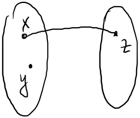
Funkcije

October 14, 2021

Funkcija $f \subseteq A \times B$ je binarna relacija kod koje ne postoje dva različita uređena para sa jednakim prvim komponentama, tj. za koju važi

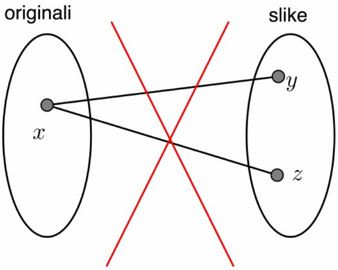
јесте ф.



$$\forall x, y, z, \ ((x,y) \in f \ \wedge \ (x,z) \in f \Longrightarrow y = z).$$

$A = \{1,2,3\}$

$B = \{a,b\}$



$\rho_1 = \{(1,a),(1,b)\}$

јесте релација, а није функција

$f = \rho_2 = \{(1,a),(2,b)\}$

јесте рел., јесте ф.

$\mathcal{D}(f) = \{1,2\}$

$\mathcal{K}(f) = \{a,b\}$

f - није $A \to B$ јер се 3 не пресликава ни у кога

$f_2 = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$

f_2 није $A \to B$ је

$c \notin B$

Uobičajeno je da se umesto $(x,y) \in f$ piše $y = f(x)$.

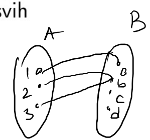
$(2,4) \in {}^2$ $\quad f(2) = 4$

$(x,y) \in {}^2$ $\quad f(x) = y$ $\quad y = x^2$

Domen (oblast definisanosti) funkcije f je $\mathcal{D}(f) = \{x \mid \exists y, (x, y) \in f\}$, tj. skup svih prvih komponenti parova iz f. Elementi domena se nazivaju originali.

Kodomen (skup vrednosti) funkcije f je $\mathcal{K}(f) = \{y \mid \exists x, (x, y) \in f\}$, tj. skup svih drugih komponenti parova iz f. Elementi kodomena se nazivaju slike.

Funkcija f **iz skupa** A **u skup** B, u oznaci $f : A \longrightarrow B$, je ona funkcija kod koje je $A = \mathcal{D}(f)$, a $\mathcal{K}(f) \subseteq B$, tj. ona funkcija kod koje je skup svih prvih komponenti tačno skup A, a skup svih drugih komponenti je podskup skupa B.



$f : A \to B$

али није , не

FUNKCIJU $f : A \to B$

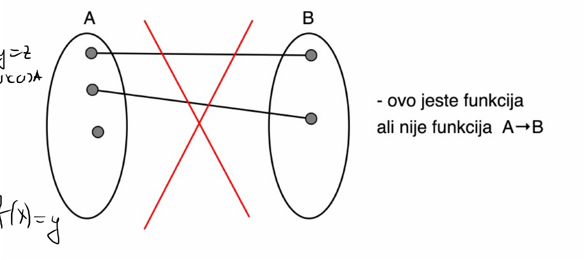
1, $(x,y) \in f \wedge (x,z) \in f \Rightarrow y = z$

TJ. MORA BITI FUNKCIJA

2, $A = \mathcal{D}(f)$

3, $\mathcal{K}(f) \subseteq B$

$\forall x \in A, \exists y \in B, f(x) = y$



Primer: Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b\}$.

- $f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$ jeste $f : A \longrightarrow B$;
- $f_2 = \{(1, a), (2, b)\}$ jeste funkcija ali nije $f : A \longrightarrow B$ jer elemenat $3 \in A$ nema sliku;
- $f_3 = \{(1, a), (1, b), (2, a), (3, b)\}$ nije funkcija jer se elemenat $1 \in A$ preslika u dve slike, u a i u b. Čim nije funkcija ne može biti ni $f : A \longrightarrow B$.

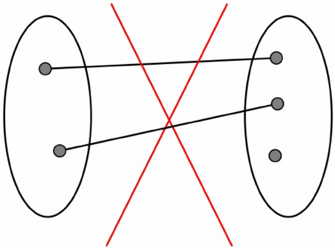
Funkcija $f : A \longrightarrow B$ je **sirjektivna, ("na"),** što se označava sa $f : A \overset{\text{"na"}}{\longrightarrow} B$, ako je $\mathcal{K}(f) = B$, tj. ako se svaki elemenat skupa B pojavljuje bar jednom kao druga komponenta u f.
Dakle,

$$f : A \overset{\text{"na"}}{\longrightarrow} B \text{ ako } \underline{(\forall y \in B)\,(\exists x \in A)\, y = f(x)}.$$

$f(x) = 2x + 5$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \quad y = 2x + 5$



Napomena: Da bi se ispitivala sirjektivnost funkcije nije dovoljno da funkcija bude samo funkcija, neophodno je da bude funkcija skupa A u skup B.

Primer: Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b\}$.

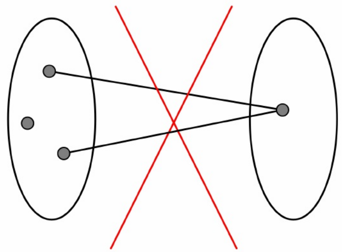
- $f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$ jeste $f : A \xrightarrow{"na"} B$;
- $f_2 = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$ jeste $f : A \longrightarrow B$, ali nije $f : A \xrightarrow{"na"} B$ jer se nijedan elemenat skupa A ne preslika u elemenat $b \in B$;
- $f_3 = \{(1, a), (2, a)\}$ jeste funkcija, ali nije $f : A \longrightarrow B$, pa ne može biti ni $f : A \xrightarrow{"na"} B$.

Funkcija f je **injektivna ("1-1")** ako u f ne postoje dva različita uređena para sa jednakim drugim komponentama.
Dakle,

$A = \{1,2,3\}$
$B = \{a,b\}$

$$f \text{ je injektivna funkcija ako } (\forall x, y \in \mathcal{D}(f))\,(f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y)\,.$$

$f = \{(1,a),(2,a)\}$



- jeste funkcija,
ali nije "1-1"

$f(x) = 2x+5$ ✓

$f(x)=f(y) \Rightarrow 2x+\cancel{5} = 2y+\cancel{5}$
$\Rightarrow \cancel{2}x = \cancel{2}y$
$\Rightarrow x = y$

Napomena: Da bi se ispitivala injektivnost funkcije dovoljno je da funkcija bude samo funkcija. Injektivnost se može ispitivati za bilo kakvu funkciju, a može i za funkciju skupa A u skup B.
Injektivna funkcija skupa A u skup B se označava se $f : A \xrightarrow{"1-1"} B$

Primer: Neka je $A = \{1, 2\}$ i $B = \{a, b, c\}$.

- $f_1 = \{(1, a), (2, b)\}$ jeste $f : A \overset{"1-1"}{\longrightarrow} B$;
- $f_2 = \{(1, a), (2, a)\}$ jeste $f : A \longrightarrow B$, ali nije $f : A \overset{"1-1"}{\longrightarrow} B$ jer se oba elemenat skupa A preslikaju u elemenat $a \in B$;
- $f_3 = \{(1, a)\}$ jeste funkcija i jeste "1-1" iako nije $f : A \longrightarrow B$.

Funkcija f je **bijektivna** ako je u isto vreme sirjektivna i injektivna. Bijektivna može biti samo funkcija skupa A u skup B i tada se ona označava se $f : A \xrightarrow[\text{"na"}]{\text{"1-1"}} B$.

Primer: Neka je , $A = \{1, 2, 3\}$ *i* $B = \{a, b, c\}$.

- $f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ jeste $f : A \xrightarrow[\text{"na"}]{\text{"1-1"}} B$;
- $f_2 = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$ jeste $f : A \longrightarrow B$, ali nije $f : A \xrightarrow[\text{"na"}]{\text{"1-1"}} B$. jer nije injektivna pošto se elementi 1 i 2 preslikaju u isti elemenat a;
- $f_3 = \{(1, a)\}$ jeste funkcija ali nije bijekcija jer nije $f : A \longrightarrow B$.

Primer: Proveriti koje od sledećih relacija su funkcije skupa A u skup B, i ispitati sirjektivnost i injektivnost.

$$f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a), (5, c)\},$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ B = \{a, b, c\};$$

f_1 – јесте ф.

f_1 – јесте $A \longrightarrow B$

f_1 – јесте $A \xrightarrow{\text{на}} B$

f_1 – није $A \xrightarrow{1-1} B$, јер $(1, a), (4, a) \in f_1$

f_1 – није бијекција

$\boxed{1-1}$

1) f је ф.

2) нема различите парове са истим другим компонентама

$\boxed{\text{На}}$

1) $f : A \longrightarrow B$

2) сви ел. из B морају неког ко се у њих пресликa

$$f_2 = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,a),(5,c),(1,c)\},$$

$$A = \{1,2,3,4,5\},\ B = \{a,b,c\};$$

f_2 - није ф. $\quad (1,a),(1,c) \in f_2$

Како није ф. не може бити ни $A \to B$, ни на

ни 1-1.

$f_3 = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a), (5, a)\}$,

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, \underline{b}, \underline{c}\}$;

f_3 - јесте ф.

f_3 - јесте $A \longrightarrow B$

f_3 - није $A \xrightarrow{\text{на}} B$, нико се пресликао у b и c

f_3 - није $A \xrightarrow{1-1} B$, $(1, \underline{a}), (2, \underline{a}) \in f_3$

f_3 - није бијекција

$$f_4 = \{(1, c), (2, b), (3, b), (4, c), (5, a)\},$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ B = \{a, b, c\};$$

f_4 - јесте ф.

f_4 - јесте $A \longrightarrow B$

f_5 - јесте $A \xrightarrow{\text{на}} B$

f_5 - није $A \xrightarrow{1-1} B$ $\quad (2, \underline{b}), (3, \underline{b}) \in f_4$

f_5 - није бијекција

$f_5 = \{(1,a),(2,b),(4,c)\}$, $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{a,b,c\}$.

f_5 - јесте ф.

f_5 - није $A \to B$, 3 се не преслика

f_5 - није $A \xrightarrow{\text{на}} B$ јер није $A \to B$

f_5 - јесте „1–1" функција

f_5 - није бијекција јер није $A \to B$

Identička funkcija $i_A : A \longrightarrow A$ je definisana sa $i_A(x) = x$.

$f(x) = x \quad \forall f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Ako je inverzna relacija f^{-1} funkcije f takođe funkcija onda je f^{-1} **inverzna funkcija** funkcije f.
Napomena: Inverzna funkcija se definiše za bilo koju funkciju, ne mora biti funkcija skupa A u skup B.

f - FUNKCIJA
↓
f - RELACIJA
↓
f^{-1} - RELACIJA

Primer: Neka je $A = \{1, 2, 3\}$, a $B = \{x, y, z\}$.

- Za funkciju $f_1 = \{(1, x), (2, y), (3, z)\}$ inverzna funkcija je $f^{-1} = \{(x, 1), (y, 2), (z, 3)\}$.
- Funkcija $f_2 = \{(1, x), (2, x), (3, x)\}$ nema inverznu funkciju jer inverzna relacije ove funkcije nije funkcija.

$f_2 = \{(1,x), (2,x), (3,x)\}$

$f_2^{-1} = \{(x,1), (x,2), (x,3)\}$

↳ ово сад није ф-ја онда f нема инверзну ф.

Inverzna funkcija funkcije f postoji akko je funkcija f injektivna.
Za funkciju $f : A \longrightarrow B$ postoji inverzna funkcija $f : B \longrightarrow A$ akko je funkcija f bijektivna.

$f_1 = \{(1,x), (2,y), (3,z)\} = f_1$ $\qquad f_1^{-1} = \{(x,1), (y,2), (z,3)\} = f^{-1}$

↑ ова инверзна релација јесте ф.

Neka su A, B i C neprazni skupovi i neka su $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ date funkcije. Funkcija $g \circ f : A \longrightarrow C$ definisana sa

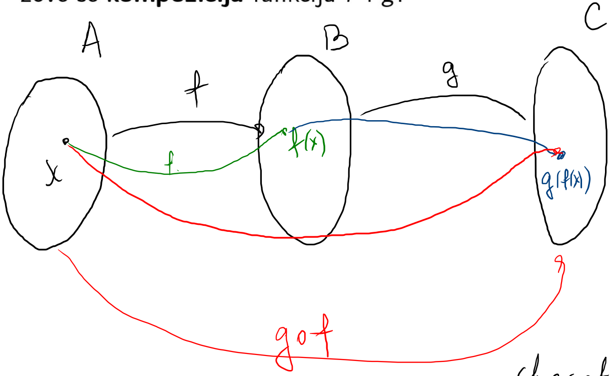
$$(\forall x \in A)\,(g \circ f)\,(x) = g\,(f\,(x))$$

zove se **kompozicija** funkcija f i g.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x+1$

$g(x) = 2x$



$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$
$$= g(x+1)$$
$$= 2(x+1)$$

$$(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x)))$$

$y = \sin(\ln x)$

$y = 3x+5$

Kompozicija injektivnih funkcija je injektivna funkcija.

Kompozicija sirjektivnih funkcija $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ je sirjektivna funkcija.

Kompozicija bijektivnih funkcija je bijektivna funkcija.

Neka je funkcija $f : A \longrightarrow B$ bijektivna i neka je f^{-1} njena inverzna funkcija, tada je $(\forall x \in A)\boxed{f^{-1}(f(x)) = x}$.

$f^{-1} \circ f = i_A$

Kompozicija funkcija koje preslikavaju skup A u samog sebe je asocijativna operacija. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

$f, g, h : A \to A$

$f^{-1} \circ f : A \to B \to A$

$f^{-1}(x) = ?$

$f(x) = 2x + 5$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f^{-1}(f(x)) = x$

$f^{-1}(2x+5) = x$

t

$2x + 5 = t$

$2x = t - 5$

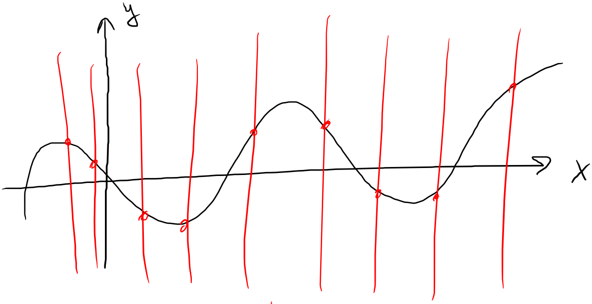
$x = \frac{t-5}{2}$

$f^{-1}(t) = \frac{t-5}{2}$

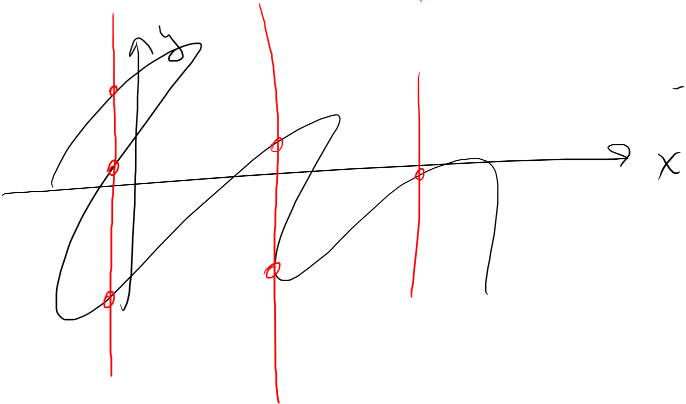
$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$

Načini zadavanja funkcija: Neka je na primer $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \mathbb{N}$. Jedna ista funkcija $f : A \longrightarrow B$ može biti zadata na više načina:

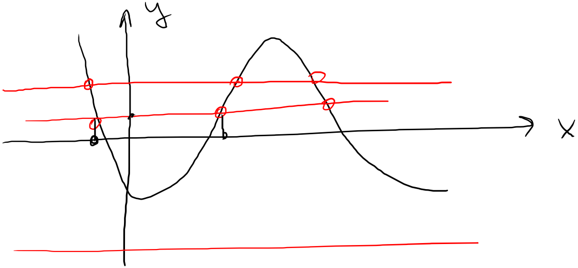
- nabrajanjem elemenata $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$,
- opisno pomoću drugih poznatih relacija i/ili operacija $f = \{(x, x^2) \mid x \in A\}$, tj. $f(x) = x^2$, $x \in A$,
- $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix}$,
- grafički.



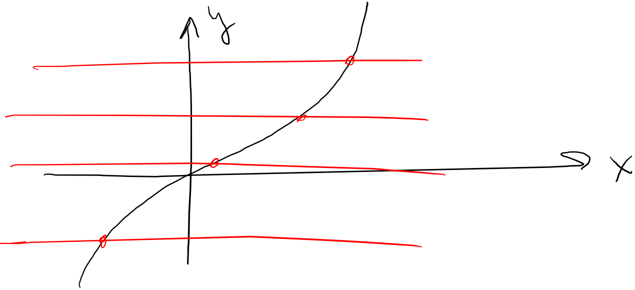
— есть ф.



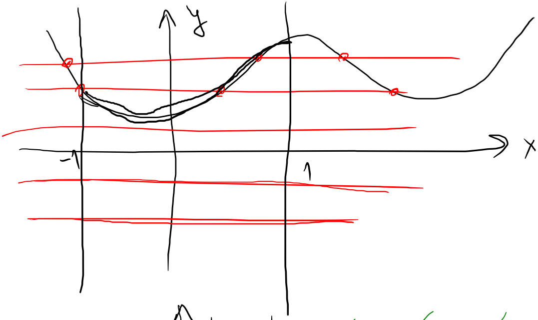
— нет ф.



- thuje 1-1

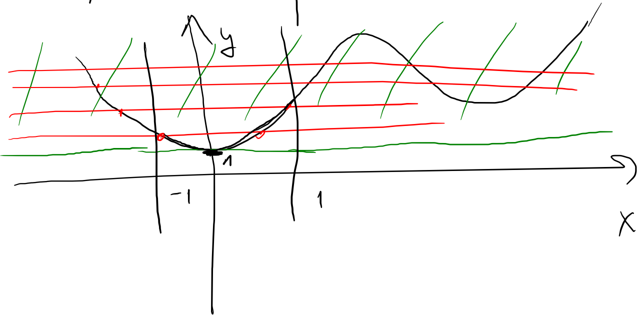


-jecus 1-1



$f : [-1,1] \to \mathbb{R}$

– не е „на"



$f : [-1,1] \to [1, +\infty)$

– вече „на"

Relacija koja je zadata grafički je funkcija akko svaka prava paralelna sa y-osom seče dati grafik u najviše jednoj tački.

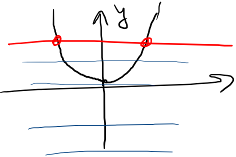
Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je injektivna akko svaka prava paralelna sa x-osom ima najviše jedan presek sa grafikom funkcije.

Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je sirjektivna akko svaka prava paralelna sa x-osom ima bar jedan presek sa grafikom funkcije.

Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je bijektivna akko svaka prava paralelna sa x-osom ima tačno jedan presek sa grafikom funkcije.

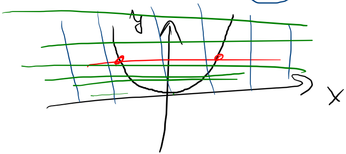
$\boxed{f(x)=x^2}$

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$



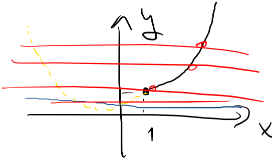
- јесте ф
- није 1-1 $f(1)=f(-1)=1$
- није на

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$



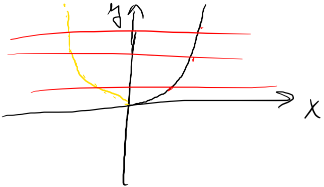
- јесте ф.
- није 1-1
- јесте на

3) $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}^+$



- јесте ф.
- јесте 1-1
- није на

4) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$



- јесте ф
- јесте 1-1
- јесте на