Logika i skupovi

October 6, 2021

LOGIKA

$2+3=5$

$2+3=7$

$2+$

Iskazi su rečenice za koje se zna da li su tačne ($\top$) ili netačne ($\perp$). Obeležavaju se malim latiničnim slovima: p, q, r, ... koja se nazivaju iskazna slova.

Definicije osnovnih logičkih operacija:

$(2+3=5) \vee (3+4=5)$

$\top \quad \vee \quad \perp$

$\top$

$\neg p$

$p \wedge q$

$(2+3=5) \wedge (3+4=7)$

$\top \quad \wedge \quad \top$

$\top$

Negacija

$\neg$	
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

Konjukcija

$\wedge$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Disjunkcija

$\vee$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$

$(2+3=5) \wedge (3+4=5)$

$\top \quad \wedge \quad \perp$

$\perp$

Implikacija

$\Rightarrow$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$

Ekvivalencija

$\Leftrightarrow$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$

$1+3=5 \Rightarrow 2+2=7$

$\perp \quad \Rightarrow \quad \perp$

$\top$

$1+3=4 \Rightarrow 2+2=7$

$\top \quad \Rightarrow \quad \perp$

$\perp$

Rekurzivna definicija iskazne formule:

1. Iskazne konstante $(\top, \bot)$ i iskaznaa slova su iskazne formule.
2. Ako su A i B iskazne formule, tada su i $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ i $\rceil A$ iskazne formule.
3. Iskazne formule se mogu dobiti samo konačnom primenom 1. i 2.

Uobičajeno je da se spoljašnje zagrade ne pišu. Kao i da se uzima da su operacije $\wedge$ i $\vee$ prioritetnije.
Iskazne formule koje su tačne za sve vrednosti iskaznih slova nazivaju se **tautologije**.

Primeri tautologija: $p, q, r \in \{\top, \bot\}$

- komutativnost konjukcije i disjunkcije: $$p \wedge q \quad \Leftrightarrow \quad q \wedge p$$ $$p \vee q \quad \Leftrightarrow \quad q \vee p$$
- asocijativnost konjukcije i disjunkcije:

$$p \wedge (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \wedge r$$
$$p \vee (q \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \vee r$$

$\top, \bot, p, q, r, \dots$

p, q

$(q \wedge p)$ ✓

$(p \vee (q \wedge p))$

$(p \vee (q \wedge p)) \Rightarrow r$

$q \wedge p$

$\top \equiv \boxed{q \vee p \Rightarrow p \vee q}$

$\top \quad \top$

$\bot \quad \bot$

q	p	$q \vee p$	$p \vee q$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

- distributivnost konjukcije prema disjunkciji i disjunkcije prema konjukciji:

$$\begin{aligned} p \wedge (q \vee r) \quad &\Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \quad &\Leftrightarrow \quad (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{aligned}$$

$a \cdot (b+c) = ab + ac$

$-(a+b) = -a-b$

- zakon isključenja trećeg: $\begin{aligned} p \wedge \rceil p \quad &\Leftrightarrow \quad \perp \\ p \vee \rceil p \quad &\Leftrightarrow \quad \top \end{aligned}$

- zakon kontrapozicije: $(p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (\rceil q \Rightarrow \rceil p)$

- De Morganovi zakoni: $\begin{aligned} \rceil (p \wedge q) \quad &\Leftrightarrow \quad \rceil p \vee \rceil q \\ \rceil (p \vee q) \quad &\Leftrightarrow \quad \rceil p \wedge \rceil q \end{aligned}$

- zakon uklanjanja dvojne negacije: $\rceil\rceil p \quad \Leftrightarrow \quad p$

- $(p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad \rceil p \vee q$

Za iskazivanje tvrđenja osim logičkih operacija, potrebni su i **logički kvantifikatori** $\forall$ (za svako) i $\exists$ (postoji).

- $(\forall x)\, \alpha(x)$: "za svako x tačno je $\alpha(x)$"
- $(\exists x)\, \alpha(x)$: "postoji x tako da važi $\alpha(x)$"

$\forall$ $\exists$

$(\forall x \in \mathbb{N})\,(2 + x \in \mathbb{N})$

$(\exists x \in \mathbb{N})\,(2 + x = 5)$

Primer:

- $(\forall x \in \mathbb{R})\left((x+1)^2 = x^2 + 2x + 1\right)$
- $(\exists x \in \mathbb{R})\,(x + 2 = 5)$

Ako ispred x nije napisan nijedan kvantifikator tada se podrazumeva da stoji $\forall$.
Takođe se u svim definicijama podrazumeva ako i samo ako što će skraćeno biti zapisivano sa akko.

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

SKUPOVI

$x \in S$

$x \notin S$

Skup je osnovni pojam koji se ne definiše.
Skupovi se obeležavaju sa A, B, C, ..., a elementi skupa sa a, b, c, ...

$S = \{x \mid \pi(x)\}$

$S = \{x \mid x$ - PARAN BROJ $\}$

Činjenica da je x elemenat skupa S obeležava se sa: $x \in S$ i čita x pripada skupu S, a činjenica da x nije elemenat skupa S obeležava se sa: $x \notin S$ i čita x ne pripada skupu S.

Konačan skup se može definisati nabrajanjem elemenata.

Primer: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ili $B = \{a, b\}$ ili $C = \{●, ○, ◐, ◑\}$.

Ako je skup S beskonačan, tada se mora pronaći neka osobina π koju imaju elementi skupa S, a koju nema nijedan element koji ne pripada skupu S. Neka $\pi(x)$ znači da x zadovoljava uslov π tada se skup S zapisuje sa $S = \{x|\pi(x)\}$. Ovaj način zapisivanja skupova se može koristiti i za konačne skupove.

Primer: $A = \{x|x < 5 \wedge x \in \mathbb{N}\}$ ili $S = \{x|2x - 3 = 0\}$.

Skup koji nema elemenata zove se **prazan skup** i obeležava se sa $\emptyset$ ili $\{\}$.
Napomena: $\{\emptyset\}$ - nije prazan skup već skup koji sadrži jedan elemenat (prazan skup).

$\emptyset$, $\{\}$

$\{\emptyset\}$

Skup kome pripadaju svi elementi svih skupova koje posmatramo zove se **univerzalni skup** i obeležava sa $\mathcal{U}$.

$\{a\}$

$\mathcal{U}$

Redosled elemenata u skupu nije važan, tj. $\{a, b\} = \{b, a\}$.
U skupu $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ od n elemenata podrazumeva se da su svi elementi tog skupa međusobno različiti.

Kardinalni broj skupa A, je broj elemenata koji pripadaju skupu A, i obeležava se sa $Card\,(A)$. , $|A|$

Primer: $A = \{0, 1\} \Rightarrow Card\,(A) = 2$

$\# A$

$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$

$\{1, 2, 3\} = \{1, 1, 1, 2, 2, 3\}$

Skupovne relacije i operacije se definišu preko odgovarajućih logičkih operacija:

- **jednakost** skupova: $A = B \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{U})\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

- skupovna **inkluzija** (podskup):
  $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{U})\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$

  pravi podskup: $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

  Za svaki skup A važi: $A \subseteq A$ i $\emptyset \subseteq A$.

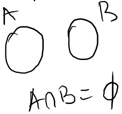
$A \subseteq B$

$A \subset B$

$A \quad \boxed{\{\emptyset, A\}}$

$\emptyset \subseteq \emptyset$

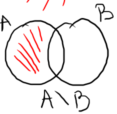
- **unija** skupova: $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$



- **presek** skupova: $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

  Skupovi su disjunktni ako je njihov presek prazan skup, tj. ako je $A \cap B = \emptyset$.

- **komplement** skupa: $\overline{A} = \{x | x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}$



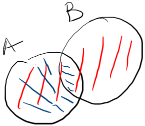
- **razlika** skupova: $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$

- **simetrična razlika** skupova:
  $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Osobine skupovnih operacija:

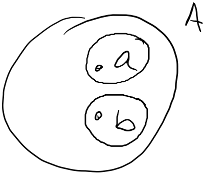
- $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$ $\quad$ $A \cap \mathcal{U} = \cancel{\emptyset}\, A$, $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ $\quad$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$, $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$ $\quad$ $\overline{\overline{A}} = A$

- zakon komutativnosti: $$A \cap B = B \cap A$$ $$A \cup B = B \cup A$$
- zakon asocijativnosti: $$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$ $$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
- zakon distributivnosti: $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$ $$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
- zakon idempotentnosti: $$A \cap A = A$$ $$A \cup A = A$$



- zakon apsorpcije: $$A \cap (A \cup B) = A$$ $$A \cup (A \cap B) = A$$
- De Morganovi zakoni: $$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$ $$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Partitivni skup, skupa A, je skup svih podskupova skupa A, tj. $\mathcal{P}(A) = \{X | X \subseteq A\}$.



Napomena: $\emptyset$ i A su uvek elementi skupa $\mathcal{P}(A)$.

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Particija skupa A, je skup nepraznih podskupova skupa A, od kojih su svaka dva disjunktna, a njihova unija je skup A.

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$
Sve particije skupa A su $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$, $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$, $\{\{1, 2, 3\}\}$.

$A = \{a, b\}$

$\mathcal{P}(A) = \{\{a\}, \{b\}, \emptyset, \{a, b\}\}$

$A = \{a, b\}$

$\{\{a\}, \{b\}\}$

$\{\{a, b\}\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$

$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$

$\{\{4\}, \{3, 2, 1\}\}$

$\vdots$

$\{\{4\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$

$\cancel{\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4\}\}}$

$\cancel{\{\{1\}, \{2\}\}}$

Primer: Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{2, 4, 6\}$. Odrediti: $|A|$, $|B|$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\mathcal{P}(B)$ i sve particije skupa B.

$|A| = \text{Card}(A) = 5$

$|B| = \text{Card}(B) = 3$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cap B = \{2, 4\}$

$A \setminus B = \{1, 3, 5\}$

$B \setminus A = \{6\}$

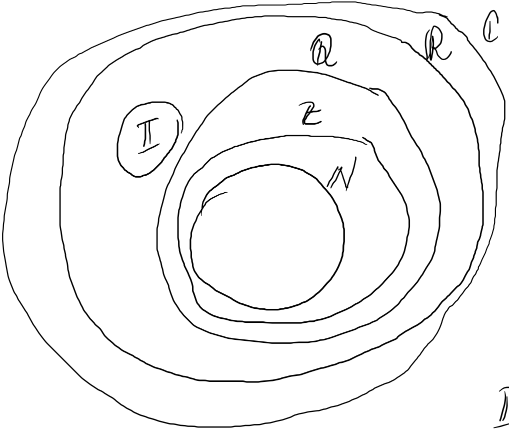
$\mathcal{P}(A) = \{ \underline{\{2, 4, 6\}}, \ \ldots$

$\cancel{\mathcal{P}(A) = \{2, 4, 6}$

$2^{|B|} = 8$

$\mathcal{P}(B) = \{\{2\}, \{4\}, \{6\}, \emptyset, B, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}\}$

PARTICIJE: $\{\{2\}, \{4\}, \{6\}\}$; $\{\{2,4\}, \{6\}\}$; $\{\{2\}, \{4, 6\}\}$; $\{\{4\}, \{2,6\}\}$; $\{\{2,4,6\}\}$



$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$

$-\frac{1}{2}$

$\frac{-1}{2} \quad \frac{1}{-2}$

$\mathbb{I} = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi \dots\}$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

$\mathbb{C}$ – комплексних бројева