$3*4 = 3\cdot 4 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 2 < 28$

7. Na skupu $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ definisana je operacija $*$ sa

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}\,,\ a * b = a\cdot b + 2a + 2b + 2,$$

gde je $+$ operacija sabiranja, a $\cdot$ operacija množenja. Ispitati algebarsku sturkturu $(\mathbb{R}\setminus\{-2\}, *)$.

ZATVORENOST: $\forall x,y \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $x*y \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$?

$x*y = xy + 2x + 2y + 2 \in \mathbb{R}$

proizvod i zbir realnih brojeva je realan broj

Treba još da pokažemo da $x*y \neq -2$.

Pretpostavimo suprotno, tj. $x*y = -2$

$x*y = -2 \Rightarrow xy + 2x + 2y + 2 = -2$

$\Rightarrow xy + 2x + 2y + 4 = 0$

$\Rightarrow x(y+2) + 2(y+2) = 0$

$\Rightarrow (y+2)(x+2) = 0$

$\Rightarrow y+2 = 0 \ \vee\ x+2 = 0$

$\Rightarrow y = -2 \ \vee\ x = -2$

$\Rightarrow$ DAKLE, PRETPOSTAVKA NAM NIJE BILA DOBRA, PA JE $x*y \neq -2$

KOMUTATIVNOST: $\forall x,y \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $x*y = y*x$?

$x*y = xy + 2x + 2y + 2$))

$y*x = yx + 2y + 2x + 2$

ASOCIJATIVNOST: $\forall x,y,z \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $x*(y*z) = (x*y)*z$?

$x*(y*z) = x*(yz + 2y + 2z + 2)$

$= x(yz + 2y + 2z + 2) + 2x + 2(yz + 2y + 2z + 2) + 2$

$= xyz + 2xy + 2xz + 4x + 2yz + 4y + 4z + 6$

$(x*y)*z = (xy + 2x + 2y + 2)*z$

$= (xy + 2x + 2y + 2)\cdot z + 2(xy + 2x + 2y + 2) + 2z + 2$

$= xyz + 2xz + 2yz + 4z + 2xy + 4x + 4y + 6$

$a * b = ab + 2a + 2b + 2$

NEUTRALNI EL. $\exists e \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, e * x = x$?

$e * x = x$

$ex + 2e + 2x + 2 = x$

$e(x+2) = -2 - x$

$e(x+2) = -(2+x)$, kako je $x \neq -2$

$e = -1 \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

KANCELACIJA ZBOG

ASOCIJATIVNA +

NEUTRALNI +

INVERZNI

INVERZNI EL. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \exists x' \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, x' * x = -1$?

$x' * x = -1$

$x'x + 2x' + 2x + 2 = -1$

$x'(x+2) = -3 - 2x$, kako je $x \neq -2$

$$x' = \frac{-3-2x}{x+2}$$

Treba još pokazati da $x' \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$x' \in \mathbb{R}$ je po treba još samo da je $x' \neq -2$

Pretpostavimo suprotno

$x' = -2 \Rightarrow \frac{-3-2x}{x+2} = -2$

$\Rightarrow -3 - 2x = -2x - 4$

$\Rightarrow -3 = -4$ ↯

Dakle, $x' \neq -2$ pa $x' \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

IDEMPOTENTNOST:

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, x * x = x$?

$x * x = x^2 + 2x + 2x + 2$

$= x^2 + 4x + 2$

$x^2 + 4x + 2 = x$

$x^2 + 3x + 2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$ $\langle$ -1, -2

$x = -1$ ~~$x = -2$~~

Samo za -1 važi da je $(-1) * (-1) = (-1)$ za ostale ne važi.

NILPOTENTNOST:

$\exists 0 \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$0 * x = 0$?

$0 * x = 0$

$0x + 20 + 2x + 2 = 0$

$0(x+1) + 2(x+1) = 0$

$(x+1)(0+2) = 0$

$x = -1$

$0 = -2$ $\notin \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

NEMA

$f(2)=\top$
$f(4)=\top$
$f(16)=\top$
$f(3)=\bot$
$f(7)=\bot$

$\vee$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

8. Dokazati da je funkcija $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \{\top, \bot\}$ definisana se

$$f(x) = \begin{cases} \top, & x \text{ je paran broj}, \\ \bot, & x \text{ je neparan broj}, \end{cases}$$

homomorfizam grupoida $(\mathbb{Z}, \cdot)$ i $(\{\top, \bot\}, \vee)$ ali nije homomorfizam grupoida $(\mathbb{Z}, \cdot)$ i $(\{\top, \bot\}, \wedge)$.

$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad f(x \cdot y) = f(x) \vee f(y)$

1) x i y - su PARNI $\Rightarrow x \cdot y$ - PARAN $\Rightarrow f(x \cdot y) = \top$, $f(x) = \top$, $f(y) = \top$

$f(x \cdot y) = f(x) \vee f(y)$

$\top = \top \vee \top$

$\top = \top$

$\top$ ✓

2) x JE PARAN, y JE NEPARAN $\Rightarrow xy$ - PARAN

3) x JE NEPARAN, y JE PARAN $\Rightarrow xy$ - PARAN

$\Rightarrow f(x \cdot y) = \top$, $f(x) = \top$, $f(y) = \bot$

$f(x \cdot y) = f(x) \vee f(y)$

$\top = \top \vee \bot$

$\top = \top$

$\top$ ✓

4) x i y su NEPARNI

$\Rightarrow xy$ - NEPARAN $\Rightarrow f(x \cdot y) = \bot$, $f(x) = \bot$, $f(y) = \bot$

$f(x \cdot y) = f(x) \vee f(y)$

$\bot = \bot \vee \bot$

$\bot = \bot$ ✓

x - PARAN $\Rightarrow$ $f(x) = T$

y - NEPARAN $\Rightarrow$ $f(y) = \bot$

$\Downarrow$

$x \circ y$ PARAN $\Rightarrow$ $f(x \cdot y) = T$

$f(x \cdot y) = f(x) \wedge f(y)$

$T = T \wedge \bot$

$T = \bot$

ZA VEŽBU IZ SKRIPTE:
Zadatak 4.1, 4.3, 4.4, 6.1 (bez h), 6.2 (bez f)
Primer 4.1