$\forall x \in A,\ x \rho x$

$\forall x, y \in A,\ x \rho y \Rightarrow y \rho x$

$\forall x, y, z \in A,\ x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z$

$\boxed{1, 4, 7, \ldots}$

$\boxed{2, 5, 8, \ldots}$

$\boxed{0, 3, 6, \ldots}$

11. Neka je na skupu $\mathbb{Z}$ definisana relacija $\equiv_3$ na sledeći način:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x \equiv_3 y \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = 3k.$$

$\iff$ x и y имају исти остатак при дељењу са 3

Dokazati da je $\equiv_3$ relacija ekvivalencije skupa $\mathbb{Z}$ i odrediti klase ekvivalencije i faktor skup.

R. $\forall a \in \mathbb{Z},\ a \equiv_3 a$? ← ТРЕБА ДА ПОКАЖЕМО

$a \equiv_3 a \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \underbrace{a - a}_{0} = 3k$

ЗАКЉУЧУЈЕМО: $\exists 0 \in \mathbb{Z},\ a - a = 3 \cdot 0 \Rightarrow a \equiv_3 a$ ✓

S. $\forall a, b \in \mathbb{Z},\ a \equiv_3 b \Rightarrow b \equiv_3 a$? ← ТРЕБА ДА ПОКАЖЕМО

$\underline{a \equiv_3 b} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ a - b = 3k \ /\cdot(-1)$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ b - a = -3k$

$\Rightarrow \exists \underbrace{(-k)}_{m} \in \mathbb{Z},\ b - a = 3 \cdot (-k)$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ b - a = 3 \cdot m$

$\Rightarrow \underline{b \equiv_3 a}$

T. $\forall a, b, c \in \mathbb{Z},\ a \equiv_3 b \wedge b \equiv_3 c \Rightarrow a \equiv_3 c$?

↳ ТРЕБА ДА ДОКАЖЕМО

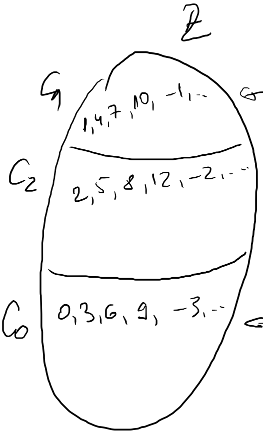
$\underline{a \equiv_3 b \wedge b \equiv_3 c} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ a - b = 3k \ \wedge\ \exists m \in \mathbb{Z},\ b - c = 3m$ $+$

$\Rightarrow \exists k, m \in \mathbb{Z},\ a - c = 3k + 3m$

$\Rightarrow \exists \underbrace{(k+m)}_{p} \in \mathbb{Z},\ a - c = 3(k+m)$

$\Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z},\ a - c = 3p$

$\Rightarrow \underline{a \equiv_3 c}$



броеви кои имаат остаток 1 при делење со 3

броеви кои имаат остаток 2 при делење со 3

броеви кои имаат остаток 0 при делење со 3

$C_0 = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$C_1 = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$C_2 = \{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

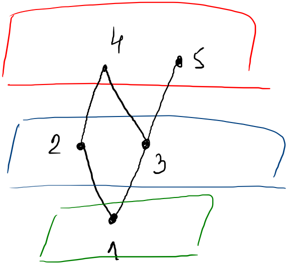
$\mathbb{Z}/_{\equiv_3} = \{C_0, C_1, C_2\}$

12. Data je binarna relacija

$$\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(1,3),\\ (1,4),(1,5),(2,4),(3,4),(3,5)\}$$

na skupu $\boxed{A = \{\cancel{1},\cancel{2},\cancel{3},\cancel{4},5\}}$. Dokazati da je ρ relacija poretka, nacrtati njen Haseov dijagram i odrediti (ako postoje) najmanji, najveći, minimalne i maksimalne elemente.

R A T



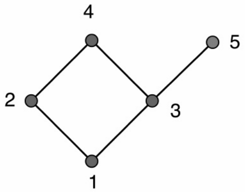
MINIMALNI : 1

MAKSIMALNI : 4, 5

NAJMANJI: 1

NAJVEĆI: —

- najmanji elemenat: 1
- najveći elemenat: nema
- minimalni elemenat: 1
- maksimalni elemenat: 4, 5



13. *Data je binarna* relacija

$$\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(1,3),(1,4),(2,4),(3,4)\}$$

na skupu $A = \{\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, 4, 5\}$. Dokazati da je ρ relacija poretka, nacrtati njen Haseov dijagram i odrediti (ako postoje) najmanji, najveći, minimalne i maksimalne elemente.

$\rho_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

$A = \{1,2,3,4,5\}$

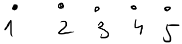
R A T

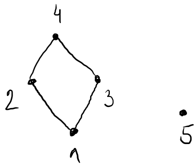
MINIMALNI : 1,5

MAKSIMALNI : 4,5

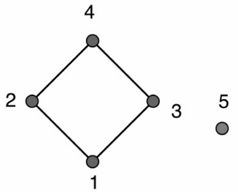
NAJMANJI : —

NAJVEĆI : —





- najmanji elemenat: nema
- najveći elemenat: nema
- minimalni elemenat: 1,5
- maksimalni elemenat: 4, 5



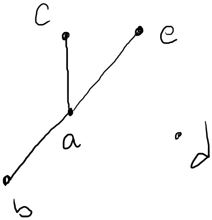
Ako elemenat $a \in A$ nije u relaciji ni sa jednim drugim elementom skupa A, niti je bilo koji elemenat skupa A u relaciji sa njim, tada je elemenat a istovremeno i minimalni i maksimalni elemenat.

14. Data je binarna relacija

$$\rho=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,c),(a,e),(b,a),(b,c),(b,e)\}$$

na skupu $A=\{\cancel{a},\cancel{b},\cancel{c},d,\cancel{e}\}$. Dokazati da je ρ relacija poretka, nacrtati njen Haseov dijagram i odrediti najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje).

R A T



MINIMALNI: b, d

MAKSIMALNI: c, e, d

NAJMANJI: —

NAJVEĆI: —

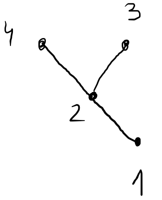
15. Relacije ρ_i skupa A dopuniti, ako je moguće, do relacija poretka, a zatim nacrtati njihove Haseove dijagrame i odrediti najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje).
$\rho_1 = \{(1,1), (\underline{1,2}), (\underline{2,1})\}$, $A = \{1,2,3,4\}$

ρ_1 - није могуће допунити до РАТ релације
јер није А

$$\rho_2 = \{(1,2),(2,3),(1,4),(2,4)\},\ A = \{1,2,3,4\}$$

$$\rho_2^D = \rho_2 \cup \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3)\}$$

$$= \{(1,2),(2,3),(1,4),(2,4),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3)\}$$



MINIMALNI: 1

MAKSIMALNI: 3, 4

NAJMANJI: 1

NAJVEĆI: —

$$\rho_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\},\ A = \{1,2,3,4\}$$

$$\rho_3^D = \rho_3 \cup \{(4,4)\}$$

MINIMALNI : 1, 2, 3, 4,

MAKSIMALNI : 1, 2, 3, 4,

NAJMANJI : —

NAJVEĆI : —

$$\rho_4 = \{(2,1), (3,4), (4,3), (3,3), (4,4)\},\ A = \{1,2,3,4\}$$

ρ_4 – не може да се дополни до RAT јер ниде

A

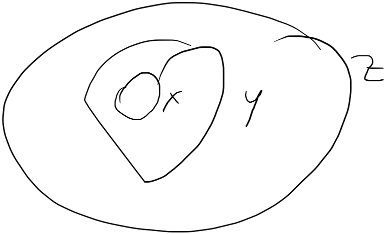
16. Neka je A neprazan skup.

16.1 Dokazati da je $\subseteq$ ("biti podskup") relacija poretka na skupu $\mathcal{P}(A)$.

R. $\forall X \in \mathcal{P}(A),\ X \subseteq X$ ✓

A. $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A),\ X \subseteq Y \land Y \subseteq X \Rightarrow X = Y$ ✓

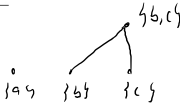
T. $\forall X, Y, Z \in \mathcal{P}(A),\ X \subseteq Y \land Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$ ✓

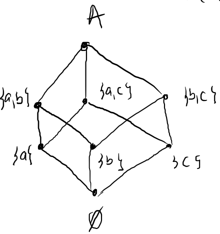


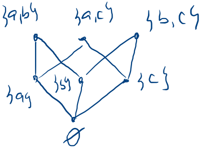
16.2 Za $A = \{a, b, c\}$ nacrtati Haseove dijagrame i ispitati najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje) parcijalno uređenih skupova $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, $(\mathcal{P}(A) \setminus \{A\}, \subseteq)$, $(\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$, $(\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset, A\}, \subseteq)$ i $(\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset, A, \{a, b\}, \{a, c\}\}, \subseteq)$.

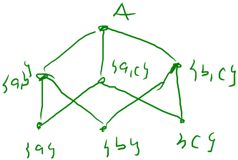
	najmanji	najveći	minimalni	maksimalni
$\mathcal{P}(A)$	$\emptyset$	A	$\emptyset$	A
$\mathcal{P}(A) \setminus \{A\}$	$\emptyset$	—	$\emptyset$	$\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$
$\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$	—	A	$\{a\},\{b\},\{c\}$	A
$\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset, A\}$	—	—	$\{a\},\{b\},\{c\}$	$\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$
$\mathcal{P}(A)\setminus\{\emptyset,A,\{a,b\},\{a,c\}\}$	—	—	$\{a\},\{b\},\{c\}$	$\{a\},\{b,c\}$

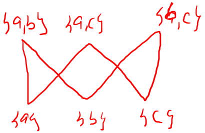
$\mathcal{P}(A) = \{\cancel{\emptyset}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \cancel{A}\}$











17. Na skupu $A \subseteq \mathbb{N}$ definisana je relacija " $\mid$ " (deli) na sledeći način:

$$\forall x,y\in A, \quad \boxed{x \mid y \iff \exists k \in \mathbb{N},\ y = kx.}$$

Dokazati da je relacija " $\mid$ " relacija poretka

ANTISIMETRIČNOST

1) $\forall x,y\in A,\ x\rho y \land y\rho x \Rightarrow x=y$

2) $\forall x,y\in A,\ x\rho y \land x\neq y \Rightarrow \neg y\rho x$

SIMETRIČNOST

$\forall x,y\in A,\ x\rho y \Rightarrow y\rho x$

R. $\forall a\in A,\ a\mid a$? ← TREBA DA POKAŽEMO

$a\mid a \Rightarrow \exists k\in \mathbb{N},\ a=ka$

$\exists 1\in \mathbb{N},\ a=1\cdot a \Rightarrow a\mid a$

A. $\forall a,b\in A,\ a\mid b \land b\mid a \Rightarrow a=b$? ← TREBA

$\underline{a\mid b \land b\mid a} \Rightarrow \exists k\in \mathbb{N},\ a=kb \land \exists m\in \mathbb{N},\ b=ma$

$\Rightarrow \exists k,m\in \mathbb{N},\ \cancel{a}=k\cdot m\cdot \cancel{a}$

$\Rightarrow \exists k,m\in \mathbb{N},\ km=1$ ← једини бројеви природни који кад се помноже дају резултат 1 су 1 и 1, тј. $1\cdot 1=1$

$\Rightarrow k=m=1$

$\Rightarrow \underline{a=b}$

T. $\forall a,b,c \in A,\quad a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$? ← TREBA

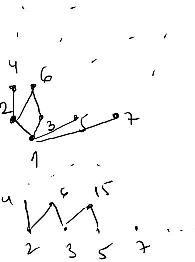
$$a|b \wedge b|c \Rightarrow \exists k \in N,\ \boxed{b = k\cdot a} \wedge \exists m \in N,\ c = m \cdot b$$

$$\Rightarrow \exists k, m \in N,\ c = \underbrace{m \cdot k} \cdot a$$

$$\Rightarrow \exists m \cdot k \in N,\ c = \underbrace{m \cdot k}_{p} \cdot a$$

$$\Rightarrow \exists p \in N,\ c = pa$$

$$\Rightarrow a|c$$



i odrediti najmanji, najveći, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje) ako je A:

$A = \mathbb{N}$,

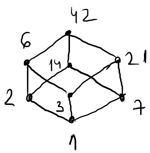
$A = \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

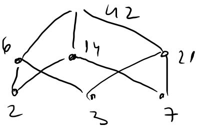
$A = D_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$,

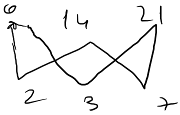
$A = D_{42} \setminus \{1\}$,

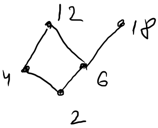
$A = \{2, 4, 6, 12, 18\}$.

	najmanji	najveći	minimalni	maksimalni
$\mathbb{N}$	1	—	1	—
$\mathbb{N} \setminus \{1\}$	—	—	сви прости бр.	—
D_{42}	1	42	1	42
$D_{42} \setminus \{1\}$	—	42	2, 3, 7	42
$D_{42} \setminus \{1, 42\}$	—	—	2, 3, 7	6, 14, 21
$\{2, 4, 6, 12, 18\}$	2	—	2	12, 18









18. Neka je :

$A_1 = \{\cancel{a}, \cancel{b}, \cancel{c}, \cancel{d}, e, f\}$,

$\rho_1 =$

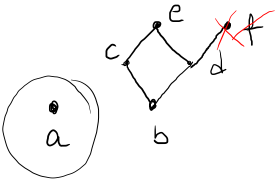
$= \{(x,x) \mid x \in A\} \cup \{(b,c), (b,d), (b,e), (b,f), (c,e), (d,e), (d,f)\}$,

$A_2 = \{b, c, d, e, f\}$, $\rho_2 = \rho_1 \setminus \{(a,a)\}$,

$A_3 = \{b, c, d, e\}$, $\rho_3 = \rho_1 \setminus \{(a,a), (f,f), (b,f), (d,f)\}$.

Za one relacije ρ_i koje jesu relacije poretka nad odgovarajućim skupom A_i odrediti najmanji, najveći, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje).

	najmanji	najveći	minimalni	maksimalni
(A_1, ρ_1)	—	—	a, b	a, e, f
(A_2, ρ_2)	b	—	b	e, f
(A_3, ρ_3)	b	e	b	e



ZA VEŽBU IZ SKRIPTE:
Zadatak 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.8, 1.10, 1.11