Relacije

October 6, 2021

Uređen par elemenata a i b, u oznaci (a,b) je $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$, gde je a prva komponenta, a b druga komponenta uređenog para.

$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$

$(b,a) = \{\{b\},\{b,a\}\}$

Napomena: $(b,a) = \{\{b\},\{a,b\}\}$ pa za $a \neq b \Rightarrow (a,b) \neq (b,a)$.
$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

$a \neq b \Rightarrow (a,b) \neq (b,a)$

$\{a,b\} = \{b,a\}$

Dekartov proizvod skupova A i B je skup svih uređenih parova čija je prva komponenta iz skupa A, a druga komponenta iz skupa B, tj.

$\boxed{A \times B = \{(a,b) \,|\, a \in A \wedge b \in B\}.}$

A, B

$A \times B$

$\{(1,x)\}$

Primer: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{x,y\}$

$\{(2,x),(3,y)\}$

$A \times B = \{(1,x),(1,y),(2,x),(2,y),(3,x),(3,y)\}$ ✓
$B \times A = \{(x,1),(x,2),(x,3),(y,1),(y,2),(y,3)\}$ ✓

$A \times A = A^2$

Na osnovu ovog primera može se zaključiti da Dekartov proizvod nije komutativan, tj. $A \times B \neq B \times A$.

Dekartov kvadrat skupa A je $A^2 = A \times A = \{(a_1,a_2) \,|\, a_1,a_2 \in A\}$.

Primer: $A = \{1,2,3\}$ $\quad A = \{1,2,3\}$
$A^2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

Binarna relacija je bilo koji podskup od $A \times B$, tj. $\rho \subseteq A \times B$.

Ako uređen par (x, y) pripada relaciji ρ kaže se da su x i y u relaciji ρ i piše se $(x, y) \in \rho$ ili $x\rho y$.

Binarna relacija skupa A**,** je bilo koji podskup od A^2, tj. $\rho \subseteq A^2$.

Kako je $\emptyset \subseteq A^2$ i $A^2 \subseteq A^2$ to su $\emptyset$ i A^2 sigurno relacije skupa A, i one se nazivaju prazna i puna relacija.

$\rho \subseteq A \times B$ $\qquad$ $\rho = \{(1,2)\}$ $\qquad$ $(1,2) \in \rho$

$1 \rho 2$

$x \rho y$ $\qquad$ $(x,y) \in \rho$

Relacije koje imaju konačno mnogo elemenata se mogu zadati na više načina. Neka je $A = \{1,2,3\}$ i $\rho \subseteq A^2$ tada se ρ može zadati na sledeće načine:

- nabrajanjem elemenata: $\rho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2)\}$
- pomoću drugih relacija: $\rho = \left\{(x,y) \in A^2 | x^2 + y \leq 6\right\}$
- tablično:

ρ	1	2	3
1	$\top$	$\top$	$\top$
2	$\top$	$\top$	$\perp$
3	$\perp$	$\perp$	$\perp$

- grafički.

Relacije koje imaju beskonačno mnogo elemenata mogu se zadati pomoću drugih relacija ili se mogu opisati rečima govornog jezika.

$A^2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3),$
$(3,1), (3,2), (3,3)\}$

*Primer *:* $A = \{1, 2, 3\}$

$\rho_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$

$\rho_2 = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$

$\rho_3 = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

$\rho_4 = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$

$\rho_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$

Inverzna relacija relacije ρ je $\rho^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in \rho\}$

Primer: Inverzne relacije relacija iz Primera * su:

$\rho_1^{-1} = \{(1,1), (2,1), (1,2), (2,2), (3,3)\}$

$\rho_2^{-1} = \{(2,1), (3,1), (2,2), (3,2), (2,3), (3,3)\}$

$\rho_3^{-1} = \{(1,1), (3,1), (1,3), (2,3), (3,3)\}$

$\rho_4^{-1} = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$

$\rho_5^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (2,2), (3,2)\}$

Osnovne osobine binarne relacije ρ skupa $A \neq 0$:

- **refleksivnost (R)**: $\boxed{(\forall x \in A)} x \rho x$ $\boxed{\forall x \in A,}\ (x,x) \in \rho$
- **simetričnost (S)**: $(\forall x, y \in A)(x\rho y \Rightarrow y \rho x)$ $\forall x,y \in A,\ (x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho$
- **antisimetričnost (A)**: $(\forall x, y \in A)(x\rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y)$ ili $(\forall x, y \in A)((x\rho y \wedge x \neq y) \Rightarrow \rceil (y \rho x))$ $(\forall x,y \in A)\ (x,y) \in \rho \wedge x \neq y \Rightarrow (y,x) \in \rho$
- **tranzitivnost (T)**: $(\forall x, y, z \in A)((x\rho y \wedge y \rho z) \Rightarrow x \rho z)$

$(\forall x,y,z \in A)\ (x,y) \in \rho \wedge (y,z) \in \rho \Rightarrow (x,z) \in \rho$

$A = \{a, b, c\}$

$\rho_1 = \{(a,a)\}$ – NIJE R JER MORA SVAKI ELEMENAT IZ A DA BUDE U RELACIJI SAM SA SOBOM

$\rho_2 = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$ – JESTE R

$\rho_3 = \{(a,b), (b,a), (c,a)\}$ – NIJE S JER ZA SVAKI PAR MORA POSTOJATI NJEGOV OBRNUTI PAR

$\rho_4 = \{(a,b), (b,a)\}$ – JESTE S

$\rho_5 = \{(a,b), (b,c), (c,b)\}$ - NIJE A JER $(b,c) \in \rho_5$ i $(c,b) \in \rho_5$

$\rho_6 = \{(a,b), (b,c), (c,c)\}$ - JESTE A

$\rho_7 = \{(a,b), (b,c), (c,a), (c,c)\}$ - JESTE A

$\rho_7 = \{(a,b), (b,a), (c,a)\}$ - NIJE S
- NIJE A

$\rho_8 = \{(a,a), (b,b)\}$ - JESTE S
- JESTE A

$(x,y) \in \rho \land (y,z) \in \rho \Rightarrow (x,z) \in \rho$

$(a,a) \in \rho \land (a,c) \in \rho \Rightarrow (a,c) \in \rho$

$\rho_9 = \{(a,b), (b,c)\}$ - NIJE T JER BI MORALO BITI TU I (a,c)

$\rho_{10} = \{(a,a), (a,b), (b,c), (c,a)\}$ - NIJE T

$\rho_{11} = \{(a,a), (a,b), (b,c), (a,c)\}$ - JESTE T