Prsteni i polja- vežbe

October 25, 2021

1. Ispitati da li je $(\{a, b, c\}, +, \cdot)$ prsten, ako su operacije $+$ i $\cdot$ date tablicama

$+$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

i

$\cdot$	a	b	c
a	c	c	c
b	c	c	c
c	c	c	c

.

$(R, +, \cdot)$ – PRSTEN:

1) $(R, +)$ - Abelova grupa

2) $(R, \cdot)$ - polugrupa (asocijativan grupoid)

3) distributivnost $\cdot$ prema $+$

I. $(\{a, b, c\}, +)$ je Abelova grupa?

ZATVORENOST: operacija $+$ je zatvorena u skupu $\{a, b, c\}$ jer se u tablici operacije $+$ pojavljuju samo elementi skupa $\{a, b, c\}$.

KOMUTATIVNOST: važi jer je tablica simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu.

NEUTRALNI ELEMENT: je c jer su njegova vrsta i kolona jednaka graničnoj vrsti i koloni.

INVERZNI ELEMENT: Svaki elemenat ima inverzni jer se neutralni elemenat pojavljuje u svakoj vrsti i svakoj oloni tačno jednom simetri;no raspoređen u odnosu na glavnu dijagonalu. $-c = c$, $-a = b$ i $-b = a$.

ASOCIJATIVNOST: ako su x, y ili z jednaki sa $c$koji je neutralni elemenat asocijativnost važi. U ostalim slučajevima treba proveriti.Postoji 8 mogućnosti.

$$\begin{aligned}
a+(a+a) = & \quad c \quad = (a+a)+a, \\
a+(a+b) = & \quad a \quad = (a+a)+b, \\
a+(b+a) = & \quad a \quad = (a+ab)+a, \\
a+(b+b) = & \quad b \quad = (a+b)+b, \\
b+(a+a) = & \quad a \quad = (b+a)+a, \\
b+(b+a) = & \quad b \quad = (b+b)+a, \\
b+(b+a) = & \quad b \quad = (b+a)+b, \\
b+(b+b) = & \quad c \quad = (b+b)+b
\end{aligned}$$

Dakle, $(\{a, b, c\}, +)$ jeste Abelova grupa.

II. $(\{a, b, c\}, \cdot)$ je polugrupa?

ZATVORENOST: operacija $\cdot$ je zatvorena u skupu $\{a, b, c\}$ jer se u tablici operacije $\cdot$ pojavljuju samo elementi skupa $\{a, b, c\}$.

ASOCIJATIVNOST: trivijalno važi jer se u tablici, kao rezultat operacije $\cdot$ pojavljuje samo elemenat c.

Dakle, $(\{a, b, c\}, \cdot)$ jeste polugrupa.

III. DISTRIBUTIVNOST $\cdot$ prema $+$: Kako je $\cdot$ komutativna operacija jer je njena tablica simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu pošto se u njoj pojavljuje samo elemenat c, dovoljno je proveriti samo levu distributivnost, tj. da li važi $\forall\, x, y, z \in \{a, b, c\}$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$?
Kako god da se izaberu $x, y, z \in \{a, b, c\}$ leva strana jednakosti je jednaka c, a desna strana je $c + c$ što je opet c. Dakle, distributivnost važi.

Iz I., II. i III. se zaključuje da je $(\{a, b, c\}, +, \cdot)$ prsten.

2. Neka je $A = \{a, b, c, d\}$. Dopuniti tablice operacija $+$ i $\cdot$

$+$	a	b	c	d
a				
b		a	d	c
c			a	
d				a

i

$\cdot$	a	b	c	d
a				
b		b	a	
c		a	c	
d				

,

tako da struktura $(A, +, \cdot)$ bude prsten.

Struktura $(A, +)$ treba da bude Abelova grupa. Na osnovu datih vrednosti u tablici operacije $+$ može se zaključiti da neutralni element operacije $+$ mora biti a, pa vrstu i kolonu elementa a treba popuniti tako da budu jednake sa graničnom vrstom i kolonom

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c		a	
d	d			a

.

Zbog komutativnosti operacije $+$, elementi u tablici moraju biti simetrično raspoređeni u odnosu na glavnu dijagonalu

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	
d	d	c		a

.

Na preostala mesta se mora staviti elemenat b jer bi se u suprotnom u nekoj vrsti ili koloni ponavljali elementi, što nije moguće u tablici grupovne operacije.

Dakle,

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

.

Neutralni elemenat a iz $(A, +)$ mora biti nilpotentni elemenat u $(A, \cdot)$ pa se u vrsti i koloni elementa a u tablici operacije $\cdot$ mora pojavljivati samo elemenat a, tj.

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	
c	a	a	c	
d	a			

Preostala mesta u tablici operacije $\cdot$ se popunjavaju tako da važi distributivnost operacije $\cdot$ prema $+$, tj.

$$b \cdot d = b \cdot (b+c) = b \cdot b + b \cdot c = b + a = b,$$

$$c \cdot d = c \cdot (b+c) = c \cdot b + c \cdot c = a + c = c,$$

$$d \cdot b = (b+c) \cdot b = b \cdot b + c \cdot b = b + a = b,$$

$$d \cdot c = (b+c) \cdot c = b \cdot c + c \cdot c = a + c = c,$$

$$d \cdot d = (b+c) \cdot d = b \cdot d + c \cdot d = b + c = d,$$

Dakle,

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	a	c	c
d	a	b	c	d

.

3. Dokazati da je $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ polje, ako su operacije $\oplus$ i $\odot$ definisane sa

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, \ a \oplus b = a + b + 1,$$

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, \ a \odot b = a + b + ab.$$

I $(\mathbb{Q}, \oplus)$ Abelova grupa?

1, ZATVORENOST: $\forall x, y \in \mathbb{Q}, \ x \oplus y \in \mathbb{Q}$?

$x \oplus y = x + y + 1 \in \mathbb{Q}$ ✓

2, ASOCIJATIVNOST: $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}, \ x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$?

$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (y + z + 1) = x + y + z + 1 + 1$ ✓

$(x \oplus y) \oplus z = (x + y + 1) \oplus z = x + y + 1 + z + 1$ "

3, LEVI. NEUTRALNI EL. $\exists e \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{Q}, \ e \oplus x = x$?

$e \oplus x = x$

$e + \cancel{x} + 1 = \cancel{x}$

$\boxed{e = -1 \in \mathbb{Q}}$

4, LEVI INVERZNI EL. $\forall x \in \mathbb{Q}, \ \exists x' \in \mathbb{Q}, \ x' \oplus x = -1$?

$x' \oplus x = -1$

$x' + x + 1 = -1$

$\boxed{x' = -2 - x \in \mathbb{Q}}$

5, KOMUTATIVNOST: $\forall x, y \in \mathbb{Q}, \ x \oplus y = y \oplus x$?

$x \oplus y = x + y + 1 = y + x + 1 = y \oplus x$ ✓

$\Rightarrow (\mathbb{Q}, \oplus)$ jeste Abelova grupa

II $(\mathbb{Q}, \odot)$ – polugrupa?

1, ZATVORENOST: $\forall x, y \in \mathbb{Q}, \ x \odot y \in \mathbb{Q}$?

$x \odot y = x + y + xy \in \mathbb{Q}$ ✓

2, ASOCIJATIVNOST: $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$, $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$?

✓

$x \odot (y \odot z) = x \odot (y + z + yz) =$

$= x + y + z + yz + x(y + z + yz)$

$= \cancel{x} + \cancel{y} + \cancel{z} + \cancel{yz} + \cancel{xy} + \cancel{xz} + \cancel{xyz}$

$(x \odot y) \odot z = (x + y + xy) \odot z = x + y + xy + z +$

$+ (x + y + xy)z = \cancel{x} + \cancel{y} + \cancel{xy} + \cancel{z} + \cancel{xz} + \cancel{yz} + \cancel{xyz}$

$\Rightarrow (\mathbb{Q}, \odot)$ jeste polugrupa.

III distributivnost $\odot$ prema $\oplus$

$\forall x,y,z \in \mathbb{Q}, \quad x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$?

$(y \oplus z) \odot x = (y \odot x) + (z \odot x)$?

MOŽEMO PRVO POKAZATI DA JE $\odot$ KOMUTATIVNO, PA ONDA NE MORAMO OBJE JEDNAKOSTI POKAZIVATI.

$\forall x,y \in \mathbb{Q}, \quad x \odot y = y \odot x$?

$x \odot y = x + y + xy = y + x + yx = y \odot x$ ✓

IV $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, \odot)$ – Abelova grupa?

neutralni element za operaciju $\oplus$

1, ZATVORENOST: $\forall x,y \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}, \ x \odot y \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

$x \neq -1$

$y \neq -1$

$x \odot y = x + y + xy \in \mathbb{Q}$

treba još $x \odot y \neq -1$

pp. suprotno $x \odot y = -1$

$x + y + xy = -1$

$x + y + xy + 1 = 0$

$x(1+y) + (1+y) = 0$

$(1+y)(1+x) = 0$

$y = -1 \ \vee \ x = -1$ ↯

$\Rightarrow x \odot y \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

$x \odot (y \oplus z) = x \odot (y + z + 1) = x + y + z + 1 + x(y + z + 1) = x + y + z + 1 + xy + xz + x$

$(x \odot y) \oplus (x \odot z) = (x + y + xy) \oplus (x + z + xz) = x + y + xy + x + z + xz + 1$ //

$\Rightarrow$ važi distributivnost $\odot$ prema $\oplus$

$\Rightarrow (\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ jeste prsten

2, KOMUTATIVNOST I ASOCIJATIVNOST VAŽE JER JE $\odot$ NA $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ RESTRIKCIJA OPERACIJE $\odot$ NA $\mathbb{Q}$ ZA KOJU SMO POKAZALI DA VAŽE KOMUTATIVNOST I ASOCIJATIVNOST

3, LEVI NEUTRALNI EL. $\exists e_1 \in \mathbb{Q}\setminus\{-1\},\ \forall x \in \mathbb{Q}\setminus\{-1\},\ e_1 \odot x = x$?

$e_1 \odot x = x$

$e_1 + \cancel{x} + e_1 x = \cancel{x}$

$e_1(1+x) = 0$

$e_1 = 0 \quad \vee \quad 1+x=0$ ↯

$\Rightarrow \boxed{e_1 = 0 \in \mathbb{Q}\setminus\{-1\}}$

0 JE LEVI NEUTRALNI

4, LEVI INVERZNI EL. $\forall x \in \mathbb{Q}\setminus\{-1\},\ \exists x' \in \mathbb{Q}\setminus\{-1\},\ x' \odot x = 0$?

$x' \odot x = 0$

$x' + x + x'x = 0$

$x'(1+x) = -x \quad \Big| :(x+1) \neq 0$

$x' = -\dfrac{x}{1+x} \in \mathbb{Q}$

$x \neq -1$

$x+1 \neq 0$

Treba još pokazati da je $x' \neq -1$

pretpostavimo suprotno, tj. $x' = -1$

$x' = -1$

$-\dfrac{x}{x+1} = -1$

$\dfrac{x}{x+1} = 1$

$\cancel{x} = \cancel{x} + 1$

$0 = 1$ ↯

$\Rightarrow$ pretpostavka nije bila dobra pa je $x' \neq -1$, tj. $x' \in \mathbb{Q}\setminus\{-1\}$

$\Rightarrow (\mathbb{Q}\setminus\{-1\}, \odot)$ jeste Abelova grupa.

$\Rightarrow (\mathbb{Q}\setminus\{-1\}, \oplus, \odot)$ jeste polje.

4. Neka su na $A = \{(a, 1) \mid a \in \mathbb{R}\}$ definisane sledeće binarne operacije:

$$\forall\ (a,1), (b,1) \in A,\ \ (a,1) \oplus (b,1) = (a+b, 1),$$

$$\forall\ (a,1), (b,1) \in A,\ \ (a,1) \odot (b,1) = (ab + a + b, 1).$$

Ispitati da li je $(A, \oplus, \odot)$ prsten. (NIJE PRSTEN NE VAŽI DISTRIBUTIVNOST)

ZA VEŽBU:

- IZ SKRIPTE Zadatak 7.1, 7.2, 7.6, 7.7;

- 1. Na skupu $A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ definisane su operacije

$$\forall\ (a, b), (c, d) \in A,\ (a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$\forall\ (a, b), (c, d) \in A,\ (a, b) \odot (c, d) = (ac, bd).$$

Dokazati da je $(A, \oplus, \odot)$ komutativan prsten sa jedinicom.