BULOVA ALGEBRA

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ uređena šestorka u kojoj je B neprazan skup, $+$ i $\cdot$ dve binarne operacije skupa B, $'$ unarna operacija skupa B, a 0 i 1 dva različita elementa (konstante) skupa B. Tada je $\mathcal{B}$ **Bulova algebra** ako za svako $a, b, c \in B$ važe

AKSIOME BULOVE ALGEBRE:

BA1: *komutativnost*

$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a;$$

BA2: *distributivnost*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)\,;$$

BA3: *neutralni element*

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a;$$

BA4: *inverzni element (komplement)*

$$a + a' = 1, \quad a \cdot a' = 0.$$

U svakoj Bulovoj algebri je broj elemenata oblika 2^n, $n \in \mathbb{N}$. Dakle, ne postoji Bulova algebra sa na primer 6 elemenata, već samo sa 2, 4, 8, 16, … elemenata.

Princip dualnosti: Dva tvrđenja su dualna ako se jedno iz drugog može dobiti zamenom svih pojavljovanja $+$ sa $\cdot$, $\cdot$ sa $+$, 0 sa 1 i 1 sa 0.

Može se primetiti da su sve aksiome Bulove algebre dualne. Zbog toga će i sve teorema Bulove algebre biti dualane. To znači da ako se dokaže neka teorema time je automatski dokazana i njoj dualna teorema.

OSNOVNE TEOREME BULOVE ALGEBRE $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$:

BT1: *zakon idempotentnosti*

$$a + a = a, \quad a \cdot a = a;$$

BT2: *ograničenost*

$$a + 1 = 1, \quad a \cdot 0 = 0;$$

BT3: *apsorbcija*

$$a + a \cdot b = a, \quad a \cdot (a + b) = a;$$

BT4:

$$a + a' \cdot b = a + b, \quad a \cdot (a' + b) = a \cdot b;$$

BT5: *asocijativnost*

$$(a + b) + c = a + (b + c)\,, \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\,;$$

BT6: *jedinstvenost komplementa*

$$(a + x = 1 \ \wedge \ a \cdot x = 0) \Longrightarrow x = a';$$

BT7: *involucja*

$$(a')' = a;$$

BT8:

$$0' = 1, \quad 1' = 0;$$

BT9: *De Morganovi zakoni*

$$(a + b)' = a' \cdot b', \quad (a \cdot b)' = a' + b'.$$

Dokaz:

BT1:

$$a \overset{BA3}{=} a + 0 \overset{BA4}{=} a + a \cdot a' \overset{BA2}{=} (a + a) \cdot (a + a') \overset{BA4}{=} (a + a) \cdot 1 \overset{BA3}{=} a + a;$$

BT2:

$$a + 1 \overset{BA3}{=} (a + 1) \cdot 1 \overset{BA1}{=} 1 \cdot (a + 1) \overset{BA4}{=} (a + a') \cdot (a + 1) \overset{BA2}{=} a + a' \cdot 1 \overset{BA3}{=} a + a' \overset{BA4}{=} 1;$$

BT3:
$$a+a\cdot b \overset{BA3}{=} a\cdot 1+a\cdot b \overset{BA2}{=} a\cdot(1+b) \overset{BA1}{=} a\cdot(b+1) \overset{BT2}{=} a\cdot 1 \overset{BA3}{=} a;$$

BT4:
$$a+a'\cdot b \overset{BA2}{=} (a+a')\cdot(a+b) \overset{BA4}{=} 1\cdot(a+b) \overset{BA1}{=} (a+b)\cdot 1 \overset{BA3}{=} a+b;$$

BT5:
$$\begin{aligned}(a+b)+c &\overset{BA3}{=} ((a+b)+c)\cdot 1 \overset{BA4}{=} ((a+b)+c)\cdot(a+a') \overset{BA1,\,BA2}{=} (a\cdot(a+b)+a\cdot c)+(a'\cdot(a+b)+a'\cdot c)\\ &\overset{BT3,\,BA2}{=} (a+a\cdot c)+((a'\cdot a+a'\cdot b)+a'\cdot c) \overset{BA1,\,BT3,\,BA4}{=} a+((0+a'\cdot b)+a'\cdot c)\\ &\overset{BA1,\,BA3}{=} a+(a'\cdot b+a'\cdot c) \overset{BA2}{=} a+a'\cdot(b+c) \overset{BT4}{=} a+(b+c)\,;\end{aligned}$$

BT6: Neka je $a+x=1 \,\wedge\, a\cdot x=0$.
$$\begin{aligned}x &\overset{BA3}{=} x\cdot 1 \overset{BA4}{=} x\cdot(a+a') \overset{BA2}{=} x\cdot a+x\cdot a' \overset{BA1}{=} a\cdot x+a'\cdot x \overset{pp.}{=} 0+a'\cdot x\\ &\overset{BA4}{=} a\cdot a'+a'\cdot x \overset{BA1}{=} a'\cdot a+a'\cdot x \overset{BA2}{=} a'\cdot(a+x) \overset{pp.}{=} a'\cdot 1 \overset{BA3}{=} a';\end{aligned}$$

BT7: Iz BA4 sledi
$$a+a'=1 \,\wedge\, a\cdot a'=0 \overset{BA1}{\Longrightarrow} a'+a=1 \,\wedge\, a'\cdot a=0 \overset{BT6}{\Longrightarrow} a=(a')'\,;$$

BT8: Iz BT2 i BA3 sledi
$$0+1=1 \,\wedge\, 0\cdot 1=0 \overset{BT6}{\Longrightarrow} 1=0';$$

BT9:
$$\begin{aligned}(a+b)+a'\cdot b' &\overset{BA2}{=} ((a+b)+a')\cdot((a+b)+b') \overset{BA1,\,BT5}{=} ((a+a')+b)\cdot(a+(b+b'))\\ &\overset{BA4}{=} (1+b)\cdot(a+1) \overset{BA1,\,BT2}{=} 1\cdot 1 \overset{BA3}{=} 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot a'\cdot b' &\overset{BA1,\,BA2}{=} a\cdot(a'\cdot b')+b\cdot(a'\cdot b') \overset{BA1,\,BT5}{=} (a\cdot a')\cdot b'+(b\cdot b')\cdot a'\\ &\overset{BA4}{=} 0\cdot b'+0\cdot a' \overset{BA1,\,BT2}{=} 0+0 \overset{BA3}{=} 0.\end{aligned}$$

Dakle, $(a+b)+a'\cdot b'=1 \,\wedge\, (a+b)\cdot a'\cdot b'=0 \overset{BT6}{\Longrightarrow} (a+b)'=a'\cdot b'$.

U Bulovoj algebri $\mathcal{B}=(B,+,\cdot,',0,1)$ **relacija** $\leq\subseteq B^2$ definisana na sledeći način:
$$\forall\, a,b\in B,\ a\leq b \Longleftrightarrow a+b=b$$
je relacija poretka.

Dokaz:

Refleksivnost: $\forall\, a\in B,\ a\leq a$ jer je po BT1 $a+a=a$.

Antisimetričnost: $a\leq b \,\wedge\, b\leq a \Longrightarrow a+b=b \,\wedge\, b+a=a \Longrightarrow a=b+a \overset{BA1}{=} a+b=b$.

Tranzitivnost: $a\leq b \,\wedge\, b\leq c \Longrightarrow a+b=b \,\wedge\, b+c=c \Longrightarrow a+c=a+(b+c) \overset{BT5}{=} (a+b)+c=b+c=c \Longrightarrow a\leq c$.

Kada se govori o relaciji poretka Bulove algebre misli se na ovu relaciju. Pod Haseovim dijagramom Bulove algebre podrazumeva se Haseov dijagram ove relacije poretka. U odnosu na nju 0 je najmanji, a 1 najveći elemenat.

Podalgebra Bulove algebre $\mathcal{B}=(B,+,\cdot,',0,1)$ je svaka Bulova algebra $\mathcal{B}_1=(B_1,+,\cdot,',0,1)$ gde je $B_1\subseteq B$, a operacije iz $\mathcal{B}_1$ su restrikcije operacija iz $\mathcal{B}$.

Konstante 0 i 1 u podalgebri $\mathcal{B}_1$ su iste kao konstante 0 i 1 u Bulovoj algebri $\mathcal{B}$.

Svaka Bulova algebra ima trivijalne podalgebre $(\{0,1\},+,\cdot,',0,1)$ i samu sebe.

PRIMERI BULOVIH ALGEBRI:

1. Bulova algebra iskaznog računa je uređena šestorka $(I,\vee,\wedge,\rceil,\perp,\top)$, gde je $I=\{\perp,\top\}$ i gde su $\vee$, $\wedge$ i $\rceil$ poznate operacije iskaznog racuna - disjunkcija, konjukcija i negacija. Umesto $\perp$, $\top$, $\vee$, $\wedge$ i $\rceil$ često se koriste redom oznake 0, 1, +, $\cdot$ i $'$.

Relacija poretka $\leq$ u ovoj algebri je: $p\leq q$ akko $p\vee q\Longleftrightarrow q$ akko $p\Longrightarrow q$.

Ova Bulova algebra ima smo jednu trivijalnu podalgebru - samu sebe.

2. Bulova algebra "partitivni skup" je uređena šestorka $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, , \emptyset, A)$, gde je A proizvoljan neprazan skup, a $\mathcal{P}(A)$ partitivni skup, skupa A.

Relacija poretka $\leq$ u ovoj algebri je: $X \leq Y$ akko $X \cup Y = Y$ akko $X \subseteq Y$.

3. Bulova algebra delitelja broja 30 je uređena šestorka $\left(D_{30}, NZS, NZD, \dfrac{30}{x}, 1, 30\right)$, gde je $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

Relacija poretka $\leq$ u ovoj algebri je: $x \leq y$ akko $NZS(x, y) = y$ akko $x \mid y$.

Podalgebre su osim trivijalnih $\left(D_{30}, NZS, NZD, \dfrac{30}{x}, 1, 30\right)$ i $\left(\{1, 30\}, NZS, NZD, \dfrac{30}{x}, 1, 30\right)$ još i

$\left(\{1, 30, 2, 15\}, NZS, NZD, \dfrac{30}{x}, 1, 30\right)$, $\left(\{1, 30, 3, 10\}, NZS, NZD, \dfrac{30}{x}, 1, 30\right)$ i $\left(\{1, 30, 5, 6\}, NZS, NZD, \dfrac{30}{x}, 1, 30\right)$.

Neka je n prirodan broj različit od 1 i neka je $D_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \mid n\}$ (skup svih delitelja broja n). Uređena šestorka $\left(D_n, NZS, NZD, \dfrac{n}{x}, 1, n\right)$ je Bulova algebra akko je $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, gde su p_1, p_2, ..., p_n međusobno različiti prosti brojevi.

Primer: Da li je $\left(D_{18}, NZS, NZD, \dfrac{18}{x}, 1, 18\right)$ Bulova algebra?

Kako je $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ po prethodnom sledi da ovo nije Bulova algebra.

BULOVI IZRAZI I POLINOMI

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ Bulova algebra

Konstanta skupa B je proizvoljan elemenat skupa B. Promenljiva skupa B je simbol koji se može zameniti bilo kojim elementom skupa B.

Bulovi izrazi:

1. Bulove promenljive i Bulove konstante su Bulovi izrazi.
2. Ako su A i B Bulovi izrazi onda su to i $(A + B)$, $(A \cdot B)$, A' i B'.
3. Bulovi izrazi se dobijaju konačnom primenom 1. i 2.

Primer: $\left((x' + y)' \cdot z\right)$ jeste Bulov izraz, dok $x + y' +$ nije Bulov izraz.

Monom je promenljiva ili njena negacija.

Primer: x, y, z, u, x', y', z', u', ...

Elementarna konjukcija (EK) je konjukcija (proizvod) monoma. Elemenat 1 Bulove algebre je elementarna konjukcija.

Primer: x, xy', $x'yzu$, 1, ...

Disjunktivna normalna forma (DNF) je disjunkcija (zbir) konačno mnogo elementarnih konjukcija.

Primer: $xy' + x' + xyz$, xy', 1, ...

Savršena elementarna konjukcija u odnosu na promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je elementarna konjukcija u kojoj se javlja svaka od tih promenljivih (negirana ili ne).

Savršena disjunktivna normalna forma (SDNF) u odnosu na promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je disjunktivna normalna forma u kojoj učestvuju samo (različite) savršene elementarne konjukcije u odnosu na te promenljive.

Primer: $xyz + x'yz + x'y'z$ je SDNF u odnosu na promenljive x, y, z.

Analogno se definišu elementadna disjunkcija (ED), konjuktivna normalna forma (KNF), savršena elementadna disjunkcija i savršena konjuktivna normalna forma (SKNF).

Svaki Bulov izraz se može svesti na DNF i KNF i pri tome DNF i KNF nisu jedinstveno određeni.

SDNF i SKNF su jedinstveno određeni u odnosu na zadati skup promenljivih koje se pojavljuju u izrazu.

OPIS POSTUPKA NALAŽENJA DNF I SDNF:

1. Koristeći De Morganove zakone (BT9) i zakon involucije (BT7) oslobađa se delovanja komplementa na izraze u zagradama, tako da se dobije izraz kod kog komplement deluje samo na promenljive.

2. Koristeći distributivnost operacije $\cdot$ prema operaciji $+$ izraz se dovodi na oblik zbira konjukcija.

3. Koristeći zakone $aa = a$, $aa' = 0$ i $a + 0 = a$ i uklanjaju'i višestruka pojavljivanja jedne promenljive u jednoj konjukciji dobija se izraz u obliku DNF.

4. Da bi se od (bilo koje) DNF dobila SDNF svaku elementarnu konjukciju treba po potrebi proširiti promenljivama koje se u njoj ne pojavljuju.

5. Na kraju se samo još koristeći idempotentnost uklone sve savršene elementarne konjukcije koje se u zbiru pojavljuju više puta.

Primer: $I = (x \cdot (y' + z'))' \cdot z + x'y'z'$

1. Koristeći De Morganove zakone ($(a+b)' = a' \cdot b'$, $\quad (a \cdot b)' = a' + b'$.) i zakon involucije ($(a')' = a$;) oslobađamo se delovanja komplementa na izraze u zagradama, tako da se dobije izraz kod kog komplement deluje samo na promenljive.

$$I = \left(x' + (y' + z')'\right) \cdot z + x'y'z' = (x' + yz) \cdot z + x'y'z'.$$

2. Koristeći distributivnost operacije $\cdot$ prema operaciji $+$ izraz se dovodi na oblik zbira konjukcija.

$$I = x'z + yzz + x'y'z'.$$

3. Koristeći zakone $aa = a$, $aa' = 0$ i $a + 0 = a$ i uklanjaju'i višestruka pojavljivanja jedne promenljive u jednoj konjukciji dobija se izraz u obliku DNF

$$I = x'z + yz + x'y'z'.$$

4. Da bi se od (bilo koje) DNF dobila SDNF svaku elementarnu konjukciju treba po potrebi proširiti promenljivama koje se u njoj ne pojavljuju

$$I = x'(y + y')z + (x + x')yz + x'y'z' = x'yz + x'y'z + xyz + x'yz + x'y'z'.$$

5. Na kraju se samo još koristeći idempotentnost uklone sve savršene elementarne konjukcije koje se u zbiru pojavljuju više puta

$$I = x'yz + x'y'z + xyz + x'y'z'.$$

BULOVE FUNKCIJE

Bulova funkcija od n promenljivih je svako preslikavanje $f : B^n \longrightarrow B$.

Na dalje će se posmatrati samo Bulove funkcije definisane na dvoelementnoj Bulovoj algebri $(\{0,1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$.

Svaki Bulov izraz jednoznačno određuje Bulovu funkciju, a jednoj Bulovoj funkciji odgovara više (beskonačno mnogo) ekvivalentnih Bulovih izraza.

Ako je $f(x_1, \ldots, x_n)$ Bulova funkcija, definisana na dvoelementnoj Bulovoj algebri $(\{0,1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$, tada se SDNF (SKNF) mogu konstruisati na sledeći način:

$$\mathrm{SDNF}\left(f(x_1, \ldots, x_n)\right) = \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

$$\mathrm{SKNF}\left(f(x_1, \ldots, x_n)\right) = \prod_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n} \left(f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + x_1^{\rceil\alpha_1} + \ldots + x_n^{\rceil\alpha_n}\right),$$

gde je $x^\alpha = \begin{cases} x, & \alpha = 1 \\ x', & \alpha = 0 \end{cases}$.

Primer:

a)

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} \mathrm{SDNF}(f(x,y)) &= 0\cdot x^0\cdot y^0+1\cdot x^0\cdot y^1+0\cdot x^1\cdot y^0+1\cdot x^1\cdot y^1 = x'y+xy,\\ \mathrm{SKNF}(f(x,y)) &= \left(0+x^1+y^1\right)\cdot\left(1+x^1+y^0\right)\cdot\left(0+x^0+y^1\right)\cdot\left(1+x^0+y^0\right) = (x+y)(x'+y)\,. \end{aligned}$$

b)

x	y	z	$f(x,y)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\begin{aligned} \mathrm{SDNF}(f(x,y)) &= x'yz'+x'yz+xy'z+xyz,\\ \mathrm{SKNF}(f(x,y)) &= (x+y+z)(x+y+z')(x'+y+z)(x'+y'+z)\,. \end{aligned}$$