

# Slobodni vektori

December 13, 2021

Duž  $AB$  je skup tačaka koji čine tačke  $A$  i  $B$  i sve tačke koje se nalaze između tih tačaka na pravoj određenoj sa  $A$  i  $B$ . Duž čiji se krajevi poklapaju naziva se nulta duž.

Orijentisana duž je duž kod koje je određeno šta je njena početna a šta krajnja tačka. Orijentacija nulte duži se ne definiše.

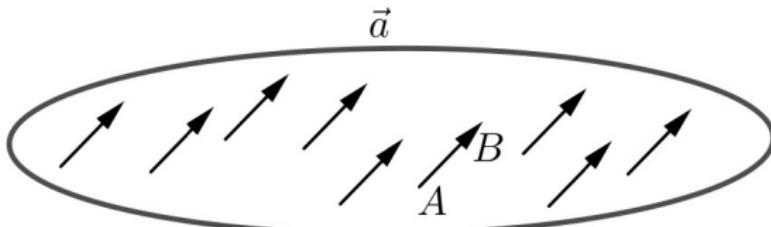
**Slobodni nenula vektor** je skup svih orijentisanih duži koje su međusobno podudarne, paralelne i isto orijentisane. Svaka od tih orijentisanih duži jeste jedan predstavnik tog slobodnog vektora i zove se **vektor**.

**Slobodni nula vektor** je skup svih nullih duži.

Slobodni vektori se obeležavaju sa  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , ...

Vektor čija je početna tačka  $A$ , a krajnja  $B$  obeležava se sa  $\overrightarrow{AB}$ .

Kako je svaki slobodni vektor jednoznačno određen sa bilo kojim svojim predstavnikom, tj. vektorom, uobičajeno je da se poistovete pojma slobodnog vektora i vektora i piše se  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ .



Svaki vektor  $\overrightarrow{AB}$ ,  $A \neq B$  je određen svojim pravcem, smerom i intenzitetom.

**Pravac vektora**  $\overrightarrow{AB}$ ,  $A \neq B$  je određen pravom na kojoj leži taj vektor.

**Intenzitet vektora**  $\overrightarrow{AB}$  je dužina duži  $AB$  i označava se sa  $|\overrightarrow{AB}|$ .

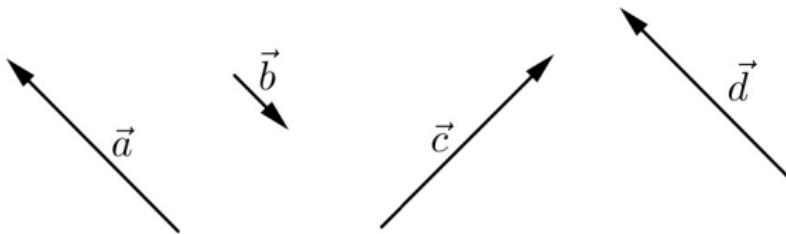
**Smer vektora**  $\overrightarrow{AB}$ ,  $A \neq B$  je od tačke  $A$  do tačke  $B$ .

Vektor čiji je intenzitet jednak jedan naziva se **jedinični vektor**.

Ako se  $A \equiv B$ , onda je  $\overrightarrow{AB}$  nula vektor, u oznaci  $\overrightarrow{0}$  ili samo 0. Intenzitet nula vektora je 0, a pravac i smer se ne definišu.

Nenula vektori su jednaki ako su im jednaki pravac, smer i intenzitet.

Primer:

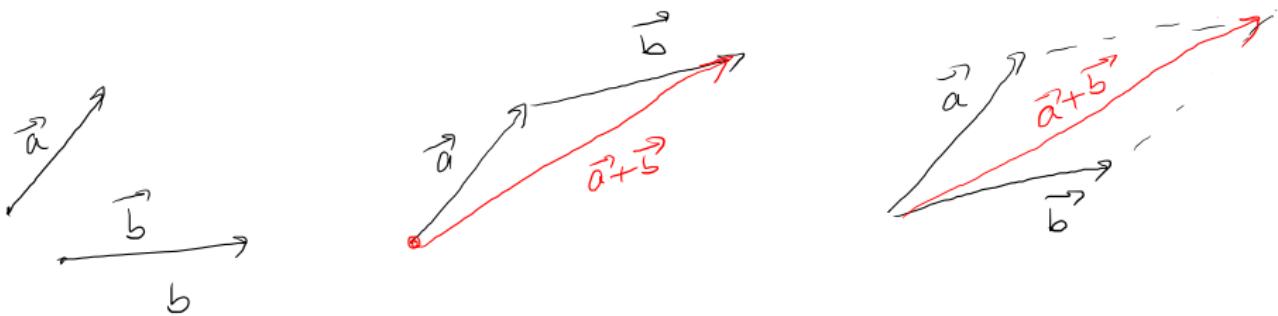


Vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  imaju isti pravac, a suprotan smer. Vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{d}$  imaju isti pravac, smer i intenzitet, tj.  $\vec{a} = \vec{d}$ . Vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{c}$  imaju isti intenzitet, ali različit pravac.

## Sabiranje vektora

Za bilo koje tri tačke važi:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

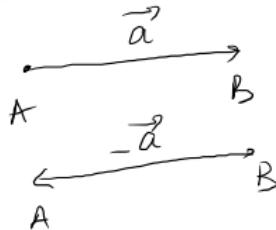
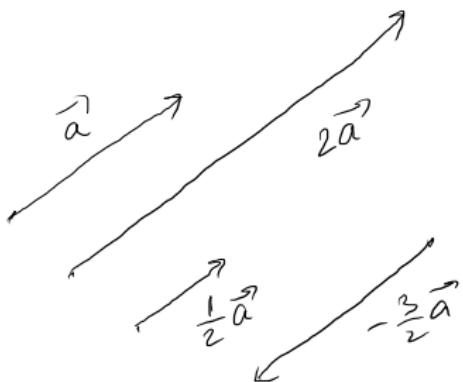


## Proizvod vektora i skalara

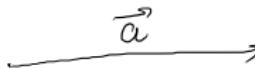
Množenjem vektora  $\vec{a} \neq 0$  i skalara  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , dobija se vektor  $\alpha\vec{a}$  čiji je:

1. pravac isti kao pravac vektora  $\vec{a}$ ,
2. intezitet  $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$ ,
3. smer isti kao smer vektora  $\vec{a}$  ako je  $\alpha > 0$ , a suprotan ako je  $\alpha < 0$ .  
Ako je  $\alpha = 0$  ili  $\vec{a} = 0$ , onda je  $\alpha\vec{a} = 0$ .

**Suprotan vektor** vektoru  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  je vektor  $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ . Suprotni vektori imaju isti pravac i intenzitet, a suprotan smer.



Jedinični vektor koji odgovara vektoru  $\vec{a}$ , dobija se kada se vektor  $\vec{a}$  pomnoži sa recipročnom vrednošću svog intenziteta, tj. jedinični vektor koji odgovara vektoru  $\vec{a}$  je vektor  $\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$ .



Za vektore  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  i skalare  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  važe sledeće osobine:

$$\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$$

- ▶  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ,
- ▶  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ ,
- ▶  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ ,
- ▶  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ,

Dakle,  $(V, +)$ , gde je  $V$  skup svih slobodnih vektora, je Abelova grupa.

- ▶  $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ ,
- ▶  $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ ,
- ▶  $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ ,
- ▶  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ .

Za dva nenula vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  kaže se da su **kolinearni** akko imaju isti pravac, odnosno ako pripadaju istoj pravoj ili dvema paralelnim pravama.

Za kolinearne nenula vektore  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  postoji realni broj  $\alpha$  različit od nule tako da je  $\vec{a} = \alpha \vec{b}$ .

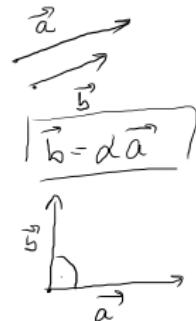
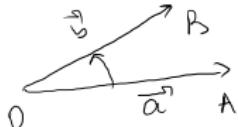
Za dva nenula vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  kaže se da su **ortogonalni** (normalni) akko je ugao između njih prav.

Nula vektor je po definiciji kolinearan sa svakim vektorom i normalan je na svaki vektor.

Za tri nenula vektora  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  kaže se da su **komplanarni** akko su paralelni sa jednom ravni.

Nula vektor je po definiciji komplanaran sa svakim skupom komplanarnih vektora.

Ugao između vektora  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$  i  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$  je ugao  $\angle AOB$ ,  $O$  je koordinatni početak, pri čemu se dogovorno uzima da je  $\angle (\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$ .



D  
OVO  
DEFINICJA  
SE

## Skalarni proizvod vektora

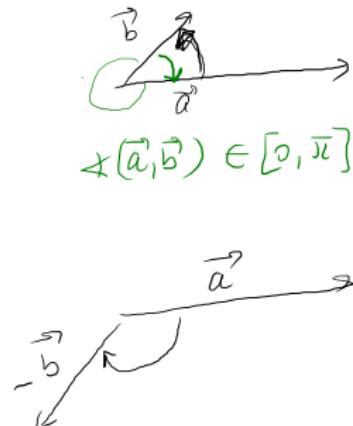
Skalarni proizvod nenula vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , u oznaci  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , je skalar (broj) definisan sa

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha(\vec{a}, \vec{b}).$$

Kada je  $\vec{a} = 0$  ili  $\vec{b} = 0$ , tada je  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

Osobine skalarnog proizvoda:

- ▶  $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2,$
- ▶  $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a},$
- ▶  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b} = 0,$
- ▶  $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c},$
- ▶  $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) \alpha(\vec{a}\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\alpha\vec{b}),$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

oznaci  $\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$ , je

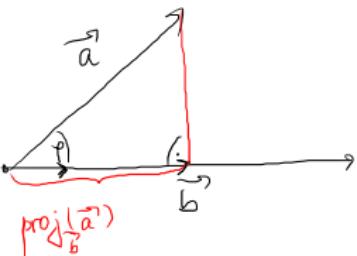
## Projekcija vektora

Projekcija vektora  $\vec{a} \neq 0$  na pravac vektora  $\vec{b} \neq 0$ , u oznaci  $\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$ , je vektor koji ima isti pravac kao vektor  $\vec{b}$ , isti smer kao  $\vec{b}$  ako je ugao između vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  oštar, a suprotan smer u odnosu na  $\vec{b}$  ako je ugao između vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  tup, a intenzitet mu se dobija na sledeći način:

$$\cos \varphi = \frac{|\operatorname{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})|}{|\vec{a}|} \implies |\operatorname{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})| = |\vec{a}| \cos \varphi = \underline{\underline{|\vec{a}|}} \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|},$$

pa je

$$\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = |\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})| \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}.$$



## Vektorski proizvod $\times$

DOV  
JE  
DEFINICIJA

Vektorski proizvod nenula vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , u oznaci  $\vec{a} \times \vec{b}$ , je vektor čiji je:

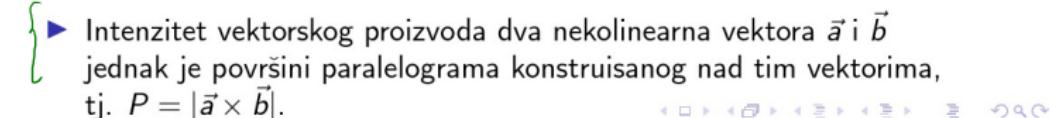
1. pravac normalan na pravce vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , tj.  $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$  i  $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$ .
  2. intenzitet  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$ ,
  3. smer takav da vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{a} \times \vec{b}$  tim redom čine desni triedar.
- Kada je  $\vec{a} = 0$  ili  $\vec{b} = 0$ , tada je  $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ .

Osobine vektorskog proizvoda:

- ▶  $\vec{a} \times \vec{a} = 0$ ,
- ▶  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ ,
- ▶  $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \vec{b})$ ,
- ▶  $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$ ,
- ▶  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ ,
- ▶ Intenzitet vektorskog proizvoda dva nekolinearna vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  jednak je površini paralelograma konstruisanog nad tim vektorima, tj.  $P = |\vec{a} \times \vec{b}|$ .



$$P = |\vec{a} \times \vec{b}|$$



## Mešoviti proizvod

Mešoviti proizvod nenula vektora  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$ , u oznaci  $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$  je skalarni proizvod vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b} \times \vec{c}$ .

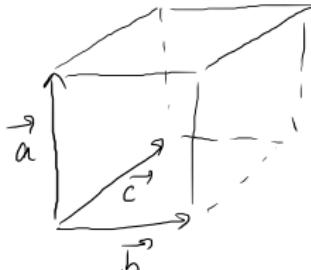
Osobine mešovitog proizvoda:

$$\blacktriangleright \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}),$$

$$\vec{a} \cdot (\underbrace{\vec{b} \times \vec{c}}_{\text{VEKTOR } \vec{m}}) = \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{m}}_{\text{SKALAR}}$$

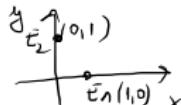
- ▶ Nenula vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  su komplanarni akko je njihov mešoviti proizvod jednak nuli, tj.  $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ .
- ▶ Apsolutna vrednost mešovitog proizvoda tri nekomplanarna vektora  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$ , jednaka je zapremini paralelopipeda konstruisanog nad tim vektorima, tj.  $V = |\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})|$ .

$$V = |\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})|$$



## Vektori u koordinatnom sistemu

Dekartov (pravougli) koordinatni sistem u prostoru je određen:



- ▶ ako su date tri prave koje se obično nazivaju  $x$ ,  $y$  i  $z$  i svake dve se sekut pod pravim uglom u tački  $O(0,0,0)$ ;
- ▶ na svakoj od datih pravih izabran je jedan smer i nazvan pozitivan;
- ▶ na pozitivnim smerima pravih  $x$ ,  $y$  i  $z$  su izabrane tačke  $E_1(1,0,0)$ ,  $E_2(0,1,0)$  i  $E_3(0,0,1)$  redom

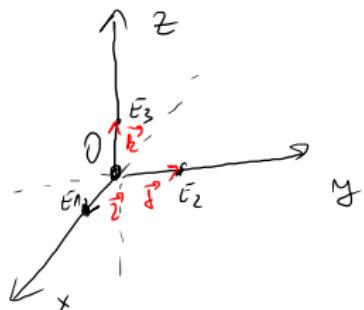
i uvedene oznake  $\overrightarrow{OE}_1 = \vec{i}$ ,  $\overrightarrow{OE}_2 = \vec{j}$  i  $\overrightarrow{OE}_3 = \vec{k}$ .

Prava  $x$  se naziva  $x$ -osa ili apscisa.

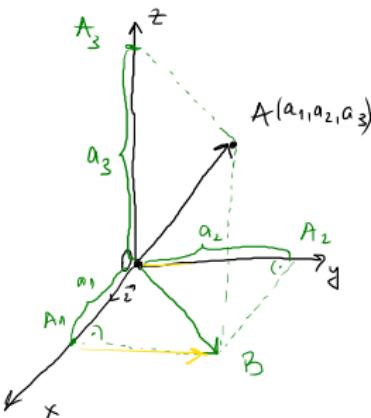
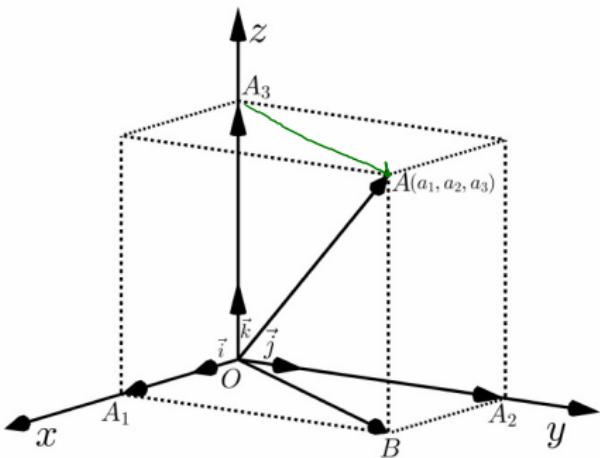
Prava  $y$  se naziva  $y$ -osa ili oordinata.

Prava  $z$  se naziva  $z$ -osa ili aplikata.

Tačka  $O$  se naziva koordinatni početak.



Vektori  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sa koordinatnim početkom  $O$ , čine desni sistem vektora ili desni triedar, što znači da rotacija vektora  $\vec{i}$ , ka vektoru  $\vec{j}$ , oko tačke  $O$ , u ravni određenoj vektorima  $\vec{i}$  i  $\vec{j}$ , ima najkraći put u smeru suprotnom kretanju kazaljke na satu, gledano sa krajnje tačke vektora  $\vec{k}$ .



$$\begin{aligned}
 \vec{OA} &= \vec{OB} + \vec{BA} \\
 &= \vec{OA}_1 + \vec{A}_1B + \vec{BA} \\
 &= \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3 \\
 &= a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \\
 &= (a_1, a_2, a_3)
 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OA} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

$$= a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1)$$

$$= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3)$$

$$= \underline{(a_1, a_2, a_3)}$$

$$A(a_1, a_2, a_3)$$

$$\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

↳ VECOR POCO ŹASA TAČKE A

Svakoj tački  $A(a_1, a_2, a_3)$  u prostoru odgovara vektor  $\overrightarrow{OA}$  čija je početna tačka u koordinatnom početku  $O$ , a krajnja u tački  $A(a_1, a_2, a_3)$  i koji se naziva **vektor položaja tačke A**.

Vektor  $\overrightarrow{OA}$  može se razložiti kao zbir tri vektora (slika iznad):

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3},$$

gde je tačka  $B(a_1, a_2, 0)$ , a tačke  $A_1, A_2$  i  $A_3$  su projekcije tačke  $A$  na  $x$ -osu,  $y$ -osu i  $z$ -osu, redom,

tj.  $A_1 = (a_1, 0, 0)$ ,  $A_2 = (0, a_2, 0)$  i  $A_3 = (0, 0, a_3)$ .

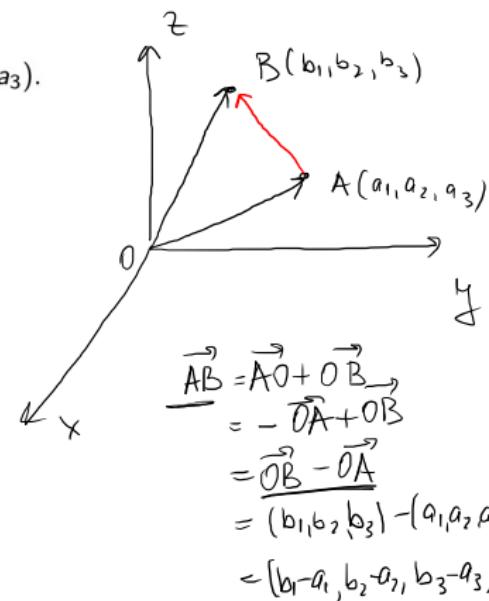
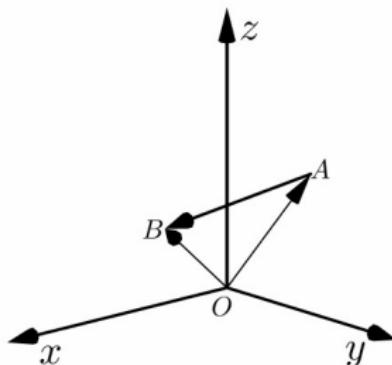
Kako je  $\overrightarrow{OA_1} = a_1\vec{i}$ ,  $\overrightarrow{OA_2} = a_2\vec{j}$  i  $\overrightarrow{OA_3} = a_3\vec{k}$ , sledi da je

$$\overrightarrow{OA} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}.$$

Uместо  $\overrightarrow{OA} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$  kraće se piše  $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ .

Neka su  $A(a_1, a_2, a_3)$  i  $B(b_1, b_2, b_3)$  dve tačke u prostoru čiji su vektori položaja  $\vec{OA} = (a_1, a_2, a_3)$  i  $\vec{OB} = (b_1, b_2, b_3)$ , redom. Tada je

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$



Neka je  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$  i  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tada:

OVO  
NICE  
DEFINICJA  
D

- $\vec{a} = \vec{b}$  akko je  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_2$  i  $a_3 = b_3$ ,
- $\alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$ ,
- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ ,
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ ,
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ,
- 

VEKTOR !

$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

*NICE DETERMINANTA NE MOZE SE RAČUNAT*

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}$$

SAKUSOVAN  
PRAVICOM

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

*OVO DESTE PRAVA  
DETERMINANTA I RACUNA SE SAKUSOVAN PRAVICOM*

④

$$\vec{a} = (1, 3, -2) \quad , \quad \vec{b} = \vec{a} - 3\vec{c} = (1, 0, -3)$$

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = 2(1, 3, -2) + 3(1, 0, -3) = (2, 6, -4) + (3, 0, -9) = (5, 6, -13)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 3, -2) \cdot (1, 0, -3) = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + (-2) \cdot (-3) = 1 + 6 = 7$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -9\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} = (-9, 1, -3)$$

$\cos \varphi(\vec{a}, \vec{b})$  ?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi(\vec{a}, \vec{b})$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10}$$

$$\cos \varphi(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{7}{\sqrt{14} \sqrt{10}}$$