{(1, a), (2, a)\}$ jeste funkcija, ali nije $f : A \longrightarrow B$, pa ne može biti ni $f : A \overset{"na"}{\longrightarrow} B$.

Funkcija f je **injektivna ("1-1")** ako u f ne postoje dva različita uređena para sa jednakim drugim komponentama. Dakle,

$$f \text{ je injektivna funkcija ako } (\forall x, y \in \mathcal{D}(f))\,(f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y)\,.$$



Napomena: Da bi se ispitivala injektivnost funkcije dovoljno je da funkcija bude samo funkcija. Injektivnost se može ispitivati za bilo kakvu funkciju, a može i za funkciju skupa A u skup B.

Injektivna funkcija skupa A u skup B se označava se $f : A \overset{"1-1"}{\longrightarrow} B$

Primer: Neka je $A = \{1, 2\}$ i $B = \{a, b, c\}$.

- $f_1 = \{(1, a), (2, b)\}$ jeste $f : A \overset{"1-1"}{\longrightarrow} B$;
- $f_2 = \{(1, a), (2, a)\}$ jeste $f : A \longrightarrow B$, ali nije $f : A \overset{"1-1"}{\longrightarrow} B$ jer se oba elemenat skupa A preslikaju u elemenat $a \in B$;
- $f_3 = \{(1, a)\}$ jeste funkcija i jeste "1-1" iako nije $f : A \longrightarrow B$.

Funkcija f je **bijektivna** ako je u isto vreme sirjektivna i injektivna. Bijektivna može biti samo funkcija skupa A u skup B i tada se ona označava se $f : A \underset{"na"}{\overset{"1-1"}{\longrightarrow}} B$.

Primer: Neka je , $A = \{1, 2, 3\}$ *i* $B = \{a, b, c\}$.

- $f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ jeste $f : A \underset{"na"}{\overset{"1-1"}{\longrightarrow}} B$;

- $f_2 = \{(1,a),(2,a),(3,b)\}$ jeste $f : A \longrightarrow B$, ali nije $f : A \underset{"na"}{\overset{"1-1"}{\longrightarrow}} B$. jer nije injektivna pošto se elementi 1 i 2 preslikaju u isti elemenat a;
- $f_3 = \{(1,a)\}$ jeste funkcija ali nije bijekcija jer nije $f : A \longrightarrow B$.

Identička funkcija $i_A : A \longrightarrow A$ je definisana sa $i_A(x) = x$.

Primer: Dati su skupovi $A = \{1,2,3,4,5\}$ i $B = \{a,b,c\}$. Proveriti koje od sledećih relacija su funkcije skupa A u skup B, i ispitati sirjektivnost i injektivnost.

$f_1 = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,a),(5,c)\}$;

$f_2 = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,a),(5,c),(1,c)\}$;

$f_3 = \{(1,a),(2,a),(3,a),(4,a),(5,a)\}$;

$f_4 = \{(1,c),(2,b),(3,b),(4,c),(5,a)\}$;

$f_5 = \{(1,a),(2,b),(4,c)\}$.

Ako je inverzna relacija f^{-1} funkcije f takođe funkcija onda je f^{-1} **inverzna funkcija** funkcije f.
Napomena: Inverzna funkcija se definiše za bilo koju funkciju, ne mora biti funkcija skupa A u skup B.

Primer: Neka je $A = \{1,2,3\}$, a $B = \{x,y,z\}$.

- Za funkciju $f_1 = \{(1,x),(2,y),(3,z)\}$ inverzna funkcija je $f^{-1} = \{(x,1),(y,2),(z,3)\}$.
- Funkcija $f_2 = \{(1,x),(2,x),(3,x)\}$ nema inverznu funkciju jer inverzna relacije ove funkcije nije funkcija.

Inverzna funkcija funkcije f postoji akko je funkcija f injektivna. Za funkciju $f : A \longrightarrow B$ postoji inverzna funkcija $f : B \longrightarrow A$ akko je funkcija f bijektivna.

Neka su A, B i C neprazni skupovi i neka su $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ date funkcije. Funkcija $g \circ f : A \longrightarrow C$ definisana sa $(\forall x \in A)\,(g \circ f)(x) = g(f(x))$ zove se **kompozicija** funkcija f i g.

Kompozicija injektivnih funkcija je injektivna funkcija.

Kompozicija sirjektivnih funkcija $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ je sirjektivna funkcija .

Kompozicija bijektivnih funkcija je bijektivna funkcija.

Neka je funkcija $f : A \longrightarrow B$ bijektivna i neka je f^{-1} njena inverzna funkcija, tada je $(\forall x \in A)\, f^{-1}(f(x)) = x$.

Kompozicija funkcija koje preslikavaju skup A u samog sebe je asocijativna operacija.

Načini zadavanja funkcija: Neka je na primer $A = \{1,2,3,4,5\}$ i $B = \mathbb{N}$. Jedna ista funkcija $f : A \longrightarrow B$ može biti zadata na više načina:

- nabrajanjem elemenata $f = \{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),(5,25)\}$,
- opisno pomoću drugih poznatih relacija i/ili operacija $f = \{(x,x^2) \mid x \in A\}$, tj. $f(x) = x^2$, $x \in A$,
- $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix}$,
- grafički.

Relacija koja je zadata grafički je funkcija akko svaka prava paralelna sa y-osom seče dati grafik u najviše jednoj tački.

Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je injektivna akko svaka prava paralelna sa x-osom ima najviše jedan presek sa grafikom funkcije.

Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je sirjektivna akko svaka prava paralelna sa x-osom ima bar jedan presek sa grafikom funkcije.

Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je bijektivna akko svaka prava paralelna sa x-osom ima tačno jedan presek sa grafikom funkcije.