GRUPE

Grupoid $\mathcal{G} = (G, *)$ je **grupa** akko

(1) je operacija $*$ asocijativna, tj. ako je $\mathcal{G}$ polugrupa (asocijativni grupoid),

(2) postoji levi neutralni element, tj.

$$\exists e \in G, \forall x \in G, e * x = x,$$

(3) za svaki element $x \in G$ postoji njemu levi inverzni element $x' \in G$, tj.

$$\forall x \in G, \exists x' \in G, x' * x = e.$$

Grupa u kojoj važi komutativni zakon zove se **komutativna** ili **Abelova grupa**.

U grupi uvek važi:

- levi neutralni element je istovremeno i desni neutralni element, pa je to onda neutralni element i on je jedinstven,
- levi inverzni elementi su istovremeno i desni inverzni elementi, pa su to inverzni elementi i oni su jedinstveni,
- zakon kancelacije, jer je svaka grupa asocijativa, ima neutralni i inverzne elemente.

Primer: Da li su sledeći uređeni parovi grupe?

$(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\{-1, 0, 1\}, +)$, $(\mathbb{I} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Grupa $(A, \cdot)$ se naziva multiplikativna grupa i u njoj se neutralni elemenat označava sa 1 i čita "jedinica grupe", a inverzni elemenat od x se označava sa x^{-1}.

Grupa $(A, +)$ se naziva aditivna grupa i u njoj se neutralni elemenat označava sa 0 i čita "nula grupe", a inverzni od x se označava sa $-x$.

Neka su $\mathcal{H} = (H, *)$ i $\mathcal{G} = (G, *)$ grupe. Tada je $\mathcal{H}$ **podgrupa** grupe $\mathcal{G}$ akko je $H \subseteq G$ i operacija $*$ iz $\mathcal{H}$ je restrikcija operacije $*$ iz $\mathcal{G}$.

Neutralni elemenat grupe je takođe neutralni elemenat i svake njene podgrupe.

Svaka grupa (osim one koja se sastoji samo od neutralnog elementa) ima bar dve podgrupe, takozvane trivijalne podgrupe:

- podgrupu koja se sastoji samo od neutralnog elementa i
- celu grupu koja je uvek sama sebi podgrupa.

Da bi $\mathcal{H} = (H, *)$ bila podgrupa grupe $\mathcal{G} = (G, *)$, gde je $\emptyset \neq H \subseteq G$, dovoljno je da operacija $*$ bude zatvorena u H, da neutralni element grupe $\mathcal{G}$ pripada skupu H i da za svako $x \in H$ njegov inverzni elemenat u $\mathcal{G}$ pripada skupu H.

Lagranžova teorema: Ako je $\mathcal{G}$ konačna grupa i $\mathcal{H}$ podgrupa grupe $\mathcal{G}$, tada je broj svih elemenata grupe $\mathcal{G}$ deljiv brojem svih elemenata podgrupe $\mathcal{H}$.

Primer: Primeri podgrupa:

- $(\mathbb{R}, +)$ je podgrupa grupe $(\mathbb{C}, +)$,
- $(\mathbb{Q}, +)$ je podgrupa grupa $(\mathbb{R}, +)$ i $(\mathbb{C}, +)$,
- $(\mathbb{Z}, +)$ je podgrupa grupa $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ i $(\mathbb{C}, +)$,
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je podgrupa grupe $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$,
- $((0, \infty), \cdot)$ je podgrupa grupa $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ i $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$,
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ je podgrupa grupa $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ i $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Primer: Grupoid $(G, \circ)$ kod kog je $G = \{e, a, b, c\}$, a operacija $\circ$ zadata tablicom

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

je Abelova grupa i naziva se Klajnova grupa. Klajnovu grupu karakteriše to da je svaki elemenat sam sebi inverzan.

Primer: Naći sve podgrupe Klajnove grupe.

- trivijalne: $(\{e\}, \circ)$, $(G, \circ)$

- netrivijalne: Kako na osnovu Lagranžove teoreme broj elemenata podgrupe mora da deli broj elemenata grupe, to Klajnova grupa može da ima samo podgrupe sa 1, 2 ili 4 elementa. Sa 1 i 4 elementa su trivijalne podgrupe, a sa 2 moraju sadržati neutralni elemenat pa su kandidati za netrivijalne podgrupe

$(\{e, a\}, \circ)$ $\quad$ $(\{e, b\}, \circ)$ $\quad$ $(\{e, c\}, \circ)$

$\circ$	e	a
e	e	a
a	a	e

$\circ$	e	b
e	e	b
b	b	e

$\circ$	e	c
e	e	c
c	c	e

.

Direktnom proverom iz tablica vidi se da ovo jesu grupe, pa Klajnova grupa osim trivijalnih ima i tri netrivijalne podgrupe.

Napomena: Kako izomorfizam prenosi osobine sa jednog na drugi grupoid to znači da ako su dva grupoida izomorfna i ako je jedan od njih grupa biće i drugi.