Binarne operacije

October 22, 2021

Neka je $A \neq \emptyset$.

Unarna operacija skupa A je svaka funkcija $' : A \longrightarrow A$.

Binarna operacija skupa A je svaka funkcija $* : A^2 \longrightarrow A$.

Uobičajeno je da se za unarne operacije koriste simboli: $-$, $^{-1}$, $'$ i slično, a za binarne: $+$, $\cdot$, $\oplus$, $\odot$, $*$ i slično.

Takođe se umesto $*(a, b)$ piše $a * b$, na primer, umesto $+(1, 2) = 3$ piše se $1 + 2 = 3$.

Ako je $*$ binarna operacija nepraznog skupa A uređen par $\mathcal{A} = (A, *)$ se naziva **grupoid**.

Uređen par $(A, *)$ je grupoid ako je $A \neq \emptyset$ i operacija $*$ zatvorena u skupu A, tj. važi

$$\forall x, y \in A \Longrightarrow x * y \in A.$$

Primer: Da li su sledeći uređeni parovi grupoidi?

$(\mathbb{N}, +)$

$(\mathbb{N}, \cdot)$

$(\mathbb{N}, -)$

$(\mathbb{Z}, -)$

$(\mathbb{Z}, \cdot)$

$(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, :)$

$(\mathbb{R}, :)$

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, :)$

$(\{-1, 0, 1\}, +)$

$(\{-2, -1, 0, 1, 2\}, \cdot)$

Binarne operacije se obično zadaju (definišu) korišćenjem:

- Kejlijevih tablica.
  Pomoću Kejlijevih tablica se mogu zadati unarne i binarne operacije na konačnom skupu A. Na primer neka je $A = \{0, 1, 2, 3\}$

$'$	
0	0
1	3
2	2
3	1

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	3
2	2	3	3	3
3	3	3	3	3

$0 * 0 = 0$

идемпотентни 3

$0 = 3$

- Poznatih binarnih operacija .
  Pomoću poznatih operacija mogu se zadati nove unarne i binarne operacije. Na primer na skupu $A = \{0, 1, 2, 3\}$ su sa

$$x' = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 4 - x, & x \neq 0 \end{cases} \qquad \text{i} \qquad x * y = min\{x + y, 3\}$$

  definisane iste operacije $'$ i $*$ koje su definisane Kejlijevim tablicama datim iznad.

Osobine grupoida.

Neka je A neprazan skup.

- Grupoid $(A, *)$ je asocijativan (polugrupa) ako

$$\forall x, y, z \in A,\ x * (y * z) = (x * y) * z.$$

- Grupoid $(A, *)$ je komutativan ako

$$\forall x, y \in A,\ x * y = y * x.$$

- Grupoid $(A, *)$ je idempotentan ako

$$\forall x \in A,\ x * x = x.$$

- Grupoid $(A, *)$ je sa levim neutralnim elementom ako

$$\exists\, e \in A,\ \forall x \in A,\ e * x = x.$$

Grupoid $(A, *)$ je sa desnim neutralnim elementom ako

$$\exists e \in A,\ \forall x \in A,\ x * e = x.$$

Elemenat $e \in A$ je neutralni elemenat grupoida $(A, *)$ ako je on istovremeno i levi i desni neutralni elemenat.

- Neka je $e \in A$ levi neutralni element grupoida $(A, *)$. Ako

  $$\text{za neki elemenat } x \in A,\ \exists x' \in A,\ x' * x = e$$

  tada je x' levi inverzni elemenat elementa x.

  Neka je $e \in A$ desni neutralni element grupoida $(A, *)$. Ako

  $$\text{za neki elemenat } x \in A,\ \exists x' \in A,\ x * x' = e$$

  tada je x' desni inverzni elemenat elementa x.

  Neka je $e \in A$ neutralni element grupoida $(A, *)$. Ako za neki elemenat $x \in A$ postoji elemenat $x' \in A$ koji je istovremeno i levi i desni inverzni elemenat elementa x, tada je elemenat x' inverzni elemenat, elementa x.

- Grupoid $(A, *)$ je kancelativan ako za $\forall x, y, z \in A$, važi

$$x * y = x * z \Longrightarrow y = z \quad \text{(levi zakon kancelacije)},$$

$$y * x = z * x \Longrightarrow y = z \quad \text{(desni zakon kancelacije)}.$$

- Grupoid $(A, *)$ je sa levim nilpotentnim elementom ako

$$\exists 0 \in A,\ \forall x \in A,\ 0 * x = 0.$$

Grupoid $(A, *)$ je sa desnim nilpotentnim elementom ako

$$\exists 0 \in A,\ \forall x \in A,\ x * 0 = 0.$$

Elemenat $0 \in A$ je nilpotentni elemenat grupoida $(A, *)$ ako je on istovremeno i levi i desni nilpotentni elemenat.

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

$AB = AC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

$B \neq C$

$BA \neq CA$

Ako postoji neutralni element, on je jedinstven.

Ako postoji inverzni element, on je jedinstven.

Ako je grupoid komutativan, levi neutralni element mora biti i desni, levi inverzni element mora biti i desni, levi nilpotentni element mora biti i desni, tj. pri ispitivanju neutralnog, nilpotentnog i inverznih elemenata dovoljno je ispitivati samo leve, odnosno samo desne.

Ako u asocijativnom grupoidu postoje i neutralni i inverzni elementi on je kancelativan.

Ako je neka operacija zadata preko poznatih binarnih i unarnih operacija, tada se pri ispitivanju njenih osobina koriste poznate osobine operacija preko kojih je definisana.

Neka je $\mathcal{A} = (A, *)$ grupoid, i neka je B neprazan podskup skupa A. Ukoliko je $\mathcal{B} = (B, *)$ grupoid, tj. ako je operacija $*$ zatvorena u skupu B, tada je $\mathcal{B}$ **podgrupoid** grupoida $\mathcal{A}$.

Operacija $*$ grupoida $\mathcal{B}$ je ustvari restrikcija operacije $*$ grupoida $\mathcal{A}$, ali je uobičajeno da se one isto označavaju.

Zakonitosti u kojima od kvantifikatora figuriše samo $\forall$ (na primer komutativnost i asocijativnost) prenose se sa grupoida na svaki njegov podgrupoid.

$(A, *)$ - GRUPOID

$B \neq 0 \quad \wedge \quad B \subseteq A$

$(B, *)$ - GRUPOID

$\Rightarrow \quad (B, *)$ PODGRUPOID $(A, *)$

$(\mathbb{R}, +)$ - GRUPOID

$(\mathbb{N}, +)$ - GRUPOID

$\mathbb{N} \neq \emptyset, \quad \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$

$(\mathbb{N}, +)$ PODGRUPOID $(\mathbb{R}, +)$

$+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

Primer: Neka je $A = [0,1]$ i $B = \{0,1\}$. Ispitati da li su uređeni parovi (A, min) i (B, min) grupoidi i ako jesu ispitati njihove osobine.

$\min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

(A, min) jeste grupoid jer:

$\min\left(\frac{1}{2}, \min\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)\right)$

$= \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$

$= \min\left(\min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \frac{1}{4}\right)$

- $A \neq \emptyset$;

$\forall x, y \in A, \quad \min(x, y) = \begin{cases} x \in A \\ y \in A \end{cases}$

- zatvorenost: važi jer za

$$\forall x, y \in A, min\,(x, y) \in [x, y] \subseteq A,$$

$(\mathbb{N}, -)$

$1 - 3 = -2 \notin \mathbb{N}$

Za grupoid (A, min):

- asocijativnost: važi jer za

$\forall x, y, z \in A, \quad \underbrace{x \overset{\min}{*} (\overbrace{y * z}^{\min(y,z)})}_{\min(x, \min(y,z))} = (x * y) * z$

$$\forall x, y, z \in A, min\,(x, min\,(y, z)) = min\,(x, y, z) = min\,(min\,(x, y)\,, z)\,;$$

- komutativnost: važi jer za

$$\forall x, y \in A, min\,(x, y) = min\,(y, x)\,;$$

- idempotentnost: važi jer za

$$\forall x \in A, min\,(x, x) = x;$$

- neutralni elemenat: je 1 jer je za

$$\forall x \in A, min\,(1, x) = x;$$

- inverzni elementi: samo elemenat 1 ima inverzni i to je sam sebi inverzan, tj. važi $min\,(1,1) = 1$, ostali elementi nemaju inverzne;

- nilpotentni elemenat: je 0 jer je za

$$\forall x \in A, min\,(0, x) = 0;$$

- kancelativnost: ne važi jer je na primer

$$min\,(\cancel{0}, 1) = min\,(\cancel{0}, 0)\,, \quad \text{a} \quad 0 \neq 1.$$

$\forall x \in A$, $min\,(x, 1) = x$

$A = [0,1]$

$\cancel{min\,(1, x) = *}$

$min\,(1,1) = 1$

BROJ 1 IMA INVERZ, I TO SAMOG SEBE OSTALI NEMAJU

$min\,(0, x) = 0$

$A = [0,1]$

$\cancel{0}\ min\ 1 = 0$

$\cancel{0}\ min\ 0 = 0$

NEKA JE $* = min$

$\cancel{0} * 1 = 0$

$\cancel{0} * 0 = 0$

$B = \{0,1\}$

Skup B je neprazan podskup skupa A, i on je zatvoren za operaciju *min* jer

$$\forall x, y \in B, min\,(x, y) \in \{x, y\} \subseteq B,$$

pa je (B, min) grupoid, što znači da je (B, min) podgrupoid grupoida (A, min). Kako je operacija *min* u skupu B restrikcija operacije *min* u skupu A, i kako 1 i 0 pripadaju skupu B, u grupoidu (B, min) važe potpuno iste osobine kao i u grupoidu (A, min).

$\underline{B} = \{0,1\} \,\underline{\subseteq}\, [0,1] = \underline{A}$

(B, min)

$(A, min) \leftarrow$ GRUPOID

(B, min) GRUPOID ?

1) $\underline{B \neq \emptyset}$

2) $\forall x,y \in B, \; min(x,y) \in \{0,1\} = B$

OPERACIJA min JE ZATVORENA U B

$\Rightarrow (B, min)$ GRUPOID

$\Rightarrow$ (B, min) PODGRUPOID (A, min)

1, 0   1, 0

$x \cdot \frac{1}{x} = 1$

$0 \cdot x = 0$

Primer: Ispitati da li su uređeni parovi $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $((0, \infty), \cdot)$, $((0, 1], \cdot)$, $((0, 1), \cdot)$, $(\{0, 1\}, \cdot)$, $(A, \cdot)$ gde je $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$ i $(\mathbb{I}, \cdot)$ grupoidi i ako jesu ispitati njihove osobine. Odrediti koji su grupoidi podgrupoidi nekih drugih ovde posmatranih grupoida.

$x \cdot \square = 1$ $\quad 0 \cdot 0 = 0$

$\frac{1}{2} \cdot \square = 1$ $\quad 1 \cdot 1 = 1$

Svi navedeni skupovi su neprazni.

$0 \cdot x = 0 \cdot y$

$x \neq y$

$0 \cdot 2 = 0 \cdot 3$

$2 \neq 3$

$(\mathbb{I}, \cdot)$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \notin \mathbb{I}$

$\cdot$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(0, \infty)$	$(0, 1]$	$(0, 1)$	$\{0, 1\}$	A	$\mathbb{I}$
grupoid	+	+	+	+	+	+	+	−
asocijativnost	+	+	+	+	+	+	+	/
komutativnost	+	+	+	+	+	+	+	/
idempotentnost	− $2 \cdot 2 \neq 2$	−	−	− $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$	−	+	−	/
neutralni elementi	1	1	1	1	−	1	−	/
inverzni elementi	0 nema, ostali +	+	+	1 ima, ostali −	−	1 ima, 0 nema	−	/
nilpotentni elementi	0	−	−	−	−	0	−	/
kancelacija	−	+	+	+	+	−	+	/

Napomena: $(\mathbb{I}, \cdot)$ nije grupoid jer skup $\mathbb{I}$ nije zatvoren za operaciju množenja. Na primer, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \notin \mathbb{I}$.

Svaki od posmatranih grupoida je sam sedi podgrupoid i osim toga:

- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R}, \cdot)$;
- $((0, \infty), \cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R}, \cdot)$ i $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$;
- $((0, 1], \cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ i $((0, \infty), \cdot)$;
- $((0, 1), \cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $((0, \infty), \cdot)$ i $((0, 1], \cdot)$;
- $(\{0, 1\}, \cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R}, \cdot)$;
- $(A, \cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $((0, \infty), \cdot)$, $((0, 1], \cdot)$ i $((0, 1), \cdot)$.

Ako je operacija $*$ na nepraznom skupu A zadata Kejlijevom tablicom, neke od osobina se mogu proveriti "vizuelno" uočavanjem određenog, specifičnog, rasporeda u tablici.

- zatvorenost: u tablici se javljaju samo elementi skupa A;
- komutativnost: tablica je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu;
- idempotentnost: na glavnoj dijagonali su poređani elementi skupa A onako kako su poređani u graničnoj vrsti i ~~koloničnoj~~ graničnoj koloni;
- neutralni elemenat: $e \in A$ je levi neutralni elemenat ako je vrsta elementa e jednaka graničnoj vrsti, a $e \in A$ je desni neutralni elemenat ako je kolona elementa e jednaka graničnoj koloni;

- inverzni elemenat: ako je e levi neutralni elemenat, tada postoji levi inverzni elemenat x' elementa x ukoliko se u koloni elementa x pojavljuje bar jednom neutralni elemenat e, a ako je e desni neutralni elemenat, tada postoji desni inverzni elemenat x' elementa x ukoliko se u koloni elementa x pojavljuje bar jednom neutralni elemenat e. Svaki elemenat ima svoj inverzni akko se elemenat e pojavljuje tačno jednom u svakoj vrsti i koloni i simetrično je raspoređen odnosu na glavnu dijaginalu.

- nilpotentni element: element 0 je nilpotentni element ako su cela njegova vrsta i kolona popunjeni sa njim samim;

- asocijativnost i kancelacija se ne mogu ispitivati pomoću tablice.

Primer:* Neka je $A = \{a, b, c, d\}$, i neka je operacija $*$ skupa A zadata Kejlijevom tablicom

$*$	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	b	b	b	b
c	a	b	c	d
d	b	b	d	d

.

$a*(d*a)=(a*d)*a$

$a*b = b*a$

$b = b$

$b*a=b$

$b*c=b$

$\cancel{b}*a = \cancel{b}*c$

$a \neq c$

$a*(a*a) = (a*a)*a$

$a*a = a*a$

$a = a$

- zatvorenost: u tablici se javljaju samo elementi skupa $A \neq \emptyset$, pa $(A, *)$ jeste grupoid;
- komutativnost: tablica je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu pa grupoid $(A, *)$ jeste komutativan;
- idempotentnost: na glavnoj dijagonali su poređani elementi skupa A baš onako kako su poređani u graničnoj vrsti i koloni pa grupoid $(A, *)$ jeste idempotentan;
- neutralni elemenat: elemenat $c \in A$ je neutralni elemenat grupoida $(A, *)$ jer je njegova vrsta jednaka graničnoj vrsti, a njegova kolona jednaka graničnoj koloni;

- inverzni elemenat: osim elementa c koji je sam sebi inverzan ($c * c = c$) ostali elementi nemaju inverzne;
- nilpotentni elemenat: elemenat $b \in A$ je nilpotentni elemenat jer se cela njegova vrsta i kolona popunjeni sa njim samim;
- grupoid $(A, *)$ nije kancelativan jer je recimo $ba = bd$ a $a \neq d$ (što se vidi iz tablice ali se nije moglo zaključiti na osnovu nje);
- da bi se ispitala asocijativnost grupoida $(A, *)$ potrebno je proveriti jednakost

  $A=\{a,\cancel{b},\cancel{c},d\}$

  $$x * (y * z) = (x * y) * z$$

  za sve $x, y, z \in A$, što bi bilo $4^3 = 64$ slučaja.
  Kako je c neutralni elemenat, ako bar jedna promenljiva (x, y ili z) ima vrednost c, jednakost $x * (y * z) = (x * y) * z$ će biti zadovoljena jer c kao neutralni elemenat ne utiče na rezultat operacije.

- Sad ostaje da se proveri još $3^3 = 27$ slučajeva.
Kako je b nilpotentni elemenat, ako bar jedna promenljiva (x, y ili z) ima vrednost b, jednakost $x*(y*z) = (x*y)*z$ će biti zadovoljena jer će izrazi na levoj i desnoj strani jednakosti imati vrednost b.
Ostaje da se proveri još $2^3 = 8$ slučajeva.
Ovo se može proveriti direktno očitavanjem iz tablice

$$
\begin{array}{ll}
a*(a*a) = a = (a*a)*a, & a*(a*d) = b = (a*a)*d, \\
a*(d*a) = b = (a*d)*a, & a*(d*d) = b = (a*d)*d, \\
d*(a*a) = b = (d*a)*a, & d*(a*d) = b = (d*a)*d, \\
d*(d*a) = b = (d*d)*a, & d*(d*d) = d = (d*d)*d,
\end{array}
$$

pa grupoid $(A, *)$ jeste asocijativan.

aaa ddd
aad dda
ada dad
add daa

Neka su $(G, *)$ i $(H, \circ)$ grupoidi kod kojih je $G = \{a, b\}$ i $H = \{A, B\}$, a operacije $*$ i $\circ$ su definisane sledećim Kejlijevim tablicama

$*$	a	b
a	a	b
b	b	a

$\circ$	A	B
A	A	B
B	B	A

.

$h = \begin{pmatrix} a & b \\ A & B \end{pmatrix}$

$h(a) = A$

$h(b) = B$

Može se uočiti da se grupoidi $(G, *)$ i $(H, \circ)$ razlikuju samo po simbolu operacije i po "veličini slova", tj. može se reći da je grupoid $(H, \circ)$ dobijen od grupoida $(G, *)$ tako što su u grupoidu $(G, *)$ preoznačeni elementi i operacija. Pri tome je struktura preoznačenog grupoida $(H, \circ)$ ostala ista kao i struktura polaznog grupoida $(G, *)$. U ovom slučaju kaže se da su ta dva grupoida ista (jednaka) do na izomorfizam, što se definiše na sledeći način.

$G = \{1, 2\}$

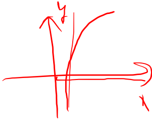
$*$	1	2
1	1	1
2	1	2

$H = \{m, n\}$

$\circ$	m	n
m	m	m
n	m	n

$a*b=e$ e $h(e)$ $h(a)\circ h(b)=h(e)$

Neka su $\mathcal{G}=(G,*)$ i $\mathcal{H}=(H,\circ)$ grupoidi, i neka je $h: G\longrightarrow H$. Funkcija h je **homomorfizam** grupoida $\mathcal{G}$ u grupoid $\mathcal{H}$ ako



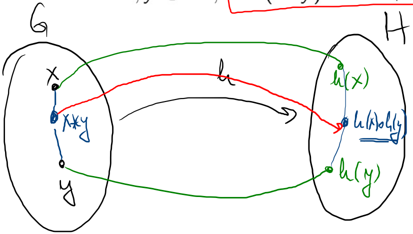
IZOMORFIZAM = HOMOMORFIZAM + BIJEKCIJA

$$\forall x,y\in G,\ h(x*y)=h(x)\circ h(y).$$

Ako je homomorfizam h bijektivna funkcija tada se funkcija h naziva **izomorfizam**, i kaže se da je grupoid $\mathcal{G}$ izomorfan sa grupoidom $\mathcal{H}$, što se zapisuje sa $\mathcal{G}\simeq\mathcal{H}$.

Primer: Funkcija $\ln:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ je izomorfizam grupoida $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ u $(\mathbb{R},+)$ jer je funkcija ln bijekcija i važi

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^+,\ \boxed{\ln(x\cdot y)=\ln x+\ln y.}$$



$= h(x*y)$

Izomorfizam "prenosi" osobine sa jednog grupoida na drugi. Ako je $h : G \longrightarrow H$ izomorfizam grupoida $\mathcal{G} = (G, *)$ u grupoid $\mathcal{H} = (H, \circ)$, tada svaka "zakonitost" koja važi u $\mathcal{G}$ važi i u $\mathcal{H}$, tj.

- ako je grupoid $\mathcal{G}$ asocijativan tada je i grupoid $\mathcal{H}$ asocijativan;
- ako je grupoid $\mathcal{G}$ komutativan tada je i grupoid $\mathcal{H}$ komutativan;
- ako postoji neutralni element $e_1 \in G$ u grupoidu $\mathcal{G}$ tada je $e_2 = h(e_1) \in H$ neutralni elemenat grupoida $\mathcal{H}$;
- ako su $x \in G$ i $y \in G$ međusobno inverzni elementi u grupoidu $\mathcal{G}$ tada su $h(x) \in H$ i $h(y) \in H$ međusobno inverzni elementi u grupoidu $\mathcal{H}$.

Kako izomorfizam "prenosi" sve osobine iz jednog grupoida u drugi najčešće se koristi na sledeći način: Ako je potrebno ispitati osobine grupoida $(H, \circ)$, dovoljno je pronaći izomorfizam između njega i nekog grupoida čije osobine su već poznate pa će zbog izomorfizma one važiti i u $(H, \circ)$.

Ako su grupoidi $\mathcal{G} = (G, *)$ i $\mathcal{H} = (H, \circ)$ definisani Kejlijevim tablicama i ako je $h : G \longrightarrow H$ izomorfizam grupoida $\mathcal{G}$ u grupoid $\mathcal{H}$ tada, ako se u tablici grupoida $\mathcal{G}$ svaki elemenat $x \in G$ zameni elementom $h(x) \in H$ dobija se tablica grupoida $\mathcal{H}$, a važi i obrnuto, ako je $h : G \longrightarrow H$ bijekcija i ako se tablica grupoida $\mathcal{H}$ može dobiti tako što se u tablici grupoida $\mathcal{G}$ svaki elemenat $x \in G$ zameni elementom $h(x) \in H$ onda je h izomorfizam.

Primer: Neka je $B = \{1, 2, 3, 6\}$ i na skupu B neka je deta operacija "najmanji zajednički sadržalac" ($NZS\,(x, y)$ je najmanji elemenat skupa B koji je deljiv i sa x i sa y).
Na osnovu Kejlijeve tablice

NZS	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

$NZS(\cancel{6}, 1) = 6$

$NZS(\cancel{6}, 2) = 6$

$1 \neq 2$

može se zaključiti

- zatvorenost: u tablici se javljaju samo elementi skupa $B \neq \emptyset$, pa (B, NZS) jeste grupoid;
- komutativnost: tablica je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu pa grupoid (B, NZS) jeste komutativan;
- idempotentnost: na glavnoj dijagonali su poređani elementi skupa A baš onako kako su poređani u graničnoj vrsti i koloni pa grupoid (B, NZS) jeste idempotentan;

- neutralni elemenat: elemenat $1 \in B$ je neutralni elemenat grupoida (B, NZS) jer je njegova vrsta jednaka graničnoj vrsti, a njegova kolona jednaka graničnoj koloni;
- inverzni elemenat: osim elementa 1 koji je sam sebi inverzan $(1 * 1 = 1)$ ostali elementi nemaju inverzne;
- nilpotentni elemenat: elemenat $6 \in B$ je nilpotentni elemenat jer se cela njegova vrsta i kolona popunjeni sa njim samim;
- grupoid $(B, *)$ nije kancelativan jer je recimo $NZS\,(6, 1) = NZS\,(6, 2)$ a $1 \neq 2$;

- asocijativnost je ovde veoma teško pokazati i zbog toga će biti iskorišćen izomorfizam.
  Ako se pogleda Primer* može se uočiti da se do sad ispitane osobine grupoida (B, NZS) poklapaju sa osobinama grupoida $(A, *)$ iz Primera*. Funkcija $f : A \longrightarrow B$ data sa

$$f = \begin{pmatrix} c & b & a & d \\ 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

  je očigledno bijekcija.

  Kada se u tablici operacije $*$ (prva tablica) zameni svako pojavljivanje slova a brojem 3, slova b brojem 6, slova c brojem 1 i slova d brojem 2 dobija se druga tablica

Primer*: $(A, *)$

$*$	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	b	b	b	b
c	a	b	c	d
d	b	b	d	d

	3	6	1	2
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6
1	3	6	1	2
2	6	6	2	2

.

Kada se zatim preslažu kolone i vrste u drugoj tablici dobija se baš

NZS	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

što znači da je funkcija f izomorfizam grupoida $(A, *)$ u grupoid (B, NZS).
Kako je u Primeru* dokazano da je $(A, *)$ asocijativan grupoid zbog ovog izomorfizma sledi da je i grupoid (B, NZS) asocijativan.
Sve ostale osobine grupoida (B, NZS) takođe slede iz izomorfizma i nisu morale biti posebno ispitivane.