Polinomi

November 17, 2021

$\mathbb{R}$

Polinom nad proizvoljnim poljem $\mathbb{F} = (F, +, \cdot)$ je uređena k-torka elemenata tog polja kod koje je poslednja komponenta različita od "nule" polja, tj. polinom je

$\mathbb{R}$

$$p = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n), \ n \in \mathbb{N}, \ a_i \in F, \ a_n \neq 0.$$

- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ su **koeficijenti** polinoma;
- a_0 je **slobodan član** polinoma;
- a_n je **vodeći koeficijent;**
- ako je $a_n = 1$ polinom je **normiran** (normalizovan);
- $n = \deg(p)$ je **stepen** polinoma p;
- ako je $n = 0$ i $a_0 \neq 0$, onda je p **konstantan polinom** nultog stepena.
  1, 2, 3, 5
- za $n = 0$ i $a_0 = 0$ polinom p je **nula polinom**. Stepen nula polinoma nije definisan.
  0
- $F[x]$ je skup svih polinoma nad poljem $\mathbb{F}$.
- $(F[x], +, \cdot)$ je komutativan prsten sa jedinicom, gde su $+$ i $\cdot$ sabiranje i množenje polinoma.

$p(x)=2x^3+x$

$p(x)=x^5+x^2$

$p(x)=5$

Polinomu $p=(a_0,a_1,a_2,\dots,a_n)$ nad poljem $\mathbb{F}$ jednoznačno odgovara **polinomski izraz**

$P(x) = 2x^3+5x^2+3x+1$

$$\longrightarrow \boxed{p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,}$$

$p=(1,3,5,2)$

tj. svaki polinom se može poistovetiti sa odgovarajućim polinomskim izrazom (iako su to formalno različiti pojmovi) pa je uobičajeno da se za polinomski izraz $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, kaže da je polinom.

$(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$

$\mathbb{Z}_6$

Polinomska funkcija je funkcija definisana polinomskim izrazom, tj. funkcija

$2x^3+0x^2+x+0$

$$\boxed{p:F\longrightarrow F,\ p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,}\quad a_i\in F.$$

$(\mathbb{R},+,\cdot)$

$\boxed{p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}$

Polinomska funkcija se u opštem slučaju ne može poistovetiti sa polinomom jer u slučaju konačnih polja različitim polinomima odgovaraju iste polinomske funkcije. U slučaju beskonačnih polja postoji uzajamno jednoznačna korespodencija između polinoma i polinomskih funkcija, pa se u tom sličaju može koristiti naziv polinom i za polinomsku funkciju. Kako će ovde biti reči samo o polinomima nad ~~konačnim~~ BESKONAČNIM poljima za polinomsku funkciju će biti korišćen termin polinom.

$p(x)=x^3+x^{-1}$

↳ NIJE POLINOM

$-1\notin\mathbb{N}$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$a_n \neq 0$

a_n – VODEĆI

a_0 – SLOBODAN ČLAN

$\deg(p(x)) = n$

A

$Ax+B$

Ax^2+Bx+C

OPŠTI OBLIK POLINOMA 2 STEPENA $p_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

1 STEPENA $p_1(x) = a_1 x + a_0$

0 STEPENA $p_0(x) = a_0$

$p(x) = 0$

Dva nenula polinoma su **jednaka** akko su istog stepena i ako su im koeficijenti uz odgovarajuće stepene jednaki.

$2x^3 + x + 1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

$A = 2$
$B = 0$
$C = 1$
$D = 1$

Sabiranje polinoma

Neka su $p(x)$ i $q(x)$ nenula polinomi takvi da je $\deg(p(x)) = n$ i $\deg(q(x)) = m$. Sabiranje polinoma $p(x)$ i $q(x)$ vrši se tako što se koeficijenti uz iste stepene promenljive saberu. Stepen polinoma $p(x) + q(x)$ je

$$\boxed{\deg\big(p(x) + q(x)\big) \leq \max\{n, m\}.}$$

$2 \leftarrow p(x) = 2x^2 + 3x + 1$

$3 - q(x) = x^3 + 5x - 6$

$p(x) + q(x) = x^3 + 2x^2 + 8x - 5$

$p(x) = \cancel{x^3} + 2x + 1$

$q(x) = -\cancel{x^3} + 5x + 1$

$p(x) + q(x) = 7x + 1$

Zbir nula polinoma i polinoma $p(x)$ jeste polinom $p(x)$.

Množenje polinoma

Neka su $p(x)$ i $q(x)$ nenula polinomi takvi da je $\deg(p(x)) = n$ i $\deg(q(x)) = m$. Proizvod polinoma $p(x)$ i $q(x)$ vrši se tako što se pomnože svi sabirci polimoma $p(x)$ sa svim sabircima polinoma $q(x)$. Stepen polinoma $p(x) \cdot q(x)$ je

$$\boxed{\deg\big(p(x) \cdot q(x)\big) = n + m.}$$

Proizvod nula polinoma i polinoma $p(x)$ je nula polinom.

$p(x) = x+3$

$q(x) = x^2+2x+1$

$7 : 13 = 0$

OSTATAK 7

Deljenje polinoma

Neka su $p(x)$ i $q(x)$ nenula polinomi takvi da je $\deg(p(x)) = n$ i $\deg(q(x)) = m$, gde je $\boxed{n \geq m}$. Tada postoje jedinstveni polinomi $s(x)$ i $r(x)$, tako da je

$p(x) : q(x) = s(x)$

$r(x)$

$7 : 2 = 3$

$p(x) = q(x) \cdot s(x) + r(x)$

$7 = 2 \cdot 3 + 1$

$$\boxed{p(x) = q(x)s(x) + r(x),}$$

$7 : 2 = 3$

$\boxed{7 = 2 \cdot 3 + 1}$

gde je $\deg(r(x)) < \deg(q(x))$ ili je $r(x) = 0$. Ako je $r(x) = 0$, tada je polinom $p(x)$ deljiv polinomom $q(x)$, tj. polinom $q(x)$ deli polinom $p(x)$, i to se zapisuje $q(x) \mid p(x)$.

Polinom $s(x)$ naziva se količnik, a $r(x)$ ostatak pri deljenju polinoma $p(x)$ polinomom $q(x)$.

Deljenje polinoma često se piše i u obliku

$$\boxed{\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.}$$

$p(x) = q(x) \cdot s(x) + r(x)$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{q(x) \cdot s(x) + r(x)}{q(x)} = \frac{\cancel{q(x)} \cdot s(x)}{\cancel{q(x)}} + \frac{r(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Količnik pri deljenju nula polinoma $p(x)$ sa proizvoljnim nenula polinomom $q(x)$ je nula polinom.

$\frac{0}{x+1} = 0$

(1)

$$p(x) = x^5 + x^4 - 2x + 1$$
$$q(x) = x^2 - x + 2$$

$$p(x) - q(x) = x^5 + x^4 - x^2 - x - 1$$

$$p(x) + q(x) = x^5 + x^4 + x^2 - 3x + 3$$

$$p(x) \cdot q(x) = (x^5 + x^4 - 2x + 1) \cdot (x^2 - x + 2)$$
$$= x^7 - \cancel{x^6} + 2x^5 + \cancel{x^6} - x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4x + x^2 - x + 2$$
$$= x^7 + x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 2$$

$$\underbrace{(x^5 + x^4 - 2x + 1)}_{p(x)} : \underbrace{(x^2 - x + 2)}_{q(x)} = \boxed{x^3 + 2x^2 - 4}$$

KOLICNIK

$$-(x^5 - x^4 + 2x^3)$$
$$2x^4 - 2x^3 - 2x + 1$$
$$-(2x^4 - 2x^3 + 4x^2)$$
$$-4x^2 - 2x + 1$$
$$-(-4x^2 + 4x - 8)$$
$$\boxed{-6x + 9}$$

OSTATAK

$$p(x) = q(x) \cdot (x^3 + 2x^2 - 4) + (-6x + 9)$$

Primer: Odrediti količnik $s(x)$ i ostatak $r(x)$ pri deljenju polinoma $p(x) = x^5 + x^4 - 2x + 1$ polinomom $q(x) = x^2 - x + 2$.

$$
\begin{array}{l}
(x^5 + x^4 - 2x + 1) : (x^2 - x + 2) = \underbrace{x^3 + 2x^2 - 4}_{\text{količnik}} \\
\underline{-(x^5 - x^4 + 2x^3)} \\
\qquad 2x^4 - 2x^3 - 2x + 1 \\
\quad \underline{-(2x^4 - 2x^3 + 4x^2)} \\
\qquad\qquad -4x^2 - 2x + 1 \\
\qquad\quad \underline{-(-4x^2 + 4x - 8)} \\
\qquad\qquad\qquad \underbrace{-6x + 9}_{\text{ostatak}}
\end{array}
$$

Polinom $s(x) = x^3 + 2x^2 - 4$ je količnik, a $r(x) = -6x + 9$ je ostatak pri deljenju $p(x)$ sa $q(x)$. Odnosno,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^5 + x^4 - 2x + 1}{x^2 - x + 2} = x^3 + 2x^2 - 4 + \frac{-6x + 9}{x^2 - x + 2}.$$

Najveći zajednički delilac (NZD) polinoma je polinom najvećeg stepena koji ih deli.
Za polinome čiji je NZD jednak 1 kaže se da su uzajamno prosti.
Za proizvoljne nenula polinome p i q postoji NZD. On je jedinstven do na multiplikativnu konstantu, tj. ako je $NZD\,(p,q) = d$ tada je i αd, $\alpha \neq 0$ takođe $NZD\,(p,q)$.
NZD se određuje pomoću Euklidovog algoritma.

$p(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

$q(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$NZD(p, q) = -4x^2 + 4 = \underline{\underline{4}}\,\underline{\underline{(-x^2 + 1)}}$

$NZD(p, q) = -x^2 + 1$

I $p(x) : q(x)$

KOLIČNIK

$$(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6) : \overbrace{(x^3 + 2x^2 - x - 2)}^{q(x)} = x - 1$$

$-(x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x)$

$-x^3 - 6x^2 + x + 6$

$-(-x^3 - 2x^2 + x + 2)$

$-4x^2 + 4$

$r(x)$ OSTATAK

II $q(x) : r(x)$

$$(x^3 + 2x^2 - x - 2) : (-4x^2 + 4) = \underbrace{-\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}}_{\text{KOLIČNIK}}$$

$-(x^3 - x)$

$2x^2 - 2$

$-(2x^2 - 2)$

$\boxed{0}$

OSTATAK

Primer: Odrediti *NZD* polinoma $p(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ i $q(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Prvo se podeli polinom $p(x)$ polinomom $q(x)$

$$
\begin{array}{rl}
(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6) : (x^3 + 2x^2 - x - 2) = & \underbrace{x - 1}_{\text{količnik}} \\
\underline{-(x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x)} & \\
-x^3 - 6x^2 + x + 6 & \\
\underline{-(-x^3 - 2x^2 + x + 2)} & \\
\underbrace{-4x^2 + 4}_{\text{ostatak}} &
\end{array}
$$

Zatim se, pošto je ostatak $4x^2 + 4$ različit od nule, podeli delioc (u ovom slučaju $q(x)$) sa ostatkom.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 - x - 2) : (-4x^2 + 4) = \underbrace{-\tfrac{1}{4}x - \frac{1}{2}}_{\text{količnik}} \\
\underline{-(x^3 - x)} \\
\qquad 2x^2 - 2 \\
\quad \underline{-(2x^2 - 2)} \\
\qquad\qquad \underbrace{0}_{\text{ostatak}}
\end{array}
$$

Kako je sad ostatak jednak 0 sledi da je $NZD(p, q) = -4x^2 + 4$ (poslednji ostatak različit od nule).

$p(x)$

$x-\alpha$

$p(\alpha)$

Bezuova teorema: Ostatak pri deljenju polinoma $p(x)$, $\deg(p(x)) > 0$, polinomom $x - \alpha$ je $p(\alpha)$, tj. vrednost polinoma $p(x)$ u tački α.

$p(x)$

$x-2$

$p(2)$

Primer: Odrediti ostatak pri deljenju polinoma

$p(x)$

$x-1$

$p(1)$

$$\boxed{p(x) = -x^4 + 2x^3 - x + 1}$$

$p(1) = -1^4 + 2\cdot 1^3 - \cancel{1} + \cancel{1}$

$= -1 + 2 = 1$

$p(x)$

$x+1$

$p(-1)$

polinomom $x - 1$ i polinomom $x + 2$.
Primenom Bezuove teoreme ostatak pri deljenju polinoma $p(x)$ polinomom $x - 1$ je

$$p(1) = -1^4 + 2 \cdot 1^3 - 1 + 1 = 1.$$

$p(x)$

$x-5$

$p(5)$

Analogno, ostatak pri deljenju polinoma $p(x)$ polinomom $x + 2$ je

$$p(-2) = -(-2)^4 + 2 \cdot (-2)^3 - (-2) + 1 = -29.$$

$p(x)$

$x+2$

$p(-2)$

$p(-2) = -(-2)^4 + 2\cdot(-2)^3$

$-(-2) + 1$

$= -29$

$p(x) = 2x^5 + x^3 - 2x + 6$

$$\begin{array}{c} p(x) \\ x+1 \\ \hline p(-1) \end{array}$$

$p(-1) = 2\cdot(-1)^5 + (-1)^3 - 2(-1) + 6 = -2 - 1 + 2 + 6 = 5$

Hornerova šema: Pri deljenju polinoma n-tog stepena

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N},$$

polinomom $x - \alpha$, dobija se količnik $s(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ stepena $n-1$ i ostatak r, pri čemu je

$$b_{n-1} = a_n, b_{n-2} = \alpha b_{n-1} + a_{n-1}, \ldots, b_0 = \alpha b_1 + a_1, r = \alpha b_0 + a_0.$$

Ovaj rezultat se zapisuje u obliku sledeće šeme koja se zove Hornerova šema.

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
\hline
\alpha & a_n & \alpha b_{n-1} + a_{n-1} & \alpha b_{n-2} + a_{n-2} & \cdots & \alpha b_1 + a_1 & \alpha b_0 + a_0 \\
 & \| & \| & \| & & \| & \| \\
 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & r
\end{array}$$

i polinom $p(x)$ se može zapisati u obliku

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - \alpha) \cdot (b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0) + r.$$

$7 : 2 = 3$

1

$7 = 2 \cdot 3 + 1$

$p(x) = 5x^4 + 2x^3 - x + 6$

$g(x) = x + 1 = x - (-1)$

	5	2	0	−1	6
−1	5	−3	3	−4	$\boxed{10}$

— OSTATAK

$-1 \cdot 5 + 2$ $\quad -1 \cdot (-3) + 0$ $\quad -1 \cdot 3 + (-4)$ $\quad -1 \cdot (-4) + 6$

KOEFICIJENTI POLINOMA KOLIČNIKA

KOLIČNIK: $s(x) = 5x^3 - 3x^2 + 3x - 4$

$p(x) = (x+1)(5x^3 - 3x^2 + 3x - 4) + 10$

Primer: Odrediti količnik i ostatak pri deljenju polinoma

$$P(x) = 3x^3 + x^2 - 2x + 1$$

polinomom $x - 2$.
Deljenjem polinoma:

$$\begin{array}{l}
\quad (3x^3 + x^2 - 2x + 1) : (x - 2) = 3x^2 + 7x + 12, \\
\underline{-(3x^3 - 6x^2)} \\
\qquad\quad 7x^2 - 2x + 1 \\
\qquad \underline{-(7x^2 - 14x)} \\
\qquad\qquad\quad 12x + 1 \\
\qquad\qquad \underline{-(12x - 24)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \boxed{25}
\end{array}$$

dobija se količnik $3x^2 + 7x + 12$ i ostatak 25.

Traženi količnik i ostatak mogu se dobiti i primenom Hornerove šeme.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & 1 & -2 & 1 \\
\hline
2 & 3 & 7 & 12 & \boxed{25} \\
 & \| & \| & \| & \| \\
 & b_2 & b_1 & b_0 & R
\end{array}
$$

Deli se polinom trećeg stepena polinomom prvog stepena, tako da je količnik kvadratni polinom čiji su koeficijenti b_2, b_1 i b_0. Količnik je $3x^2 + 7x + 12$, ostatak je $R = 25$.
Ostatak se može dobiti i primenom Bezuove teoreme, kao vrednost polinoma za $x = 2$, ali na taj način se ne dobija količnik. Ostatak je $P(2) = 3 \cdot 2^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 25$.

$$
\begin{array}{c}
p(x) \\
\underline{x-2} \\
p(2)
\end{array}
$$

$p(x) = x^2 - 1$

NULE: $1, -1$

$p(x) = (x-1)(x+1)$

1 - NULA REDA 1 (JEDNOSTRUKA)

$p(x) = (x-1)^3(x+1)$

$= (x-1)(x-1)(x-1)(x+1)$

1 - NULA REDA 3 (TROSTRUKA)

Nula ili koren polinoma $p \in F[x]$ je nula odgovarajuće polinomske funkcije, tj. svako $\alpha \in F$ za koji važi da je $p(\alpha) = 0$.

Elemenat $\alpha \in F$ je koren (nula) polinoma $p \neq 0$, $\deg(p) = n \geq 1$ akko je polinom $p(x)$ deljiv polinomom $(x - \alpha)$,

Elemenat $\alpha \in F$ je **nula (koren) reda** k ($k \in \mathbb{N}$) polinoma $p \in F[x]$ akko je polinom $p(x)$ deljiv sa $(x-\alpha)^k$, a nije deljiv sa $(x-\alpha)^{k+1}$. Za nulu reda $k > 1$ kaže se da je višestruka, a nula reda $k = 1$ je jednostruka.

$5, -2$

Primer: U polinomu $p(x) = (x-5)^3(x+2)^4$ broj 5 je koren reda 3 (trostruki koren), a broj -2 je koren reda 4(četvorostruki koren)

Polinom n-tog stepena, $n \in \mathbb{N}$, ima tačno n korena u skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, pri čemu se svaki koren računa onoliko puta kolika mu je višestrukost.

$p(x) = ax^2 + bx + c$

$D > 0 \quad x_1 \neq x_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$D < 0 \quad \alpha \pm \beta i$

$D = 0 \quad x_1 = x_2 \quad x_1 \in \mathbb{R}$

$p(x) = x^5 + 2x + 1$

IMA 5 NULA U $\mathbb{C}$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

x_1, x_2

Faktorisati polinom $p(x)$ koji je n-tog stepena, $n \in \mathbb{N}$, nad poljem kompleksnih brojeva znači napisati ga u obliku

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

~~gde~~ su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koreni polinoma (x).

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Neka je p polinom nad poljem $\mathbb{R}$ (polinom sa realnim koeficijentima) i neka je α koren polinoma p, tada je i konjugovani broj $\overline{\alpha}$ takođe koren polinoma p.

Faktorisati polinom $p(x)$ koji je n-tog stepena, $n \in \mathbb{N}$, nad poljem realnih brojeva znači napisati ga kao proizvod polinoma prvog stepena i/ili polinoma drugog stepena koji nemaju realne korene. Dakle, činioci su polinomi oblika $ax + b$ i/ili $cx^2 + dx + e$, $d^2 - 4ce < 0$ za $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$

VAŽNO !

Dakle, u faktorizaciji polinoma nad poljem kompleksnih brojeva osim vodećeg koeficijenta mogu se pojaviti isključivo polinomi prvog stepena, dok se nad poljem realnih brojeva osim vodećeg koeficijenta mogu pojaviti polinomi prvog stepena i oni polinomi drugog stepena koji nemaju realne nule.

$\mathbb{F}$

$2+3i$ je koren polinoma p

$\Rightarrow$ $2-3i$ je takođe

NAD $\mathbb{R}$:

$p(x) = (x+1)(x-3)$ ✓

$p(x) = (x+1)(x^2+1)$ ✓

$p(x) = (x+1)(x^2-1)$
$= (x+1)(x+1)(x-1)$
$= (x+1)^2(x-1)$ ✓

$p(x) = x^3 - 1$
$= (x-1)(x^2+x+1)$ ✓

Teorema o racionalnim korenima: Neka je $\frac{p}{q}$ racionalan broj, gde su $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{N}$ uzajamno prosti brojevi i neka su koeficijenti polinoma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$a_n \neq 0 \quad a_0 \neq 0$

celi brojevi, pri čemu je $a_n \cdot a_0 \neq 0$. Tada, ako je $\frac{p}{q}$ koren polinoma $p(x)$, onda p deli slobodan član a_0 (tj. $p|a_0$), a q deli koeficijent uz najveći stepen (tj. $q|a_n$).

$$p(x) = x^2 + 2x - 3$$

$p|(-3) \Rightarrow p \in \{\pm 1, \pm 3\}$

$q|1 \Rightarrow q \in \{1\}$

$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 3\}$

$p(1) = 1 + 2 - 3 = 0$ $\quad 1$

$p(-1) = 1 - 2 - 3 \neq 0$

$p(3) = 9 + 6 - 3 \neq 0$

$$p(x) = x^2 + 2x - 3$$

$1 = 1 \cdot 1$

$1 | (-3)$

$1 | 1$

$p(1) = 1 + 2 - 3 = 0$

$p(-3) = 9 - 6 - 3 = 0$

3