Vektorski prostori

1. U vektorskom prostoru $\boldsymbol{R}^3$ ispitati linearnu zavisnost i generatornost sledećih skupova vektora:
   (a) $b_1 = (0,1,0)$, $b_2 = (0,0,-1)$;
   (b) $b_1 = (3,0,0)$, $b_2 = (0,3,0)$,$b_3 = (0,0,3)$, $b_4 = (5,7,9)$;
   (c) $b_1 = (0,0,7)$;
   (d) $b_1 = (0,0,0)$, $b_2 = (5,3,1)$;
   (e) $b_1 = (5,5,5)$, $b_2 = (3,3,0)$,$b_3 = (2,0,0)$.

2. Dati su vektori:
   (a) $a_1 = (4,4,3)$, $a_2 = (7,2,1)$, $a_3 = (4,1,6)$ i $b = (5,9,\alpha)$;
   (b) $a_1 = (2,1,0)$, $a_2 = (-3,2,1)$, $a_3 = (5,-1,-1)$ i $b = (8,\alpha,-2)$;
   (c) $a_1 = (-1,3,-4)$, $a_2 = (1,-3,4)$, $a_3 = (2,-6,8)$ i $b = (0,\alpha,-1)$.

   Odrediti realan parametar α tako da se vektor b može izraziti kao linearna kombinacija vektora a_1, a_2 i a_3.

3. Ispitati linearnu zavisnost vektora:
   (a) $(-4,2,-1,3)$, $(1,-3,2,4)$, $(-2,4,3,-1)$, $(-3,5,1,-2)$;
   (b) $(1,1,2,1)$, $(1,-1,1,2)$, $(-3,1,-4,-5)$, $(0,2,1,-1)$.

4. Dati su vektori: $a_1 = (3,1,1)$, $a_2 = (m,-1,0)$ i $a_3 = (0,1,m)$.
   (a) Za koju vrednost realnog parametra m skup $\{a_1,a_2,a_3\}$ predstavlja bazu prostora $\boldsymbol{R}^3$?
   (b) Za $m = 2$ napisati vektor $b = (4,6,8)$ kao linearnu kombinaciju vektora a_1, a_2 i a_3.

5. Skup vektora $A = \{x,y,u,v\}$ čini bazu vektorskog prostora $\boldsymbol{R}^4$. Da li je skup vektora $B = \{x+u, 2y+v, x+u-v, y-3u\}$ baza tog prostora?

6. Dokazati da vektori $a = (2,0,0,0)$, $b = (0,-1,2,0)$, $c = (0,0,-3,0)$, $d = (-1,0,0,1)$ čine bazu vektorskog prostora $\boldsymbol{R}^4$, a zatim napisati vektor $v = (1,2,-1,3)$ kao linearnu kombinaciju vektora a, b, c i d.

7. Vektorski prostor V generisan je vektorima $v_1 = (a,1,1)$, $v_2 = \big(-a,a,-a^2\big)$ i $v_3 = \big(a^3,-a,1\big)$. Naći njegovu dimenziju i bazu u zavisnosti od realnog parametra a.

8. U zavisnosti od realnog parametra a odrediti bazu i dimenziju prostora S generisanog vektorima $v_1 = (a,a,a,a)$, $v_2 = (a,2,2,2)$, $v_3 = (a,2,a,a)$ i $v_4 = (a,2,a,3)$.

9. Ispitati koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ čine potprostor prostora $\boldsymbol{R}^3$, i za one koji to jesu odrediti njihovu dimenziju:
   (a) $U = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\big\}$;
   (b) $U = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^2\big\}$;
   (c) $U = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\big\}$;
   (d) $U = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\big\}$;
   (e) $U = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 1\big\}$;
   (f) $U = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 0\big\}$;
   (g) $U = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = 0,\ y = 0\big\}$;
   (h) $U = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = 0,\ xy = 0\big\}$;
   (i) $U = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z^2 = 0\big\}$;
   (j) $U = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2 = 0\big\}$.

10. Za skup $\mathcal{R}_S$ rešenja homogenog sistema S linearnih jednačina dokazati da je potprostor vektorskog prostora $\boldsymbol{R}^4$ i odrediti jednu njegovu bazu

$$S: \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & z & - & 2u & = & 0 \\ -2x & - & 5y & + & z & + & 4u & = & 0 \\ x & - & 3y & + & 16z & - & 2u & = & 0 \end{array}.$$

11. Za skup $\mathcal{R}_S$ rešenja homogenog sistema S linearnih jednačina dokazati da je potprostor vektorskog prostora $\boldsymbol{R}^3$ i odrediti jednu njegovu bazu

$$S: \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 4y & - & 2z & = & 0 \\ -5x & - & 2y & - & 13z & = & 0 \end{array}.$$

ZA VEŽBU IZ SKRIPTE

Zadatak 11.2, 11.3, 11.4, 11.5, 11.6, 11.7, 11.8, 11.9, 11.10, 11.11, 11.12, 11.13, 11.14, 11.15a, 11.16a, 11.17, 11.18