Relacije - vežbe

1. Ispitati koje od osobina (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost) imaju sledeće relacije skupa $A = \{1, 2, 3\}$:

   $\rho_1 = \{(a, b), (a, c), (b, c)\}$,

   $\rho_2 = \{(a, a)\}$,

   $\rho_3 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (a, c), (c, c)\}$,

   $\rho_4 = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, c)\}$.

2. Ispitati koje od osobina (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost) imaju sledeće relacije skupa $A = \{1, 2, 3\}$ i odrediti inverzne relacije datih relacija:

   $\rho_1 = \{(1, 3), (1, 2), (2, 1)\}$,

   $\rho_2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 3)\}$,

   $\rho_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$,

   ρ_4 - relacija "deli".

3. Ispitati koje od osobina (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost) imaju sledeće relacije skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

   $\rho_1 = \{(4, 5), (3, 4), (5, 3), (4, 3), (3, 3), (4, 4)\}$,

   $\rho_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$,

   $\rho_3 = \{(3, 3), (6, 6)\}$,

   $\rho_4 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$,

   $\rho_5 = \{(2, 3), (3, 2), (3, 3), (2, 2)\}$,

   $\rho_6 = \emptyset$,

   $\rho_7 = A^2$.

4. Date relacije skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ako je moguće, dopuniti tako da budu refleksivne, simetrične, odnosno tranzitivne.

   $\rho_1 = \{(1, 1), (1, 2), (3, 3), (2, 4)\}$,

   $\rho_2 = \{(3, 3), (5, 5)\}$,

   $\rho_3 = \{(3, 4), (4, 3), (3, 3), (4, 4)\}$,

   $\rho_4 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 4), (1, 3), (2, 4)\}$.

5. Ispitati koje od osobina (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost) imaju sledeće relacije skupa $\mathbb{N}$:

   $\rho_1 = \{(x, x + 2) \mid x \in \mathbb{N}\}$,

   $\rho_2 = \{(x, y) \mid x + y = 7,\ x, y \in \mathbb{N}\}$,

   $\rho_3 = \{(x, y) \mid y = 4x + 1,\ x, y \in \mathbb{N}\}$,

   $\rho_4 = \{(5x, 5x) \mid x \in \mathbb{N}\}$.

   $\rho_5 = \{(x, y) \mid x + y \text{ je paran broj},\ x, y \in \mathbb{N}\}$,

6. Ispitati koje od osobina (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost) imaju sledeće relacije skupa $\mathbb{R}$:

   $\rho_1 = \{(2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$,

   $\rho_2 = \{(x, y) \mid x + y = 3,\ x, y \in \mathbb{R}\}$,

   $\rho_3 = \left\{(x, y) \mid y^2 = x^2,\ x, y \in \mathbb{R}\right\}$,

   $\rho_4 = \{(5x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

   $\rho_5 = \{(x, 5x - 4) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

   $\rho_6 = \{(x, y) \mid x \cdot y > 0,\ x, y \in \mathbb{R}\}$,

   $\rho_7 = \{(x, y) \mid x \cdot y = 0,\ x, y \in \mathbb{R}\}$,

7. Neka je dat skup $A = \{1, 2, 3\}$ i jedna njegova particija $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$. Odrediti relaciju ekvivalencije skupa A koja odgovara datoj particiji.

8. Neka je dat skup $A = \{1, 2, 3\}$ i relacija $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$. Proveriti da li je ova relacija relacija ekvivalencije skupa $A = \{1, 2, 3\}$, i ako jeste odrediti klase ekvivalencije i faktor skup skupa A u odnosu na relaciju ρ.

9. Relaciju $\rho = \{(2, 2), (1, 3), (5, 5), (3, 4)\}$, ako je moguće, dopuniti do relacije ekvivalencije ρ_1 skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a zatim odrediti faktor skup skupa A u odnosu na relaciju ρ_1.

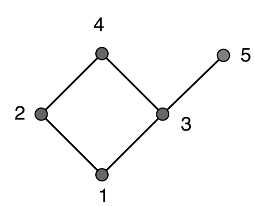
10. Napisati relaciju ekvivalencije ρ skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ako je njen faktor skup $A/\rho = \{\{1, 3, 4\}, \{5\}, \{2, 6\}\}$.

11. Neka je na skupu $\mathbb{Z}$ definisana relacija $\equiv_3$ na sledeći način:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x \equiv_3 y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = 3k.$$

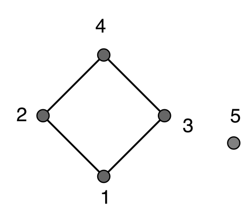
    Dokazati da je $\equiv_3$ relacija ekvivalencije skupa $\mathbb{Z}$ i odrediti klase ekvivalencije i faktor skup.

12. Data je binarna relacija $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (3, 4), (3, 5)\}$ na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dokazati da je ρ relacija poretka, nacrtati njen Haseov dijagram i odrediti najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje).



    - najmanji elemenat: 1
    - najveći elemenat: nema
    - minimalni elemenat: 1
    - maksimalni elemenat: 4, 5

13. Data je binarna relacija $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$ na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dokazati da je ρ relacija poretka, nacrtati njen Haseov dijagram i odrediti najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje).



    - najmanji elemenat: nema
    - najveći elemenat: nema
    - minimalni elemenat: 1,5
    - maksimalni elemenat: 4, 5

    Ako elemenat $a \in A$ nije u relaciji ni sa jednim drugim elementom skupa A, niti je bilo koji elemenat skupa A u relaciji sa njim, tada je elemenat a istovremeno i minimalni i maksimalni elemenat.

14. Data je binarna relacija $\rho = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (a,c), (a,e), (b,a), (b,c), (b,e)\}$ na skupu $A = \{a,b,c,d,e\}$. Dokazati da je ρ relacija poretka, nacrtati njen Haseov dijagram i odrediti najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje).

15. Date relacije skupa $A = \{1,2,3,4\}$

    $\rho_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$,

    $\rho_2 = \{(1,2), (2,3), (1,4), (2,4)\}$,

    $\rho_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$,

    $\rho_4 = \{(2,1), (3,4), (4,3), (3,3), (4,4)\}$.

    dopuniti, ako je moguće, do relacija poretka, a zatim nacrtati njihove Haseove dijagrame i odrediti najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje).

16. Neka je A neprazan skup.

    (a) Dokazati da je $\subseteq$ ("biti podskup") relacija poretka na skupu $\mathcal{P}(A)$.

    (b) Za $A = \{a,b,c\}$ nacrtati Haseov dijagram parcijalno uređenog skupa $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$.

    (c) Za $A = \{a,b,c\}$ ispitati najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje) parcijalno uređenih skupova $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, $(\mathcal{P}(A) \setminus \{A\}, \subseteq)$, $(\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$, $(\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset, A\}, \subseteq)$ i $(\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset, A, \{a,b\}, \{a,c\}\}, \subseteq)$.

17. Na skupu $A \subseteq \mathbb{N}$ definisana je relacija " $|$ " (deli) na sledeći način:

$$x \mid y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ y = kx.$$

    Dokazati da je relacija " $|$ " relacija poretka i odrediti najmanji, najveći, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje) ako je A:

    $A = \mathbb{N}$,

    $A = \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

    $A = D_{42} = \{1,2,3,6,7,14,21,42\}$,

    $A = D_{42} \setminus \{1\}$,

    $A = D_{42} \setminus \{1,42\}$,

    $A = \{2,4,6,12,18\}$.

18. Neka je :

    $A_1 = \{a,b,c,d,e,f\}$, $\rho_1 = \{(x,x) \mid x \in A\} \cup \{(b,c), (b,d), (b,e), (b,f), (c,e), (d,e), (d,f)\}$,

    $A_2 = \{b,c,d,e,f\}$, $\rho_2 = \rho_1 \setminus \{(a,a)\}$,

    $A_3 = \{b,c,d,e\}$, $\rho_3 = \rho_1 \setminus \{(a,a), (f,f), (b,f), (d,f)\}$.

    Za one relacije ρ_i koje jesu relacije poretka nad odgovarajućim skupom A_i odrediti najmanji, najveći, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje).

ZA VEŽBU IZ SKRIPTE:
Zadatak 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.8, 1.10, 1.11