Matrice

December 5, 2021

Matrica A, formata (tipa) $m \times n$, $m, n \in \mathbb{N}$, nad poljem $\mathbb{F} = (F, +, \cdot)$ je "pravougaona šema" elemenata polja $\mathbb{F}$, tj.

KOLONE

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{\underline{\underline{m \times n}}} ,$$

VRSTE

a_{ij} VRSTA KOLONA

pri čemu su a_{ij}, $i \in \{1, 2, ..., m\}, j \in \{1, 2, ..., n\}$ elementi polja $\mathbb{F}$.

Kad god nije naglašeno drugačije, podrazumeva se da je matrica nad poljem realnih brojeva.

Horizontalni redovi u matrici se zovu vrste, a vertikalni kolone. Indeks m predstavlja broj vrsta, a indeks n broj kolona u matrici. Element a_{ij} matrice $[a_{ij}]_{m \times n}$ je element koji se nalazi u i-toj vrsti i j-toj koloni.

Matrice koje imaju isti broj vrsta i kolona (tj. $m = n$), nazivaju se **kvadratne matrice**.

Dve matrice su jednake akko su istog formata i ako su im svi elementi na odgovarajućim pozicijama jednaki.

Matrica čiji su svi elementi jednaki nuli polja $\mathbb{F}$ naziva se **nula matrica** nad poljem $\mathbb{F}$ i označava se $O = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Kvadratna matrica koja na glavnoj dijagonali kao elemente ima jedinice polja $\mathbb{F}$, a na svim ostalim mestima nule polja $\mathbb{F}$ naziva se **jedinična matrica** nad poljem $\mathbb{F}$ i označava sa E ili I.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\Rightarrow a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = 4$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times 2}$$

$$\cancel{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

OVO NIJE JEDINICNA MATRICA

$$E = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Sabiranje matrica** $[a_{ij}]_{m\times n}$ i $[b_{ij}]_{m\times n}$ definiše se sa:

$$[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}.$$

Dakle, matrice se mogu sabirati samo ako su istog formata i to tako što im se saberu elementi na odgovarajućim mestima.

Primer:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{2\times 3} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}}_{2\times 3} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}}_{2\times 3}.$$

Suprotna matrica matrici $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, je matrica $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$-A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Osobine sabiranja matrica:

Za matrice A, B, C i nula matricu O formata $m \times n$ važe sledeće osobine:

$(\mathcal{M}_{m \times n}, +)$ – Abelova grupa

- $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- $A + O = A$,
- $A + (-A) = O$,
- $A + B = B + A$.

Dakle, $(\mathcal{M}_{m\times n}, +)$, gde je $\mathcal{M}_{m\times n}$ skup svih matrica formata $m \times n$, nad poljem $\mathbb{F}$, je komutativna grupa.

• **Množenje matrice** $[a_{ij}]_{m\times n}$ **skalarom** (brojem) α (iz istog polja iz kog su elementi matrice) definiše se sa:

$$\alpha[a_{ij}]_{m\times n} = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}.$$

Dakle, matrica se množi skalarom tako što se svaki njen elemenat pomnoži tim skalarom.

Promer:

$$(-3)\cdot\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 3 \\ 12 & -9 \end{bmatrix}.$$

Osobine množenja matrice skalarom:

Za skalare $\alpha,\ \beta \in F$ i matrice A i B nad poljem $\mathbb{F}$ važe sledeće osobine:

- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$,
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, pri čemu su A i B matrice istog formata,
- $1 \cdot A = A$.

$A_{m\times k} \cdot B_{k\times n} = C_{m\times n}$

- **Proizvod matrica** $[a_{ij}]_{m\times k}$ i $[b_{ij}]_{k\times n}$ definiše se sa:

$$[a_{ij}]_{m\times k}\cdot[b_{ij}]_{k\times n}=[c_{ij}]_{m\times n},$$

gde se svaki element unutar matrice $[c_{ij}]_{m\times n}$ dobija po formuli:

c_{ij}

$$c_{ij}=\sum_{p=1}^{k} a_{ip}b_{pj} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}.$$

Dakle, dve matrice se mogu pomnožiti samo ako je broj kolona prve matrica jednak broju vrsta druge matrice. Rezultat je matrica čiji je broj vrsta isti kao kod prve matrice, a broj kolona isti kao kod druge matrice. Element u i-toj vrsti i j -toj koloni proizvoda dobija se tako što se elementi i te vrste prve matrice pomnože sa odgovarajućim elementima j -te kolone druge matrice i dobijeni proizvodi se saberu.

Primer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -11 \end{bmatrix}_{3\times 3}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+2\cdot(-1)+0\cdot 0 & 1\cdot 0+2\cdot 2+0\cdot 3 \\ 3\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+2\cdot 0 & 3\cdot 0+(-1)2+2\cdot 3 \end{bmatrix}$$

2×2

$$= \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Osobine množenja matrica:

Za skalar $\alpha \in F$ i kvadratne matrice A, B, C reda $n \in \mathbb{N}$, nad poljem $\mathbb{F}$, i jediničnu matricu E reda n, važe sledeće osobine:

- $A(BC) = (AB)C$,
- $\left.\begin{array}{l}(A+B)\,C = AC + BC, \\ A(B+C) = AB + AC,\end{array}\right\}$ distributivnost
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,
- $EA = AE = A$.

$(\mathcal{M}_{n\times n}, \cdot)$ - polugrupa

$(\mathcal{M}_{n\times n}, +)$ - Abelova grupa

$(\mathcal{M}_{n\times n}, +, \cdot)$ je prsten sa jedinicom

Dakle, $(\mathcal{M}_{n\times n}, \cdot)$, gde je $\mathcal{M}_{n\times n}$ skup svih kvadratnih matrica formata n, nad poljem $\mathbb{F}$, je asocijativni grupoid sa neutralnim elementom, a $(\mathcal{M}_{n\times n}, +, \cdot)$, je prsten sa jedinicom.

- Komutativnost ne važi prilikom množenja dve matrice, tj. u opštem slučaju je $AB \neq BA$.

  Primer: Za $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times2}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$ je

  $AB = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}_{2\times2}$, a $BA = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$. Očigledno je $AB \neq BA$.

- Ako je $AB = 0$ ne sledi da je $A = 0$ ili $B = 0$, tj. postoje delitelji nule.

  Primer: Za $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ je $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- Ako je $AB = AC$ ne sledi da je $B = C$.

  Primer: Za $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ je

  $AB = AC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ a očigledno je $B \neq C$.

$AB = AC$ ali $B \neq C$

$x \cdot y = 0$
$\Rightarrow x = 0 \lor y = 0$
$x, y \in \mathbb{R}$

$xy = xz \quad / : x \neq 0$
$\Rightarrow y = z$
$x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$AB = 0$
ali $A \neq 0$ i $B \neq 0$

Primer :

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 15 & -3 \\ 0 & -6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1\cdot 1 + 2\cdot(-1) & -1\cdot 2 + 2\cdot 0 & -1\cdot 3 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot(-1) & 3\cdot 2 + 4\cdot 0 & 3\cdot 3 + 4\cdot 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 15 & -3 \\ 0 & -6 & 12 \end{bmatrix}_{2\times 3} + \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -1 & 6 & 13 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 13 & -4 \\ -1 & 0 & 25 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

• **Transponovanje matrice** se vrši tako što sve odgovarajuće vrste i kolone u matrici zamene mesta. Transponovana matrica matrice A formata $m \times n$, u oznaci A^T je matrica formata $n \times m$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Primer: Za $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ je $A^T = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 6 & -7 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Osobine transponovanja matrice:

Za skalar $\alpha \in \mathbb{C}$ i matrice A i B važe sledeće osobine:

- $(A^T)^T = A$,
- $(A+B)^T = A^T + B^T$,
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,
- $\boxed{(AB)^T = B^T A^T,}$ pri čemu su A i B kvadratne matrice.

$(AB)^T \neq A^T B^T$

Determinanta kvadratne matrice A reda n, $n \in \mathbb{N}$, nad poljem $\mathbb{F}$ je

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

M_{ij}

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Adjungovana matrica kvadratne matrice A reda n, $n \in \mathbb{N}$, nad poljem $\mathbb{F}$, dobija se tako što se svaki element a_{ij} matrice A zameni njegovim odgovarajućim kofaktorom A_{ij} i zatim se izvrši transponovanje, tj.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$

Primer: Za matricu $\boxed{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}$, njena adjungovana matrica je

$\mathrm{adj}(B) = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot a_{22} & (-1)^{1+2} \cdot a_{21} \\ (-1)^{2+1} \cdot a_{12} & (-1)^{2+2} \cdot a_{11} \end{bmatrix}^T = \boxed{\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}},$$

$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$\mathrm{adj}(C) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

tj. adjungovana matrica za kvadratnu matricu reda 2 dobija se tako što dijagonalni elementi u matrici međusobno zamene mesta, a ostali elementi promene znak.

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -6 & -3 & 4 \\ 7 & -2 & -1 \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -6 & 7 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Ako je A kvadratna matrica reda n i ako postoji kvadratna matrica X takva da je $AX = XA = E$, tada je X **inverzna matrica** matrice A. Inverna matrica matrice A označava se sa A^{-1}.

Kvadratna matrica je **regularna** ako ima inverznu matricu, a **singularna** ako nema inverznu.

Kvadratna matrica A je regularna (ima inverznu matricu) akko je njena determinanta različita od nule (tj. $\det(A) \neq 0$), i tada je:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A).}$$

$$\cancel{\frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}}$$

Primer: Za $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ je $\det(A) = -3$, a $\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$,

~~pa je~~ $\cancel{A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

pa je $A^{-1} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Osobine inverzne matrice:

Za regularne matrice A i B reda n i jediničnu matricu E reda n važe sledeće osobine:

- $(A^{-1})^{-1} = A$,
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

$\neq A^{-1}B^{-1}$

Elementarne transformacije matrice su:

- međusobna zamena mesta dve vrste (kolone),
- množenje elemenata jedne vrste (kolone) skalarom različitim od nule,
- množenje elemenata jedne vrste (kolone) skalarom i njihovo dodavanje odgovarajućim elementima neke druge vrste (kolone).

Matrice A i B su ekvivalentne (u oznaci $A \sim B$) ako se jedna matrica može dobiti od druge matrice primenom konačnog broja elementarnih transformacija.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$[A \mid E]$

$\sim$ ....

$[E \mid A^{-1}]$

Osim pomoću gore date formule, inverzna matrica se može izračunati i preko tzv. "blok šeme":

1. Formira se tzv. blok matrica $[A \mid E]$ gde je u levom bloku matrica A čija se inverzna matrica traži, a u desnom bloku je odgovarajuća (istog formata) jedinična matrica.
2. Primenom elementarnih transformacija na vrste blok matrice pravi se u levom bloku jedinična matrica.
3. Ako u levom bloku primenom elementarnih transformacija na vrste ne može da se napravi jedinična matrica, to znači da inverzna matrica ne postoji, tj. da je $\det(A) = 0$.
4. Ako u levom bloku primenom elementarnih transformacija na vrste može da se napravi jedinična matrica, to znači da inverzna matrica postoji, tj. da je $\det(A) \neq 0$, i ona se nalazi u desnom bloku blok matrice, tj. dobija se $\left[E \mid A^{-1}\right]$.

Primer: Odrediti A^{-1}, ako postoji, za $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

Prvi način:

Determinanta matrice A je

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \\ 3 & 2 \end{matrix} = -28-18+4+21-4+24 = -1; \neq 0$$

$\Rightarrow A^{-1}$ postoji.

kofaktori matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ su:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -32, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -25, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -14,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\begin{bmatrix} |\ \ | & -|\ \ | & +|\ \ | \\ -|\ \ | & |\ \ | & -|\ \ | \\ |\ \ | & -|\ \ | & |\ \ | \end{bmatrix}$$

pa je adjungovana matrica

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -32 & -2 & 25 \\ -14 & -1 & -11 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -32 & -14 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -25 & -11 & 1 \end{bmatrix},$$

a $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A) = -\begin{bmatrix} -32 & -14 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -25 & -11 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{bmatrix}.$

Drugi način:

$$\begin{array}{r} 2 \\ \\ -3 \end{array}\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} \\ \\ -11 \end{array}\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -25 & -11 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} 3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -25 & -11 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ - \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 32 & 14 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -25 & -11 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ /(-1) \end{array}$$

$$\sim \left[\underbrace{\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{E}\ \middle|\ \underbrace{\begin{array}{rrr} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{array}}_{A^{-1}}\right].$$

$\otimes$ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

I $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} = -3 + 2 - 6 = -7 \neq 0$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

$$= -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

II начин :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$[A|E] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right] /:7$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{array}\right] \sim [E|A] \qquad A = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Podmatrica date matrice A formata $m \times n$ nad poljem $\mathbb{F}$ je matrica dobijena izostavljanjem k vrsta i l kolona matrice A, gde $k \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$, $l \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.

Neka je $\tilde{A}$ kvadratna podmatrica nenula matrice A, čija je determinanta različita od 0 i pri tome ima najveći red u odnosu na sve matrice sa tom osobinom. Tada je **rang** matrice A jednak redu podmatrice $\tilde{A}$.

Specijalno, ako je A nula matrica, tada je njen rang jednak 0.

Rang matrice A označava se sa $\mathrm{rang}\,(A)$.

Ekvivalentne matrice imaju isti rang.

Za svaku nenula matricu A formata $m \times n$ postoji njoj ekvivalentna matrica B oblika

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n},$$

takva da je $b_{ii} \neq 0,\ i \in \{1, 2, ..., r\}$, $r \leq \min\{m, n\}$.

Kako je $\text{rang}(B) = r$, sledi da je i $\text{rang}(A) = r$.

Drugim rečima, ako su svi elementi matrice A ispod glavne dijagonale i r-te vrste jednaki nuli, a preostali elementi na glavnoj dijagonali različiti od nule, tada je rang matrice A jednak r.

Primer: $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \operatorname{rang}(A) = 3.$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & -4 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & -12 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 3$$

$$A = \begin{array}{c} \\ -3 \\ -6 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \\ 6 & 12 & 30 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -8 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$