SLOBODNI VEKTORI

Duž AB je skup tačaka koji čine tačke A i B i sve tačke koje se nalaze između tih tačaka na pravoj određenoj sa A i B. Duž čiji se krajevi poklapaju naziva se nulta duž.

Orijentisana duž je duž kod koje je određeno šta je njena početna a šta krajnja tačka. Orijentacija nulte duži se ne definiše.

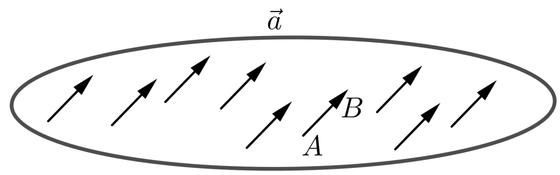
Slobodni nenula vektor je skup svih orijentisanih duži koje su međusobno podudarne, paralelne i isto orijentisane. Svaka od tih orijentisanih duži jeste jedan predstavnik tog slobodnog vektora i zove se **vektor**.

Slobodni nula vektor je skup svih nultih duži.

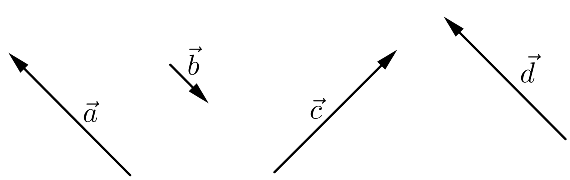
Slobodni vektori se obeležavaju sa $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ...

Vektor čija je početna tačka A, a krajnja B obeležava se sa $\overrightarrow{AB}$.

Kako je svaki slobodni vektor jednoznačno određen sa bilo kojim svojim predstavnikom, tj. vektorom, uobičajeno je da se poistovete pojam slobodnog vektora i vektora i piše se $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.



Svaki vektror $\overrightarrow{AB}$, $A \neq B$ je određen svojim pravcem, smerom i intenzitetom.
Pravac vektora $\overrightarrow{AB}$, $A \neq B$ je određen pravom na kojoj leži taj vektor.
Intenzitet vektora $\overrightarrow{AB}$ je dužina duži AB i označava se sa $|\overrightarrow{AB}|$.
Smer vektora $\overrightarrow{AB}$, $A \neq B$ je od tačke A do tačke B.
Vektor čiji je intenzitet jednak jedan naziva se **jedinični vektor**.
Ako se $A \equiv B$, onda je $\overrightarrow{AB}$ nula vektor, u oznaci $\vec{0}$ ili samo 0. Intenzitet nula vektora je 0, a pravac i smer se ne definišu.
Nenula vektori su jednaki ako su im jednaki pravac, smer i intenzitet.
Primer:



Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ imaju isti pravac, a suprotan smer. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{d}$ imaju isti pravac, smer i intenzitet, tj. $\vec{a} = \vec{d}$. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{c}$ imaju isti intenzitet, ali različit pravac.

Sabiranje vektora

Za bilo koje tri tačke važi:

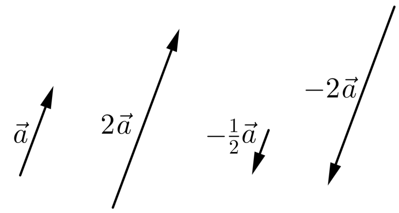
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Proizvod vektora i skalara

Množenjem vektora $\vec{a} \neq 0$ i skalara $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dobija se vektor $\alpha\vec{a}$ čiji je:

(1) pravac isti kao pravac vektora $\vec{a}$,
  (a) intezitet $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$,
  (b) smer isti kao smer vektora $\vec{a}$ ako je $\alpha > 0$, a suprotan ako je $\alpha < 0$.

Ako je $\alpha = 0$ ili $\vec{a} = 0$, onda je $\alpha\vec{a} = 0$.



Suprotan vektor vektoru $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ je vektor $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$. Suprotni vektori imaju isti pravac i intenzitet, a suprotan smer.

Jedinični vektor koji odgovara vektoru $\vec{a}$, dobija se kada se vektor $\vec{a}$ pomnoži sa recipročnom vrednošću svog intenziteta, tj. jedinični vektor koji odgovara vektoru $\vec{a}$ je vektor $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$.

Za vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ i skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ važe sledeće osobine:

- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$,
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$,
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,

Dakle, $(V, +)$, gde je V skup svih slobodnih vektora, je Abelova grupa.

- $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$,
- $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$,
- $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$,
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Za dva nenula vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kaže se da su **kolinearni** akko imaju isti pravac, odnosno ako pripadaju istoj pravoj ili dvema paralelnim pravama.
Za kolinearne nenula vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ postoji realni broj α različit od nule tako da je $\vec{a} = \alpha\vec{b}$.
Za dva nenula vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kaže se da su **ortogonalni** (normalni) akko je ugao između njih prav.
Nula vektor je po definiciji kolinearan sa svakim vektorom i normalan je na svaki vektor.
Za tri nenula vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ kaže se da su **komplanarni** akko su paralelni sa jednom ravni.
Nula vektor je po definiciji komplanaran sa svakim skupom komplanarnih vektora.
Ugao između vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ je ugao $\sphericalangle AOB$, O je koordinatni početak, pri čemu se dogovorno uzima da je $\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \in [0, \pi]$.

Skalarni proizvod vektora

Skalarni proizvod nenula vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a} \cdot \vec{b}$, je skalar (broj) definisan sa

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Kada je $\vec{a} = 0$ ili $\vec{b} = 0$, tada je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Osobine skalarnog proizvoda:

- $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$,
- $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$,
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b} = 0$,
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$,
- $(\forall\alpha \in \mathbb{R})\ \alpha(\vec{a}\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\alpha\vec{b})$,

Projekcija vektora

Projekcija vektora $\vec{a} \neq 0$ na pravac vektora $\vec{b} \neq 0$, u oznaci $\mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$, je vektor koji ima isti pravac kao vektor $\vec{b}$, isti smer kao $\vec{b}$ ako je ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ oštar, a suprotan smer u odnosu na $\vec{b}$ ako je ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tup, a intenzitet mu se dobija na sledeći način:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})\right|}{|\vec{a}|} \Longrightarrow \left|\mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})\right| = |\vec{a}| \cos\varphi = |\vec{a}| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \left|\vec{b}\right|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|},$$

pa je

$$\mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \left|\mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})\right| \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} \vec{b}.$$

Vektorski proizvod

Vektorski proizvod nenula vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a}\times\vec{b}$, je vektor čiji je:

(1) pravac normalan na pravce vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj. $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$ i $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$.
(2) intezitet $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})|$,
(3) smer takav da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ tim redom čine desni triedar.

Kada je $\vec{a}=0$ ili $\vec{b}=0$, tada je $\vec{a}\times\vec{b}=0$.

Osobine vektorskog proizvoda:

- $\vec{a}\times\vec{a}=0$,
- $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$,
- $(\forall\alpha\in\mathbb{R})\ \alpha(\vec{a}\times\vec{b})=(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\alpha\vec{b})$,
- $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0$,
- $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$,
- Intenzitet vektorskog proizvoda dva nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak je površini paralelograma konstruisanog nad tim vektorima, tj. $P=|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Mešoviti proizvod

Mešoviti proizvod nenula vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, u oznaci $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ je skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}\times\vec{c}$.

Osobine mešovitog proizvoda:

- $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}(\vec{c}\times\vec{a})$,
- Nenula vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su komplanarni akko je njihov mešoviti proizvod jednak nuli, tj. $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})=0$.
- Apsolutna vrednost mešovitog proizvoda tri nekomplanarna vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, jednaka je zapremini paralelopipeda konstruisanog nad tim vektorima, tj. $V=|\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})|$.

Vektori u koordinatnom sistemu

Dekartov (pravougli) koordinatni sistem u prostoru je određen:

- ako su date tri prave koje se obično nazivaju x, y i z i svake dve se seku pod pravim uglom u tački $O(0,0,0)$;
- na svakoj od datih pravih izabran je jedan smer i nazvan pozitivan;
- na pozitivnim smeroima pravih x, y i $z$su izabrane tačke $E_1(1,0,0)$, $E_2(0,1,0)$ i $E_3(0,0,1)$ redom i uvedene oznake $\overrightarrow{OE_1}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OE_2}=\vec{j}$ i $\overrightarrow{OE_3}=\vec{k}$.

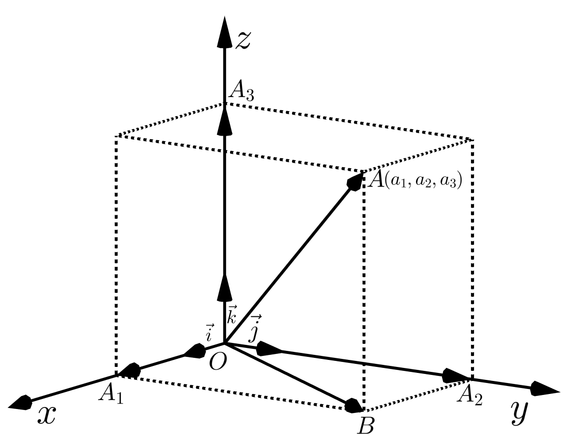
Prava x se naziva x-osa ili apscisa.

Prava y se naziva y-osa ili oordinata.

Prava z se naziva z-osa ili aplikata.

Tačka O se naziva koordinatni početak.

Vektori $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sa koordinatnim početkom O, čine desni sistem vektora ili desni triedar, što znači da rotacija vektora $\vec{i}$, ka vektoru $\vec{j}$, oko tačke O, u ravni određenoj vektorima $\vec{i}$ i $\vec{j}$, ima najkraći put u smeru suprotnom kretanju kazaljke na satu, gledano sa krajnje tačke vektora $\vec{k}$.



Svakoj tački $A(a_1,a_2,a_3)$ u prostoru odgovara vektor $\overrightarrow{OA}$ čija je početna tačka u koordinatnom početku O, a krajnja u tački $A(a_1,a_2,a_3)$ i koji senaziva **vektor položaja tačke** A.

Vektor $\overrightarrow{OA}$ može se razložiti kao zbir tri vektora (slika iznad):

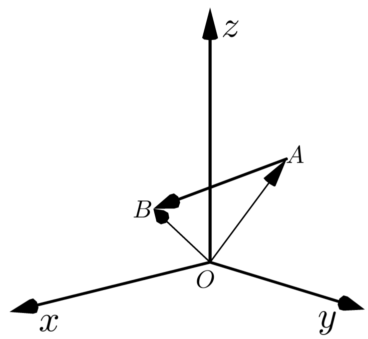
$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3},$$

gde je tačka $B(a_1, a_2, 0)$, a tačke A_1, A_2 i A_3 su projekcije tačke A na x-osu, y-osu i z-osu, redom, tj. $A_1 = (a_1, 0, 0)$, $A_2 = (0, a_2, 0)$ i $A_3 = (0, 0, a_3)$. Kako je $\overrightarrow{OA_1} = a_1\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = a_2\vec{j}$ i $\overrightarrow{OA_3} = a_3\vec{k}$, sledi da je

$$\overrightarrow{OA} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}.$$

Umesto $\overrightarrow{OA} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ kraće se piše $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$.
Neka su $A(a_1, a_2, a_3)$ i $B(b_1, b_2, b_3)$ dve tačke u prostoru čiji su vektori položaja $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$, redom. Tada je

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$



Neka je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, tada:

- $\vec{a} = \vec{b}$ akko je $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ i $a_3 = b_3$,
- $\alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$,
- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$,
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$,
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$,
-
$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k},\end{aligned}$$
- $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$