Racionalna funkcija

November 30, 2021

$7:2=3$
1
$7=2\cdot 3+1$

Funkcija $r:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definisana sa $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, gde su $p(x)$ i $q(x)$ nenula polinomi nad poljem realnih brojeva, naziva se **racionalna funkcija**.

Racionalne funkcije se dele na prave i neprave. **Prava** racionalna funkcija je ona kod koje je $\deg(p(x))<\deg(q(x))$, a **neprava** ona kod koje je $\deg(p(x))\geq\deg(q(x))$.

$r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ PRAVA $\deg(p)<\deg(q)$ NEPRAVA $\deg(p)\geq\deg(q)$

Primer:

$r(x)=\dfrac{2x-1}{3x^2+5}$ je prava racionalna funkcija;

$r(x)=\dfrac{x^3+6}{x-1}$ je neprava racionalna funkcija;

$r(x)=\dfrac{x-7}{x+9}$ je neprava racionalna funkcija;

$$(x^3+6):(x-1)=\underbrace{x^2+x+1}_{\text{količnik}}$$
$$-(x^3-x^2)$$
$$x^2+6$$
$$-(x^2-x)$$
$$x+6$$
$$-(x-1)$$
$$7 \text{ - OSTATAK}$$

$x^3+6=(x-1)(x^2+x+1)+7$

$$r(x)=\frac{x^3+6}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)+7}{x-1}=\underbrace{\boxed{x^2+x+1}}_{\text{POLINOM-KOLIČNIK}}+\boxed{\frac{7}{x-1}}$$

PRAVA RACIONALNA F.

Svaka neprava racionalna funkcija može se napisati kao zbir polinoma i prave racionalne funkcije ili samo polinoma.
Prave racionalne funkcije oblika

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{i} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m},$$

polinom x^2+px+q nema realne nule

gde $A, B, C, a, p, q \in \mathbb{R}$, $k, m \in \mathbb{N}$ i $\boxed{p^2 - 4q < 0}$, nazivaju se **parcijalni razlomci**.

Svaka prava racionalna funkcija može se predstaviti u obliku zbira parcijalnih razlomaka.

$$\frac{1}{(x-a)^k (x^2+px+q)^m} = \underbrace{\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}}_{k}$$

$$+ \underbrace{\frac{B_1 x + C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_m x + C_m}{(x^2+px+q)^m}}_{m}$$

Rastavljanje racionalne funkcije na parcijalne razlomke

- Ukoliko je racionalna funkcija **neprava** vrši se deljenje polinoma u brojiocu sa polinomom u imeniocu. Nakon deljenja dobija se polinom ili zbir polinoma i prave racionalne funkcije.
- **Faktoriše** se polinom u imeniocu prave racionalne funkcije nad poljem realnih brojeva (faktori su linearni ili kvadratni koji nemaju realne nule).
- Prava racionalna funkcija **rastavlja se na zbir parcijalnih razlomaka**. Posmatraju se faktori imenioca prave racionalne funkcije.
  - Faktor oblika $(x-a)^k$ daje sledećih k sabiraka parcijalnih razlomaka sa konstantama u brojiocima:
  $$\frac{A_1}{x-a}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, \dots, \frac{A_k}{(x-a)^k}.$$
  - Faktor oblika $(x^2+px+q)^m$, $p^2-4q<0$, daje sledećih m sabiraka parcijalnih razlomaka sa opštim linearnim polinomima u brojiocima:
  $$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}, \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}, \dots, \frac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m}.$$

Primer: Na sledećim pravim racionalnim funkcijama, sa faktorisanim imeniocima prikazano je kako se vrši rastavljanje na zbir parcijalnih razlomaka.

$$\frac{x^2-5x+3}{(x+4)(x-3)^2}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2},$$

$$\frac{2x^2+4x-3}{(x+1)x^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2},$$

$(x-0)^2$

$$\boxed{\frac{1}{x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}}$$!

$$\frac{3x^3+x+7}{(x^2+4)(x-2)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x-2)^2},$$

$$\frac{5x^4+3x-7}{(x^2+5)^2(x-7)}=\frac{Ax+B}{x^2+5}+\frac{Cx+D}{(x^2+5)^2}+\frac{E}{(x-7)},$$

$$\frac{2x^3+3}{(x+1)^3(x^2+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{Dx+E}{(x^2+3)}.$$

Nepoznate konstante određuju se tako što se cela jednakost pomnoži sa imeniocem prave racionalne funkcije i potom se izjednače koeficijenti uz iste stepene promenljive sa leve i desne strane.

1. Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalne funkcije:

1.1 $r(x) = \dfrac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)}$;

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2} \quad / \cdot (x+1)^2(x-2)$$

$$x^2+2 = A(x+1)(x-2) + B(x-2) + C(x+1)^2$$

$$x^2+2 = A(x^2-x-2) + B(x-2) + C(x^2+2x+1)$$

$$x^2+2 = Ax^2 - Ax - 2A + Bx - 2B + Cx^2 + 2Cx + C$$

$$x^2+2 = (A+C)x^2 + (-A+B+2C)x + (-2A-2B+C)$$

$A+C=1 \Rightarrow \boxed{C = 1-A}$

$-A+B+2C=0 \Rightarrow -A+B+2-2A=0 \Rightarrow -3A+B=-2$

$-2A-2B+C=2 \Rightarrow -2A-2B+1-A=2 \Rightarrow -3A-2B=1$

$-3B=3$

$\boxed{C=\frac{2}{3}}$ $\boxed{A=\frac{1}{3}}$ $\boxed{B=-1}$

$$r(x) = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{\frac{2}{3}}{x-2}$$

1.2 $r(x) = \frac{x^3 - x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{x(x^2-1)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{x\cancel{(x-1)}(x+1)}{(x-1)^{\cancel{2}}(x^2+1)} = \frac{x^2+x}{(x-1)(x^2+1)}$

$$\frac{x^2+x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \quad \Big| \cdot (x-1)(x^2+1)$$

$$x^2+x = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

$$x^2+x = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

$$x^2+x = (A+B)x^2 + (-B+C)x + (A-C)$$

$$A+B=1 \implies A+B=1$$

$$-B+C=1 \implies A-B=1$$

$$A-C=0 \implies A=C$$

$$2A=2$$

$$\boxed{A=1}$$

$$\boxed{C=1}$$

$$\boxed{B=0}$$

$$\boxed{r(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+1}}$$

1.3 $r(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{x^5+2x^4+2x^3+x^2} = \dfrac{2\cancel{(x+1)}(x-\frac{1}{2})}{x^2\cancel{(x+1)}(x^2+x+1)} = \dfrac{2x-1}{x^2(x^2+x+1)}$

$$x^5+2x^4+2x^3+x^2 = x^2(x^3+2x^2+2x+1) = x^2(x+1)(x^2+x+1)$$

$p \mid 1 \Rightarrow p \in \{\pm 1\}$

$q \mid 1 \Rightarrow q \in \{1\}$

$\Big\} \frac{p}{q} \in \{\pm 1\}$

	1	2	2	1
-1	1	1	1	$\boxed{0}$

$x^2+x+1=0$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \notin \mathbb{R}$

$2x^2+x-1=0$

$x_{1,2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{-1\pm 3}{4} \Big\langle \begin{matrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$

$\dfrac{2x-1}{x^2(x^2+x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+x+1} \Big/ x^2(x^2+x+1)$

$2x-1 = Ax(x^2+x+1) + B(x^2+x+1) + (Cx+D)x^2$

$2x-1 = Ax^3+Ax^2+Ax+Bx^2+Bx+B+Cx^3+Dx^2$

$2x-1 = (A+C)x^3 + (A+B+D)x^2 + (A+B)x + B$

$A+C=0 \Rightarrow \boxed{C=-3}$

$A+B+D=0 \Rightarrow \boxed{D=-2}$

$A+B=2 \Rightarrow \boxed{A=3}$

$\boxed{B=-1}$

$r(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{-3x-2}{x^2+x+1}$

1.4 $r(x) = \dfrac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 5x + 5}{x^3 - 2x^2 + 2x - 4}. = x + \dfrac{-x+5}{x^3-2x^2+2x-4} = x + \dfrac{-x+5}{(x-2)(x^2+2)}$

$(x^4-2x^3+2x^2-5x+5) : (x^3-2x^2+2x-4) = x$

$-(x^4-2x^3+2x^2-4x)$

$-x+5$

$x^3-2x^2+2x-4 = x^2(x-2)+2(x-2) = (x-2)(x^2+2)$

14

$p|(-4) \Rightarrow p \in \{\pm1, \pm2, \pm4\}$

$q|1 \Rightarrow q \in \{1\}$

$\dfrac{p}{q} \in \{\pm1, \pm2, \pm4\}$

	1	−2	2	−4
~~1~~	~~1~~	~~−1~~	~~1~~	~~−3~~
~~−1~~	~~1~~	~~−3~~	~~5~~	~~−9~~
2	1	0	2	$\boxed{0}$

$\underbrace{1 \quad 0 \quad 2}_{x^2+2}$

$\dfrac{-x+5}{(x-2)(x^2+2)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+2} \Big/ (x-2)(x^2+2)$

$-x+5 = A(x^2+2) + (Bx+C)(x-2)$

$-x+5 = Ax^2+2A+Bx^2-2Bx+Cx-2C$

$-x+5 = (A+B)x^2+(-2B+C)x+2A-2C$

$A+B=0 \Rightarrow B=-A$

$-2B+C=-1 \Rightarrow 2A+C=-1 \;\big|\cdot(-1)$

$2A-2C=5 \qquad\quad 2A-2C=5$

$-3C=6$

$\boxed{C=-2}$ $\quad \boxed{A=\frac{1}{2}}$ $\quad \boxed{B=-\frac{1}{2}}$

$r(x) = x + \dfrac{\frac{1}{2}}{x-2} + \dfrac{-\frac{1}{2}x-2}{x^2+2}$

ZA VEŽBU IZ SKRIPTE
Zadatak 8.43