Relacije - vežbe

October 6, 2021

1. Ispitati koje od osobina (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost) imaju sledeće relacije skupa A:

$$\rho_1 = \{(a,b),(a,c),(b,c)\},\ A = \{a,b,c\}$$

$\cancel{R}$ $\quad$ $\cancel{S}$ $\quad$ A $\quad$ T

$(a,c) \in \rho_1 \wedge \underline{(c,b) \in \rho_1} \Rightarrow (a,b) \in \rho_1$

$\top \quad \wedge \quad \bot \quad \Rightarrow \quad \top$

$\bot \quad \Rightarrow \quad \top$

$\top$ ✓

R - Није $\quad (a,a) \notin \rho_1$

S - Није $\quad (a,b) \in \rho_1$ а $(b,a) \notin \rho_1$

A - јесте

T - јесте

$\rho_2 = \{(a, a)\}, A = \{a, b, c\}$

$\cancel{R}$ $\quad S \quad A \quad T$

$\underline{\forall x \in A}, (x,x) \in A$

$(a,a) \in \rho_2 \wedge \underline{(a,b) \in \rho_2} \Rightarrow$

$\top \wedge \bot \Rightarrow$

$\bot \Rightarrow$

$\top$

R – није $\quad (b,b) \notin \rho_2$

$$\rho_3 = \{\cancel{(a,a)}, (a,b), \underline{(b,a)}, \cancel{(b,b)}, \underline{(a,c)}, \cancel{(c,c)}\},\ A = \{a,b,c\}$$

R $\quad \cancel{S}$ $\quad \cancel{A}$ $\quad \cancel{T}$

$(a,a) \in \rho_3 \wedge (a,b) \in \rho_3 \Rightarrow (a,b) \in \rho_3$

S – ниде $\quad (a,c) \in \rho_3$ а $(c,a) \notin \rho_3$

A – ниде $\quad (a,b) \in \rho_3$ и $(b,a) \in \rho_3$

T – ниде $\quad (b,a) \in \rho_3$ и $(a,c) \in \rho_3$ а $(b,c) \notin \rho_3$

$\rho_4 = \{(a,a),(a,b),(b,c),(c,c)\}$, $A = \{a,b,c\}$

$\cancel{R}$ $\quad \cancel{S}$ $\quad A$ $\quad \cancel{T}$

$\forall x,y \in A$

$x \rho y \Rightarrow y \rho x$

R – није $\quad (b,b) \notin \rho_4$

S – није $\quad (a,b) \in \rho_4$ а $(b,a) \notin \rho_4$

T – није $\quad (a,b) \in \rho_4$ и $(b,c) \in \rho_4$ а $(a,c) \notin \rho_4$

2. Ispitati koje od osobina (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost) imaju sledeće relacije skupa A i odrediti inverzne relacije datih relacija:

$\rho_1 = \{(1,3),(1,2),(2,1)\}$, $A = \{1,2,3\}$

$\cancel{R}$ $\cancel{S}$ $\cancel{A}$ $\cancel{T}$

R - није $(1,1) \notin \rho_1$

S - није $(1,3) \in \rho_1$ а $(3,1) \notin \rho_1$

A - није $(1,2) \in \rho_1$ а $(2,1) \in \rho_1$

T - није $(1,2) \in \rho_1$ и $(2,1) \in \rho_1$ а $(1,1) \notin \rho_1$

$\rho^{-1} = \{(3,1),(1,2),(2,1)\}$

$\rho_2 = \{\cancel{(1,1)}, \cancel{(2,2)}, (2,1), \cancel{(3,3)}\}$, $A = \{1, 2, 3\}$

R $\quad \cancel{S} \quad$ A $\quad$ T

S – tuje $\quad (2,1) \in \rho_2 \quad$ a $\quad (1,2) \notin \rho_2$

$\rho_2^{-1} = \{(1,1), (2,2), (1,2), (3,3)\}$

$\rho_3 = \{(1,1), (1,2), (2,3)\}$, $A = \{1,2,3\}$

$\cancel{R} \qquad \cancel{S} \qquad A \qquad \cancel{T}$

R – није $\quad (2,2) \notin \rho_3$

S – није $\quad (1,2) \in \rho_3$ а $(2,1) \notin \rho_3$

T – није $\quad (1,2) \in \rho_3$ и $(2,3) \in \rho_3$ а $(1,3) \notin \rho_3$

$$\rho_3^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,2)\}$$

ρ_4 - relacija "deli", $A = \{1, 2, 3\}$

$\rho_4 = | = \{(1,1), (1,2), (2,2), (1,3), (3,3)\}$

R $\cancel{S}$ A T

S – није $(1,2) \in \rho_4$ а $(2,1) \notin \rho_4$

$\rho_4^{-1} = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3)\}$

ρ_4^{-1} је релација „дељиво је"

$B = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 12, 24\}$

$| = \{(1,1), (1,3), (1,5), (1,7), (1,8), (1,9), (1,12), (1,24), (3,3), (3,9), (3,12), (3,24),$
$(5,5), (7,7), (8,8), (8,24), (9,9), (12,12), (12,24), (24,24)\}$

3. Ispitati koje od osobina (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost) imaju sledeće relacije skupa A:

$$\rho_1 = \{(4,5),(3,4),(5,3),(4,3),\cancel{(3,3)},\cancel{(4,4)}\},\ A = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$\cancel{R}$ $\cancel{S}$ $\cancel{A}$ $\cancel{T}$

R – није $(1,1) \in \rho_1$

S – није $(4,5) \in \rho_1$ а $(5,4) \notin \rho_1$

A – није $(3,4) \in \rho_1$ и $(4,3) \in \rho_1$

T – није $(3,4) \in \rho_1$ и $(4,5) \in \rho_1$ а $(3,5) \notin \rho_1$

$\rho_2 = \{\cancel{(1,1)}, (1,2), (2,1), \cancel{(2,2)}, \cancel{(3,3)}, (3,4), \cancel{(4,4)}, \cancel{(5,5)}, \cancel{(6,6)}\}$,
$A = \{1,2,3,4,5,6\}$

R $\quad \cancel{S}$ $\quad \cancel{A}$ $\quad T$

S – нет $\quad (3,4) \in \rho_2$ и $(4,3) \notin \rho_2$

A – нет $\quad (1,2) \in \rho_2$ и $(2,1) \in \rho_2$

$\rho_3 = \{(3,3),(6,6)\}$, $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

$\cancel{R}$ $\quad S \quad A \quad T$

$\forall x,y \in A$

$(x,y) \Rightarrow (y,x)$

$\perp \Rightarrow\ !$

$\top$

R - ниде $\qquad (1,1) \notin \rho_3$

$B = \{3,6\}$

$\rho_4 = \{(1,2),(1,3),(1,4)\}$, $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

$\cancel{R}$ $\cancel{S}$ A T

R – nie je $(1,1) \notin \rho_4$

S – nie je $(1,2) \in \rho_4$ a $(2,1) \notin \rho_4$

$\rho_5 = \{(2,3), (3,2), \cancel{(3,3)}, \cancel{(2,2)}\}$, $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

$\cancel{R}$ $\quad$ S $\quad$ $\cancel{A}$ $\quad$ T

R – није $\quad (1,1) \notin \rho_5$

A – није $\quad (2,3) \in \rho_5$ и $(3,2) \in \rho_5$

$\boxed{\rho_6 = \emptyset,}$ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\cancel{R}$ S A T

$\forall x, y \in A$

$\underbrace{(x, y) \in \rho_6}_{\perp} \Rightarrow (y, x) \in \rho_6$

$\perp \Rightarrow \perp$

$\top$

R - нуе $(1,1) \notin \rho_6$

$B = \emptyset, \ \rho_7 = \emptyset$

R S A T

$\rho_7 = A^2$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\rho = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5),$
$(2,6), (3,1), \ldots\ldots \}$

R S $\cancel{A}$ T

4. Date relacije skupa A, ako je moguće, dopuniti tako da budu refleksivne, simetrične, odnosno tranzitivne.

$\rho_1 = \{(1,1),(1,2),(3,3),(2,4)\}$, $A = \{1,2,3,4,5\}$

$\rho_1^R = \rho_1 \cup \{(2,2),(4,4),(5,5)\} \leftarrow$ SAMO R

$\rho_1^S = \rho_1 \cup \{(2,1),(4,2)\} \leftarrow$ SAMO S

$\rho_1^T = \rho_1 \cup \{(1,4)\} \leftarrow$ SAMO T

$\rho_1^{RST} = \rho_1 \cup \{(2,2),(4,4),(5,5),(2,1),(4,2),(1,4),(4,1)\}$

SVE $\nearrow$

$\rho_2 = \{(3,3), (5,5)\}$, $A = \{1,2,3,4,5\}$

$\rho_2^R = \rho_2 \cup \{(1,1), (2,2), (4,4)\}$

$\rho_2^S = \rho_2$

$\rho_2^T = \rho_2$

$\rho_2^{RST} = \rho_2 \cup \{(1,1), (2,2), (4,4)\}$

$\rho_3 = \{(3,4), (4,3), (3,3), (4,4)\}$, $A = \{1,2,3,4,5\}$

$\rho_3^R = \rho_3 \cup \{(1,1), (2,2), (5,5)\}$

$\rho_3^S = \rho_3$

$\rho_3^T = \rho_3$

$\rho_3^{RST} = \rho_3^R$

$$\rho_4 = \{(1,2),(2,3),(1,4),(1,3),(2,4)\},\ A = \{1,2,3,4,5\}$$

$$\rho_4^R = \rho_4 \cup \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$$

$$\rho_4^S = \rho_4 \cup \{(2,1),(3,2),(4,1),(3,1),(4,2)\}$$

$$\rho_4^T = \rho_4$$

$$\rho_4^{RST} = \rho_4 \cup \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(2,1),(3,2),(4,1),(3,1),(4,2),(3,4),(4,3)\}$$

5. Ispitati koje od osobina (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost) imaju sledeće relacije skupa $\mathbb{N}$:

$\rho_1 = \{(x, x+2) \mid x \in \mathbb{N}\}$

$\cancel{R} \quad \cancel{S} \quad A \quad \cancel{T}$

R – ne važi $\quad (1,1) \notin \rho_1$

S – ne važi $\quad (1,3) \in \rho_1$ a $(3,1) \notin \rho_1$

T – ne važi $\quad (1,3) \in \rho_1$ i $(3,5) \in \rho_1$ a $(1,5) \notin \rho_1$

$$\rho_2 = \{(x,y) \mid x+y=7,\ x,y \in \mathbb{N}\}$$

$\cancel{R}$ S $\cancel{A}$ $\cancel{T}$

R - није $(1,1) \notin \rho_2$ јер $1+1 \neq 7$

A - није јер је S а нису сви парови со еднакви компоненти

T - није $(2,5) \in \rho_2$ и $(5,2) \in \rho_2$ а $(2,2) \notin \rho_2$

$2+5=7$ $5+2=7$ $2+2 \neq 7$

$\rho_3 = \{(x,y)\,|\,y = 4x+1,\ x,y\in\mathbb{N}\}$

$\cancel{R}$ $\quad$ $\cancel{S}$ $\quad$ A $\quad$ $\cancel{T}$

R – ниде $\quad (1,1) \notin \rho_3$

S – ниде $\quad (1,5) \in \rho_3$ а $(5,1) \notin \rho_3$ дер $(5,21) \in \rho_3$

T – ниде $\quad (1,5) \in \rho_3$ и $(5,21) \in \rho_3$ а $(1,21) \notin \rho_3$

$\rho_4^{*} = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{N}\}$

$\rho_4 = \{(5x, 5x) \mid x \in \mathbb{N}\} = \{(5,5), (10,10), (15,15), (20,20), \dots\}$

$\cancel{R}$ S A T

R – Hyge $(1,1) \notin \rho_4$

$(1,1)$

$(6,6)$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$A = \{1, 2, 3\}$

$\rho = \{(5x, 5x) \mid x \in \{1,2,3\}\} = \{(5,5), (10,10), (15,15)\}$

$$\rho_5 = \{(x,y) \mid x+y \text{ je paran broj}, x,y \in \mathbb{N}\}$$

R S ~~A~~ T

R: $(x,x) \in \rho_5$?

$x+x = \underline{2x}$

$(2,1) \notin \rho_5$ $(1,2) \notin \rho_5$

A - није $(2,4) \in \rho_5$ и $(4,2) \in \rho_5$

$\underbrace{(x,y) \in \rho_5}$ и $(y,z) \in \rho_5 \overset{?}{\Rightarrow} (x,z) \in \rho_5$

$\Downarrow$

$x+y$ је паран

x,y парни	x,y непарни
y - паран	y - непаран
$\Downarrow$	$\Downarrow$
z - паран	z - непаран
$\Downarrow$	$\Downarrow$
x,z - парни	x,z - непарни
	$\Downarrow$
$x+z$ - паран $\Rightarrow (x,z) \in \rho_5$	$x+z$ паран $\Rightarrow (x,z) \in \rho_5$

6. Ispitati koje od osobina (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost) imaju sledeće relacije skupa $\mathbb{R}$:

$$\rho_1 = \{(2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$\cancel{R}$ $\quad \cancel{S}$ $\quad A$ $\quad T$

R - није $\quad (1,1) \notin \rho_1$

S - није $\quad (2,1) \in \rho_1 \;\text{ a }\; (1,2) \notin \rho_1$

T - није $\quad (2, \overset{2}{x}) \in \rho_1 \;\wedge\; (\overset{2}{x}$

T

$\{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,-16), (2, 1{,}5) \ldots\}$

$$\rho_2 = \{(x,y) \mid x+y=3,\ x,y\in\mathbb{R}\}$$

$\cancel{R}$ $\quad$ S $\quad$ $\cancel{A}$ $\quad$ $\cancel{T}$

R - није $\quad (1,1)\notin\rho_2$

A - није јер је S а није (x,x) облика

T - није $\quad (2,1)\in\rho_2$ и $(1,2)\in\rho_2$ а $(2,2)\notin\rho_2$

$\rho_3 = \{(x, y) \mid y^2 = x^2,\ x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \mid y = x \lor y = -x,\ x,y \in \mathbb{R}\}$ $\quad y^2 = x^2$

$y = x$ или $y = -x$

R S $\cancel{A}$ T

А није јер јесте S а што рецимо $(1,-1) \in \rho_3$

$\rho_3 = \{(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1), (2,2), (2,-2), (-2,2), (-2,-2), \ldots\ldots \}$

$\rho_4 = \{(5x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$\cancel{R}$ $\quad$ $\cancel{S}$ $\quad$ A $\quad$ $\cancel{T}$

R - није $\quad (1,1) \notin \rho_1$

S - није $\quad (5,1) \in \rho_1 \quad (25,5) \in \rho_1$

$(1,5) \notin \rho_1$

T - није $\quad (25,5) \in \rho_1$ и $(5,1) \in \rho_1$ а $(25,1) \notin \rho_1$

$$\rho_5 = \{(x, 5x - 4) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$\cancel{R}$ $\quad$ $\cancel{S}$ $\quad$ A $\quad$ $\cancel{T}$

R – няма $\quad (2,2) \notin \rho_5$

$\quad (2,6) \in \rho_5$

S – няма $\quad (2,6) \in \rho_5$ а $(6,26) \in \rho_5$

T – няма $\quad (2,6) \in \rho_5$ и $(6,26) \in \rho_5$ а $(2,26) \notin \rho_5$

$$\rho_6 = \{(x, y) \mid x \cdot y > 0,\ x, y \in \mathbb{R}\}$$

$\cancel{R}$ S $\cancel{A}$ T

R – нет $(0,0) \notin \rho_6$

A – нет $(2,3) \in \rho_6$ и $(3,2) \in \rho_6$

$(x,y) \in \rho_6$ <

$x,y > 0$ — $(y,z) \in \rho_6$ — $z > 0 \Rightarrow x,z > 0 \Rightarrow (x,z) \in \rho_6$

$x,y < 0$ — $z < 0 \Rightarrow x,z < 0 \Rightarrow (x,z) \in \rho_6$

$$\rho_7 = \{(x, y) \mid x \cdot y = 0,\ x, y \in \mathbb{R}\}$$

$\cancel{R}$ $\quad S \quad$ $\cancel{A}$ $\quad T$

R – није $\quad (1,1) \notin \rho_7$

A – није $\quad (0,2) \in \rho_7$ и $(2,0) \in \rho_7$

T – није $\quad (1,0) \in \rho_7$ и $(0,1) \in \rho_7$ а $(1,1) \notin \rho_7$

7. Neka je dat skup $A = \{1, 2, 3\}$ i jedna njegova particija $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$. Odrediti relaciju ekvivalencije skupa A koja odgovara datoj particiji.

$$\rho = \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$$

8. Proveriti da li je relacija $\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ relacija ekvivalencije skupa $A = \{1,2,3\}$, i ako jeste odrediti klase ekvivalencije i faktor skup skupa A u odnosu na relaciju ρ.

$R \quad S \quad \cancel{A} \quad T$

$\{a, a, a, b\} = \{a, b\}$

$C_1 = \{1, 2\} = C_2$

$A/\rho = \{C_1, C_3\}$

$C_3 = \{3\}$

$= \{\{1,2\},\{3\}\}$

$\{\{1,2\},\{3\}\}$

(*)

$A = \{a, b, c, d\}$

$\rho = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (b,a), (c,d), (d,c)\}$

$\{\{a,b\}, \{c,d\}\}$ — PARTICIJA

$A/\rho = \{\{a,b\}, \{c,d\}\}$

$C_a = C_b = \{a,b\}$

$C_c = C_d = \{c,d\}$

9. Relaciju $\rho = \{(2,2),(1,3),(5,5),(3,4)\}$, ako je moguće, dopuniti do relacije ekvivalencije ρ_1 skupa $A = \{\cancel{1},\cancel{2},\cancel{3},\cancel{4},5\}$, a zatim odrediti faktor skup skupa A u odnosu na relaciju ρ_1.

$$\rho_1 = \rho \cup \{(1,1),(3,3),(4,4),(3,1),(4,3),(1,4),(4,1)\}$$

$$A/\rho_1 = \{\{1,3,4\},\{2\},\{5\}\}$$

10. Napisati relaciju ekvivalencije ρ skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ako je njen faktor skup $A/\rho = \{\{1, 3, 4\}, \{5\}, \{2, 6\}\}$.

$$\rho = \{(1,1), (1,3), (1,4), (3,1), (3,3), (3,4), (4,1), (4,3), (4,4), (5,5),$$
$$(2,2), (2,6), (6,2), (6,6)\}$$

11. Neka je na skupu $\mathbb{Z}$ definisana relacija $\equiv_3$ na sledeći način:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x \equiv_3 y \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = 3k.$$

Dokazati da je $\equiv_3$ relacija ekvivalencije skupa $\mathbb{Z}$ i odrediti klase ekvivalencije i faktor skup.

$\equiv_3$

$x \equiv_3 y$ ако x и y имају исти остатак приликом дељења са 3

$1 \equiv_3 2 \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ $\quad 1-2 = 3 \cdot k$, $\quad -1 = 3 \cdot k \in \mathbb{Z}$

$1 \not\equiv_3 2$

$1 \not\equiv_3 3 \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ $\quad 1-3 = 3 \cdot k$, $\quad -2 = 3 \cdot k \in \mathbb{Z}$

$1 \equiv_3 4$

$2 \equiv_3 5 \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ $\quad 2-5 = -3 = 3 \cdot (-1)$

и релације су
- дељиви са 3
- који имају остатак 2 при дељењу са 3
- који имају остатак 1 при дељењу са 3