Grupe - vežbe

October 25, 2021

1. Da li se date nepotpune Kejlijeve tablice mogu dopuniti do tablica grupovnih operacija?

(a)

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a		
b	b	a	a

(b)

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a			e
b	b	e		
c	c		e	

а)

- Врста од е је једнака граничној па мора бити и колона.
- Да би сваки елемент имао инверзни у таблици се неутрални ел. мора појавити у свакој врсти и свакој колони тачно једном (симетрично постављен у односу на главну дијагоналу) што овде није случај јер се у врсти елемента b не појављује е.

⇒ а) није могуће допунити до таблице груповне операције.

b) е је неутрални али није симетрично распоређен у односу на главну дијагоналу па нема сваки елемент инверзни

⇒ b) није могуће допунити ...

(a) Kako u svakoj grupi važi zakon kancelacije u tablici grupovne operacije svaki elemenat se mora pojaviti u svakoj vrsti i koloni tačno jednom. Kako se u ovoj tablici elemenat a pojavljuje dva puta u poslednjoj vrsti ova tablica se ne može dopuniti do grupovne operacije.
$b * a = a = b * b$, a $a \neq b$ pa ne važi zakon kancelacije koji važi u svakoj grupi.

(b) Kako je kolona elementa e jednaka graničnoj koloni elemenat e mora biti neutralni elemenat, pa će i njegova vrsta biti jednaka graničnoj vrsti. Dalje, pošto je e neutralni elemenat, da bi svaki elemenat imao inverzni elemenat, on se mora pojaviti u svakoj vrsti i koloni tačno jednom, simetrično raspoređen u odnosu na glavnu dijagonalu, što u ovom slučaju ne može da se desi jer je elemenat e već dat u tablici tako da dati uslov nije zadovoljen. Dakle, ni ovo ne može biti tablica grupovne operacije.

2. Na skupu $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ definisana je operacija $*$ sa

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \boxed{a * b = abk,}$$

gde je $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ data konstanta. Ispitati da li je $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$ Abelova grupa.

1, ZATVORENOST: $\forall x, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ x*y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$?

$x*y = xyk \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ✓

2, ASOCIJATIVNOS: $\forall x,y,z \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ x*(y*z) = (x*y)*z$?

$x*(y*z) = x*(yzk) = xyzkk = xyzk^2$ ✓

$(x*y)*z = xyk*z = xykzk = xyzk^2$

3, LEVI NEUTRALNI EL. $\exists e \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ e*x = x$?

$x \neq 0$

$e*x = x$

$e*k = \cancel{x}$ $/ : x \neq 0$

$e \cdot k = 1$

$\boxed{e = \frac{1}{k}} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

4, LEVI INVERZNI EL.

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ \exists x' \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ x'*x = \frac{1}{k}$?

$x' * x = \frac{1}{k}$

$x'xk = \frac{1}{k}$ $\quad / k \neq 0$, $x \neq 0$

$\boxed{x' = \frac{1}{xk^2}} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

5, KOMUTATIVNOST

$\forall x,y \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ x*y = y*x$?

$x*y = xyk = yxk = y*x$

$\Rightarrow (\mathbb{R}\setminus\{0\}, *)$ JESTE ABELOVA GRUPA ✓

3. Na skupu $G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q},\ b \neq 0\}$ definisana je operacija $*$ sa

$$\forall\, (a, b), (c, d) \in G,\ \boxed{(a, b) * (c, d) = (ad - d + c, bd)}.$$

Ispitati da li je $(G, *)$ grupa, i sa li je komutativna.

1, ZATVORENOST : $\forall (x,y),(z,u) \in G$, $(x,y) * (z,u) \in G$?

$(x,y) * (z,u) = (xu - u + z, yu) \leftarrow$ DA LI OVO PRIPADA G

$(x,y),(z,u) \in G \Rightarrow \underbrace{x,y,z,u \in \mathbb{Q}}_{xu-u+z,\ yu \in \mathbb{Q}} \wedge y \neq 0 \wedge u \neq 0$

$\wedge\ yu \neq 0$

$\Rightarrow (x,y) * (z,u) \in G$

2, ASOCIJATIVNOST : $\forall (x,y),(z,u),(t,p) \in G$, $(x,y) * ((z,u) * (t,p)) = ((x,y) * (z,u)) * (t,p)$?

$(x,y) * ((z,u) * (t,p)) = (x,y) * (zp - p + t, up) = (xup - up + zp - p + t, yup)$

$((x,y) * (z,u)) * (t,p) = (xu - u + z, yu) * (t,p) = ((xu - u + z)p - p + t, yup)$

$= (xup - up + zp - p + t, yup)$ ✓

$G = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}, b \neq 0\}$

$(a,b) * (c,d) = (ad - d + c, bd)$

3, LEVI NEUTRALNI EL.

$\exists (e_1,e_2) \in G, \forall (x,y) \in G, \underline{(e_1,e_2) * (x,y) = (x,y)}$?

$x,y \in \mathbb{Q}$
$y \neq 0$

$(e_1,e_2) * (x,y) = (x,y)$

$(e_1 y - y + x, e_2 y) = (x,y)$

$e_1 y - y + \cancel{x} = \cancel{x}, \quad e_2 y = y \mid y \neq 0$

$e_1 y = y \mid y \neq 0 \qquad e_2 = 1$

$e_1 = 1$

$(e_1, e_2) = \boxed{(1,1) \in G}$

4, INVERZNI EL,

$\forall (x,y) \in G, \exists (x',y') \in G, \underline{(x',y') * (x,y) = (1,1)}$?

$x,y \in \mathbb{Q}$
$y \neq 0$

$(x',y') * (x,y) = (1,1)$

$(x'y - y + x, y'y) = (1,1)$

$x'y - y + x = 1, \quad y'y = 1 \mid : y \neq 0$

$x'y = 1 - x + y \mid : y \neq 0 \qquad y' = \frac{1}{y}$

$x' = \frac{1-x+y}{y}$

$(x',y') = \left(\frac{1-x+y}{y}, \frac{1}{y}\right) \in G$

$\Rightarrow (G,*)$ JESTE GRUPA

5, KOMUTATIVNOST $\forall (x,y),(z,u) \in G, (x,y) * (z,u) = (z,u) * (x,y)$?

$(x,y) * (z,u) = (\underline{xu - u + z}, yu)$

$(z,u) * (x,y) = (\underline{zy - y + x}, uy)$ $\neq$

KOMUTATIVNOST NE VAŽI

4. Date su funkcije $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ i $h = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$. Ispitati da li je $(\{f, g, h\}, \circ)$ Abelova grupa.

$\circ$	f	g	h
f	g	h	f
g	h	f	g
h	f	g	h

$$f \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = g$$

$$\boxed{f \circ g} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} = h$$

$$f \circ h = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} = f$$

$$\boxed{g \circ f} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} = h$$

$$g \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} = f$$

$$g \circ h = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = g$$

$$h \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} = f$$

$$h \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = g$$

$$\boxed{h \circ h} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} = h$$

ZATVORENOST: važi jer se u tablici pojavljuju samo elementi skupa $\{f, g, h\}$;
ASOCIJATIVNOST: kompozicija funkcija koje preslikavaju skup u samog sebe je uvek asocijativna;
NEUTRALNI ELEMENT: je funkcija h jer su njena vrsta i kolona jednake graničnoj vrsti i koloni;
INVERZNI ELEMENT: kako se neutralni element h nalazi u svakoj vrsti i koloni, tačno jednom, simetrično raspoređen u odnosu na glavnu dijagonalu svaki element ima inverzni.
KOMUTATIVNOST: važi jer je tablica simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu.
Dakle, $(\{f, g, h\}, \circ)$ jeste Abelova grupa.

5. Date su funkcije $\overbrace{f(x) = x}^{id}$, $g(x) = -x$, $h(x) = \dfrac{1}{x}$ i $u(x) = -\dfrac{1}{x}$.
Ispitati da li je $(\{f, g, h, u\}, \circ)$ Abelova grupa.

$\circ$	f	g	h	u
f	f	g	h	u
g	g	f	u	h
h	h	u	f	g
u	u	h	g	f

$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x) = x = f(x)$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(-x) = -x = g(x)$

$f \circ h(x) = f(h(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} = h(x)$

$f \circ u(x) = f(u(x)) = u(x)$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x) = -x = g(x)$

$g \circ g(x) = g(g(x)) = g(-x) = -(-x) = x = f(x)$

$g \circ h(x) = g(h(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} = u(x)$

$g \circ u(x) = g(u(x)) = g\left(-\frac{1}{x}\right) = -\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} = h(x)$

$h \circ f(x) = h(f(x)) = h(x)$

$h \circ g(x) = h(g(x)) = h(-x) = -\frac{1}{x} = u(x)$

$h(h(x)) = h\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = f(x)$

$h(u(x)) = h\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{-\frac{1}{x}} = -x = g(x)$

$u(f(x)) = u(x)$

$u(g(x)) = u(-x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x} = h(x)$

$u(h(x)) = u\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{\frac{1}{x}} = -x = g(x)$

$u(u(x)) = u\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{-\frac{1}{x}} = x = f(x)$

ZATVORENOST: važi jer se u tablici pojavljuju samo elementi skupa $\{f, g, h, u\}$;
ASOCIJATIVNOST: kompozicija funkcija koje preslikavaju skup u samog sebe je uvek asocijativna;
NEUTRALNI ELEMENT: je funkcija f jer su njena vrsta i kolona jednake graničnoj vrsti i koloni;
INVERZNI ELEMENT: svaki elemenat je sam sebi inverzan jer se neutralni element nalazi u svakoj vrsti i koloni tačno jednom i to baš na glavnoj dijagonalič
KOMUTATIVNOST: važi jer je tablica simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu.
Dakle, $(\{f, g, h, u\}, \circ)$ jeste Abelova grupa.

6. Ispitati da li je funkcija $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definisana se

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \boxed{f(k) = 3k,}$$

homomorfizam grupa $(\mathbb{Z}, +)$ i $(\{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}, +)$. Da li je izomorfizam?

1) $(\mathbb{Z},+)$ jeste grupa
2) $(\{3k \mid k\in\mathbb{Z}\},+)$ jeste grupa } ranije dokazali

3) HOMOMORFIZAM $\forall x,y\in\mathbb{Z},\ f(x+y)=f(x)+f(y)$?

$f(x+y)=3(x+y)=3x+3y=f(x)+f(y)$ ✓

4) IZOMORFIZAM = HOMOMORFIZAM + BIJEKCIJA

„1-1": $f(x)=f(y) \Rightarrow \cancel{3}x=\cancel{3}y$
$\Rightarrow x=y$ ✓

„na": $\forall y\in\{3k\mid k\in\mathbb{Z}\},\ \exists x\in\mathbb{Z},\ f(x)=y$?

$f(x)=y$
$3x=y$
$x=\frac{y}{3}\in\mathbb{Z}$? ✓

DA LI JE $x=\frac{y}{3}$ CEO BROJ ?

$\Rightarrow y=3k,\ k\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{y}{3}=\frac{3k}{3}=k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow f$ JESTE IZOMORFIZAM

7. Ispitati da li je funkcija $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ definisana se

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \ \boxed{f(k) = (0, k)},$$

homomorfizam grupa $(\mathbb{Z}, +)$ i $(\mathbb{Z}^2, +)$. Da li je izomorfizam?

1, $(\mathbb{Z},+)$ – jeste grupa

2, $(\mathbb{Z}^2,+)$ – jeste grupa (pokazati za vežbu $\forall (x,y),(z,u) \in \mathbb{Z}^2$, $(x,y)+(z,u) = (x+z, y+u)$)

3, HOMOMORFIZAM $\forall x,y \in \mathbb{Z}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$?

$f(x+y) = (0, x+y) = (0,x) + (0,y) = f(x) + f(y)$ ✓

4) BIJEKCIJA:

„1-1": $\underline{f(x) = f(y)} \Rightarrow (0,x) = (0,y)$ ✓

$\Rightarrow 0 = 0 \wedge \underline{x = y}$ ✓

„na": $\underline{\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2}$, $\exists k \in \mathbb{Z}$, $\underline{f(k) = (x,y)}$?

$f(k) = (x,y)$

$(0,k) = (x,y)$

$x = 0$, $\underline{y = k}$ ✓

$(1,2)$? $f(\underline{?}) = (\underline{1},2)$

Ништа се не пресликало у, рецимо (1,2) па није „на".

$\Rightarrow f$ NIJE IZOMORFIZAM

ZA VEŽBU IZ SKRIPTE:
Zadatak 6.3 (bez c i g), 6.4, 6.6, 6.7, 6.10 (bez onog dela zadatka u kom se traži maksimalan podskup), 6.13