Binarne operacije - vežbe

October 25, 2021

1. Ispitati koji su od sledećih uređenih parova datih u tablici grupoidi i za one koji jesu ispitati komutativnost, asocijativnost, neutralni i inverzni element.

	$(\mathbb{N},+)$	$(\mathbb{N},\cdot)$	$(\mathbb{N},-)$	$(\mathbb{Z},-)$	$(\mathbb{Z},\cdot)$
grupoid	+	+	– ($2-3=-1 \notin \mathbb{N}$)	+	+
asocijativnost	+	+	–	–	+
komutativnost	+	+	–	–	+
neutralni element	–	+ (1)	–	–	+ (1)
inverzni elementi	–	– SAMO 1 IMA INVERZNI	–	–	– SAMO 1 IMA INVERZNI

$a \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\frac{1}{a}} \cdot a = 1$

$\notin \mathbb{Z}$

$a \in \mathbb{N}$, $0 \notin \mathbb{N}$, $\boxed{\frac{1}{a}} \cdot a = 1$

$\notin \mathbb{N}$

$2-3=3-2$?

$\boxed{\frac{1}{a}} \cdot a = 1$

$\notin \mathbb{N}$

$2-0=2$

$a-0=a$ ✓

$0-2=-2$

POSTOJI SAMO DESNI NEUTRALNI EL. I TO JE 0

DA LI POSTOJI DESNI INVERZNI EL.

$a - \boxed{a} = 0$

SVAKI CEO BROJ JE SAM SEBI DESNI INVERZNI.

$\boxed{a} - a = 0$

ZAŠTO NIJE I LEVI INVERZNI?

ZATO ŠTO NEMAMO LEVI NEUTRALNI OVOG NEMA

	$(\mathbb{Z}\setminus\{0\},:)$	$(\mathbb{R},:)$	$(\mathbb{R}\setminus\{0\},:)$	$(\mathbb{N}\cup\{0\},+)$
grupoid	− $(2:3 \notin \mathbb{Z}\setminus\{0\})$	− $(2:0 \notin \mathbb{R})$	+	+
asocijativnost	−	−	−	+
komutativnost	−	−	−	+
neutralni element	−	−	−	+ (0)
inverzni elementi	−	−	−	−

$\boxed{-2} + 2 = 0$

$\notin \mathbb{N}$?

SAMO 0 IMA INVERZNI

$a : \boxed{1} = a$

$\boxed{?} : a = a$

POSTOJI SAMO DESNI NEUTRALNI ELEMENAT I TO JE 1.

$a : \boxed{a} = 1$

POSTOJI I DESNI INVERZ I TO JE SVAKI R BROJ SAM SEBI DESNI INVERZNI.

LEVI INVERZNI NE POSTOJI JER NE POSTOJI LEVI NEUTRALNI

	$(\{-1,0,1\},+)$	$(\{-1,0,1\},\cdot)$	$(\{-2,-1,0,1,2\},\cdot)$
grupoid	$-$ $1+1=2$	$+$	$-$ $2\cdot 2=4$
asocijativnost	$-$	$+$	$-$
komutativnost	$-$	$+$	$-$
neutralni element	$-$	$+$ (1)	$-$
inverzni elementi	$-$	$-$	$-$

$1\cdot 1=1$

$(-1)(-1)=1$

$\square\cdot 0=1$

$\to$ $1, -1$ IMAJU INVERZNI, A 0 NEMA

→ PARNI BROJEVI

	$(\{7k \mid k \in \mathbb{Z}\}, +)$	$(\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$
grupoid	+	+
asocijativnost	+	+
komutativnost	+	+
neutralni element	+ (0)	— (1 NIJE PARAN BROJ)
inverzni elementi	+	—

$x, y \in \{7k \mid k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow x + y \in \{7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$? ✓

$x = 7k_1, \ k_1 \in \mathbb{Z}$

$y = 7k_2, \ k_2 \in \mathbb{Z}$

$x + y = 7(k_1 + k_2), \ k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$

$\boxed{0} + 7k = 7k$

$0 \in \{7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$?

$0 = 7 \cdot \boxed{0}_{\in \mathbb{Z}}$

$\boxed{-7k} + 7k = 0$

$-7k \in \{7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$x, y \in \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$x = 2k_1, \ k_1 \in \mathbb{Z}$

$y = 2k_2, \ k_2 \in \mathbb{Z}$

$x \cdot y = 4k_1k_2 = 2(2k_1k_2)$ ✓

	$(\{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, +)$	$(\{5k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$
grupoid	—	+
asocijativnost	—	+
komutativnost	—	+
neutralni element	—	+ (1)
inverzni elementi		—

1 IMA OSTALI NE

$x, y \in \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$x = 3k_1 + 1, \quad k_1 \in \mathbb{Z}$

$y = 3k_2 + 1, \quad k_2 \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{x + y = 3(k_1 + k_2) + 2 \notin \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}}$$

$x, y \in \{5k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$x = 5k_1 + 1, \quad k_1 \in \mathbb{Z}$

$y = 5k_2 + 1, \quad k_2 \in \mathbb{Z}$

$(5k_1+1)(5k_2+1)$

$xy = \underline{25k_1k_2 + 5k_1 + 5k_2 + 1}$

$= 5(\underbrace{5k_1k_2 + k_1 + k_2}_{k \in \mathbb{Z}}) + 1$

$1 = 5 \cdot \underbrace{0}_{\in \mathbb{Z}} + 1$

	$(\{-1,1\},\cdot)$,	$(\{1,-1,i,-i\},+)$
grupoid	+	— $1+1=2$
asocijativnost	+	—
komutativnost	+	—
neutralni element	+ (1)	—
inverzni elementi	+	—

$\square \cdot a = 1$ $\qquad 1 \cdot 1 = 1$

$\square \cdot 1 = 1$ $\qquad (-1)(-1) = 1$

$\square \cdot (-1) = 1$

$g(x) = 2x$

g – „1-1" ✓
g – „na" ✓

$f : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} A$

	$(\{1,-1,i,-i\},\cdot)$	$(\{f \mid f : A \longrightarrow A\},\circ)$
grupoid	+	+
asocijativnost	+	+
komutativnost	+	—
neutralni element	+ (1)	+ (id – IDENTIČKO PRESLIKAVANJE)
inverzni elementi	+	—

$i^2 = -1$

$\boxed{1} \cdot 1 = 1$

$\boxed{-1} \cdot (-1) = 1$

$\boxed{-i} \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$

$\boxed{i} \cdot (-i) = -i^2 = 1$

$f, g : A \to A$, $f \circ g : A \to A$ ✓

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & A \arrow[r, "g"] & A \end{tikzcd}$$

$\boxed{id}(x) = x$

$f^{-1}(f(x)) = x$

$\underline{\underline{f^{-1} \circ f = id}}$

$f : A \longrightarrow A$
ima inverznu akko je f bijekcija!
U našem slučaju nije.

2. Ispitati koje osobine ima grupoid $(G, *)$ ako je $G = \{a, b, c\}$, a operacija $*$ je data tablicom

$*$	a	b	c
a	c	a	a
b	a	b	c
c	b	c	b

NEUTRALNI ELEMENT: je b

INVERZNI ELEMENAT:

$b*b=b \Rightarrow b$ je I.E. SAM SEBI

$c*c=b \Rightarrow c$ je I.E. SAM SEBI

$c*a=b \Rightarrow c$ JE LEVI I.E. ZA a

a JE DESNI I.E ZA c

KOMUTATIVNOST: —

ASOCIJATIVNOST: —

$b*(b*a)=(b*b)*a$

$b*a=b*a$ ✓

$a*(a*a)=(a*a)*a$

$a*c=c*a$

$a=b$ ↯

$b*(c*a)=(b*c)*a$

$b*b=c*a$

$b=b$ ✓

$c*(c*c)=(c*c)*c$

$c*b=b*c$

$c=c$ ✓

IDEMPOTENTNOST: —

NILPOTENTNOST: —

KANCELACIJA: $\underbrace{a*b=a \wedge a*c=a}$

$a*b=a*c \Rightarrow b=c$ ↯

OVAKO MORATE ZAPISATI NA ISPITU!

KOMUTATIVNOST: nije komutativan jer tablica nije simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu;
IDEMPOTENTNOST: nije idempotentan jer na glavnoj dijagonali nisu poređani elementi istim redosledom kao u graničnoj vrsti (koloni);
NEUTRALNI ELEMENAT: je b jer je vrsta elementa b jednaka graničnoj vrsti, a kolona graničnoj koloni;
INVERZNI ELEMENAT: ne postoji za sve elemente jer se neutralni elemenat ne javlja u svakoj vrsti i svakoj koloni tačno jednom (simetrično raspoređen u odnosu na glavnu dijagonalu),
$b * b = b$ pa je elemenat b sam sebi inverzan,
$c * c = b$ pa je i elemenat c sam sebi inverzan,
kako je $c * a = b$ to je c levi inverzni elemenat za a, a a je desni inverzni za c ali a nema desni inverzni elemenat;
NILPOTENTNOST: ne postoji nilpotentni elemenat jer ni za jedan elemenat skupa G ne važi da je cela njegova vrsta (kolona) jednaka njemu samom;
KANCELACIJA: nije kancelativa jer je recimo
$a * b = a * c = a$, a $b \neq c$;
ASOCIJATIVNOST: nije asocijativan jer je recimo
$a * (a * a) = a * c = a$, a $(a * a) * a = c * a = b$.

3. Ispitati koje osobine ima grupoid $(G, *)$ ako je $G = \{a, b, c, d\}$, a operacija $*$ je data tablicom

$*$	a	b	c	d
a	a	d	b	c
b	c	b	d	a
c	d	a	c	b
d	b	c	a	d

.

KOMUTATIVNOST: —

ASOCIJATIVNOST: —

$c*(c*c) = (c*c)*c$

$c * c = c*c$

$c = c$ ✓

IDEMPOTENTNOST: +

$c*(c*d) = (c*c)*d$

NEUTRALNI EL. —

$c*b = c*d$

INVERZNI EL. —

$a = d$

NILPOTENTNOST —

KANCELACIJA: +

KOMUTATIVNOST: nije komutativan jer tablica nije simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu;
IDEMPOTENTNOST: jeste idempotentan jer su na glavnoj dijagonali podeđani elementi skupa G istim redosledom kao u graničnoj vrsti (koloni);
NEUTRALNI ELEMENAT: nema jer ne postoji nijedan elemenat čija je vrsta jednaka graničnoj vrsti, a kolona graničnoj koloni;
INVERZNI ELEMENAT: ne postoji jer nema neutralni elemenat;
NILPOTENTNOST: ne postoji nilpotentni elemenat jer ni za jedan elemenat skupa G ne važi da je cela njegova vrsta (kolona) jednaka njemu samom;
KANCELACIJA: jeste kancelativan jer se ni u jednoj vrsti ili koloni ne ponavljaju elementi;
ASOCIJATIVNOST: nije asocijativan jer je recimo
$b * (a * c) = b * b = b$, a $(b * a) * c = c * c = c$.

4. Naći sve podgrupoide grupida $(G, *)$ ako je $G = \{a, b, c, d\}$, a operacija $*$ je data tablicom

$*$	a	b	c	d
a	b	a	a	a
b	b	b	d	c
c	c	b	d	d
d	d	b	d	d

.

$(H, *)$, $H \subseteq G$

$\{a, b\} = \{b, a\}$

PODGRUPOIDI: $(G, *)$, $(\{b\}, *)$, $(\{d\}, *)$, $(\{a, b\}, *)$, $(\{c, d\}, *)$, $(\{b, c, d\}, *)$

$\cancel{(\{a\}, *)}$

$*$	a
a	b

$(\{b\}, *)$

$*$	b
b	b

$\cancel{(\{c\}, *)}$

$*$	c
c	d

$(\{d\}, *)$

$*$	d
d	d

$(\{a, b\}, *)$

$*$	a	b
a	b	a
b	b	b

$\cancel{(\{a, c\}, *)}$

$*$	a	c
a	b	
c		

$\cancel{(\{a, d\}, *)}$ $a * a = b$

$\cancel{(\{b, c\}, *)}$ $b * c = d$

$\cancel{(\{b, d\}, *)}$ $b * d = c$

$(\{c, d\}, *)$

$\cancel{(\{a, b, c\}, *)}$, $c * c = d$

$(\{b, c, d\}, *)$

$\cancel{(\{a, c, d\}, *)}$ $a * a = b$

$\cancel{(\{a, b, d\}, *)}$ $b * d = c$

5. Dat je grupoid $(\{1, 2, 3, 4\}, *)$ gde je operacija $*$ definisana sa

$$x * y = \boxed{min\{x, y\}}$$

$2 * 3 = \min\{2, 3\} = 2$

5.1 Ispitati osobine datog grupoida.

5.2 Naći sve podgrupoide datog grupoida.

$*$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	2	3	3
4	1	2	3	4

KOMUTATIVNOST: +

ASOCIJATIVNOST: JESTE JER JE minimum ASOCIJATIVNA OPERACIJA

IDEMPOTENTNOST: +

NEUTRALNI EL: $\underline{4}$

NILPOTENTNI EL.: 1

INVERZNI EL. $4*4=4$ – 4 JE SAMO SEBI INVERZNO A OSTALI NEMAJU INVERZNE JER SE VIŠE NI U JEDNOJ VRSTI / KOLONI NE JAVLJA 4

KANCELACIJA: —

$1 * 1 = 1 * 2$

$1 \neq 2$

$(\{1\}, *)$, $(\{1, 2\}, *)$

SVI NEPRAZNI PODSKUPOVI SKUPA $\{1, 2, 3, 4\}$ SU ZATVORENI ZA OPERACIJU $*$

$\{1,2,3,4\}$

$$x * y = \begin{cases} \min\{x,y\}, & x \neq y \\ 4 & x = y \end{cases}$$

$*$	1	2	3	4
1	4	1	1	1
2	1	4	2	2
3	1	2	4	3
4	1	2	3	4

5.1 KOMUTATIVNOST: jeste komutativan jer tablica nije simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu;
IDEMPOTENTNOST: jeste idempotentan jer su na glavnoj dijagonali podeđani elementi skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ istim redosledom kao u graničnoj vrsti (koloni);
NEUTRALNI ELEMENAT: je 4 jer je vrsta elementa 4 jednaka graničnoj vrsti, a kolona graničnoj koloni;
INVERZNI ELEMENAT: nijedan elemenat osim elementa 4 (koji je sam sebi inverzan) nema inverzni elemenat jer se neutralni elemenat (4) ne javlja ni u jednoj drugoj vrsti ili koloni;
NILPOTENTNOST: broj 1 je nilpotentni elemenat jer je cela njegova vrsta (kolona) jednaka njemu samom;
KANCELACIJA: nije kancelativan jer je recimo
$2 * 2 = 2 * 3 = 2$, a $2 \neq 3$;
ASOCIJATIVNOST: jeste asocijativan jer je operacija minimum asocijativna operacija.

5.2 Svi neprazni podskupovi skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ zajedno sa gore definisanom operacijom $*$ su podgrupoidi.

9, KANCELACIJA VAŽI JER JE OVO GRUPOID KOJI JE ASOCIJATIVAN I IMA NEUTRALNI EL. I SVAKI EL. IMA INVERZNI

6. Na skupu $\mathbb{R}$ definisana je operacija $*$ sa

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}, \; a * b = a + b + 3,}$$

$+$ je obično sabiranje pa se mogu koristiti osobine sabiranja ($+$ je asocijativno, komutativno, ...)

npr. $4*5 = 4+5+3 = 12$

gde je $+$ operacija sabiranja. Ispitati algebarsku sturkturu $(\mathbb{R}, *)$.

1, $\mathbb{R} \neq \emptyset$

2, ZATVORENOST: $\forall x,y \in \mathbb{R}, \; x*y \in \mathbb{R}$?

$x*y = x+y+3 \in \mathbb{R}$ ✓

zbir realnih brojeva je realan broj

3, KOMUTATIVNOST: $\forall x,y \in \mathbb{R}, \; x*y = y*x$?

$x*y = x+y+3$ ✓

$\quad \| $

$y*x = y+x+3$

4, ASOCIJATIVNOST: $\forall x,y,z \in \mathbb{R}, \; x*(y*z) = (x*y)*z$? ✓

$x*(y*z) = x*(y+z+3) = x+y+z+3+3 = x+y+z+6$

$\quad \|$

$(x*y)*z = (x+y+3)*z = x+y+3+z+3 = x+y+z+6$

5, NEUTRALNI ELEMENT: $\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \; e*x = x$?

$e*x = x$

$e + \cancel{x} + 3 = \cancel{x}$

$\boxed{e = -3} \in \mathbb{R}$

NEUTRALNI EL. ✓ JE -3

6, INVERZNI EL. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, \; x'*x = -3$?

$x'*x = -3$

$x' + x + 3 = -3$

$\boxed{x' = -6-x} \in \mathbb{R}$ ✓

INVERZNI EL ZA SVAKO $x \in \mathbb{R}$ JE $-6-x \in \mathbb{R}$

7, IDEMPOTENTNOST

$\forall x \in \mathbb{R}, \; x*x = x$?

$x*x = x$

$x + \cancel{x} + 3 = \cancel{x}$

$x = -3$

NE VAŽI IDEMPOTENTNOST NI ZA JEDAN REALAN BROJ OSIM -3

8, NILPOTENTNOST

$\exists 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$

$0 * x = 0$?

$0 * x = 0$

$\cancel{0} + x + 3 = \cancel{0}$

$x = -3$

NE VAŽI NILPOTENTNOST

ZA VEŽBU IZ SKRIPTE:
Zadatak 4.1, 4.3, 4.4, 6.1 (bez h), 6.2 (bez f)
Primer 4.1