MATRICE

Matrica A, formata (tipa) $m \times n,\ m, n \in \mathbb{N}$, nad poljem $\mathbb{F} = (F, +, \cdot)$ je "pravougaona šema" elemenata polja $\mathbb{F}$, tj.

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n},$$

pri čemu su a_{ij}, $i \in \{1, 2, ..., m\}, j \in \{1, 2, ..., n\}$ elementi polja $\mathbb{F}$.

Kad god nije naglašeno drugačije, podrazumeva se da je matrica nad poljem realnih brojeva.

Horizontalni redovi u matrici se zovu vrste, a vertikalni kolone. Indeks m predstavlja broj vrsta, a indeks n broj kolona u matrici. Element a_{ij} matrice $[a_{ij}]_{m\times n}$ je element koji se nalazi u i-toj vrsti i j-toj koloni.

Matrice koje imaju isti broj vrsta i kolona (tj. $m = n$), nazivaju se **kvadratne matrice**.

Dve matrice su jednake akko su istog formata i ako su im svi elementi na odgovarajućim pozicijama jednaki.

Matrica čiji su svi elementi jednaki nuli polja $\mathbb{F}$ naziva se **nula matrica** nad poljem $\mathbb{F}$ i označava se $O = [a_{ij}]_{m\times n}$.

Kvadratna matrica koja na glavnoj dijagonali kao elemente ima jedinice polja $\mathbb{F}$, a na svim ostalim mestima nule polja $\mathbb{F}$ naziva se **jedinična matrica** nad poljem $\mathbb{F}$ i označava sa E ili I.

• **Sabiranje matrica** $[a_{ij}]_{m\times n}$ i $[b_{ij}]_{m\times n}$ definiše se sa:

$$[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}.$$

Dakle, matrice se mogu sabirati samo ako su istog formata i to tako što im se saberu elementi na odgovarajućim mestima.

Primer:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Suprotna matrica matrici $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, je matrica $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$.

OSOBINE SABIRANJA MATRICA:

Za matrice A, B, C i nula matricu O formata $m \times n$ važe sledeće osobine:

- $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- $A + O = A$,
- $A + (-A) = O$,
- $A + B = B + A$.
- Dakle, $(\mathcal{M}_{m\times n}, +)$, gde je $\mathcal{M}_{m\times n}$ skup svih matrica formata $m \times n$, nad poljem $\mathbb{F}$, je komutativna grupa.

• **Množenje matrice** $[a_{ij}]_{m\times n}$ **skalarom** (brojem) α (iz istog polja iz kog su elementi matrice) definiše se sa:

$$\alpha[a_{ij}]_{m\times n} = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}.$$

Dakle, matrica se množi skalarom tako što se svaki njen elemenat pomnoži tim skalarom.

Promer:

$$(-3)\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 3 \\ 12 & -9 \end{bmatrix}.$$

OSOBINE MNOŽENJA MATRICE SKALAROM:

Za skalare $\alpha,\ \beta \in F$ i matrice A i B nad poljem $\mathbb{F}$ važe sledeće osobine:

- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$,
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, pri čemu su A i B matrice istog formata,
- $1 \cdot A = A$.

• **Proizvod matrica** $[a_{ij}]_{m\times k}$ i $[b_{ij}]_{k\times n}$ definiše se sa:

$$[a_{ij}]_{m\times k}[b_{ij}]_{k\times n} = [c_{ij}]_{m\times n},$$

gde se svaki element unutar matrice $[c_{ij}]_{m\times n}$ dobija po formuli:

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} b_{pj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}.$$

Dakle, dve matrice se mogu pomnožiti samo ako je broj kolona prve matrica jednak broju vrsta druge matrice. Rezultat je matrica čiji je broj vrsta isti kao kod prve matrice, a broj kolona isti kao kod druge matrice. Element u i-toj vrsti i j -toj koloni proizvoda dobija se tako što se elementi i te vrste prve matrice pomnože sa odgovarajućim elementima j -te kolone druge matrice i dobijeni proizvodi se saberu.

Primer:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -11 \end{bmatrix}_{3\times 3}.$$

Osobine množenja matrica:

Za skalar $\alpha \in F$ i kvadratne matrice A, B, C reda $n \in \mathbb{N}$, nad poljem $\mathbb{F}$, i jediničnu matricu E reda n, važe sledeće osobine:

- $A(BC) = (AB)C$,
- $(A+B)\,C = AC + BC$,
  $A(B+C) = AB + AC$,
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,
- $EA = AE = A$.

Dakle, $(\mathcal{M}_{n\times n}, \cdot)$, gde je $\mathcal{M}_{n\times n}$ skup svih kvadratnih matrica formata n, nad poljem $\mathbb{F}$, je asocijativni grupoid sa neutralnim elementom, a $(\mathcal{M}_{n\times n}, +, \cdot)$, je prsten sa jedinicom.

- Komutativnost ne važi prilikom množenja dve matrice, tj. u opštem slučaju je $AB \neq BA$.
  Primer: Za $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ je
  $AB = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$,a $BA = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Očigledno je $AB \neq BA$.
- Ako je $AB = 0$ ne sledi da je $A = 0$ ili $B = 0$, tj. postoje delitelji nule.
  Primer: Za $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ je $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- Ako je $AB = AC$ ne sledi da je $B = C$.
  Primer: Za $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ je $AB = AC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ a očigledno je $B \neq C$
  .

• **Transponovanje matrice** se vrši tako što sve odgovarajuće vrste i kolone u matrici zamene mesta. Transponovana matrica matrice A formata $m \times n$, u oznaci A^T je matrica formata $n \times m$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

Primer: Za $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ je $A^T = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

Osobine transponovanja matrice:

Za skalar $\alpha \in \mathbb{C}$ i matrice A i B važe sledeće osobine:

- $(A^T)^T = A$,
- $(A+B)^T = A^T + B^T$,
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,
- $(AB)^T = B^T A^T$, pri čemu su A i B kvadratne matrice.

Determinanta kvadratne matrice A reda n, $n \in \mathbb{N}$, nad poljem $\mathbb{F}$ je

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Adjungovana matrica kvadratne matrice A reda $n,\ n \in \mathbb{N}$, nad poljem $\mathbb{F}$, dobija se tako što se svaki element a_{ij} matrice A zameni njegovim odgovarajućim kofaktorom A_{ij} i zatim se izvrši transponovanje, tj.

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Primer: Za matricu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, njena adjungovana matrica je

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot a_{22} & (-1)^{1+2} \cdot a_{21} \\ (-1)^{2+1} \cdot a_{12} & (-1)^{2+2} \cdot a_{11} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix},$$

tj. adjungovana matrica za kvadratnu matricu reda 2 dobija se tako što dijagonalni elementi u matrici međusobno zamene mesta, a ostali elementi promene znak.

Ako je A kvadratna matrica reda n i ako postoji kvadratna matrica X takva da je $AX = XA = E$, tada je X **inverzna matrica** matrice A. Inverna matrica matrice A označava se sa A^{-1}.

Kvadratna matrica je **regularna** ako ima inverznu matricu, a **singularna** ako nema inverznu.

Kvadratna matrica A je regularna (ima inverznu matricu) akko je njena determinanta različita od nule (tj. $\det(A) \neq 0$), i tada je:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A).$$

Primer: Za $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ je $\det(A) = -3$, a $\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, pa je $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

Osobine inverzne matrice:

Za regularne matrice A i B reda n i jediničnu matricu I reda n važe sledeće osobine:

- $(A^{-1})^{-1} = A$,
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Elementarne transformacije matrice su:

- međusobna zamena mesta dve vrste (kolone),
- množenje elemenata jedne vrste (kolone) skalarom različitim od nule,
- množenje elemenata jedne vrste (kolone) skalarom i njihovo dodavanje odgovarajućim elementima neke druge vrste (kolone).

Matrice A i B su ekvivalentne (u oznaci $A \sim B$) ako se jedna matrica može dobiti od druge matrice primenom konačnog broja elementarnih transformacija.

Osim pomoću gore date formule, inverzna matrica se može izračunati i preko tzv. "blok šeme":

(1) Formira se tzv. blok matrica $[A \mid E]$ gde je u levom bloku matrica A čija se inverzna matrica traži, a u desnom bloku je odgovarajuća (istog formata) jedinična matrica.
(2) Primenom elementarnih transformacija na vrste blok matrice pravi se u levom bloku jedinična matrica.
(3) Ako u levom bloku primenom elementarnih transformacija na vrste ne može da se napravi jedinična matrica, to znači da inverzna matrica ne postoji, tj. da je $\det(A) = 0$.
(4) Ako u levom bloku primenom elementarnih transformacija na vrste može da se napravi jedinična matrica, to znači da inverzna matrica postoji, tj. da je $\det(A) \neq 0$, i ona se nalazi u desnom bloku blok matrice, tj. dobija se $\left[E \mid A^{-1}\right]$.

Primer: Odrediti A^{-1}, ako postoji, za $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

Prvi način:

Determinanta matrice A je

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \\ 3 & 2 \end{matrix} = -28 - 18 + 4 + 21 - 4 + 24 = -1;$$

kofaktori su:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -32, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -25, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -14,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 1,$$

pa je adjungovana matrica

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -32 & -2 & 25 \\ -14 & -1 & -11 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -32 & -14 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -25 & -11 & 1 \end{bmatrix},$$

a $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A) = -\begin{bmatrix} -32 & -14 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -25 & -11 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{bmatrix}.$

Drugi način:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -25 & -11 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & 0 & 32 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -25 & -11 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 32 & 14 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 25 & 11 & -1 \end{array}\right].$$

Podmatrica date matrice A formata $m \times n$ nad poljem $\mathbb{F}$ je matrica dobijena izostavljanjem k vrsta i l kolona matrice A, gde $k \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$, $l \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.

Neka je $\tilde{A}$ kvadratna podmatrica nenula matrice A, čija je determinanta različita od 0 i pri tome ima najveći red u odnosu na sve matrice sa tom osobinom. Tada je **rang** matrice A jednak redu podmatrice $\tilde{A}$. Specijalno, ako je A nula matrica, tada je njen rang jednak 0. Rang matrice A označava se sa $\operatorname{rang}(A)$.

Ekvivalentne matrice imaju isti rang.

Za svaku nenula matricu A formata $m \times n$ postoji njoj ekvivalentna matrica B oblika

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n},$$

takva da je $b_{ii} \neq 0$, $i \in \{1, 2, ..., r\}$, $r \leq \min\{m, n\}$.

Kako je $\operatorname{rang}(B) = r$, sledi da je i $\operatorname{rang}(A) = r$.

Drugim rečima, ako su svi elementi matrice A ispod glavne dijagonale i r-te vrste jednaki nuli, a preostali elementi na glavnoj dijagonali različiti od nule, tada je rang matrice A jednak r.

Primer: $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \operatorname{rang}(A) = 3.$