Determinante

November 30, 2021

Determinanta reda n, $n \in \mathbb{N}$ je kvadratna šema koja se izračunava po određenim pravilima.

| |

[ ]

KOLONE

VRSTE

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

a_{ij}

i -TOJ VRSTI

j -TOJ KOLONI

a_{23}

2 VRSTA

3 KOLONA

$\longrightarrow$ vrste, $\downarrow$ kolone, $\searrow$ glavna dijagonala, $\nearrow$ sporedna dijagonala.

Horizontalni redovi u determinanti se zovu vrste, a vertikalni kolone.

Element a_{ij} je element koji se nalazi u i-toj vrsti i j-toj koloni.

Dve determinante su jednake ako imaju jednaku brojnu vrednost.

Brojna vrednost determinante reda jedan jednaka je njenom jedinom elementu, tj.

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

$|2| = 2$

$|-2| = -2$

↳ NIJE APSOLUTNA VREDNOST NEGO DETERMINANTU

Brojna vrednost determinante reda dva određuje se tako što se od proizvoda elemenata na glavnoj dijagonali oduzme proizvod elemenata na sporednoj dijagonali, tj.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-5) - 2\cdot 3 = -5 - 6 = -11$$

Brojna vrednost determinante reda tri može se odrediti na više načina. Jedan od njih je Sarusovo pravilo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{matrix} =$$

$$= 1\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot 3\cdot(-2) + (-1)\cdot 0\cdot 0$$
$$- (-2)\cdot 2\cdot(-1) - 0\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 0\cdot 3$$

$$= 2 - 12 - 4 = -14$$

Primer:

- $|-5| = -5$.
- $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$
- $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -6 - (-7) = 1.$
- $\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha^3 \end{vmatrix} = \alpha^3 - \alpha^3 = 0.$
- $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

- $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix} = 1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8$$
$$-(7\cdot 5\cdot 3 + 8\cdot 6\cdot 1 + 9\cdot 4\cdot 2)$$
$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 225 - 225 = 0.$$

- $$\begin{vmatrix} 1 & i & -2 \\ 3 & 0 & i \\ 4 & 2 & 2i \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & i \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{matrix} = 1\cdot 0\cdot 2i + i\cdot i\cdot 4 + (-2)\cdot 3\cdot 2$$
$$-4\cdot 0\cdot(-2) - 2\cdot i\cdot 1 - 2i\cdot 3\cdot i$$
$$= 0 - 4 - 12 - 0 - 2i + 6 = -10 - 2i.$$

Minor M_{ij} elementa a_{ij} determinante D reda n, $n \in \mathbb{N}$ je determinanta reda $n-1$ koja se dobija od D izostavljanjem i-te vrste i j-te kolone, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Kofaktor A_{ij} elementa a_{ij} je

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Primer: Za $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ je

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6$$

a

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 6.$$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 12 = -6$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3$

$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -(-6) = 6$

$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = -3$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 21 = -12$

Svaka determinanta reda n, $n \in \mathbb{N}$ može se predstaviti kao zbir n determinanti reda $n-1$ na sledeći način:

1. razvojem po i-toj vrsti, $i \in \{1, 2, ..., n\}$:

$$D \; \cancel{\det(A)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in};$$

$$a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + \cdots + a_{34}A_{34}$$

2. razvojem po j-toj koloni, $j \in \{1, 2, ..., n\}$:

$$a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + \cdots + a_{n2}A_{n2}$$

$$D \; \cancel{\det(A)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

PO 3 VRSTI

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{-3}_{a_{31}} \cdot \underbrace{(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}_{A_{31}} + \underbrace{(-2)}_{a_{32}} \underbrace{(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{A_{32}} + \underbrace{0}_{a_{33}} \cdot \underbrace{(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}_{A_{33}}$$

$$= -3(-1) + (-2)(-1) \cdot 1 + 0 = 3 + 2 = 5$$

PO 2 KOLONI

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{-1}_{a_{12}} \underbrace{(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}_{A_{12}} + \underbrace{3}_{a_{22}} \underbrace{(-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}_{A_{22}} + \underbrace{(-2)}_{a_{32}} \cdot \underbrace{(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{A_{32}}$$

$$= -1 \cdot (-1) \, 3 + 3 \cdot 0 + (-2)(-1) \cdot 1 = 3 + 0 + 2 = 5$$

Primer:

Razvoj determinante reda 3 po prvoj vrsti:

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \overbrace{(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}^{A_{11}}
$$

$$
+ \overbrace{(-1)^{1+2} \cdot a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}^{A_{12}} + a_{13} \cdot \overbrace{(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}^{A_{13}}
$$

$$
= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} .
$$

Razvoj determinante reda 3 po trećoj koloni:

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
= a_{13}\overbrace{(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}^{A_{13}}
$$

$$
+ \overbrace{(-1)^{2+3}}^{A_{23}} a_{23} \overbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}
+ (-1)^{3+3} a_{33} \overbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}^{A_{33}}
$$

$$
= a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.
$$

Primer:

Vrednost determinante $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 8 \\ 0 & 6 & 10 \end{vmatrix}$ izračunata

- razvijanjem po drugoj vrsti je

$$= 5\,(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} + 8\cdot(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & \boxed{8} \\ 0 & 6 & 10 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -5 \cdot (30 - 0) - (-20 - 0) - 8 \cdot (-12 - 0)$$

$$= -150 + 20 + 96 = -34.$$

- razvijanjem po trećoj koloni je

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 8 \\ 0 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \cdot \overset{0}{\cancel{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}}} - 8 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 10 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 8 \cdot (-12 - 0) + 10 \cdot (2 - 15) = 96 - 130 = -34.$$

Osobine determinanti

1. Vrednost determinante se ne menja ako sve vrste i kolone zamene mesta.
2. Ako elementi jedne vrste (kolone) zamene mesta sa elementima neke druge vrste (kolone) determinanta menja znak.
3. Determinanta se množi nekim brojem (skalarom) tako što se svi elementi samo jedne proizvoljne vrste (kolone) pomnože tim brojem.
4. Vrednost determinante je jednaka nuli ako su bilo koje dve njene vrste (kolone) jednake.
5. Vrednost determinante je jednaka nuli ako su elementi jedne vrste (kolone) proporcionalni odgovarajućim elementima neke druge vrste (kolone).
6. Vrednost determinante se ne menja ako se elementima jedne vrste (kolone) dodaju odgovarajući elementi neke druge vrste (kolone) prethodno pomnoženi nekim brojem.
7. Vrednost determinante čiji su svi elementi ispod (iznad) glavne dijagonale jednaki nuli, jednaka je proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali. $\begin{vmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{vmatrix} = 1\cdot4\cdot6 = 24$

$$\boxed{\begin{vmatrix}1&3\\5&7\end{vmatrix} = 7-15 = -8}$$

$$\begin{vmatrix}1&5\\3&7\end{vmatrix} = 7-15 = -8$$

$$\begin{vmatrix}5&7\\1&3\end{vmatrix} = 15-7 = 8$$

$$2\begin{vmatrix}1&3\\5&7\end{vmatrix} = 2\cdot(-8) = -16$$

$$2\begin{vmatrix}1&3\\5&7\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2&6\\5&7\end{vmatrix} = 14-30 = -16$$

$$2\begin{vmatrix}1&3\\5&7\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&6\\5&14\end{vmatrix} = 14-30 = -16$$

$$\begin{vmatrix}2&6\\3&7\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}1&3\\3&7\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}2&6\\3&9\end{vmatrix} = 2\cdot3\begin{vmatrix}1&3\\1&3\end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix}3&5\\9&15\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3&5\\3\cdot3&3\cdot5\end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix}1&3\\5&7\end{vmatrix}\cdot(-5) = \begin{vmatrix}1&3\\0&-8\end{vmatrix} = -8$$

$$\begin{vmatrix}1&3\\5&7\end{vmatrix}\cdot(-3) = \begin{vmatrix}1&0\\5&-8\end{vmatrix} = -8$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 9 & 3 & 5 \end{vmatrix} \overset{-3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -7(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Primer:

- $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot 12 = 144,$$

jer su elementi iznad glavne dijagonale jednaki 0, pa se vrednost determinante izračunava kao proizvod dijagonalnih elemenata.

- $$\begin{array}{ccc} & & \cdot 4 \;\; \cdot 5 \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 20 \\ 5 & 10 & 15 \end{vmatrix} = 0,$$

jer su prva i treća vsta proporcionalne (elementi treće vrste su 5 puta veći od odgovarajućih elemenata prve vrste).

$$= 4 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

- $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \overset{+}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (2-5) = 4 \cdot (-3) = -12.$$

Prva vrsta je dodata trećoj vrsti i zatim je determinanta razvijanjem po trećoj vrsti.