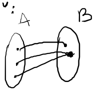
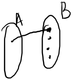
„1-1":



$f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$

„na"



$\forall y\in B, \exists x\in A$
$f(x)=y$

4. Za funkcije $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ i $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definisane sa

$$f(x)=x^3+1 \quad \text{i} \quad g(x)=2x,$$

odrediti: $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$, $g\circ g$, f^{-1} i g^{-1} ako postoje.

$f\circ g(x)=f(g(x))=f(2x)=(2x)^3+1=8x^3+1$

$g\circ f(x)=g(f(x))=g(x^3+1)=2(x^3+1)$

$f\circ f(x)=f(f(x))=f(x^3+1)=(x^3+1)^3+1$

$g\circ g(x)=g(g(x))=g(2x)=2\cdot 2x=4x$

f bijekcija? ✓

f „1-1"? ✓

$f(x)=f(y) \Rightarrow x^3+\cancel{1}=y^3+\cancel{1}$
$\Rightarrow x^3=y^3$
$\Rightarrow x=y$

f „na"? ✓

$\forall y\in B, \exists x\in A, f(x)=y$

$f(x)=y \Rightarrow x^3+1=y$
$\Rightarrow x^3=y-1$
$\Rightarrow x=\sqrt[3]{y-1}$

увек је дефинисано, tj. за $\forall y\in\mathbb{R}$

што значи $\forall y\in\mathbb{R}, \exists x=\sqrt[3]{y-1}\in\mathbb{R}, f(x)=f(\sqrt[3]{y-1})=y$

$f^{-1}(f(x))=x$

$f^{-1}(\underbrace{x^3+1}_{t})=x$

$t=x^3+1$
$x^3=t-1$
$x=\sqrt[3]{t-1}$

$f^{-1}(t)=\sqrt[3]{t-1}$

$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$

g bijekcija? ✓

g „1-1"? ✓

$g(x)=g(y) \Rightarrow \cancel{2}x=\cancel{2}y$
$\Rightarrow x=y$

g „na"? ✓

$\forall y\in B, \exists x\in A, g(x)=y$

$g(x)=y \Rightarrow 2x=y$
$\Rightarrow x=\frac{y}{2}$

што значи $\forall y\in\mathbb{R}, \exists x=\frac{y}{2}\in\mathbb{R}, g(x)=g(\frac{y}{2})=y$

$g^{-1}(g(x)) = x$

$g^{-1}(\underbrace{2x}_{t}) = x$

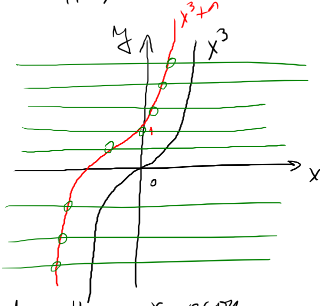
$2x = t \Rightarrow x = \frac{t}{2}$

$g^{-1}(t) = \frac{t}{2}$

$g^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

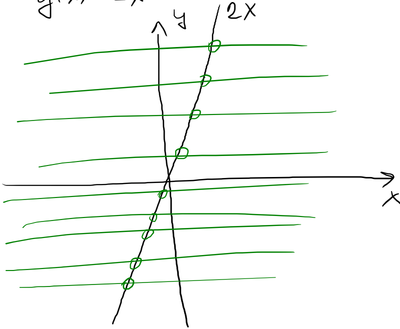
II начин да се покаже да и $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ биекција е

$f(x) = x^3 + 1$

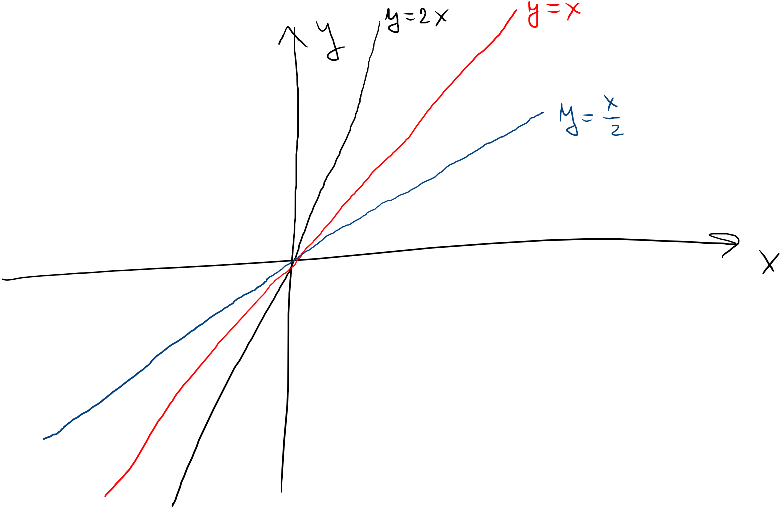


Како секоја права || со x-оска сече графикот функцијата $f(x) = x^3 + 1$ у точно една точка функцијата $f(x) = x^3 + 1$ е биекција.

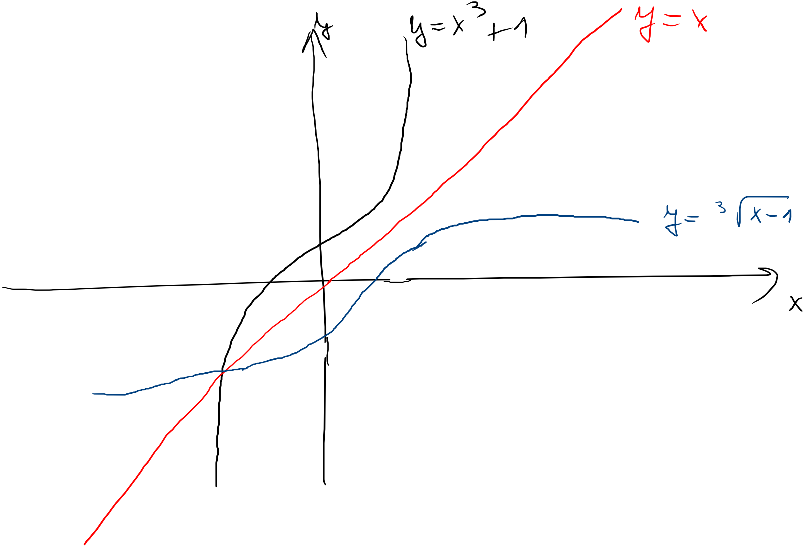
$g(x) = 2x$



← исто важи само за $g(x) = 2x$



y
y = 2x
y = x
y = x/2
x



y
$y = x^3 + 1$
$y = x$
$y = \sqrt[3]{x-1}$
x

5. Za funkcije $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisane sa

$$f(x) = 1 - 3x \quad \text{i} \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{3},$$

odrediti: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$, f^{-1} i g^{-1} ako postoje.

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x^2-1}{3}\right) = 1 - \cancel{3}\,\frac{x^2-1}{\cancel{3}} = 2 - x^2$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(1-3x) = \frac{(1-3x)^2 - 1}{3}$

$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(1-3x) = 1 - 3(1-3x) = -2 + 9x$

$g \circ g(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{x^2-1}{3}\right) = \frac{\left(\frac{x^2-1}{3}\right)^2 - 1}{3}$

f bijekcija? ✓

„1–1": $\underline{f(x) = f(y)} \Rightarrow \cancel{1} - 3x = \cancel{1} - 3y$ ✓

$\Rightarrow -\cancel{3}x = -\cancel{3}y$

$\Rightarrow \underline{x = y}$

„na": $\underline{\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y}$ ✓

$f(x) = y \Rightarrow 1 - 3x = y \Rightarrow 3x = 1 - y \Rightarrow x = \frac{1-y}{3}$

$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x = \frac{1-y}{3} \in \mathbb{R}$

$f(x) = f\left(\frac{1-y}{3}\right) = y$

$f^{-1}(f(x)) = x$

$f^{-1}(\underbrace{1-3x}_{t}) = x$

$1 - 3x = t \Rightarrow x = \frac{1-t}{3}$

$f^{-1}(t) = \frac{1-t}{3}$

$f^{-1}(x) = \frac{1-x}{3}$

g bijekcija? – nije „1–1" $\Rightarrow \nexists g^{-1}$

„1–1" $\underline{g(x) = g(y)} \Rightarrow \frac{x^2-1}{\cancel{3}} = \frac{y^2-1}{\cancel{3}}$

$\Rightarrow x^2 - \cancel{1} = y^2 - \cancel{1}$

$\Rightarrow x^2 = y^2$

$\Rightarrow \underline{x = y} \lor \boxed{x = -y}$ ☹

$\cancel{+}x = \cancel{+}y$

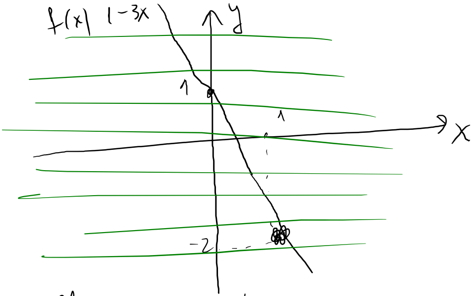
$2^2 = 2^2$ $\quad (-2)^2 = (-2)^2$

$2^2 = (-2)^2$ $\quad (-2)^2 = 2^2$

II начин за биекција

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

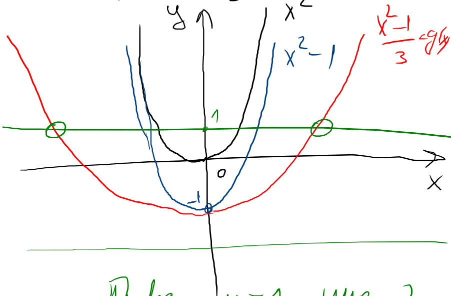
$f(x) = 1 - 3x$



Свака права ∥ x-оси сече $f(x) = 1 - 3x$ у тачно једној тачки $\Rightarrow$ $f(x)$ је биекција

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{3}$



Права $y = 1$ има 2 пресека со $g(x) = \dfrac{x^2-1}{3}$ $\Rightarrow$ $g(x)$ није „1-1"

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{3}$$

Пробам да видим да ли је $g(x)$ „на“ функција

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = y$$

$$f(x) = y \Rightarrow \frac{x^2-1}{3} = y$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 3y$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 + 3y$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{1+3y}$$

Овај корен је дефинисан за $1 + 3y \geq 0$, тј.

за $y \geq -\frac{1}{3}$

$$\mathcal{R}(f) = \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

Како $\underline{\mathcal{R}(f) \neq \mathbb{R}}$ она није „на“

Решимо за $y = -5$ не постоји x за које је $g(x) = -5$

$f\colon \{a,b,c,d\} \to \{a,b,c,d\}$

$g\colon$

6. Neka su f i g funkcije definisane sa

$f = \{(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\}$

$g = \{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b)\}$

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}.$$

Odrediti: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$, f^{-1} i g^{-1} ako postoje.

generalno ne važi

$f \circ g = g \circ f$

He može

$f \circ g(a) = f(g(a)) = f(c) = d$

$f \circ g(b) = f(g(b)) = f(d) = c$

$f \circ g(c) = f(g(c)) = f(a) = b$

$f \circ g(d) = f(g(d)) = f(b) = a$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

PO DEFINICIJI

$f^{-1} \circ f = i_d$

$f^{-1}(f(x)) = x$

$$g \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

$$f \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = i_d$$

$$g \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = i_d$$

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix} = f$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix} = g$$

7. Neka su f i g funkcije definisane sa $f,g : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odrediti: f^{-1} , g^{-1}, $f \circ g$, $(f \circ g)^{-1}$, $g^{-1} \circ f^{-1}$, ako postoje.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(f \circ g)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} \circ f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A je domen B je kodomen

8. Neka je A najveći podskup skupa $\mathbb{R}$, a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je dobro definisana funkcija $f : A \longrightarrow B$. Za date funkcije f odrediti skupove A i B i ispitati injektivnost, sirjektivnost.

8.1 $f(x) = x^2 - x - 2$;

Како скуп B треба да буде најмањи подскуп од $\mathbb{R}$ њега ће чинити само они $y \in \mathbb{R}$ за које постоји $x \in A$ такво да је $f(x) = y$, па ће B бити $K(f)$, тј. $B = K(f)$. Због начина избора скупа B $(B = K(f))$ ове дате ће аутоматски бити сурјективне, тј. „на“.

$f(x) = x^2 - x - 2$

$\boxed{A = \mathbb{R}}$

B ?

I начин:

$\underline{\forall y \in B,\ \exists x \in A,\ f(x) = y}$

$f(x) = y \Rightarrow x^2 - x - 2 = y$

$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$

$\Rightarrow x^2 - 2x \boxed{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = y$

$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = y$

$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = y$

$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = y + \frac{9}{4}$

$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{y + \frac{9}{4}}$

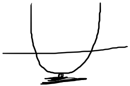
$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{y + \frac{9}{4}}$

$y + \frac{9}{4} \geq 0 \Rightarrow y \geq -\frac{9}{4}$

$\boxed{B = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)}$

II начин:

II_1: $f(x) = x^2 - x - 2$



$T_{мин}\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

$T_{мин}\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ $B = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$

II_2: $f(x) = x^2 - x - 2$

$f'(x) = 2x - 1$

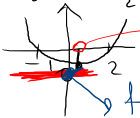
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4}$

$B = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$

II_3: $f(x) = x^2 - x - 2$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$



$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$

$B = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$

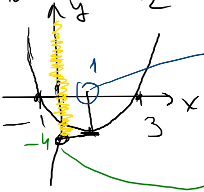
f нуле интересантна

$f(2) = f(-1) = 0$

④ $f(x) = x^2 - 2x - 3$

$\boxed{A = \mathbb{R}}$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$



$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$f(1) = 1 - 2 - 3 = -4$$

ова може и на било кој друг начин

$\boxed{B = [-4, +\infty)}$

$f(3) = f(-1) = 0 \Rightarrow f$ нули „−1“

8.2 $f(x) = \frac{1-x}{2x+5}$;

A: $2x+5 \neq 0$

$x \neq -\frac{5}{2}$

$A = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}\}$

B: $\boxed{\{y \in \mathbb{R}, \exists x \in A, f(x)=y\}}$

$f(x)=y \Rightarrow \frac{1-x}{2x+5} = y \quad / \cdot (2x+5)$

$\Rightarrow 1-x = 2xy+5y$

$\Rightarrow -x-2xy = 5y-1$

$\Rightarrow x(-1-2y) = 5y-1$

$\Rightarrow x = \frac{5y-1}{-1-2y} = \frac{-(1-5y)}{-(1+2y)}$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1-5y}{1+2y}}$

$1+2y \neq 0$

$2y \neq -1$

$y \neq -\frac{1}{2}$

$\boxed{B = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}}$

„1-1":

$f(x)=f(y) \Rightarrow \frac{1-x}{2x+5} = \frac{1-y}{2y+5}$

$\Rightarrow (1-x)(2y+5) = (1-y)(2x+5)$

$\Rightarrow 2y+\cancel{5}-\cancel{2xy}-5x = 2x+\cancel{5}-\cancel{2xy}-5y$

$\Rightarrow \cancel{7}y = \cancel{7}x$ f јесте „1-1"

$\Rightarrow y = x$

f јесте „на" по конструкцији B.

8.3 $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$;

A: $\boxed{1-x^2 \geq 0}$

$1-x^2=0$

$x^2=1$

$x=\pm 1$

$x\in[-1,1]$

$\boxed{A=[-1,1]}$

B: $y\in\mathbb{R}, \exists x\in A, f(x)=y$

$f(x)=y \Rightarrow \boxed{-\sqrt{1-x^2}}=y \;/^2$

$\Rightarrow y\le 0 \wedge 1-x^2=y^2$

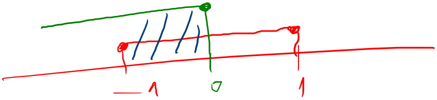
$\Rightarrow y\le 0 \wedge x^2=1-y^2$

$\Rightarrow y\le 0 \wedge x=\pm\sqrt{1-y^2}$

Значи, $y\le 0$ и $\boxed{1-y^2\geq 0}$

$y\in[-1,1]$

$y\in[-1,0]$



$\boxed{B=[-1,0]}$

„1-1": $f(x)=f(y) \Rightarrow \cancel{-}\sqrt{1-x^2} = \cancel{-}\sqrt{1-y^2}$

$\Rightarrow \cancel{1}-x^2=\cancel{1}-y^2 \Rightarrow \cancel{-}x^2=\cancel{-}y^2$

$\Rightarrow x^2=y^2 \Rightarrow x=y \vee x=-y$

Но $f(1)=f(-1)=-\sqrt{1-1}=0$

не „1-1"

$f(\frac{1}{2})=f(-\frac{1}{2})=-\sqrt{1-\frac{1}{4}}=-\sqrt{\frac{3}{4}}$

8.4 $f(x) = \ln \dfrac{1}{1+x^2}$;

A: да би $\ln \frac{1}{1+x^2}$ било дефинисано $\frac{1}{1+x^2} > 0$, али како је $x^2 \geq 0$ то је $\frac{1}{1+x^2}$ увек веће од 0, тј. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{A = \mathbb{R}}$$

B: $y \in \mathbb{R}$, $\exists x \in A$, $f(x) = y$

$$f(x) = y \Rightarrow \ln \frac{1}{1+x^2} = y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = e^y \Rightarrow 1 + x^2 = \frac{1}{e^y}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{e^y} - 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1-e^y}{e^y}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1-e^y}{e^y}}$$

$$\frac{1-e^y}{e^y} \geq 0, \quad e^y > 0$$

$$1 - e^y \geq 0$$

$$e^y \leq 1$$

$$e^y \leq e^0 \Rightarrow y \leq 0$$

$$\boxed{B = (-\infty, 0]}$$

$\ln M$, $M > 0$

$\ln M = N \Leftrightarrow M = e^N$

$e^M > 0$, $\forall M \in \mathbb{R}$

„1-1": $f(x) = f(y) \Rightarrow \ln \frac{1}{1+x^2} = \ln \frac{1}{1+y^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+y^2} \Rightarrow \cancel{1} + x^2 = \cancel{1} + y^2$$

$$\Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y \lor x = -y$$

— није „1-1"

пр. $f(1) = f(-1) = \ln \frac{1}{2}$

8.5 $f(x) = 2^{x^2}$.

$\boxed{A = \mathbb{R}}$

B: $y \in \mathbb{R},\ \exists x \in A,\ f(x) = y$

$f(x) = y \Rightarrow 2^{x^2} = y \quad / \log_2$

$\Rightarrow \log_2 2^{x^2} = \log_2 y$

$\Rightarrow x^2 \underbrace{\log_2 2}_{1} = \log_2 y$

$\Rightarrow x^2 = \log_2 y$

$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\log_2 y}$

$\log_2 y \geq 0 \wedge y > 0$

$y \geq 2^0 \wedge y > 0$

$y \geq 1 \wedge y > 0$

$\boxed{B = [1, +\infty)}$

$\log M^N = N \log M$

$\log_M M = 1$

$\log_M N = C \Leftrightarrow N = M^C$

"1-1": $f(x) = f(y) \Rightarrow 2^{x^2} = 2^{y^2}$

$\Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y \vee x = -y$

$\Rightarrow$ μη "1-1"

$f(1) = f(-1) = 2$

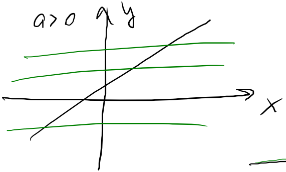
9. Za koje vrednosti realnih parametara a i b formula $f(x) = \underline{ax + b}$ definiše:

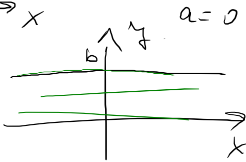
9.1 funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$;

9.2 injektivnu funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$;

9.3 sirjektivnu funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$;

9.4 bijektivnu funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$?



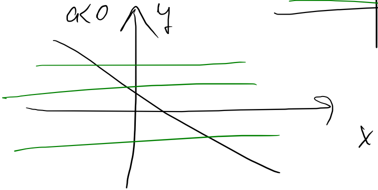


9.1. $\forall a, b \in \mathbb{R}$

9.2. $a \neq 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$

9.3. $a \neq 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$

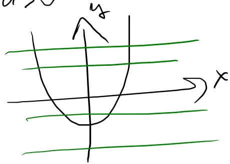
9.4. $a \neq 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$



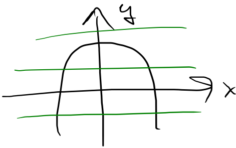
10. Za koje vrednosti realnih parametara a i b formula $f(x) = ax^2 + bx + c$ definiše:

- 10.1 funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$;
- 10.2 injektivnu funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$;
- 10.3 sirjektivnu funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$;
- 10.4 bijektivnu funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$?

$a > 0$



$a < 0$



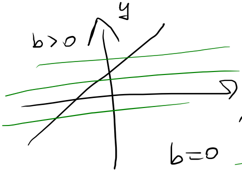
10.1. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

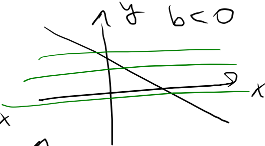
10.2. $a = 0 \quad b \neq 0, \forall c \in \mathbb{R}$

10.3. $a = 0, b \neq 0, \forall c \in \mathbb{R}$

10.4. $a = 0, b \neq 0, \forall c \in \mathbb{R}$

$a = 0 \Rightarrow bx + c = f(x)$





$b = 0$

ZA VEŽBU IZ SKRIPTE:
Primer: 2.1
Zadatak 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6