Primer: Ispitati osobine relacija iz Primera *.

$\rho_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$, $A = \{1,2,3\}$

R S A T

R - $\forall x \in A,\ (x,x) \in \rho_1$ ✓

S - $\forall x,y \in A,\ (x,y) \in \rho_1 \wedge (y,x) \in \rho_1$ ✓

A - nije $(1,2) \in \rho_1 \wedge (2,1) \in \rho_1$

T - $\forall x,y,z \in A,\ (x,y) \in \rho_1 \wedge (y,z) \in \rho_1 \Rightarrow (x,z) \in \rho_1$

$(2,3) \in \rho_1$

$\perp \Rightarrow \top$

$\rho_2 = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\},\ A = \{1,2,3\}$

$\cancel{R}$ $\cancel{S}$ $\cancel{A}$ T

R – није $(1,1) \notin \rho_2$

S – није $(1,2) \in \rho_2$ а $(2,1) \notin \rho_2$

A – није $(2,3) \in \rho_2$ и $(3,2) \in \rho_2$

T – ✓

$A = \{1,2,3\}$

$\rho = \{(1,2)\}$

$\forall x,y,z \in A,\ (x,y) \in \rho \wedge (y,z) \in \rho \Rightarrow (x,z) \in \rho$

$(1,2) \in \rho \wedge \perp$

$\perp$

$\top$

$\rho_3 = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$, $A = \{1,2,3\}$

$\cancel{R} \quad \cancel{S} \quad \cancel{A} \quad \cancel{T}$

R – няма $\quad (2,2) \notin \rho_3$

S – няма $\quad (3,2) \in \rho_3$ а $(2,3) \notin \rho_3$

A – няма $\quad (1,3) \in \rho_3$ и $(3,1) \in \rho_3$

T – няма $\quad (1,3) \in \rho_3$ и $(3,2) \in \rho_3$, а $(1,2) \notin \rho_3$

$\rho_4 = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$, $A = \{1,2,3\}$

$\cancel{R}$ $\cancel{S}$ A T

R - није $(1,1) \in \rho_4$

S - није $(1,2) \in \rho_4$ и $(2,1) \in \rho_4$

A - јесте

T - јесте

$\rho_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$, $A = \{1,2,3\}$

$\cancel{R}$ $\cancel{S}$ A T

R – није $(3,3) \notin \rho_5$

S – није $(1,2) \in \rho_5$ а $(2,1) \notin \rho_5$

A – јесте

T – јесте

S

$(a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \in \rho$

$(a,b) \in \rho \wedge (b,a) \in \rho \Rightarrow a = b$

Relacija je u isto vreme simetrična i antisimetrična akko za svaki njen par važi da su mu komponente jednake, jer ako se pojavi par čije su komponente različite $(a, b) \in \rho$, $a \neq b$, tada simetričnost zahteva da njemu simetričan par pripada relaciji, tj. $(b, a) \in \rho$, ali onda antisimetričnost zahteva da bude $a = b$ što je u kontradikciji sa pretpostavkom da su komponente različite.

Relacija $\rho \subseteq A^2$ je **relacija ekvivalencije (RST)** akko je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Primer: relacija jednakosti $=$ na skupu realnih brojeva, relacija paralelnosti $\parallel$ na skupu svih pravih u prostoru, relacija podudarnosti na skupu svih duži, relacija
$\rho_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,4),(4,3),(5,5)\}$ na skupu $A = \{1,2,3,4,5\}$,....

Svaka relacija ekvivalencije ρ definisana na skupu A vrši particiju tog skupa, tj. jednoznačno određuje neke neprazne podskupove skupa A od kojih su svaka dva disjunktna, a njihova unija je skup A. Važi i obrnuto. Za datu particiju skupa A može se definisati relacija ρ na skupu A tako što će proizvoljna dva elementa biti u relaciji ρ akko pripadaju istom podskupu te particije. Ovako definisana relacija je RST relacija.

$A = \{a, b, c\}$ $\quad \rho_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)\}$

$\{\{a\},\{b,c\}\}$ $\quad \rho_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(\underline{a,c}),(\underline{c,a})\} \to \{\{a,c\},\{b\}\}$

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$\rho = \{(a,a), (b,b), (c,c), \boxed{(d,d)}, (a,c), (c,a), (a,b), (b,a), (c,b), (b,c)\}$$

$$\{\{d\}, \{a, b, c\}\}$$

$$\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$$

$$\rho = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (b,a), (c,d), (d,c)\}$$

$A = \{1,2,3\}$

$\{\{1,2,3\}\} \longleftrightarrow \rho_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(2,3),(3,2)\}$

$\{\overbrace{\{1\}}^{C_1},\overbrace{\{2,3\}}^{C_2=C_3}\} \longleftrightarrow \rho_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$

$\{\{2\},\{1,3\}\} \longleftrightarrow \rho_3 = \{(2,2),(1,1),(3,3),(1,3),(3,1)\}$

$\{\{3\},\{1,2\}\} \longleftrightarrow \rho_4 = \{(3,3),(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$

$\{\{1\},\{2\},\{3\}\} \longleftrightarrow \rho_5 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

5

Primer: $A = \{1,2,3,4,5\}$

- RST relaciji
  $\rho_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(4,5),(5,4)\}$
  jednoznačno odgovara particija $\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$,

- RST relaciji $\rho_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$
  jednoznačno odgovara particija $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$,

- RST relaciji $\rho_3 = A^2$ jednoznačno odgovara particija $\{\{1,2,3,4,5\}\}$,

- particiji $\{\{1\},\{2\},\{3,4,5\}\}$ jednoznačno odgovara relacija ekvivalencije
  $$\begin{aligned}\rho_4 \quad = \quad & \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(3,4),(4,3),(3,5),\\ & (5,3),(4,5),(5,4)\},\end{aligned}$$

- particiji $\{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$ jednoznačno odgovara relacija ekvivalencije
  $$\begin{aligned}\rho_5 \quad = \quad & \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(1,3),\\ & (3,1),(2,3),(3,2),(4,5),(5,4)\}.\end{aligned}$$

Na nekom konačnom skupu A može se definisati onoliko relacija ekvivalencije koliko ima particija.

Primer: Sve particije skupa $A = \{1, 2, 3\}$ su: $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$, $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$, $\{1, 2, 3\}$, što znači da se na skupu A može definisati najviše 5 različitih RST relacija.

Neka je $\rho \subseteq A^2$ relacija ekvivalencije skupa A, neka $x \in A$ i neka je sa C_x označen skup svih elemenata $y \in A$ koji su u relaciji ρ sa elementom x, tj. $\boxed{C_x = \{y | x\rho y \wedge y \in A\}.}$ Tada se skup C_x naziva **klasa ekvivalencije** elementa x, u odnosu na relaciju ρ. Skup svih klasa ekvivalencije zove se **faktor skup** ili količnički skup i označava sa A/ρ.

Osobine klasa ekvivalencije: neka je ρ RST relacija skupa A

- klase ekvivalencije su, zbog refleksivnosti relacije ρ, neprazni skupovi jer $\forall x \in A$, $x \in C_x$,
- zbog simetričnosti relacije ρ važi da za $\forall x, y \in A$, $x \in C_y \Leftrightarrow y \in C_x$,
- klase ekvivalencije C_x i C_y skupa A se ili poklapaju ili su disjunktne, tj. $\forall x, y \in A$, $C_x = C_y \vee C_x \cap C_y = \emptyset$,
- unija svih klasa ekvivalencije skupa A, u odnosu na relaciju ρ je sam skup A.

$x \in C_y \overset{S}{\Rightarrow} x\rho y \Rightarrow y\rho x$

$\Rightarrow y \in C_x$

$A = \{1,2,3\}$

$\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$

$C_1 = \{1,2\} = C_2 \qquad C_3 = \{3\}$

$A/\rho = \{C_1, C_3\} = \{\{1,2\},\{3\}\}$

$A = \{a, b, c, d\}$

$\rho = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,c), (c,a), (b,d), (d,b)\}$

PARTICIÓN $\{\{a,c\}, \{b,d\}\}$

$$\left.\begin{array}{l} C_a = \{a, c\} = C_c \\ C_b = \{b, d\} = C_d \end{array}\right\} \quad A/\rho = \{C_a, C_b\} = \{\{a,c\}, \{b,d\}\}$$

Primer: Neka je $\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$ relacija ekvivalencije skupa $A = \{1,2,3\}$,. Klase ekvivalencije skupa A u odnosu na relaciju ρ su $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2,3\} = C_3$, a faktor skup je $A/\rho = \{C_1, C_2\} = \{\{1\},\{2,3\}\}$.

Na osnovu prethodnih osobina može se zaključiti da su klase ekvivalencije neprazni podskupovi skupa A koji su međusobno disjunktni i čija unija je skup A, tj. da je faktor skup skupa A u odnosu na relaciju ρ jedna particija skupa A.

Relacija $\rho \subseteq A^2$ je **relacija poretka (RAT)** akko je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Uređen par (A, ρ) je parcijalno uređen skup akko je $A \neq 0$ i ρ RAT relacija skupa A.

(A, ρ)

Primer: relacije $\leq$ i $\geq$ na skupu prirodnih brojeva, relacija deli $|$ na skupu prirodnih brojeva, relacija

$$\rho_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,4),(3,4),(3,5)\}\}$$

na skupu $A = \{1,2,3,4,5\}$,....

$A = \{1, 2, 3\}$

$\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

R S A T

(b, a)

Neka je ρ relacija poretka skupa A. Tada je:

- $a \in A$ **najmanji** elemenat skupa A akko $\forall x \in A$, $a\rho x$,

  tj. $a \in A$ najmanji elemenat skupa A akko je on u relaciji sa svakim elementom,

- $a \in A$ **najveći** elemenat skupa A akko $\forall x \in A$, $x\rho a$,

  tj. $a \in A$ najveći elemenat skupa A akko je svaki elemenat u relaciji sa njim,

- $a \in A$ **minimalni** elemenat skupa A akko $\rceil (\exists x \in A)(x\rho a \wedge x \neq a)$,

  tj. $a \in A$ minimalni elemenat skupa A akko ni jedan drugi elemenat nije u relaciji sa njim osim njega samog,

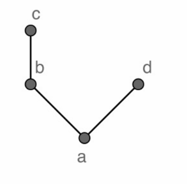
- $a \in A$ **maksimalni** elemenat skupa A akko $\rceil (\exists x \in A)(a\rho x \wedge x \neq a)$,

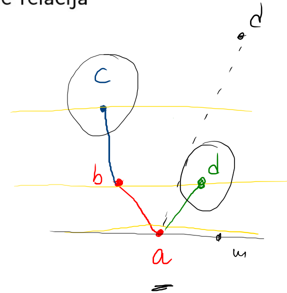
  tj. $a \in A$ maksimalni elemenat skupa A akko nije u relaciji ni sa jednim drugim elementom osim sa samim sobom.

Grafik relacije poretka naziva se **Haseov dijagram**. Svakoj relaciji poretka jednoznačno odgovara jedan Haseov dijagram i obrnuto, na osnovu Haseovog dijagrama se jednoznačno može rekonstruisati relacija poretka kojoj odgovara posmatrani Haseov dijagram.

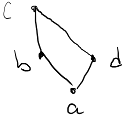
Primer: Relacija
$\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (b, c)\}$ je relacija poretka skupa $A = \{a, b, c, d\}$.

- najmanji elemenat: a
- najveći elemenat: nema
- minimalni elementi: a
- maksimalni elementi: c, d





$\rho_1 = \rho \cup \{d, c\}$



Ako postoji najmanji elemenat on je jedinstven.

Ako postoji najveći elemenat on je jedinstven.

Minimalnih i maksimalnih elemenata može biti više.

Ako postoji njamanji elemenat on je i jedini minimalni elemenat.

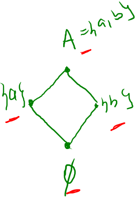
Ako postoji najveći elemenat on je i jedini maksimalni elemenat.

$\{a\}$, a 1, $\{1\}$

Primer:

- Relacija $\leq$ u skupu $\mathbb{N}$: jedini minimalni i najmanji elemenat je 1, a najvećeg i maksimalnog elementa nema.
  Relacija $\geq$ u skupu $\mathbb{N}$: jedini maksimalni i najveći elemenat je 1, a najmanjeg i minimalnog elementa nema.
- Relacija deli u skupu $\mathbb{N}$ definisana je sa $\boxed{m | n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, n = km.}$
  Najmanji i jedini minimalni elemenat je 1, a najvećeg i maksimalnog elementa nema.
  Relacija deli na skupu $A = \{2, 3, 5, 12\}$. Najmanji i najveći elemenat ne postoje, minimalni elementi su 2, 5 i 3, a maksimalni 5 i 12.
- Relacija $\subseteq$ u partitivnom skupu nekog skupa $A \neq 0$. Jedini minimalni i najmanji elemenat je $\emptyset$, a jedini maksimalni i najveći elemenat je A.

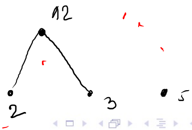
$| \in \{(2,2),(3,3),(5,5),(12,12),(2,12),(3,12)\}$



$A = \{a, b\}$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A, \{a\}, \{b\}\}$

$\subseteq = \{(\emptyset, A), (\emptyset, \{a\}), (\emptyset, \{b\}), (\{a\}, A), (\{b\}, A), (\emptyset, \emptyset), (A, A), (\{a\},\{a\}), (\{b\},\{b\})\}$



NAJMANJI: nema
NAJVEĆI: nema
MAKSIMALNI: 12, 5
MINIMALNI: 2, 3, 5