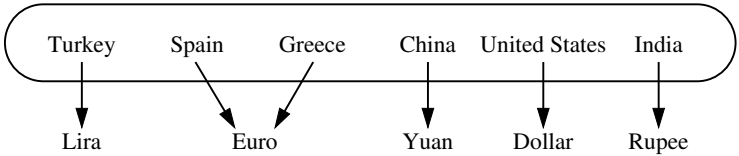
Mape, heš tabele

Katedra za informatiku, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

2022.

Mapa

- Pythonov rečnik (klasa **dict**) preslikava **ključeve** na **vrednosti**
- drugo ime: asocijativni niz ili mapa
- ključevi su jedinstveni (nema ponavljanja)
- vrednosti ne moraju biti jedinstvene



Mapa ATP: osnovne operacije

`M[k]`	vraća vrednost v vezanu za ključ k u mapi M; ako ne postoji, izaziva `KeyError`; implementira je `__getitem__`
`M[k] = v`	dodeljuje vrednost v ključu k u mapi M; ako ključ već postoji, zamenjuje staru vrednost; implementira je `__setitem__`
`del M[k]`	uklanja element sa ključem k iz mape M; ako ne postoji, izaziva `KeyError`; implementira je `_delitem__`
`len(M)`	vraća broj elemenata u mapi M; implementira je `__len__`
`iter(M)`	generiše listu **ključeva** iz mape M; implementira je `__iter__`

Mapa ATP: dodatne operacije

`k in M`	vraća `True` ako mapa M sadrži ključ k; implementira je `__contains__`
`M.get(k, d=None)`	vraća $M[k]$ ako ključ k postoji u M; inače vraća default vrednost d; ne izaziva `KeyError`
`M.setdefault(k, d)`	ako k postoji u mapi, vraća $M[k]$; ako ne postoji, postavlja $M[k] = d$ i vraća d
`M.pop(k, d=None)`	uklanja element sa ključem k i vraća vezanu vrednost v; ako ključ k nije u mapi M, vraća d ili izaziva `KeyError` ako je d jednako `None`

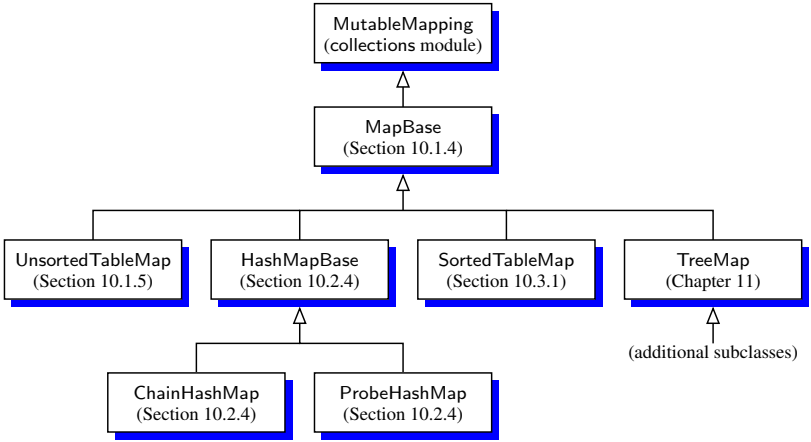
Mapa ATP: još malo operacija

`M.popitem()`	uklanja neki element mape i vraća (k,v); ako je mapa prazna izaziva `KeyError`
`M.clear()`	uklanja sve elemente iz mape
`M.keys()`	vraća skup svih ključeva iz M
`M.values()`	vraća skup svih vrednosti iz M
`M.items()`	vraća skup svih parova (k,v) iz M
`M.update(M2)`	dodeljuje `M[k]=v` za svaki (k,v) iz $M2$
`M == M2`	vraća `True` ako mape sadrže iste parove (k,v)
`M != M2`	vraća `True` ako mape ne sadrže iste parove (k,v)

Mapa ATP: primer

operacija	rezultat	mapa
`len(M)`	0	`{ }`
`M['K']=2`	–	`{'K':2}`
`M['B']=4`	–	`{'K':2, 'B':4}`
`M['U']=2`	–	`{'K':2, 'B':4, 'U':2}`
`M['V']=8`	–	`{'K':2, 'B':4, 'U':2, 'V':8}`
`M['K']=9`	–	`{'K':9, 'B':4, 'U':2, 'V':8}`
`M['B']`	4	`{'K':9, 'B':4, 'U':2, 'V':8}`
`M['X']`	KeyError	`{'K':9, 'B':4, 'U':2, 'V':8}`
`M.get('F')`	None	`{'K':9, 'B':4, 'U':2, 'V':8}`
`M.get('F', 5)`	5	`{'K':9, 'B':4, 'U':2, 'V':8}`
`M.get('K', 5)`	9	`{'K':9, 'B':4, 'U':2, 'V':8}`
`len(M)`	4	`{'K':9, 'B':4, 'U':2, 'V':8}`
`del M['V']`	–	`{'K':9, 'B':4, 'U':2}`
`M.pop('K')`	9	`{'B':4, 'U':2}`
`M.keys()`	`'B','U'`	`{'B':4, 'U':2}`
`M.values()`	4,2	`{'B':4, 'U':2}`
`M.items()`	`('B',4),('U',2)`	`{'B':4, 'U':2}`
`M.setdefault('B',1)`	4	`{'B':4, 'U':2}`
`M.setdefault('A',1)`	1	`{'A':1, 'B':4, 'U':2}`
`M.popitem()`	`('B',4)`	`{'A':1, 'U':2}`

Različite implementacije mape

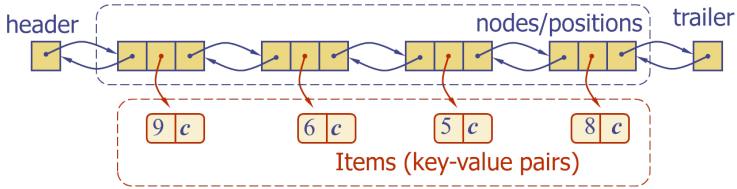


Implementacija MapElement

```
class MapElement(object):
  """Klasa modeluje element asocijativnog niza."""

    def __init__(self, k, v):
      self._key = k
      self._value = v

    @property
    def key(self):
      return self._key

    @property
    def value(self):
      return self._value

    @value.setter
    def value(self, new_value):
      self._value = new_value
```

Mapa pomoću liste

- jedna moguća implementacija mape je pomoću dvostruko spregnute liste
- elemente čuvamo u proizvoljnom redosledu



Mapa pomoću liste: implementacija$_1$

```
class Map(object):
  """Klasa modeluje asocijativni niz."""

  def __init__(self):
    self._data = []

  def __getitem__(self, key):
    """
    Pristup elementu sa zadatim ključem

    Metoda vrši pristup elementu sa zadatim ključem. U slučaju
    da element postoji u mapi, metoda vraća njegovu vrednost, dok
    u suprotnom podiže odgovarajući izuzetak.

    Argument:
    - `key`: ključ elementa kome se pristupa
    """
    for item in self._data:
      if key == item.key:
        return item.value
    raise KeyError('Ne postoji element sa ključem %s' % str(key))
```

Mapa pomoću liste: implementacija$_2$

```
def __setitem__(self, key, value):
  """
  Postavljanje vrednosti elementa sa zadatim ključem

  Metoda najpre pretražuje postojeće elemente po vrednosti ključa.
  Ukoliko traženi ključ već postoji, vrši se ažuriranje vrednosti
  postojećeg elementa. U suprotnom, kreira se novi element koji se
  dodaje u mapu.

  Argumenti:
  - `key`: ključ elementa koji se kreira ili ažurira
  - `value`: nova vrednost elementa
  """
  for item in self._data:
    if key == item.key:
      item.value = value
      return

  # element nije pronađen, zapiši ga u mapu
  self._data.append(MapElement(key, value))
```

Mapa pomoću liste: implementacija$_3$

```
def __delitem__(self, key):
  """
  Brisanje elementa sa zadatim ključem

  Metoda pretražuje elemente po vrednosti ključa. Ukoliko element
  sa zadatim ključem postoji u mapi, vrši se njegovo brisanje. U
  suprotnom se podiže odgovarajući izuzetak.

  Argument:
  - `key`: ključ elementa za brisanje
  """
  length = len(self._data)
  for i in range(length):
    if key == self._data[i].key:
      self._data.pop(i)
      return

  raise KeyError('Ne postoji element sa ključem %s' % str(key))
```

Mapa pomoću liste: implementacija$_4$

```
def __len__(self):
  return len(self._data)

def __contains__(self, key):
  """
  Metoda vrši proveru postojanja ključa u mapi

  Argument:
  - `key`: ključ koji se traži
  """
  for item in self._data:
    if key == item.key:
      return True

  return False

def __iter__(self):
  for item in self._data:
    yield item.key
```

Mapa pomoću liste: implementacija$_5$

```
def items(self):
  for item in self._data:
    yield item.key, item.value

def keys(self):
  """
  Metoda vraća sve ključeve u mapi
  """
  keys = []
  for key in self:
    keys.append(key)

  return keys
```

Mapa pomoću liste: implementacija$_6$

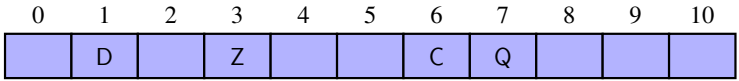
```
def values(self):
  """
  Metoda vraća sve vrednosti u mapi
  """
  values = []
  for key in self:
    values.append(self[key])

  return values

def clear(self):
  """
  Metoda uklanja sve elemente iz mape
  """
  self._data = []
```

Mapa pomoću liste: performanse

- **dodavanje** traje $O(1)$ – novi element možemo dodati na početak ili na kraj
- **traženje** ili **uklanjanje** traje $O(n)$ – u najgorem slučaju (nije pronađen element) mora se proći kroz celu listu
- ovakva implementacija je korisna samo za mape sa malim brojem elemenata
- ili ako je dodavanje najčešća operacija, dok se traženje i uklanjanje retko obavljaju

Hash tabela

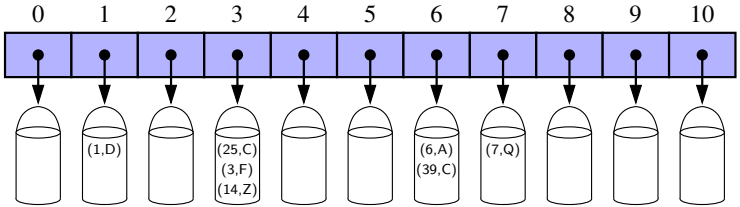
- mapa omogućava pristup korišćenjem **ključeva** kao **indeksa** – `M[k]`
- zamislimo mapu koja kao ključeve korisiti cele brojeve iz intervala $[0, N-1]$ za neko $N > n$
- za čuvanje elemenata možemo koristiti lookup niz dužine N
- npr. mapa sa elementima $(1, D), (3, Z), (6, C), (7, Q)$



- operacije su $O(1)$

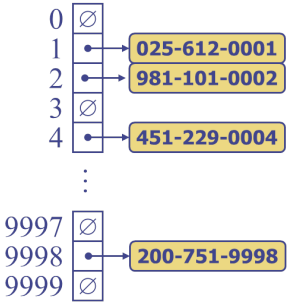
Hash tabela

- šta ako je $N >> n$?
- šta ako ključevi nisu celi brojevi?
- pretvorićemo ključeve u cele brojeve pomoću hash funkcije
- dobra hash funkcija će ravnomerno distribuirati ključeve u $[0, N-1]$
- ali može biti duplikata
- duplikate ćemo čuvati u „kantama“ – tzv. bucket array



Hash funkcija

- **hash funkcija** mapira ključeve na indekse u hash tabeli
- npr. poslednje četiri cifre broja telefona

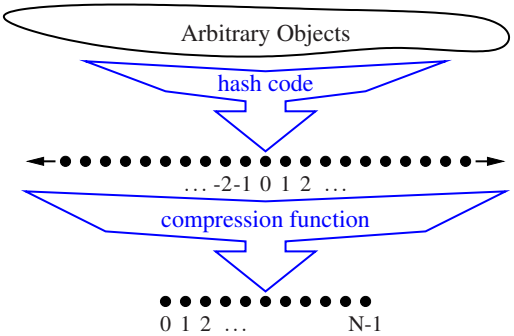


Hash funkcija

- **hash funkcija** mapira ključ k na ceo broj u intervalu $[0, N-1]$
- gde je N kapacitet niza kanti A
- element (k, v) čuvamo u nizu kao $A[h(k)]$
- kolizija: dve vrednosti ključa koje daju isti hash
- dobre hash funkcije imaju **vrlo malo** kolizija

Hash funkcija

- često se hash funkcija može posmatrati kao kompozicija dve funkcije:
- hash code: mapira ključ na ceo broj
- compression function: mapira hash kôd na broj u intervalu $[0, N-1]$



Hash funkcija

- ako se hash funkcija posmatra kao
  hash code $\circ$ compression function
- tada hash code ne zavisi od veličine niza kanti

- vrednosti koje su „blizu“ u skupu ključeva ne moraju imati hasheve koji su „blizu“

Hash code 1

- memorijska adresa
  - adresa Python objekta u memoriji kao hash code
  - dobro osim za numeričke tipove i stringove
- integer cast
  - za svaki tip podataka koji se predstavlja sa najviše onoliko bita koliko i **int** možemo uzeti int interpretaciju njegovih bita
  - za tipove koji zauzimaju više memorije moramo nekako „sažeti“ njegove bite
  - npr. **float** broj u Pythonu zauzima 64 bita a hash kod 32; možemo izabrati
    - gornjih 32 bita
    - donjih 32 bita
    - neku kombinaciju sva 64 bita: XOR ili zbir gornje i donje polovine, itd.

Hash code 2

- suma komponenti
  - podelimo bitove ključa na delove po 32 bita
  - saberemo delove (ignorišemo overflow)
  - zgodno za numeričke ključeve duže od int-a
- polinomska akumulacija
  - podelimo bitove ključa na delove fiksne dužine (npr. 8, 16, 32 bita) $a_0 a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$
  - izračunamo polinom (ignorišući overflow) za fiksno z:

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}$$

Hash code 3

- polinomska akumulacija
  - posebno zgodno za stringove ($z = 33$ daje samo 6 kolizija za 50.000 engleskih reči)
  - polinom $p(z)$ se može izračunati u $O(n)$ vremenu Hornerovom metodom
    - sledeći polinomi se računaju u $O(1)$ vremenu, svaki na osnovu prethodnog
    - $p_0(z) = a_{n-1}$
    - ...
    - $p_i(z) = a_{n-i-1} + zp_{i-1}(z)$
    - na kraju je: $p(z) = p_{n-1}(z)$

Kompresujuća funkcija

- celobrojno deljenje
  - $h(y) = y \mod N$
  - veličina hash tabele N je obično prost broj
- multiply, add and divide (MAD)
  - $h(y) = (ay + b) \mod N$
  - a i b su nenegativni celi brojevi takvi da je $a \mod N \neq 0$

Apstraktna heš mapa$_1$

```
class HashMap(object):
  """
  Klasa modeluje heš mapu
  """

  def __init__(self, capacity=8):
    """
    Konstruktor

    Argumenti:
    - `capacity`: inicijalni broj mesta u lookup nizu
    - `prime`: prost broj neophodan heš funkciji
    """
    self._data = capacity * [None]
    self._capacity = capacity
    self._size = 0
    self.prime = 109345121

    # konstante heširanja
    self._a = 1 + random.randrange(self.prime-1)
    self._b = random.randrange(self.prime)

  def __len__(self):
    return self._size
```

Apstraktna heš mapa$_2$

```
def _hash(self, x):
  """
  Heš funkcija

  Izračunavanje heš koda vrši se po formuli (ax + b) mod p.

  Argument:
  - `x`: vrednost čiji se kod računa
  """
  hashed_value = (hash(x)*self._a + self._b) % self.prime
  compressed = hashed_value % self._capacity
  return compressed

def _resize(self, capacity):
  """
  Skaliranje broja raspoloživih slotova

  Metoda kreira niz sa unapred zadatim kapacitetom u koji
  se prepisuju vrednosti koje se trenutno nalaze u tabeli.

  Argument:
  - `capacity`: kapacitet novog niza
  """
  old_data = list(self.items())
  self._data = capacity * [None]
  self._size = 0

  # prepisivanje podataka u novu tabelu
  for (k, v) in old_data:
    self[k] = v
```

Apstraktna heš mapa$_3$

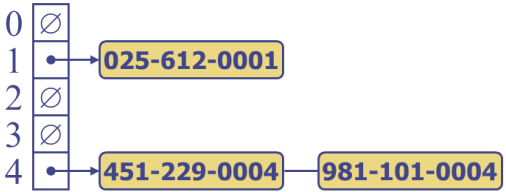
```
def __getitem__(self, key):
  """
  Pristup elementu sa zadatim ključem

  Apstraktna metoda koja opisuje pristup elementu na osnovu
  njegovog ključa. Implementacija pristupa bucketu varira u
  zavisnosti od načina rešavanja kolizija.

  Argument:
  - `key`: ključ elementa kome se pristupa
  """
  bucket_index = self._hash(key)
  return self._bucket_getitem(bucket_index, key)

def __setitem__(self, key, value):
  bucket_index = self._hash(key)
  self._bucket_setitem(bucket_index, key, value)

  # povećaj broj raspoloživih mesta
  current_capacity = len(self._data)
  if self._size > current_capacity // 2:
    self._resize(2*current_capacity - 1)
```

Apstraktna heš mapa$_4$

```
def __delitem__(self, key):
  bucket_index = self._hash(key)
  self._bucket_delitem(bucket_index, key)
  self._size -= 1

def items(self):
  raise NotImplementedError()

def _bucket_getitem(self, index, key):
  raise NotImplementedError()

def _bucket_setitem(self, index, key, value):
  raise NotImplementedError()

def _bucket_delitem(self, index, key):
  raise NotImplementedError()
```

Rukovanje kolizijama

- kolizije nastaju kada se različiti elementi mapiraju na istu ćeliju
- ulančavanje duplikata: svaki element heš tabele je glava liste koja čuva elemente
- traži dodatnu memoriju pored same heš tabele



Heš mapa sa ulančavanjem$_1$

```
class ChainedHashMap(HashMap):
  """
  Klasa modeluje heš mapu koja kolizije rešava ulančavanjem
  """
  def _bucket_getitem(self, i, key):
    """
    Pristup elementu u okviru bucketa

    Metoda najpre pristupa bucketu sa zadatim indeksom. Ukoliko
    bucket postoji, pretražuje se. Ako je element pronađen metoda
    vraća njegovu vrednostu, dok se u suprotnom podiže odgovarajući
    izuzetak.

    Argumenti:
    - `i`: indeks bucketa
    - `key`: ključ elementa
    """
    bucket = self._data[i]
    if bucket is None:
      raise KeyError('Ne postoji element sa traženim ključem.')

    return bucket[key]
```

Heš mapa sa ulančavanjem$_2$

```
def _bucket_setitem(self, bucket_index, key, value):
  """
  Postavljanje vrednosti elementa sa zadatim ključem

  Metoda najpre pronalazi bucket sa zadatim indeksom, a zatim
  dodaje novi element ili ažurira postojeći na osnovu zadatog
  ključa. Ukoliko bucket ne postoji, kreira se novi.

  Argumenti:
  - `i`: indeks bucketa
  - `key`: ključ elementa
  - `value`: vrednost elementa
  """
  bucket = self._data[bucket_index]
  if bucket is None:
    self._data[bucket_index] = Map()

  # broj elemenata u mapi se menja samo u slučaju da je došlo do
  # dodavanja, dok ažuriranje ne menja broj elemenata
  current_size = len(self._data[bucket_index])
  self._data[bucket_index][key] = value
  if len(self._data[bucket_index]) > current_size:
    self._size += 1
```

Heš mapa sa ulančavanjem$_3$

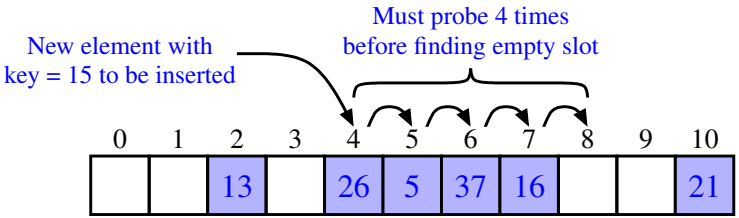
```
def _bucket_delitem(self, bucket_index, key):
  """
  Brisanje elementa sa zadatim ključem

  Metoda najpre pristupa bucketu sa zadatim indeksom. Ukoliko
  bucket postoji, pretražuje se. Ako je element pronađen vrši
  se njegovo brisanje, u suprotnom se podiže odgovarajući
  izuzetak.

  Argumenti:
  - `i`: indeks bucketa
  - `key`: ključ elementa
  """
  bucket = self._data[bucket_index]
  if bucket is None:
    raise KeyError('Ne postoji element sa traženim ključem.')

  del bucket[key]
```

Heš mapa sa ulančavanjem$_4$

```
def __iter__(self):
  for bucket in self._data:
    if bucket is not None:
      for key in bucket:
        yield key

def items(self):
  for bucket in self._data:
    if bucket is not None:
      for key, value in bucket.items():
        yield key, value
```

Linearno traženje

- linear probing: smešta element u koliziji u prvu sledeću slobodnu ćeliju (cirkularno)
- elementi u koliziji se nagomilavaju izazivajući dalje kolizije
- primer:



Čitanje sa linearnim traženjem

- get(k): počinjemo od pozicije $h(k)$
- ispitujemo sledeće lokacije sve dok se ne dogodi nešto od:
  - pronašli smo ključ k
  - naišli smo na praznu lokaciju
  - ispitali smo N lokacija

get(k)

$i \leftarrow h(k)$
$p \leftarrow 0$
repeat
  $c \leftarrow A[i]$
  if $c = \emptyset$ **then**
    return null
  else
    if $c.getKey() = k$ **then**
      return $c.getValue()$
    else
      $i \leftarrow (i + 1) \mod N$
      $p \leftarrow p + 1$
until $p = N$
return null

Izmene sa linearnim traženjem

- uvodimo poseban objekat AVAILABLE koji zamenjuje uklonjene elemente
- remove(k)
  - tražimo element sa ključem k
  - ako smo ga našli, vraćamo ga i na njegovo mesto upisujemo AVAILABLE
  - inače vratimo `None`
- put(k, o)
  - izuzetak ako je tabela puna
  - počinjemo od ćelije $h(k)$
  - ispitujemo naredne ćelije sve dok se ne dogodi nešto od:
    - našli smo ćeliju koja je prazna ili sadrži AVAILABLE
    - isprobali smo svih N ćelija
  - upišemo (k, o) u ćeliju i

Heš mapa sa linearnim traženjem$_1$

```
class LinearHashMap(HashMap):
  """
  Klasa modeluje heš mapu koja rešava kolizije linearnim pretraživanjem
  """
  # sentinel koji označava lokaciju u mapi sa koje je obrisan element
  _MARKER = object()

  def _is_available(self, bucket_index):
    """
    Metoda proverava da li je bucket sa zadatim indeksom slobodan

    Argument:
    - `i`: indeks bucketa
    """
    return self._data[bucket_index] is None or self._data[bucket_index] is self._MARKER

  def _find_bucket(self, bucket_index, key):
    """
    Metoda pronalazi bucket koji sadrži element sa zadatim ključem
    """
    available_slot = None
    while True:
      if self._is_available(bucket_index):
        if available_slot is None:
          available_slot = bucket_index

        if self._data[bucket_index] is None:
          return False, available_slot

      elif key == self._data[bucket_index].key:
        return True, bucket_index

      bucket_index = (bucket_index+1) % len(self._data)
```

Heš mapa sa linearnim traženjem$_2$

```
def _bucket_getitem(self, bucket_index, key):
  """
  Pristup elementu u okviru bucketa

  Metoda najpre pristupa bucketu sa zadatim indeksom. Ukoliko
  bucket postoji, pretražuje se. Ako je element pronađen metoda
  vraća njegovu vrednostu, dok se u suprotnom podiže odgovarajući
  izuzetak.

  Argumenti:
  - `i`: indeks bucketa
  - `key`: ključ elementa
  """
  found, index = self._find_bucket(bucket_index, key)
  if not found:
    raise KeyError('Ne postoji element sa traženim ključem.')
  return self._data[index].value

def _bucket_setitem(self, bucket_index, key, value):
  """
  Postavljanje vrednosti elementa sa zadatim ključem

  Metoda najpre pronalazi bucket sa zadatim indeksom, a zatim
  dodaje novi element ili ažurira postojeći na osnovu zadatog
  ključa. Ukoliko bucket ne postoji, kreira se novi.

  Argumenti:
  - `i`: indeks bucketa
  - `key`: ključ elementa
  - `value`: vrednost elementa
  """
  found, available_bucket_index = self._find_bucket(bucket_index, key)
  if not found:
    self._data[available_bucket_index] = MapElement(key, value)
    self._size += 1
  else:
    self._data[available_bucket_index].value = value
```

Heš mapa sa linearnim traženjem$_3$

```
def _bucket_delitem(self, bucket_index, key):
  """
  Brisanje elementa sa zadatim ključem

  Metoda najpre pristupa bucketu sa zadatim indeksom. Ukoliko
  bucket postoji, pretražuje se. Ako je element pronađen vrši
  se njegovo brisanje, u suprotnom se podiže odgovarajući
  izuzetak.

  Argumenti:
  - `i`: indeks bucketa
  - `key`: ključ elementa
  """
  found, index = self._find_bucket(bucket_index, key)
  if not found:
    raise KeyError('Ne postoji element sa traženim ključem.')

  # označi element markerom
  self._data[index] = self._MARKER

def __iter__(self):
  total_buckets = len(self._data)
  for i in range(total_buckets):
    if not self._is_available(i):
      yield self._data[i].key

def items(self):
  total_buckets = len(self._data)
  for i in range(total_buckets):
    if not self._is_available(i):
      yield self._data[i].key, self._data[i].value
```

Duplo heširanje

- koristi se sekundarna heš funkcija $d(k)$
- prilikom kolizije element se smešta u prvu slobodnu ćeliju iz niza

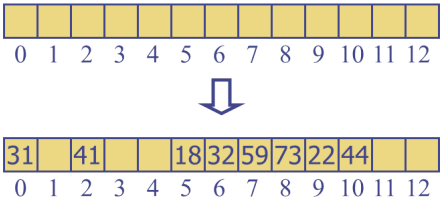
$$(i + jd(k)) \mod N \quad \text{za } j = 0, 1, \ldots, N-1$$

- sekundarna heš funkcija ne sme vratiti 0
- veličina tabele N mora biti prost broj da bi se mogle probati sve ćelije
- čest izbor za $d(k)$:
  $d(k) = q - (k \mod q)$
  - $q < N$
  - q je prost broj
- rezultat $d(k)$ je u intervalu $[1, q]$

Duplo heširanje: primer

- heš tabela sa duplim heširanjem
  - $N = 13$
  - $h(k) = k \mod 13$
  - $d(k) = 7 - (k \mod 7)$
- dodajemo ključeve 18, 41, 22, 44, 59, 32, 31, 73

k	$h(k)$	$d(k)$	Probes		
18	5	3	5		
41	2	1	2		
22	9	6	9		
44	5	5	5	10	
59	7	4	7		
32	6	3	6		
31	5	4	5	9	0
73	8	4	8		



Performanse heširanja

- u najgorem slučaju pretraga, dodavanje, uklanjanje traju $O(n)$
- najgori slučaj: kada su **svi** ključevi u koliziji
- faktor popune $\alpha = n/N$ utiče na performanse
- ako heševi liče na slučajne brojeve može se pokazati da je očekivani broj probanja prilikom dodavanja $1/(1-\alpha)$

Performanse heširanja

- očekivano vreme izvršavanja svih operacija je $O(1)$
- u praksi heširanje je vrlo brzo ako faktor popune nije blizu 100%