Binarne operacije

October 14, 2021

Neka je $A \neq \emptyset$.

2^{-1}, -2, $7p$

Unarna operacija skupa A je svaka funkcija $' : A \longrightarrow A$.

$2+3=5$

$+(2,3)=5$

Binarna operacija skupa A je svaka funkcija $* : A^2 \longrightarrow A$.

Uobičajeno je da se za unarne operacije koriste simboli: $-$, $^{-1}$, $'$ i slično, a za binarne: $+$, $\cdot$, $\oplus$, $\odot$, $*$ i slično.

Takođe se umesto $*(a,b)$ piše $a*b$, na primer, umesto $+(1,2)=3$ piše se $1+2=3$.

Ako je $*$ binarna operacija nepraznog skupa A uređen par $\mathcal{A}=(A,*)$ se naziva **grupoid**.

Uređen par $(A,*)$ je grupoid ako je $A\neq\emptyset$ i operacija $*$ zatvorena u skupu A, tj. važi

$$\boxed{\forall x, y \in A \Longrightarrow x*y\in A.}$$

Primer: Da li su sledeći uređeni parovi grupoidi?

$(\mathbb{N}, +)$ јесте

$(\mathbb{N}, \cdot)$ јесте

$(\mathbb{N}, -)$ није групоид $1 - 5 = -4 \notin \mathbb{N}$

$(\mathbb{Z}, -)$ јесте

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ јесте

$(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, :)$ није групоид $1 : 2 \notin \mathbb{Z}$

$(\mathbb{R}, :)$ није групоид $5 : 0 \notin \mathbb{R}$

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, :)$ јесте

$(\{-1, 0, 1\}, +)$ није $1 + 1 = 2 \notin \{-1, 0, 1\}$

$(\{-2, -1, 0, 1, 2\}, \cdot)$ није $2 \cdot 2 = 4 \notin \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$2 \circ 3 = 6$

$2 \times 3 = 6$

Binarne operacije se obično zadaju (definišu) korišćenjem:

- Kejlijevih tablica.
  Pomoću Kejlijevih tablica se mogu zadati unarne i binarne operacije na konačnom skupu A. Na primer neka je $A = \{0, 1, 2, 3\}$

$'$	
0	0
1	3
2	2
3	1

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	3
2	2	3	3	3
3	3	3	3	3

$x * y$

- Poznatih binarnih operacija .
  Pomoću poznatih operacija mogu se zadati nove unarne i binarne operacije. Na primer na skupu $A = \{0, 1, 2, 3\}$ su sa

$1 * 2 = \min\{3, 3\} = 3$

$1 * 1 = \min\{2, 3\} = 2$

$$x' = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 4 - x, & x \neq 0 \end{cases} \qquad \text{i} \qquad x * y = min\{x + y, 3\}$$

definisane iste operacije $'$ i $*$ koje su definisane Kejlijevim tablicama datim iznad.

$A = \{1, 2, 3\}$ $\quad 1 * 2 = 1$ $\quad 2 * 3 = 2$

$1 * 3 = 1$

$x * y = \min\{x, y\}$

Osobine grupoida.

Neka je A neprazan skup.

- Grupoid $(A, *)$ je asocijativan (polugrupa) ako

$$\forall x, y, z \in A,\ x * (y * z) = (x * y) * z.$$

- Grupoid $(A, *)$ je komutativan ako

$$\forall x, y \in A,\ x * y = y * x.$$

- Grupoid $(A, *)$ je idempotentan ako

$$\forall x \in A,\ x * x = x.$$

GRUPOID + ASOCIJATIVNOST

||

POLUGRUPA

$2+(3+5) = (2+3)+5$

$2-(3+5) \neq (2-3)+5$

$2-(3-5) \neq (2-3)-5$

$2+3=3+2$

$(\{1\}, \cdot)$ – јесте идемпотентан

$1 \cdot 1 = 1$

$(\mathbb{N}, \cdot)$ – није $\quad 2 \cdot 2 = 4 \neq 2$

- Grupoid $(A, *)$ je sa levim neutralnim elementom ako

$$\boxed{\exists\, e \in A,\ \forall x \in A,}\ e * x = x.$$

Grupoid $(A, *)$ je sa desnim neutralnim elementom ako

$$\boxed{\exists e \in A,\ \forall x \in A,}\ x * e = x.$$

Elemenat $e \in A$ je neutralni elemenat grupoida $(A, *)$ ako je on istovremeno i levi i desni neutralni elemenat.

$(\mathbb{N}, \cdot)$

$\exists 1 \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{N}$

$1 \cdot x = x$

$x \cdot 1 = x$

1 је н.е

$\cancel{\forall x \in A, \exists e \in A, e * x = x}$

$(\mathbb{Z}, -)$

$\exists 0 \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{Z},$

$x - 0 = x$ ← 0 је десни н.е.

$0 - x = -x \neq x$ 0 није л. н.е.

- Neka je $e \in A$ levi neutralni element grupoida $(A, *)$. Ako

$$\text{za neki elemenat } x \in A,\ \exists x' \in A,\ x' * x = e$$

tada je x' levi inverzni elemenat elementa x.

Neka je $e \in A$ desni neutralni element grupoida $(A, *)$. Ako

$$\text{za neki elemenat } x \in A,\ \exists x' \in A,\ x * x' = e$$

tada je x' desni inverzni elemenat elementa x.

Neka je $e \in A$ neutralni element grupoida $(A, *)$. Ako za neki elemenat $x \in A$ postoji elemenat $x' \in A$ koji je istovremeno i levi i desni inverzni elemenat elementa x, tada je elemenat x' inverzni elemenat, elementa x.

$(\mathbb{Z}, +)$

НЕ ЈЕ 0

$x + (-x) = 0$

$(-x) + x = 0$

$2 + (-2) = 0$

$(-2) + 2 = 0$

$(\mathbb{R}, \cdot)$

$5' = \frac{1}{5}$

$\left(-\frac{1}{7}\right)' = -7$

$5 \cdot \frac{1}{5} = 1$

$-\frac{1}{7} \cdot (-7) = 1$

- Grupoid $(A, *)$ je kancelativan ako za $\forall x, y, z \in A$, važi

$$x * y = x * z \Longrightarrow y = z \quad \text{(levi zakon kancelacije)},$$

$$y * x = z * x \Longrightarrow y = z \quad \text{(desni zakon kancelacije)}.$$

- Grupoid $(A, *)$ je sa levim nilpotentnim elementom ako

$$\exists 0 \in A,\ \forall x \in A,\ 0 * x = 0.$$

Grupoid $(A, *)$ je sa desnim nilpotentnim elementom ako

$$\exists 0 \in A,\ \forall x \in A,\ x * 0 = 0.$$

Elemenat $0 \in A$ je nilpotentni elemenat grupoida $(A, *)$ ako je on istovremeno i levi i desni nilpotentni elemenat.

$\cancel{2} \cdot x = \cancel{2} \cdot y$

$\Rightarrow x = y$

$x \cdot \cancel{2} = y \cdot \cancel{2}$

$\Rightarrow x = y$

$(\mathbb{Z}, \cdot)$

$\cancel{1 \cdot x = x}$

$0 \cdot x = 0$

$x \cdot 0 = 0$

Ako postoji neutralni element, on je jedinstven.

Ako postoji inverzni element, on je jedinstven.

Ako je grupoid komutativan, levi neutralni element mora biti i desni, levi inverzni element mora biti i desni, levi nilpotentni element mora biti i desni, tj. pri ispitivanju neutralnog, nilpotentnog i inverznih elemenata dovoljno je ispitivati samo leve, odnosno samo desne.

Ako u asocijativnom grupoidu postoje i neutralni i inverzni elementi on je kancelativan.

Ako je neka operacija zadata preko poznatih binarnih i unarnih operacija, tada se pri ispitivanju njenih osobina koriste poznate osobine operacija preko kojih je definisana.

Neka je $\mathcal{A} = (A, *)$ grupoid, i neka je B neprazan podskup skupa A. Ukoliko je $\mathcal{B} = (B, *)$ grupoid, tj. ako je operacija $*$ zatvorena u skupu B, tada je $\mathcal{B}$ **podgrupoid** grupoida $\mathcal{A}$.

$(\mathbb{R}, +)$

$(\mathbb{N}, +)$

Operacija $*$ grupoida $\mathcal{B}$ je ustvari restrikcija operacije $*$ grupoida $\mathcal{A}$, ali je uobičajeno da se one isto označavaju.

$(\mathbb{N}, +)$

$(\mathbb{Z}, +)$

Zakonitosti u kojima od kvantifikatora figuriše samo $\forall$ (na primer komutativnost i asocijativnost) prenose se sa grupoida na svaki njegov podgrupoid.

$$\left.\begin{array}{l} B \neq \emptyset \\ B \subseteq A \end{array}\right\} \ \emptyset \neq B \subseteq A$$

$(A, *)$

$A \neq \emptyset$

$\forall x,y \in A, \ x * y \in A$

$(B, *)$

ако је $*$ затворено у B

тј. $\forall a,b \in B, \ a * b \in B$

$\Longrightarrow (B, *)$ PODGRUPOID $(A, *)$