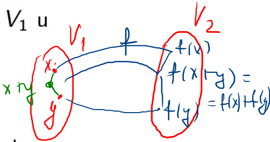
Linearne Transformacije

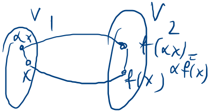
December 21, 2021

Neka su $\boldsymbol{V}_1 = (V_1, +, \cdot, \boldsymbol{F})$ **i** $\boldsymbol{V}_2 = (V_2, +, \cdot, \boldsymbol{F})$ vektorski prostori nad istim poljem $\boldsymbol{F} = (F, +, \cdot)$. Tada se funkcija $f : V_1 \longrightarrow V_2$ naziva **linearna transformacija** ili **homomorfizam** vektorskog prostora V_1 u vektorski prostor V_2 ako za svako $x, y \in V_1$ i $\alpha \in F$ važi



$$\boxed{f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{i} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x).}$$

Napomena: Ova dva uslova mogu i da se spoje u jedan koji bi onda glasio: za svako $x, y \in V_1$ i $\alpha, \beta \in F$ važi



$$\boxed{f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).}$$

Svaka linearna transformacija $f : V_1 \longrightarrow V_2$ preslikava nula vektor prostora V_1 u nula vektor prostora V_2.

$$f(0) = 0$$

нула вектор у V_1

нула вектор у V_2

Neka je $\boxed{f : V_1 \longrightarrow V_2}$ linearna transformacija vektorskog prostora V_1 u vektorski prostor V_2. Tada je:

- **jezgro** linearne transformacije f: skup svih vektora iz V_1 koji se preslikaju u nula vektor vektorskog prostora V_2, tj.

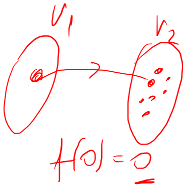
$$\boxed{ker(f) = \{x \in V_1 \mid f(x) = 0\}.}$$

$f(0) = 0$

Osobine:

- nula vektor $0 \in V_1$ pripada skupu $ker(f)$;
- skup $ker(f)$ čini potprostor prostora V_1;

- **slika** linearne transformacije f: skup svih vektora iz V_2 koji se dobijaju preslikavanjem vektora vektorskog prostora V_1, tj.



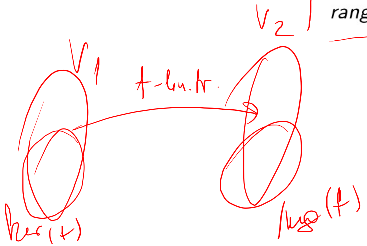
$$\boxed{Img\,(f) = \{y \in V_2 \mid \exists x \in V_1,\ f\,(x) = y\}}.$$

Osobine:

  - nula vektor $0 \in V_2$ pripada skupu $Img\,(f)$;
  - skup $Img\,(f)$ čini potprostor ptostora V_2.

- **rang** linearne transformacije f: dimenzija potprostora slika, tj.

$$\boxed{rang\,(f) = dim\,(Img\,(f))}\, . \neq rang\,(M)$$



Ako je $\boldsymbol{V} = (V, +, \cdot, \boldsymbol{F})$ vektorski prostor nad poljem $\boldsymbol{F}$ dimenzije $n \in \mathbb{N}$, tada je on izomorfan sa vektorskim prostorom $\boldsymbol{F}^n = (F^n, +, \cdot, \boldsymbol{F})$ uređenih n-torki elemenata polja $\boldsymbol{F}$ sa standardno definisanim sabiranjem po komponentama i množenjem skalarom po komponentama.

Na osnovu ove osobine može se zaključiti da je dovoljno proučavati samo vektorski prostor uređenih n-torki i samo linearne transformacije oblika $f : F^n \longrightarrow F^m$, jer su na taj način proučeni svi vektorski prostori i sve linearne transformacije.

Zbog toga je svaki n-dimenzionalni vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ izomorfan sa vektorskim prostorom $\boldsymbol{R}^n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ i uobičajeno je da se posmatraju linearne transformacije oblika $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

$$\boxed{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m}$$

Neka je $\boldsymbol{F}$ proizvoljno polje. Preslikavanje $\boxed{f : F^n \longrightarrow F^m}$ je linearna transformacija akko je f oblika

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n, \ldots, \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n)$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$5x + 0y$

$0x + 0y$

$f(x,y) = (2x+3y, 5x, 0)$ ← jeste lin. tr.

$t_1 x + t_2 y$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$f(x,y) = (3x, 5y, 1)$ ← nije lin. tr.

jer $1 \neq t_1 x + t_2 y$

gde su $\alpha_{ij} \in F$ neki elementi polja $\boldsymbol{F}$ i tada je $M_f = [\alpha_{ij}]_{m \times n}$ matrica linearne transformacije f (u standardnoj bazi ako drugačije nije naglašeno).

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3×2

$$f : \mathbb{R}^{3} \to \mathbb{R}^{2}$$

$f(x,y,z) = (x+y,\ 2x+3^{y})$ ← није лин. пр. због 3^{y}

$f(x,y,z) = (x+\ln y,\ 0)$ ← није лин. пр. због $\ln y$

$f(x,y,z) = (x+y\cdot\ln 2,\ 0)$ ← јесте лин. пр. јер $\ln 2$ је број

$\boxed{\text{број}}\, x + \boxed{\text{број}}\, y$

$1\cdot x + \ln 2\cdot y$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \ln 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y, z) = (\underline{2x + 5y - z}, \underline{3x + y - 4z}, \underline{2x + z})$$

$$M_f = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_f \cdot [x] = [y]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 5y - z \\ 3x + y - 4z \\ 2x + z \end{bmatrix}$$

Dakle,

- svaka od m komponenti slike linearne transformacije $f : F^n \longrightarrow F^m$ mora biti oblika $t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n$, $t_1, t_2, \ldots, t_n \in F$.
- svaka linearna transformacija $f : F^n \longrightarrow F^m$ može se poistovetiti sa njoj odgovarajućom matricom $M_f = [\alpha_{ij}]_{m \times n}$ nad poljem $\boldsymbol{F}$ takvom da je
$$f(x) = y \iff M_f \cdot [x] = [y]$$
gde su $[x] = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T$ i $[y] = \begin{bmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{bmatrix}^T$ matrice kolone koje odgovaraju vektorima x i y.

$$M_f \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Linearna transformacija je **regularna** akko je bijektivna, tj. akko je njoj odgovarajuća matrica kvadratna i regularna (tada je f izomorfizam).

Rang linearne transformacije $f : F^n \longrightarrow F^m$ jednak je rangu njene matrice M_f, odnosno

$$rang(f) = dim\,(Img\,(f)) = rang\,(M_f)\,.$$

Ako su $f : F^n \longrightarrow F^k$ i $g : F^k \longrightarrow F^m$ linearne transformacije, i ako su M_f i M_g njima odgovarajuće matrice, tada je $h = g \circ f : F^n \longrightarrow F^m$ takođe linearna transformacija i njena matrica se može dobiti kao $M_h = M_g \cdot M_f$.

$$f : F^n \to F^k$$
$$g : F^k \to F^m$$
$$h = g \circ f : F^n \to F^m$$

$$M_h = M_g \cdot M_f$$