Sistemi linearnih jednačina

November 30, 2021

Sistem m **linearnih jednačina** sa n nepoznatih je

$$S: \quad \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array},$$

gde je $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uređena n-torka nepoznatih, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ su koeficijenti, a $b_i \in \mathbb{R}$ slobodni članovi, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Ako je broj jednačina u sistemu jednak broju nepoznatih (tj. $m = n$) tada se sistem zove **kvadratni** sistem.

Ako su u sistemu svi slobodni članovi jednaki nuli (tj. ako je $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$,) onda se sistem naziva **homogen** sistem.

Skup rešenja sistema S, u oznaci R_s, čine sve uređene n-torke brojeva $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ koje zadovoljavaju svaku jednačinu sistema.

$x+3=5$

$x=2$

$R_s=\{2\}$

$x+y=0$

$2x+3y=5$

$x=-y$

$y=5$

$x=-5$

$R_s=\{(-5,5)\}$

0

$x+y=2$

$2x+y=5$

$x+y-2=0$

$2x+y-5=0$

$x+y=0$

$2x+y=0$

U zavisnosti od broja rešenja sistema, tj. prirode sistema, sistem može biti:

SAGLASAN
1. ODREĐEN - ima tačno jedno rešenje;
2. NEODREĐEN - ima više od jednog rešenja;
3. NEMOGUĆ (kontradiktoran, protivrečan)- nema rešenja.

$$\begin{array}{l} x+y=0 \\ 2x+3y=0 \end{array} \quad R_s=\{(0,0)\}$$

$$\begin{array}{l} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \end{array} \quad R_s=\{(t,-t) \mid t\in\mathbb{R}\}$$

$$\begin{array}{l} x+y=0 \\ x+y=1 \end{array} \quad R_s=\emptyset$$

Ako sistem ima bar jedno rešenje kaže se da je saglasan.

Homogen sistem sa $n \in \mathbb{N}$ promenljivih je uvek saglasan jer uvek ima bar jedno (trivijalno) rešenje $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.
Dakle, homogen sistem nikad nije nemoguć.

$(0,0,\ldots,0) \leftarrow$ TRIVIJALNO REŠENJE

$$\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2x+3y+5z=0 \\ -x+2y-z=0 \end{array}$$

HOMOGEN SISTEM
NJEGOVO REŠENJE JE UVEK $(0,0,0)$
ALI ONO NE MORA BITI JEDINO

Primer:

a) $$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \end{array},$$

ovaj sistem je nemoguć, tj. nema rešenja. $R_S = \emptyset$.

b) $$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ & & x_2 & = & 3 \end{array},$$

ovaj sistem je određen. $R_S = \{(1,3)\}$.

c) $$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & = & 6 \end{array},$$

ovaj sistem je neodređen, ima beskonačno mnogo rešenja. $R_S = \{(t, 2-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

$x_1 + x_2 = 2$

$3x_1 + 3x_2 = 6 \quad | : 3$

$x_1 + x_2 = 2$

$\cancel{x_1 + x_2 = 2}$

$x_1 + x_2 = 2$

$\boxed{x_2 = 2 - x_1}$

$x_1 = t, \quad t \in \mathbb{R}$

$x_2 = 2 - t$

$R_S = \{(t, 2-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Dva sistema jednačina su ekvivalentna ako i samo ako su im jednaki skupovi rešenja.

Primenom elementarnih transformacijama na sistem linearnih jednačina dobija se sistem ekvivalentan polaznom sistemu.

Elementarne transformacije sistema linearnih jednačina su:

- zamena mesta jednačinama;
- množenje jednačine skalarom različitim od nule;
- množenje jednačine skalarom i dodavanje nekoj drugoj jednačini;
- promena mesta sabircima u jednačinama (iste nepoznate pišu se jedna ispod druge odnosno u istoj koloni).

$$\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+3y-z=5 \\ -x+2y \quad =0 \end{array} \iff \begin{array}{l} -x+2y \quad =0 \;/\cdot 10 \\ x+y+z=1 \\ 2x+3y-z=5 \end{array} \iff \begin{array}{l} -10x+20y \quad =0 \\ x+y+z=1 \;\;)\cdot(-2) \\ 2x+3y-z=5 \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{l} -10x+20y=0 \\ x+y+z=1 \\ y-3z=3 \end{array} \iff \begin{array}{l} -10x \quad +20y=0 \\ x+z+y=1 \\ -3z+y=3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x+2y&=5 \quad \cdot(-3)\\ 3x-4y&=-5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y&=5\\ -10y&=-20 \end{aligned}$$

$\boxed{y=2}$

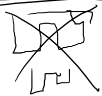
$x+4=5$

$\boxed{x=1}$

$R_s=\{(1,2)\}$

Postupci za rešavanje sistema linearnih jednačina

$$\begin{aligned} x+y+z&=0\\ y+z&=0\\ z&=0 \end{aligned}$$



Gausov postupak (Gausov algoritam, Gausova metoda eliminacije)

Može se primeniti za izračunavanje proizvoljnog sistema jednačina. Sastoji se u tome da se pomoću navedenih elementarnih transformacija koje očuvavaju ekvivalentnost sistema, dobije trougaoni oblik iz kojeg se lako izračunavaju nepoznate.

Primer: Gausovim postupkom, rešiti sistem linearnih jednačina

a) $\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 5 \\ 3x & - & 4y & = & -5 \end{array}$.

Množenjem prve jednačine sa -3 i dodavanjem drugoj jednačini dobija se

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 5 \\ 3x & - & 4y & = & -5 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 5 \\ & - & 10y & = & -20 \end{array} .$$

Iz druge jednačine sledi da je $y = 2$. Uvrštavanjem te vrednosti u prvu jednačinu dobija se $x = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 4 = 1$, tj. skup rešenja sistema je $R_s = \{(1, 2)\}$.

$$\begin{array}{l} x+y+z=6 \quad -2 \quad -3 \\ 2x+3y-2z=2 \\ 3x-y \quad =1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ y-4z=-10 \quad 4 \\ -4y-3z=-17 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ y-4z=-10 \\ -19z=-57 \end{array}$$

$$z=\frac{-57}{-19}=3$$

$$y-12=-10 \Rightarrow \boxed{y=2}$$

$$x+2+3=6 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$R_s=\{(1,2,3)\}$$

b)
$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & 2 \\ 3x & - & y & & & = & 1 \end{array},$$

Množenjem prve jednačine sa -2 i dodavanjem drugoj jednačini, a potom množenjem prve jednačine sa -3 i dodavanjem trećoj jednačini dobija se

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & 2 \\ 3x & - & y & & & = & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & y & - & 4z & = & -10 \\ & - & 4y & - & 3z & = & -17 \end{array}.$$

Množenjem druge jednačine sa 4 i dodavanjem trećoj jednačini, dobija se

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & y & - & 4z & = & -10 \\ & & & - & 19z & = & -57 \end{array}.$$

Dobijen je trougaoni oblik iz kojeg se iščitavaju rešenja. Iz treće jednačine sledi da je $z=3$. Zamenom u drugu jednačinu dobija se $y=-10+4\cdot 3=2$, a zamenom u prvu $x=6-2-3=1$, tj. skup rešenja sistema je $R_s=\{(1,2,3)\}$.

Rešavanje sistema pomoću determinanti

Determinante se mogu primeniti samo za rešavanje kvadratnih sistema. Determinanta sistema S sa n promenljivih i n nepoznatih je:

$$D_S = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Kramerovo pravilo: Ako je determinanta kvadratnog sistema linearnih jednačina $D_S \neq 0$, sistem određen i njegovo jedinstveno rešenje je:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{D_{x_1}}{D_S}, \frac{D_{x_2}}{D_S}, \dots, \frac{D_{x_n}}{D_S} \right),$$

gde je

$$D_{x_i} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

$$\begin{aligned} x+y+z&=2 \\ 2x-y+3z&=1 \\ y+2z&=3 \end{aligned}$$

$$D_S = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}$$

$$= -2+2-3-4 = -7 \neq 0$$

$$D_x = \left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{array} =$$

$$= -4+9+1+3-6-2 = 1$$

$$D_y = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{array}$$

$$= 2+6-9-8 = -9$$

$$D_z = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}$$

$$= -3+4-1-6 = -6$$

$$x = \frac{D_x}{D_S} = \frac{1}{-7}, \quad y = \frac{D_y}{D_S} = \frac{-9}{-7} = \frac{9}{7}, \quad z = \frac{D_z}{D_S} = \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7}$$

$$\boxed{R_S = \left\{\left(-\frac{1}{7}, \frac{9}{7}, \frac{6}{7}\right)\right\}}$$

ODREĐEN

NEODREĐEN

NEMOGUĆ

NIJE ODREĐEN

Ako je $D_S = 0$ sistem je nemoguć ili neodređen. U tom slučaju se moramo vratiti na Gausov postupak i na taj način odrediti kakav je tačno sistem.

! 0

Za homogen kvadratni sistem linearnih jednačina S važi:

- $D_S \neq 0$, sistem ima samo trivijalno rešenje;
- $D_S = 0$, sistem je neodređen. (ZATO ŠTO NEMOGUĆ NE MOŽE BITI)

NIKADA PREKO $D_x, D_y, \ldots$ NE MOŽEMO ZAKLJUČITI DA LI JE NEMOGUĆ ILI NEODREĐEN

VAŽNO!!

$x+y=2 \quad /\cdot 2$

$2x+2y=4$

NEODREĐEN

$R_S=\{(t,2-t) \mid t\in\mathbb{R}\}$

$D_S=\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}=0$

$D_x=\begin{vmatrix}2&1\\4&2\end{vmatrix}=0$

$D_y=\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=0$

$D_S=0 \quad D_x=D_y=0$

$x+y+z=1$

$x+y+z=1 \quad /\cdot 2$

$2x+2y+2z=3$

NEMOGUĆ

$D_S=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\2&2&2\end{vmatrix}=0$

$D_x=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\3&2&2\end{vmatrix}=0$

$D_y=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\2&3&2\end{vmatrix}=0$

$D_z=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\2&2&3\end{vmatrix}=0$

$D_S=0 \quad D_x=D_y=D_z=0$

Primer: Kramerovim pravilom, rešiti sistem linearnih jednačina

TEST

a) $\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 8 \\ 3x & + & 2y & = & -2 \end{array}$

Kako je

$$D_s = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7 \neq 0,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 2 = 14,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 24 = -28,$$

dobija se

$$x = \frac{D_x}{D_s} = \frac{14}{7} = 2 \text{ i } y = \frac{D_y}{D_s} = -\frac{28}{7} = -4,$$

tj. skup rešenja datog sistema je $R_s = \{(2, -4)\}$.

$$\text{b)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 7y & + & z & = & -8 \\ 3x & & & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 5y & + & 5z & = & 0 \end{array}$$

Kako je

$$D_s = \left|\begin{array}{rrr|rr} 2 & -7 & 1 & 2 & -7 \\ 3 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right. = 0 + 14 + 15 - 0 + 10 + 105 = 144 \neq 0,$$

$$D_x = \left|\begin{array}{rrr|rr} -8 & -7 & 1 & -8 & -7 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 5 \end{array}\right. = 0 + 0 + 5 - 0 - 40 + 35 = 0,$$

$$D_y = \left|\begin{array}{rrr|rr} 2 & -8 & 1 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right. = 10 + 16 + 0 - 2 - 0 + 120 = 144,$$

$$D_z = \left|\begin{array}{rrr|rr} 2 & -7 & -8 & 2 & -7 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right. = 0 - 14 - 120 - 0 - 10 - 0 = -144,$$

dobija se

$$x = \frac{D_x}{D_s} = \frac{0}{144} = 0, \quad y = \frac{D_y}{D_s} = \frac{144}{144} = 1$$

$$\text{i} \quad z = \frac{D_z}{D_s} = -\frac{144}{144} = -1,$$

tj. skup rešenja datog sistema je $R_s = \{(0, 1, -1)\}$.

$D_s \neq 0 \Rightarrow$ sistem određen

$D_s = 0 \Rightarrow$ sistem je nemoguć ili neodređen

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$

$x + y = 1$
$ax + y = 2$

$x + y = 1$
$x + 2y = 4$