POLINOMI

Polinom nad proizvoljnim poljem $\mathbb{F} = (F, +, \cdot)$ je uređena k-torka elemenata tog polja kod koje je poslednja komponenta različita od "nule" polja, tj. polinom je

$$p = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n), \ n \in \mathbb{N}, \ a_i \in F, \ a_n \neq 0.$$

- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ su **koeficijenti** polinoma;
- a_0 je **slobodan član** polinoma;
- a_n je **vodeći koeficijent;**
- ako je $a_n = 1$ polinom je **normiran** (normalizovan);
- $n = \deg\big(p\big)$ je **stepen** polinoma p;
- ako je $n = 0$ i $a_0 \neq 0$, onda je p **konstantan polinom** nultog stepena.
- za $n = 0$ i $a_0 = 0$ polinom p je **nula polinom**. Stepen nula polinoma nije definisan.
- $F[x]$ je skup svih polinoma nad poljem $\mathbb{F}$.
- $(F[x], +, \cdot)$ je komutativan prsten sa jedinicom, gde su $+$ i $\cdot$ sabiranje i množenje polinoma.

Polinomu $p = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nad poljem $\mathbb{F}$ jednoznačno odgovara **polinomski izraz**

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

tj. svaki polinom se može poistovetiti sa odgovarajućim polinomskim izrazom (iako su to formalno različiti pojmovi) pa je uobičajeno da se za polinomski izraz $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, kaže da je polinom.

Polinomska funkcija je funkcija definisana polinomskim izrazom, tj. funkcija

$$p : F \longrightarrow F, \ p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \ a_i \in F.$$

Polinomska funkcija se u opštem slučaju ne može poistovetiti sa polinomom jer u slučaju konačnih polja različitim polinomima odgovaraju iste polinomske funkcije. U slučaju beskonačnih polja postoji uzajamno jednoznačna korespodencija između polinoma i polinomskih funkcija, pa se u tom sličaju može koristiti naziv polinom i za polinomsku funkciju.

Kako će ovde biti reči samo o polinomima nad beskonačnim poljima za polinomsku funkciju će biti korišćen termin polinom.

Dva nenula polinoma su **jednaka** akko su istog stepena i ako su im koeficijenti uz odgovarajuće stepene jednaki.

Sabiranje polinoma

Neka su $p(x)$ i $q(x)$ nenula polinomi takvi da je $\deg(p(x)) = n$ i $\deg(q(x)) = m$. Sabiranje polinoma $p(x)$ i $q(x)$ vrši se tako što se koeficijenti uz iste stepene promenljive saberu. Stepen polinoma $p(x) + q(x)$ je

$$\deg\big(p(x) + q(x)\big) \leq \max\{n, m\}.$$

Zbir nula polinoma i polinoma $p(x)$ jeste polinom $p(x)$.

Množenje polinoma

Neka su $p(x)$ i $q(x)$ nenula polinomi takvi da je $\deg(p(x)) = n$ i $\deg(q(x)) = m$. Proizvod polinoma $p(x)$ i $q(x)$ vrši se tako što se pomnože svi sabirci polimoma $p(x)$ sa svim sabircima polinoma $q(x)$. Stepen polinoma $p(x) \cdot q(x)$ je

$$\deg\big(p(x) \cdot q(x)\big) = n + m.$$

Proizvod nula polinoma i polinoma $p(x)$ je nula polinom.

Deljenje polinoma

Neka su $p(x)$ i $q(x)$ nenula polinomi takvi da je $\deg(p(x)) = n$ i $\deg(q(x)) = m$, gde je $n \geq m$. Tada postoje jedinstveni polinomi $s(x)$ i $r(x)$, tako da je

$$p(x) = q(x)s(x) + r(x),$$

gde je $\deg\big(r(x)\big) < \deg\big(q(x)\big)$ ili je $r(x) = 0$. Ako je $r(x) = 0$, tada je polinom $p(x)$ deljiv polinomom $q(x)$, tj. polinom $q(x)$ deli polinom $p(x)$, i to se zapisuje $q(x) \mid p(x)$.

Polinom $s(x)$ naziva se količnik, a $r(x)$ ostatak pri deljenju polinoma $p(x)$ polinomom $q(x)$.

Deljenje polinoma često se piše i u obliku

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

Količnik pri deljenju nula polinoma $p(x)$ sa proizvoljnim nenula polinomom $q(x)$ je nula polinom.

Primer: Odrediti količnik $s(x)$ i ostatak $r(x)$ pri deljenju polinoma $p(x) = x^5 + x^4 - 2x + 1$ polinomom $q(x) = x^2 - x + 2$.

$$
\begin{array}{l}
(x^5 + x^4 - 2x + 1) : (x^2 - x + 2) = \underbrace{x^3 + 2x^2 - 4}_{\text{količnik}} \\
\underline{-(x^5 - x^4 + 2x^3)} \\
\quad 2x^4 - 2x^3 - 2x + 1 \\
\quad \underline{-(2x^4 - 2x^3 + 4x^2)} \\
\qquad -4x^2 - 2x + 1 \\
\qquad \underline{-(-4x^2 + 4x - 8)} \\
\qquad\qquad \underbrace{-6x + 9}_{\text{ostatak}}
\end{array}
$$

Polinom $s(x) = x^3 + 2x^2 - 4$ je količnik, a $r(x) = -6x + 9$ je ostatak pri deljenju $p(x)$ sa $q(x)$. Odnosno,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^5 + x^4 - 2x + 1}{x^2 - x + 2} = x^3 + 2x^2 - 4 + \frac{-6x + 9}{x^2 - x + 2}.$$

Najveći zajednički delilac (NZD) polinoma je polinom najvećeg stepena koji ih deli.

Za polinome čiji je NZD jednak 1 kaže se da su uzajamno prosti.

Za proizvoljne nenula polinome p i q postoji NZD. On je jedinstven do na multiplikativnu konstantu, tj. ako je $NZD\,(p, q) = d$ tada je i αd, $\alpha \neq 0$ takođe $NZD\,(p, q)$.

NZD se određuje pomoću Euklidovog algoritma.

Primer: Odrediti NZD polinoma $p(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ i $q(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Prvo se podeli polinom $p(x)$ polinomom $q(x)$

$$
\begin{array}{l}
(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6) : (x^3 + 2x^2 - x - 2) = \underbrace{x - 1}_{\text{količnik}} \\
\underline{-(x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x)} \\
\quad -x^3 - 6x^2 + x + 6 \\
\quad \underline{-(-x^3 - 2x^2 + x + 2)} \\
\qquad \underbrace{-4x^2 + 4}_{\text{ostatak}}
\end{array}
$$

Zatim se, pošto je ostatak $4x^2 + 4$ različit od nule, podeli delioc (u ovom slučaju $q(x)$) sa ostatkom.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 - x - 2) : (-4x^2 + 4) = \underbrace{-\tfrac{1}{4}x - \frac{1}{2}}_{\text{količnik}} \\
\underline{-(x^3 - x)} \\
\quad 2x^2 - 2 \\
\quad \underline{-(2x^2 - 2)} \\
\qquad \underbrace{0}_{\text{ostatak}}
\end{array}
$$

Kako je sad ostatak jednak 0 sledi da je $NZD(p, q) = -4x^2 + 4$ (poslednji ostatak različit od nule).

Bezuova teorema: Ostatak pri deljenju polinoma $p(x)$, $\deg(p(x)) > 0$, polinomom $x - \alpha$ je $p(\alpha)$, tj. vrednost polinoma $p(x)$ u tački α.

Primer: Odrediti ostatak pri deljenju polinoma

$$p(x) = -x^4 + 2x^3 - x + 1$$

polinomom $x - 1$ i polinomom $x + 2$.

Primenom Bezuove teoreme ostatak pri deljenju polinoma $p(x)$ polinomom $x - 1$ je

$$p(1) = -1^4 + 2 \cdot 1^3 - 1 + 1 = 1.$$

Analogno, ostatak pri deljenju polinoma $p(x)$ polinomom $x + 2$ je

$$p(-2) = -(-2)^4 + 2 \cdot (-2)^3 - (-2) + 1 = -29.$$

Hornerova šema: Pri deljenju polinoma n-tog stepena

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N},$$

polinomom $x - \alpha$, dobija se količnik $s(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ stepena $n-1$ i ostatak r, pri čemu je

$$b_{n-1} = a_n, b_{n-2} = \alpha b_{n-1} + a_{n-1}, \ldots, b_0 = \alpha b_1 + a_1, r = \alpha b_0 + a_0.$$

Ovaj rezultat se zapisuje u obliku sledeće šeme koja se zove Hornerova šema.

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline \alpha & a_n & \alpha b_{n-1} + a_{n-1} & \alpha b_{n-2} + a_{n-2} & \cdots & \alpha b_1 + a_1 & \alpha b_0 + a_0 \\ & \| & \| & \| & & \| & \| \\ & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & r \end{array}$$

i polinom $p(x)$ se može zapisati u obliku

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - \alpha) \cdot (b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0) + r.$$

Primer: Odrediti količnik i ostatak pri deljenju polinoma

$$P(x) = 3x^3 + x^2 - 2x + 1$$

polinomom $x - 2$.
Deljenjem polinoma:

$$\begin{array}{l} (3x^3 + x^2 - 2x + 1) : (x - 2) = 3x^2 + 7x + 12, \\ \underline{-(3x^3 - 6x^2)} \\ \quad 7x^2 - 2x + 1 \\ \quad \underline{-(7x^2 - 14x)} \\ \qquad 12x + 1 \\ \qquad \underline{-(12x - 24)} \\ \qquad\qquad \boxed{25} \end{array}$$

dobija se količnik $3x^2 + 7x + 12$ i ostatak 25.
Traženi količnik i ostatak mogu se dobiti i primenom Hornerove šeme.

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 1 & -2 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 7 & 12 & \boxed{25} \\ & \| & \| & \| & \| \\ & b_2 & b_1 & b_0 & R \end{array}$$

Deli se polinom trećeg stepena polinomom prvog stepena, tako da je količnik kvadratni polinom čiji su koeficijenti b_2, b_1 i b_0. Količnik je $3x^2 + 7x + 12$, ostatak je $R = 25$.

Ostatak se može dobiti i primenom Bezuove teoreme, kao vrednost polinoma za $x = 2$, ali na taj način se ne dobija količnik. Ostatak je $P(2) = 3 \cdot 2^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 25$.

Nula ili koren polinoma $p \in F[x]$ je nula odgovarajuće polinomske funkcije, tj. svako $\alpha \in F$ za koji važi da je $p(\alpha) = 0$.

Elemenat $\alpha \in F$ je koren (nula) polinoma $p \neq 0$, $\deg(p) = n \geq 1$ akko je polinom $p(x)$ deljiv polinomom $(x - \alpha)$,

Elemenat $\alpha \in F$ je **nula (koren) reda** k ($k \in \mathbb{N}$) polinoma $p \in F[x]$ akko je polinom $p(x)$ deljiv sa $(x - \alpha)^k$, a nije deljiv sa $(x - \alpha)^{k+1}$. Za nulu reda $k > 1$ kaže se da je višestruka, a nula reda $k = 1$ je jednostruka.

Primer: U polinomu $p(x) = (x-5)^3(x+2)^4$ broj 5 je koren reda 3 (trostruki koren), a broj -2 je koren reda 4(četvorostruki koren)

Polinom n-tog stepena, $n \in \mathbb{N}$, ima tačno n korena u skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, pri čemu se svaki koren računa onoliko puta kolika mu je višestrukost.

Faktorisati polinom $p(x)$ koji je n-tog stepena, $n \in \mathbb{N}$, nad poljem kompleksnih brojeva znači napisati ga u obliku

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

gde su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koreni polinoma (x).

Neka je p polinom nad poljem $\mathbb{R}$ (polinom sa realnim koeficijentima) i neka je α koren polinoma p, tada je i konjugovani broj $\overline{\alpha}$ takođe koren polinoma p.

Faktorisati polinom $p(x)$ koji je n-tog stepena, $n \in \mathbb{N}$, nad poljem realnih brojeva znači napisati ga kao proizvod polinoma prvog stepena i/ili polinoma drugog stepena koji nemaju realne korene. Dakle, činioci su polinomi oblika $ax+b$ i/ili cx^2+dx+e, $d^2 - 4ce < 0$ za $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$

Dakle, u faktorizaciji polinoma nad poljem kompleksnih brojeva osim vodećeg koeficijenta mogu se pojaviti isključivo polinomi prvog stepena, dok se nad poljem realnih brojeva osim vodećeg koeficijenta mogu pojaviti polinomi prvog stepena i oni polinomi drugog stepena koji nemaju realne nule.

Teorema o racionalnim korenima: Neka je $\frac{p}{q}$ racionalan broj, gde su $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{N}$ uzajamno prosti brojevi i neka su koeficijenti polinoma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

celi brojevi, pri čemu je $a_n \cdot a_0 \neq 0$. Tada, ako je $\frac{p}{q}$ koren polinoma $p(x)$, onda p deli slobodan član a_0 (tj. $p|a_0$), a q deli koeficijent uz najveći stepen (tj. $q|a_n$).