Bulova algebra

October 28, 2021

2^n

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ uređena šestorka u kojoj je B neprazan skup, $+$ i $\cdot$ dve binarne operacije skupa B, $'$ unarna operacija skupa B, a 0 i 1 dva različita elementa (konstante) skupa B. Tada je $\mathcal{B}$ **Bulova algebra** ako za svako $a, b, c \in B$ važe

$(\{\top, \bot\}, \vee, \wedge, \neg, \bot, \top)$

AKSIOME BULOVE ALGEBRE:

BA1: *komutativnost*

$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a;$$

BA2: *distributivnost*

$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c);$$

BA3: *neutralni element*

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a;$$

BA4: *inverzni element (komplement)*

$$a + a' = 1, \quad a \cdot a' = 0.$$

U svakoj Bulovoj algebri je broj elemenata oblika 2^n, $n \in \mathbb{N}$. Dakle, ne postoji Bulova algebra sa na primer 6 elemenata, već samo sa 2, 4, 8, 16, ... elemenata.

Princip dualnosti: Dva tvrđenja su dualna ako se jedno iz drugog može dobiti zamenom svih pojavljovanja $+$ sa $\cdot$, $\cdot$ sa $+$, 0 sa 1 i 1 sa 0.
Može se primetiti da su sve aksiome Bulove algebre dualne. Zbog toga će i sve teorema Bulove algebre biti dualane. To znači da ako se dokaže neka teorema time je automatski dokazana i njoj dualna teorema.

OSNOVNE TEOREME BULOVE ALGEBRE $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$:

$$x$$

$$(a+1)(a+a')$$

$$= x a + x a'$$

$$= (a+1)a + (a+1)a'$$

BT1: *zakon idempotentnosti*

$$a + a = a, \quad a \cdot a = a;$$

BT1: $a = a + 0 = a + a a' = (a+a)\cdot(a+a')$

$= (a+a)\cdot 1 = a + a$

BT2: *ograničenost*

$$a + 1 = 1, \quad a \cdot 0 = 0;$$

$a + 1 = (a+1)\cdot 1 = (a+1)\cdot(a + a')$

$= (a+1)\cdot a + (a+1) a'$

$= a(a+1) + a'(a+1)$

BT2: $= (a\cdot a + a\cdot 1) + (a'\cdot a + a'\cdot 1)$

$= (a + a) + (a\cdot a' + a')$

$= a + (0 + a') = a + (a' + 0)$

$= a + a' = 1$

BT3: *apsorbcija*

$$a + a \cdot b = a, \quad a \cdot (a + b) = a;$$

BT3: $a + a\cdot b = a\cdot 1 + ab$

$= a(1+b) = a\cdot(b+1)$

$= a \cdot 1 = a$

BT4:

$$a + a' \cdot b = a + b, \quad a \cdot (a' + b) = a \cdot b;$$

BT4: $a + a'b = (a + a')(a+b)$

$= 1\cdot(a+b)$

$= (a+b)\cdot 1 = a + b$

BT5: *asocijativnost*

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$$

BT6: *jedinstvenost komplementa*

BT6:

$a' + a = 1 \wedge a' \cdot a = 0 \Rightarrow a = (a')'$

$$(a + x = 1 \wedge a \cdot x = 0) \Longrightarrow x = a';$$

$0 + 1 = 1 \wedge 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow 1 = 0'$

$x = x \cdot 1 = x(a + a') =$
$= xa + xa' = ax + xa'$
$= 0 + xa' = a \cdot a' + xa'$
$= a'a + a'x = a'(a + x)$
$= a' \cdot 1 = a'$

BT7: *involucja*

$$(a')' = a;$$

BT7:

$a + a' = 1 \wedge a \cdot a' = 0$
$a' + a = 1 \wedge a' \cdot a = 0$
$\Longrightarrow a = (a')'$

BT8:

$$0' = 1, \quad 1' = 0;$$

BT8:

$0 + 1 = 1 \wedge 0 \cdot 1 = 0$
$\Longrightarrow 1 = 0'$

BT9: *De Morganovi zakoni*

$$(a + b)' = a' \cdot b', \quad (a \cdot b)' = a' + b'.$$

Dokaz:

BT1: $a + a = a$

$$a \overset{BA3}{=} a + 0 \overset{BA4}{=} a + a \cdot a' \overset{BA2}{=} (a + a) \cdot (a + a') \overset{BA4}{=} (a + a) \cdot 1 \overset{BA3}{=} a + a;$$

BT2: $a + 1 = 1$

$$a+1 \overset{BA3}{=} (a + 1)\cdot 1 \overset{BA1}{=} 1\cdot(a + 1) \overset{BA4}{=} (a + a')\cdot(a + 1) \overset{BA2}{=} a+a'\cdot 1 \overset{BA3}{=} a+a' \overset{BA4}{=} 1;$$

BT3: $a + a \cdot b = a$

$$a + a \cdot b \overset{BA3}{=} a \cdot 1 + a \cdot b \overset{BA2}{=} a \cdot (1 + b) \overset{BA1}{=} a \cdot (b + 1) \overset{BT2}{=} a \cdot 1 \overset{BA3}{=} a;$$

BT4: $a + a' \cdot b = a + b$

$$a + a' \cdot b \overset{BA2}{=} (a + a') \cdot (a + b) \overset{BA4}{=} 1 \cdot (a + b) \overset{BA1}{=} (a + b) \cdot 1 \overset{BA3}{=} a + b;$$

BT5: $(a+b)+c = a+(b+c)$

$$\begin{aligned}(a+b)+c &\overset{BA3}{=} ((a+b)+c)\cdot 1 \overset{BA4}{=} ((a+b)+c)\cdot(a+a')\\ &\overset{BA1,\,BA2}{=} (a\cdot(a+b)+a\cdot c)+(a'\cdot(a+b)+a'\cdot c)\\ &\overset{BT3,\,BA2}{=} (a+a\cdot c)+((a'\cdot a+a'\cdot b)+a'\cdot c)\\ &\overset{BA1,\,BT3,\,BA4}{=} a+((0+a'\cdot b)+a'\cdot c)\\ &\overset{BA1,\,BA3}{=} a+(a'\cdot b+a'\cdot c) \overset{BA2}{=} a+a'\cdot(b+c) \overset{BT4}{=} a+(b+c);\end{aligned}$$

BT6: $(a+x=1 \ \wedge \ a\cdot x = 0) \Longrightarrow x = a'$

Neka je $a+x=1 \ \wedge \ a\cdot x=0$.

$$\begin{aligned}x &\overset{BA3}{=} x\cdot 1 \overset{BA4}{=} x\cdot(a+a') \overset{BA2}{=} x\cdot a + x\cdot a' \overset{BA1}{=} a\cdot x + a'\cdot x \overset{pp.}{=} 0 + a'\cdot x\\ &\overset{BA4}{=} a\cdot a' + a'\cdot x \overset{BA1}{=} a'\cdot a + a'\cdot x \overset{BA2}{=} a'\cdot(a+x) \overset{pp.}{=} a'\cdot 1 \overset{BA3}{=} a';\end{aligned}$$

BT7: $(a')' = a$

Iz BA4 sledi

$$a+a'=1 \ \wedge \ a\cdot a'=0 \overset{BA1}{\Longrightarrow} a'+a=1 \ \wedge \ a'\cdot a = 0 \overset{BT6}{\Longrightarrow} a=(a')';$$

BT8: $0' = 1$
Iz BT2 i BA3 sledi

$$0 + 1 = 1 \ \wedge \ 0 \cdot 1 = 0 \xRightarrow{BT6} 1 = 0';$$

BT9: $(a + b)' = a' \cdot b'$

$$\begin{aligned}(a+b) + a' \cdot b' &\overset{BA2}{=} ((a+b) + a') \cdot ((a+b) + b') \\ &\overset{BA1,\, BT5}{=} ((a + a') + b) \cdot (a + (b + b')) \\ &\overset{BA4}{=} (1 + b) \cdot (a + 1) \overset{BA1,\, BT2}{=} 1 \cdot 1 \overset{BA3}{=} 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b) \cdot a' \cdot b' &\overset{BA1,\, BA2}{=} a \cdot (a' \cdot b') + b \cdot (a' \cdot b') \\ &\overset{BA1,\, BT5}{=} (a \cdot a') \cdot b' + (b \cdot b') \cdot a' \\ &\overset{BA4}{=} 0 \cdot b' + 0 \cdot a' \overset{BA1,\, BT2}{=} 0 + 0 \overset{BA3}{=} 0.\end{aligned}$$

Dakle, $(a+b) + a' \cdot b' = 1 \ \wedge \ (a+b) \cdot a' \cdot b' = 0 \xRightarrow{BT6} (a+b)' = a' \cdot b'$.

U Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', \underline{0}, \underline{1})$ **relacija** $\leq \subseteq B^2$ definisana na sledeći način:

$$\forall\, a, b \in B, \boxed{a \leq b \Longleftrightarrow a + b = b}$$

je relacija poretka.

Dokaz:

Refleksivnost: $\forall\, a \in B$, $a \leq a$ jer je po BT1 $a + a = a$.

Antisimetričnost:
$a \leq b \ \wedge \ b \leq a \Longrightarrow a + b = b \ \wedge \ b + a = a \Longrightarrow a = b + a \overset{BA1}{=} a + b = b.$

Tranzitivnost:

$$a \leq b \ \wedge \ b \leq c \Longrightarrow a + b = b \ \wedge \ b + c = c$$

$$\Longrightarrow a + c = a + (b + c) \overset{BT5}{=} (a + b) + c = b + c = c \Longrightarrow a \leq c.$$

Kada se govori o relaciji poretka Bulove algebre misli se na ovu relaciju. Pod Haseovim dijagramom Bulove algebre podrazumeva se Haseov dijagram ove relacije poretka. U odnosu na nju 0 je najmanji, a 1 najveći elemenat.

R: $a \leq a \Longleftrightarrow \underset{BT1}{a + a = a}$ ✓

AS: $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$?

$a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow$

$\Rightarrow a + b = b \wedge b + a = a$

$\Rightarrow a = b + a = a + b = b$

комутативност

T: $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$?

$a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a + b = b \wedge b + c = c$

$\Rightarrow a + c = a + (b + c) = (a + b) + c$

$= b + c = c$

$\Rightarrow a \leq c$ ✓

Podalgebra Bulove algebre $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ je svaka Bulova algebra $\mathcal{B}_1 = (B_1, +, \cdot, ', 0, 1)$ gde je $B_1 \subseteq B$, a operacije iz $\mathcal{B}_1$ su restrikcije operacija iz $\mathcal{B}$.

Konstante 0 i 1 u podalgebri $\mathcal{B}_1$ su iste kao konstante 0 i 1 u Bulovoj algebri $\mathcal{B}$.

Svaka Bulova algebra ima trivijalne podalgebre $(\{0,1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$ i samu sebe.

$$\begin{array}{cccccc} (B, & +, & \cdot, & ', & 0, & 1) \\ & & & & \| & \| \\ (B_1, & +, & \cdot, & ', & 0, & 1) \end{array}$$

$$B_1 \subseteq B$$

PRIMERI BULOVIH ALGEBRI:

$(p \vee q \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

1. Bulova algebra iskaznog računa je uređena šestorka $(I, \vee, \wedge, \rceil, \perp, \top)$, gde je $I = \{\perp, \top\}$ i gde su $\vee$, $\wedge$ i $\rceil$ poznate operacije iskaznog racuna - disjunkcija, konjukcija i negacija. Umesto $\perp$, $\top$, $\vee$, $\wedge$ i $\rceil$ često se koriste redom oznake 0, 1, $+$, $\cdot$ i $'$.

$\wedge$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$

$\vee$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$

$\rceil$	$\top$	$\perp$
	$\perp$	$\top$

Relacija poretka $\leq$ u ovoj algebri je: $p \leq q$ akko $p \vee q \Longleftrightarrow q$ akko $p \Longrightarrow q$.

$p \leq q$ akko $p \Rightarrow q$

Ova Bulova algebra ima smo jednu trivijalnu podalgebru - samu sebe.

$(B, +, \cdot, ', 0, 1)$

$(\{\perp, \top\}, \vee, \wedge, \rceil, \perp, \top)$

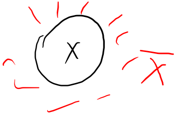
$p, q \in \{\perp, \top\}$

BA1: $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

BA2: $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

BA3. $p \vee \perp \Leftrightarrow p$
$p \wedge \top \Leftrightarrow p$

BA4: $p \vee \rceil p \Leftrightarrow \top$
$p \wedge \rceil p \Leftrightarrow \perp$



2. Bulova algebra "partitivni skup" je uređena šestorka $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \bar{\ }, \emptyset, A)$, gde je A proizvoljan neprazan skup, a $\mathcal{P}(A)$ partitivni skup, skupa A.

Relacija poretka $\leq$ u ovoj algebri je: $\boxed{X \leq Y \text{ akko } X \cup Y = Y}$ akko $X \subseteq Y$.

$(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ $\qquad A \neq \emptyset$

$(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \bar{\ }, \emptyset, A)$ ✓ $\qquad BA_4: \; X \cup \bar{X} = A$ ✓

$X \cap \bar{X} = \emptyset$

$BA_1: \; X \cup Y = Y \cup X$ ✓

$X \cap Y = Y \cap X$

$a \leq b \Leftrightarrow a + b = b$

$BA_2: \; X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ ✓

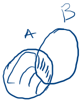
$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

$\boxed{X \leq Y \Leftrightarrow X \subseteq Y}$

$X \subseteq A$

$BA_3: \; X \cup \emptyset = X$ ✓

$X \cap A = X$



$A \cup (A \cap B) = A$ ✓

$A + A \cdot B = A$

$a \cdot (a + b) = a$ ✓

$A \cap (A \cup B) = A$ ✓

$(B, +, \cdot, ', 0, 1)$

$(D_{30}, NZS, NZD, \frac{30}{x}, 1, 30)$

3. Bulova algebra delitelja broja 30 je uređena šestorka $\left(D_{30}, NZS, NZD, \frac{30}{x}, 1, 30\right)$, gde je $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

Relacija poretka $\leq$ u ovoj algebri je: $\boxed{x \leq y}$ akko $NZS\,(x, y) = y$ akko $\boxed{x \mid y}$.

$\leq \quad |$

Podalgebre su osim trivijalnih $\left(D_{30}, NZS, NZD, \frac{30}{x}, 1, 30\right)$ i $\left(\{1, 30\}, NZS, NZD, \frac{30}{x}, 1, 30\right)$ još i

$$\left(\{1, 30, 2, 15\}, NZS, NZD, \frac{30}{x}, 1, 30\right),$$
$$\left(\{1, 30, 3, 10\}, NZS, NZD, \frac{30}{x}, 1, 30\right) \text{ i}$$
$$\left(\{1, 30, 5, 6\}, NZS, NZD, \frac{30}{x}, 1, 30\right).$$

Neka je n prirodan broj različit od 1 i neka je $D_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \mid n\}$ (skup svih delitelja broja n). Uređena šestorka $\left(D_n, NZS, NZD, \frac{n}{x}, 1, n\right)$ je Bulova algebra akko je $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, gde su $p_1, p_2, \ldots, p_n$ međusobno različiti prosti brojevi.

D_6

D_7

Primer: Da li je $\left(D_{18}, NZS, NZD, \frac{18}{x}, 1, 18\right)$ Bulova algebra?

D_4 $\quad 4 = 2 \cdot 2$

Kako je $\underline{18 = 2 \cdot 3 \cdot 3}$ po prethodnom sledi da ovo nije Bulova algebra.

$30 = \underline{2 \cdot 3 \cdot 5}$

$(B, \oplus, \odot, ', 0, 1)$
$(\{\bot, \top\}, \vee, \wedge, \neg, \bot, \top)$

BULOVI IZRAZI I POLINOMI

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ Bulova algebra

Konstanta skupa B je proizvoljan elemenat skupa B. **Promenljiva** skupa B je simbol koji se može zameniti bilo kojim elementom skupa B.

$x, y, \cancel{1+0}$
$(x+y), (1\cdot y), x'$
$((x+y)\cdot(1 y)), (1\cdot y)'$

Bulovi izrazi:

1. Bulove promenljive i Bulove konstante su Bulovi izrazi.
2. Ako su A i B Bulovi izrazi onda su to i $(A+B)$, $(A \cdot B)$, A' i B'.
3. Bulovi izrazi se dobijaju konačnom primenom 1. i 2.

$x, y, z, x', y', z', \ldots$
$xy, xy'z, yz', \ldots$
$xy + x'yz, xy + yz', \ldots$

Primer: $((x'+y)' \cdot z)$ jeste Bulov izraz, dok $x + y' +$ nije Bulov izraz.

Monom je promenljiva ili njena negacija.

$\{x, y, z\}$

Primer: x, y, z, u, x', y', z', u', ...

$xyz, x'yz, xy'z', \ldots$
$xyz + x'yz, \ldots$

Elementarna konjukcija (EK) je konjukcija (proizvod) monoma.
Elemenat 1 Bulove algebre je elementarna konjukcija.

Primer: x, xy', $x'yzu$, 1, ...

$x, y, z, x', y', z', \ldots$
$x+y, x+y'+z, \ldots$
$(x+y)(x+y'+z), \ldots$

Disjunktivna normalna forma (DNF) je disjunkcija (zbir) konačno mnogo elementarnih konjukcija.

Primer: $xy' + x' + xyz$, xy', 1, ...

Savršena elementarna konjukcija u odnosu na promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je elementarna konjukcija u kojoj se javlja svaka od tih promenljivih (negirana ili ne).

Savršena disjunktivna normalna forma (SDNF) u odnosu na promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je disjunktivna normalna forma u kojoj učestvuju samo (različite) savršene elementarne konjukcije u odnosu na te promenljive.

Primer: $xyz + x'yz + x'y'z$ je SDNF u odnosu na promenljive x, y, z.

Analogno se definišu elementadna disjunkcija (ED), konjuktivna normalna forma (KNF), savršena elementadna disjunkcija i savršena konjuktivna normalna forma (SKNF).

Svaki Bulov izraz se može svesti na DNF i KNF i pri tome DNF i KNF nisu jedinstveno određeni.

SDNF i SKNF su jedinstveno određeni u odnosu na zadati skup promenljivih koje se pojavljuju u izrazu.

OPIS POSTUPKA NALAŽENJA DNF I SDNF:

DNF

1. Koristeći De Morganove zakone (BT9) i zakon involucije (BT7) oslobađa se delovanja komplementa na izraze u zagradama, tako da se dobije izraz kod kog komplement deluje samo na promenljive.

2. Koristeći distributivnost operacije $\cdot$ prema operaciji $+$ izraz se dovodi na oblik zbira konjukcija.

3. Koristeći zakone $aa = a$, $aa' = 0$ i $a + 0 = a$ i uklanjajući višestruka pojavljivanja jedne promenljive u jednoj konjukciji dobija se izraz u obliku DNF.

4. Da bi se od (bilo koje) DNF dobila SDNF svaku elementarnu konjukciju treba po potrebi proširiti promenljivama koje se u njoj ne pojavljuju.

5. Na kraju se samo još koristeći idempotentnost uklone sve savršene elementarne konjukcije koje se u zbiru pojavljuju više puta.

1. $$I = (x\cdot(y'+z'))'\cdot z + x'y'z'$$
$$= (x' + (y'+z')')\cdot z + x'y'z'$$
$$= (x' + ((y')'\cdot(z')'))\cdot z + x'y'z'$$
$$= (x' + y\cdot z)\cdot z + x'y'z'$$

2. $$= x'\cdot z + y\cdot z\cdot z + x'y'z'$$

3. $$= \boxed{x'z + yz + x'y'z'}$$ DNF

4. $$= x'\cdot 1\cdot z + 1\cdot y\cdot z + x'y'z'$$
$$= x'\cdot\overbrace{(y+y')}^{1}\cdot z + (x+x')yz + x'y'z'$$
$$= \underline{x'yz} + x'y'z + xyz + \underline{x'yz} + x'y'z'$$

$a+a = a$

x, y, z

$$= x'yz + x'y'z + xyz + x'y'z'$$

SDNF

Primer: $I = (x \cdot (y' + z'))' \cdot z + x'y'z'$

1. Koristeći De Morganove zakone $((a+b)' = a' \cdot b', \quad (a \cdot b)' = a' + b'.)$ i zakon involucije $((a')' = a;)$ oslobađamo se delovanja komplementa na izraze u zagradama, tako da se dobije izraz kod kog komplement deluje samo na promenljive.

$$I = \left(x' + (y' + z')'\right) \cdot z + x'y'z' = (x' + yz) \cdot z + x'y'z'.$$

2. Koristeći distributivnost operacije $\cdot$ prema operaciji $+$ izraz se dovodi na oblik zbira konjukcija.

$$I = x'z + yzz + x'y'z'.$$

3. Koristeći zakone $aa = a$, $aa' = 0$ i $a + 0 = a$ i uklanjaju'i višestruka pojavljivanja jedne promenljive u jednoj konjukciji dobija se izraz u obliku DNF

$$I = x'z + yz + x'y'z'.$$

4. Da bi se od (bilo koje) DNF dobila SDNF svaku elementarnu konjukciju treba po potrebi proširiti promenljivama koje se u njoj ne pojavljuju

$I = x'(y + y')z + (x + x')yz + x'y'z' = x'yz + x'y'z + xyz + x'yz + x'y'z'.$

5. Na kraju se samo još koristeći idempotentnost uklone sve savršene elementarne konjukcije koje se u zbiru pojavljuju više puta

$$I = x'yz + x'y'z + xyz + x'y'z'.$$

0,0
0,1
1,0
1,1

BULOVE FUNKCIJE

Bulova funkcija od n promenljivih je svako preslikavanje $f : B^n \longrightarrow B$.

Na dalje će se posmatrati samo Bulove funkcije definisane na dvoelementnoj Bulovoj algebri $(\{0,1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$. $f : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$

Svaki Bulov izraz jednoznačno određuje Bulovu funkciju, a jednoj Bulovoj funkciji odgovara više (beskonačno mnogo) ekvivalentnih Bulovih izraza.

Ako je $f(x_1, \ldots, x_n)$ Bulova funkcija, definisana na dvoelementnoj Bulovoj algebri $(\{0,1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$, tada se SDNF (SKNF) mogu konstruisati na sledeći način:

$$\mathrm{SDNF}(f(x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

$$\mathrm{SKNF}(f(x_1, \ldots, x_n)) = \prod_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n} \left(f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + x_1^{\rceil \alpha_1} + \ldots + x_n^{\rceil \alpha_n} \right),$$

gde je $x^\alpha = \begin{cases} x, & \alpha = 1 \\ x', & \alpha = 0 \end{cases}$.

$x^1 = x$
$x^0 = x'$

$0 \cdot a = 0$

$0 + a = a$

Primer:

a)

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned}
\mathrm{SDNF}\left(f(x,y)\right) &= 0 \cdot x^0 \cdot y^0 + 1 \cdot x^0 \cdot y^1 + 0 \cdot x^1 \cdot y^0 + 1 \cdot x^1 \cdot y^1 \\
&= x'y + xy, \\
\mathrm{SKNF}\left(f(x,y)\right) &= \left(0 + x^1 + y^1\right)\left(1 + x^1 + y^0\right)\left(0 + x^0 + y^1\right)\left(1 + x^0 + y^0\right) \\
&= (x+y)(x'+y).
\end{aligned}$$

$\mathrm{SDNF}(f(x,y)) = f(0,0)\cdot x^0 \cdot y^0 + f(0,1)\cdot x^0 y^1 + f(1,0)\cdot x^1 y^0 + f(1,1)\, x^1 \cdot y^1 = 0 \cdot x'y' + 1 \cdot x'y + 0 \cdot x \cdot y' + 1 \cdot x \cdot y$

$= 0 + x'y + 0 + xy = x'y + xy$

$\mathrm{SKNF}(f(x,y)) = (f(0,0) + x^1 + y^1)\cdot(f(0,1) + x^1 + y^0)\cdot(f(1,0) + x^0 + y^1)\cdot(f(1,1) + x^0 + y^0) =$

$(0+x+y)(1+x+y')$

$(0+x'+y)(1+x'+y')$

$= (x+y) \cdot 1 \cdot (x'+y) \cdot 1$

$= (x+y)(x'+y)$

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
~~1~~	~~0~~	~~0~~
1	1	1

$\mathrm{SDNF}(f(x,y)) = f(0,0)\, x^0 y^0 + f(0,1)\, x^0 y^1 + f(1,0)\, x^1 y^0 + f(1,1)\, x^1 y^1$

$= 1 \cdot x' \cdot y' + 1 \cdot x'y + 0 \cdot x \cdot y' + 1xy$

$= x'y' + x'y + 0 + xy$

$= x'y' + x'y + xy$

$$\mathrm{SDNF}(f(x,y,z)) = x^0y^1z^0 + x^0y^1z^1 + x^1y^0z^1 + x^1y^1z^1$$

$$= x'yz' + x'yz + xy'z + xyz$$

b)

x	y	z	$f(x,y,z)$
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~
0	1	0	1
0	1	1	1
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
1	0	1	1
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
1	1	1	1

$$\mathrm{SDNF}(f(x,y,z)) = x'yz' + x'yz + xy'z + xyz,$$

$$\mathrm{SKNF}(f(x,y,z)) = (x+y+z)(x+y+z')(x'+y+z)(x'+y'+z).$$

$$\mathrm{SKNF}(f(x,y,z)) = (x^1+y^1+z^1)(x^1+y^1+z^0)(x^0+y^1+z^1)(x^0+y^0+z^1)$$

$$= (x+y+z)(x+y+z')(x'+y+z)(x'+y'+z)$$