KOMPLEKSNI BROJEVI

Kako jednačina $x^2+1=0$ (kao i mnoge druge jednačine) nema rešenje u skupu realnih brojeva (jer je $x^2 \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$), potrebno je skup realnih brojeva proširiti tako da u novom skupu data jednačina ima rešenje. Zbog toga, se uvodi pojam **imaginarne jedinice** i koja se definiše kao

$$i^2 = -1.$$

Iz ove definicije sledi da za svaki ceo broj k, važi:

$$i^{4k}=1, \qquad i^{4k+1}=i, \qquad i^{4k+2}=-1, \qquad i^{4k+3}=-i\ .$$

Primer: $i^{17}=i^{4\cdot 4+1}=i, \quad i^{203}=i^{4\cdot 50+3}=-i, \quad i^{2020}=i^{4\cdot 505}=1$**.**

ALGEBARSKI OBLIK KOMPLEKSNOG BROJA

Kompleksan broj z zapisan **u algebarskom obliku** je broj $z=x+yi$, gde $x,y\in\mathbb{R}$, a i je imaginarna jedinica. Skup svih kompleksnih brojeva označava se sa $\mathbb{C}$, tj.

$$\mathbb{C}=\left\{x+yi \,|\, x\in\mathbb{R}\wedge y\in\mathbb{R}\wedge i^2=-1\right\}.$$

Realni deo kompleksnog broja $z=x+yi$ je $\mathrm{Re}\,(z)=x$, a **imaginarni deo** je $\mathrm{Im}\,(z)=y$.

Primer:

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{Re}\,(2+3i)=2, & \mathrm{Re}\,(-3+7i)=-3, & \mathrm{Re}\,(2-i)=2,\\
\mathrm{Im}\,(2+3i)=3, & \mathrm{Im}\,(-3+7i)=7, & \mathrm{Im}\,(2-i)=-1,\\
\mathrm{Re}\,(5i)=0, & \mathrm{Re}\,(-3)=-3, & \mathrm{Re}\,(0)=0,\\
\mathrm{Im}\,(5i)=5, & \mathrm{Im}\,(-3)=0, & \mathrm{Im}\,(0)=0.
\end{array}$$

Dva kompleksna broja data u algebarskom obliku su **jednaka** akko su im jednaki realni i imaginarni delovi, tj.

$$z_1=z_2 \iff \mathrm{Re}\,(z_1)=\mathrm{Re}\,(z_2)\ \wedge\ \mathrm{Im}\,(z_1)=\mathrm{Im}\,(z_2).$$

Konjugovano kompleksan broj broja $z=x+yi$ je $\overline{z}=x-yi$.

Primer:

$$\begin{array}{ll}
z=2+3i\Longrightarrow\overline{z}=2-3i, & z=-3+7i\Longrightarrow\overline{z}=-3-7i,\\
z=2-i\Longrightarrow\overline{z}=2+i, & z=5i\Longrightarrow\overline{z}=-5i,\\
z=-3\Longrightarrow\overline{z}=-3, & z=0\Longrightarrow\overline{z}=0.
\end{array}$$

Operacije sa kompleksnim brojevima u algebarskom obliku

Neka je $z_1=x_1+y_1i$, a $z_2=x_2+y_2i$. Tada je:

$$z_1\pm z_2=(x_1+y_1i)\pm(x_2+y_2i)=(x_1\pm x_2)+(y_1\pm y_2)\,i,$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1+y_1i)\cdot(x_2+y_2i)=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\,i,$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i}=\frac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i}\cdot\frac{x_2-y_2i}{x_2-y_2i}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i.$$

Primer: Neka je $z_1 = 3+5i$ i $z_2 = -1-3i$. Tada je:

$z_1 + z_2 = 2 + 2i$,

$z_1 - z_2 = 4 + 8i$,

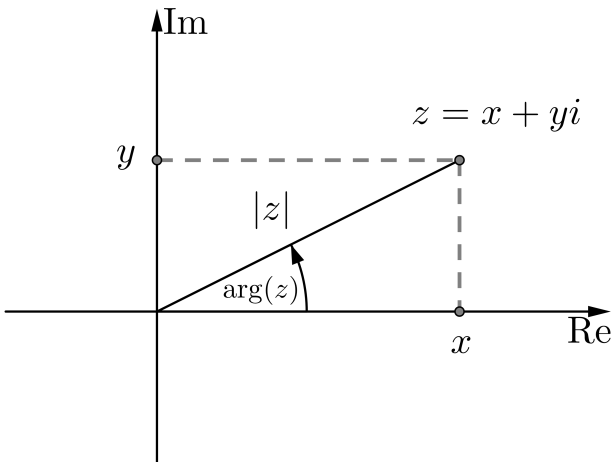
$z_1 \cdot z_2 = (3+5i)\cdot(-1-3i) = -3-9i-5i-15i^2 = 12-14i$,

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+5i}{-1-3i}\cdot\frac{-1+3i}{-1+3i} = \frac{-3+9i-5i+15i^2}{1+9} = -\frac{9}{5}+\frac{2}{5}i.$

Za proizvoljne kompleksane brojeve z i ω važi da je

$$z+\overline{z} = 2\mathrm{Re}\,(z)\,, \qquad z-\overline{z} = 2i\mathrm{Im}\,(z)\,, \qquad \overline{\overline{z}} = z, \qquad \overline{z\pm\omega} = \overline{z}\pm\overline{\omega}, \qquad \overline{z\cdot\omega} = \overline{z}\cdot\overline{\omega}, \qquad \overline{\left(\frac{z}{\omega}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{\omega}}.$$

Kompleksna (Gausova) ravan



Svaki kompleksan broj se može jednoznačno predstaviti kao tačka u ravni koja se naziva **kompleksna** ili **Gausova ravan**. Kompleksna ravan je određena **realnom** (Re) i **imaginarnom** (Im) osom koje dele ravan na četiri kvadranta.

Moduo kompleksnog broja $z = x+yi$ je rastojanje tačke koja odgovara kompleksnom broju z od koordinatnog početka. Obeležava se sa $|z|$ i izračunava kao $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Primer:

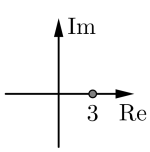
$$|2+3i| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}, \qquad |-3+7i| = \sqrt{(-3)^2+7^2} = \sqrt{58},$$

$$|2-i| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}, \qquad |5i| = 5, \qquad |-3| = 3.$$

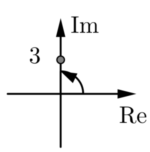
Za proizvoljan kompleksan broj z važi da je $|z|^2 = z\cdot\overline{z}$.

Argument kompleksnog broja z, u oznaci arg(z), je merni broj orijentisanog ugla čiji je prvi krak pozitivna realna osa, a drugi krak je poluprava $0z$. Argument kompleksnog broja je uvek u intervalu $(-\pi,\pi]$.
Argument kompleksnog broja nula se ne definiše.

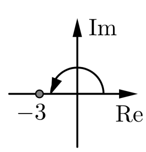
Primer:



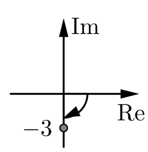
$\arg(3) = 0$



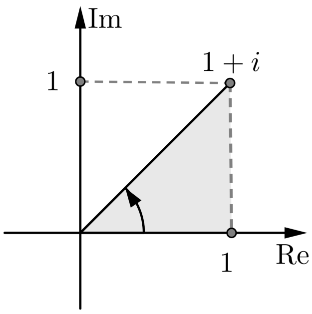
$\arg(3i) = \frac{\pi}{2}$



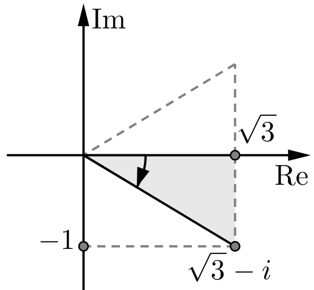
$\arg(-3) = \pi$



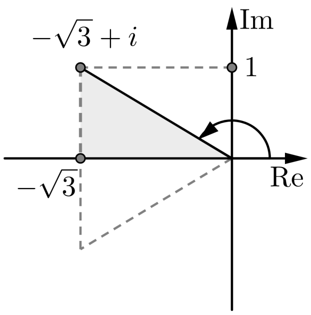
$\arg(-3i) = -\frac{\pi}{2}$



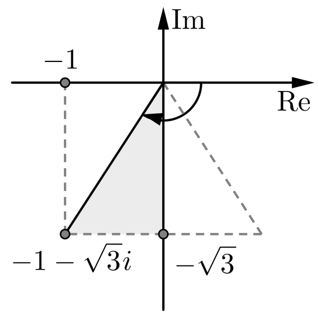
$\arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$



$\arg(\sqrt{3}-i) = -\dfrac{\pi}{6}$



$\arg(-\sqrt{3}+i) = \dfrac{5\pi}{6}$



$\arg(-1-\sqrt{3}i) = -\dfrac{2\pi}{3}$

Kompleksni brojevi koji se nalaze na istoj polupravoj čija je početna tačka koordinatni početak imaju iste argumente.

Primer:

$\arg(5+5i) = \arg\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = \arg(13+13i) = \arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$,

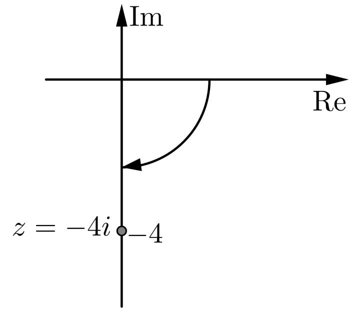
$\arg\left(4\sqrt{3}-4i\right) = \arg\left(\dfrac{1}{5}\sqrt{3}-\dfrac{1}{5}i\right) = \arg\left(\sqrt{3}-i\right) = -\dfrac{\pi}{6}$,

$\arg\left(-11\sqrt{3}+11i\right) = \arg\left(-\dfrac{3}{4}\sqrt{3}+\dfrac{3}{4}i\right) = \arg\left(-\sqrt{3}+i\right) = \dfrac{5\pi}{6}$,

$\arg\left(-21-21\sqrt{3}i\right) = \arg\left(-5-5\sqrt{3}i\right) = \arg\left(-1-\sqrt{3}i\right) = -\dfrac{2\pi}{3}$.

Primer: Neka je $z_1 = -4i$ i $z_2 = -3+5i$. Odrediti: $\mathrm{Re}\,(z_1)$, $\mathrm{Re}\,(z_2)$, $\mathrm{Im}\,(z_1)$, $\mathrm{Im}\,(z_2)$, $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, $|z_1|$, $|z_2|$, $\arg(z_1)$, z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$ i $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Rešenje: Iz $z_1 = -4i$ sledi da je
$\mathrm{Re}\,(z_1) = 0$, $\mathrm{Im}\,(z_1) = -4$,
a $\overline{z_1} = 4i$.
Sa slike se vidi da je $|z_1| = 4$ i $\arg(z_1) = -\dfrac{\pi}{2}$.
Iz $z_2 = -3+5i$ sledi da je
$\mathrm{Re}\,(z_2) = -3$, $\mathrm{Im}\,(z_2) = 5$,
$\overline{z_2} = -3-5i$,
a $|z_2| = \sqrt{(-3)^2+5^2} = \sqrt{34}$.

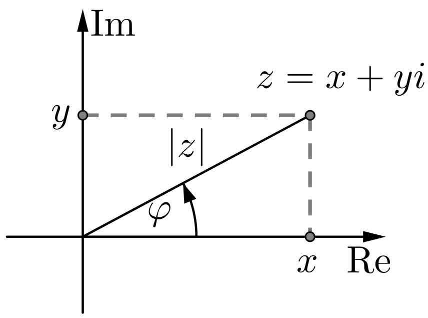


Dalje je,

$z_1 + z_2 = -4i + (-3 + 5i) = -3 + i$,
$z_1 - z_2 = -4i - (-3 + 5i) = 3 - 9i$,
$z_1 \cdot z_2 = -4i \cdot (-3 + 5i) = 12i - 20i^2 = 20 + 12i$,
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-4i}{-3+5i} \cdot \frac{-3-5i}{-3-5i} = \frac{12i-20}{9+25} = -\frac{10}{17} + \frac{6}{17}i$.

TRIGONOMETRIJSKI I EKSPONENCIJALNI OBLIK KOMPLEKSNOG BROJA

Kada se kompleksan broj $z = x + yi$, $z \neq 0$, predstavi u kompleksnoj ravni, iz pravouglog trougla sa slike vidi se da je:



$\sin\varphi = \frac{y}{|z|} \quad \Longrightarrow \quad y = |z|\sin\varphi$,

$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} \quad \Longrightarrow \quad x = |z|\cos\varphi$,

$\text{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$,
gde je $|z|$ moduo kompleksnog broja z, a $\varphi \in (-\pi, \pi]$ njegov argument.

Zamenom ovih jednakosti u algebarski oblik kompleksnog broja dobija se **trigonometrijski oblik kompleksnog broja**

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Napomena: Kako su sinus i kosinus periodične funkcije sa periodom $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ za ugao φ se može uzeti $\varphi = \arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Uobičajeno je da se uzima glavna vrednost koja je iz intervala $(-\pi, \pi]$, te će u slučaju da vrednost ugla izlazi iz tog intervala biti potrebno transformisati je u njega.

Na osnovu Ojlerove formule $\cos\varphi + i\sin\varphi \stackrel{\text{def}}{=} e^{\varphi i}$, iz trigonometrijskog oblika dobija se **eksponencijalni oblik kompleksnog broja**

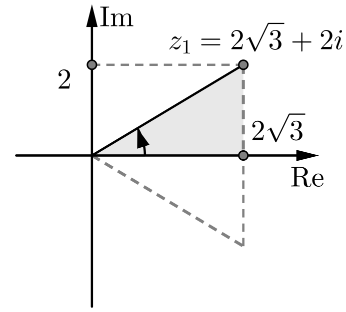
$$z = |z|e^{\varphi i}.$$

Primer: Predstaviti u eksponencijalnom i trigonometrijskom obliku kompleksne brojeve

a) $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$, b) $z_2 = -5 + 5i$, c) $z_3 = 4 - 4\sqrt{3}i$,
d) $z_4 = -3 - 3i$, e) $z_5 = 5$, f) $z_6 = -6$,
g) $z_7 = 5i$, h) $z_8 = -6i$.

Rešenje: Kako je svaki kompleksan broj u eksponencijalnom (trigonome- trijskom) obliku određen svojim modulom i argumentom, to za svaki od ovih brojeva treba odrediti moduo i argument.

a) Kako je za kompleksan broj
$$z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$$
moduo $|z_1| = \sqrt{12+4} = 4$, a
argument $\arg(z_1) = \frac{\pi}{6}$,
to je
$$z_1 = 4e^{\frac{\pi}{6}i} = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

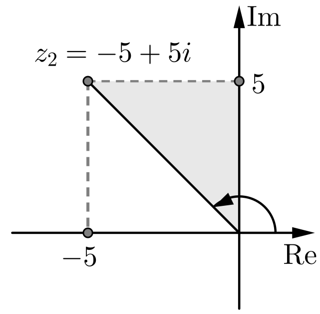


b) Kako je za kompleksan broj

$$z_2 = -5 + 5i$$

moduo $|z_2| = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$,
a argument $\arg(z_2) = \dfrac{3\pi}{4}$,
to je

$$z_2 = 5\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

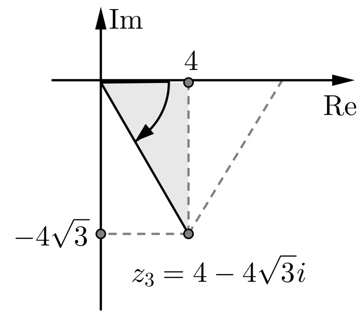


c) Kako je za kompleksan broj

$$z_3 = 4 - 4\sqrt{3}i$$

moduo $|z_3| = \sqrt{16+48} = 8$, a
argument $\arg(z_3) = -\dfrac{\pi}{3}$,
to je

$$\begin{aligned} z_3 &= 8e^{-\frac{\pi}{3}i} \\ &= 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right). \end{aligned}$$

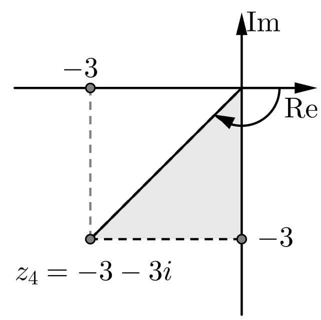


d) Kako je za kompleksan broj

$$z_4 = -3 - 3i$$

moduo $|z_4| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$, a
argument $\arg(z_4) = -\dfrac{3\pi}{4}$,
to je

$$\begin{aligned} z_4 &= 3\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i} \\ &= 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right). \end{aligned}$$

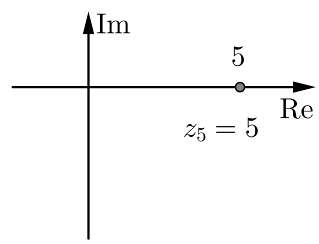


e) Sa slike se vidi da je za kompleksan broj

$$z_5 = 5$$

moduo $|z_5| = 5$, a
argument $\arg(z_5) = 0$, pa je

$$z_5 = 5e^{0i} = 5(\cos 0 + i\sin 0).$$

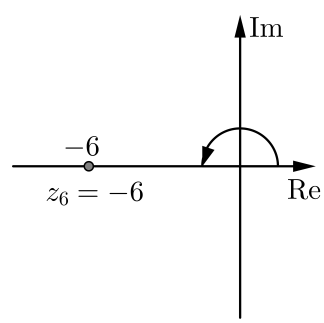


f) Sa slike se vidi da je za kompleksan broj

$$z_6 = -6$$

moduo $|z_6| = 6$, a
argument $\arg(z_6) = \pi$, pa je

$$z_6 = 6e^{\pi i} = 6(\cos\pi + i\sin\pi).$$

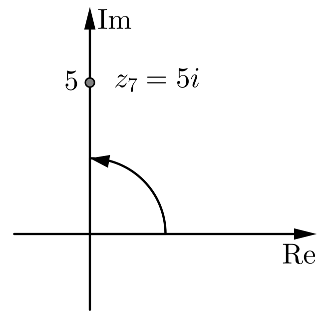


g) Sa slike se vidi da je za kompleksan broj

$$z_7 = 5i$$

moduo $|z_7| = 5$, a
argument $\arg(z_7) = \dfrac{\pi}{2}$, pa je

$$z_7 = 5e^{\frac{\pi}{2}i} = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

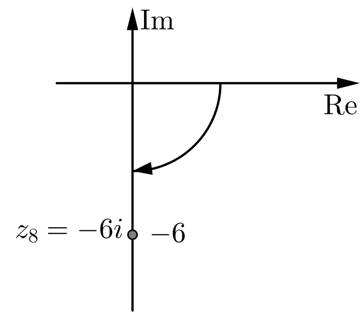


h) Sa slike se vidi da je za kompleksan broj

$$z_8 = -6i$$

moduo $|z_8| = 6$, a
argument $\arg(z_8) = -\dfrac{\pi}{2}$, pa je

$$z_8 = 6e^{-\frac{\pi}{2}i} = 6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$



Primer: Predstaviti u algebarskom obliku kompleksne brojeve

a) $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{4}i}$, b) $z_2 = e^{-\frac{2\pi}{3}i}$, c) $z_3 = 3e^{\pi i}$, d) $z_4 = 5e^{-\frac{\pi}{2}i}$

Rešenje:

a) $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{4}i} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i,$

b) $z_2 = e^{-\frac{2\pi}{3}i} = \cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{2\pi}{3} - i\sin\dfrac{3\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i,$

c) $z_3 = 3e^{\pi i} = 3(\cos\pi + i\sin\pi) = 3(-1+0) = -3,$

d) $z_4 = 5e^{-\frac{\pi}{2}i} = 5\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = 5\left(\cos\dfrac{\pi}{2} - i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = 5(0-i) = -5i.$

Kompleksni brojevi

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = |z_1|e^{\varphi_1 i} \quad \text{i}$$
$$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = |z_2|e^{\varphi_2 i}$$

su **jednaki** akko je

$$|z_1| = |z_2| \quad \wedge \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Konjugovano kompleksan broj broja $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{\varphi i}$ je $\overline{z} = |z|(\cos\varphi - i\sin\varphi) = |z|e^{-\varphi i}$.

Operacije sa kompleksnim brojevima u eksponencijalnom (trigonometrijskom) obliku

Neka je

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = |z_1|e^{\varphi_1 i} \quad \text{i}$$
$$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = |z_2|e^{\varphi_2 i}.$$

Tada je

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) = |z_1||z_2|e^{(\varphi_1+\varphi_2)i},$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)) = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{(\varphi_1-\varphi_2)i}.$$

Stepenovanje kompleksnog broja $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{\varphi i}$ se radi po formuli

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |z|^n e^{n\varphi i},\ n \in \mathbb{N}.$$

Korenovanje kompleksnog broja $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{\varphi i}$ se radi po formuli

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n}i},$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1,\ n \in \mathbb{N}.$$

Za kompleksan broj z važi da $\sqrt[n]{z}$ $(z \neq 0)$ ima n različitih vrednosti, koje predstavljene u kompleksnoj ravni obrazuju temena pravilnog n-tougla upisanog u kružnicu sa centrom u koordinatnom početku, poluprečnika $\sqrt[n]{|z|}$. Svako od tih temena može se dobiti od prethodnog temena njegovom rotacijom oko koordinatnog početka za ugao $\dfrac{2\pi}{n}$.

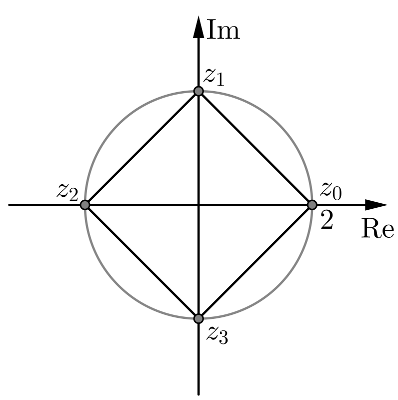
Primer: U skupu kompleksnih brojeva, izračunati $\sqrt[4]{16}$ u algebarskom obliku i rešenja predstaviti u kompleksnoj ravni.

Rešenje: Kako je $16 = 16e^{0i}$, to je

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16e^{0i}} = 2e^{\frac{0+2k\pi}{4}i} = 2e^{\frac{k\pi}{2}i},\ k = 0, 1, 2, 3.$$

Za svako k dobija se po jedno rešenje:

$$k = 0 \implies z_0 = 2e^{0i} = 2,$$
$$k = 1 \implies z_1 = 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,$$
$$k = 2 \implies z_2 = 2e^{\pi i} = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2,$$
$$k = 3 \implies z_3 = 2e^{\frac{3\pi}{2}i} = 2e^{-\frac{\pi}{2}i} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right) = -2i.$$



Primer: U skupu kompleksnih brojeva rešiti jednačinu

$$z^3 + 27 = 0.$$

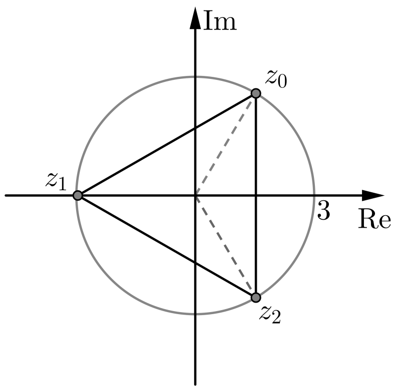
Rešenja napisati u algebarskom obliku i predstaviti u kompleksnoj ravni.

Rešenje: Jednačina $z^3 + 27 = 0$ ekvivalentna je sa $z = \sqrt[3]{-27}$. Kako je $-27 = 27e^{\pi i}$, to je

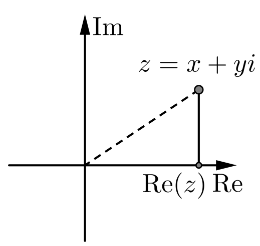
$$z = \sqrt[3]{27e^{\pi i}} = 3e^{\frac{\pi+2k\pi}{3}i},\ k = 0, 1, 2.$$

Za svako k dobija se po jedno rešenje:

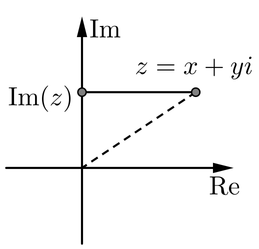
$$k=0 \implies z_0 = 3e^{\frac{\pi}{3}i} = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i,$$
$$k=1 \implies z_1 = 3e^{\pi i} = 3\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -3,$$
$$k=2 \implies z_2 = 3e^{\frac{5\pi}{3}i} = 3e^{-\frac{\pi}{3}i} = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i.$$



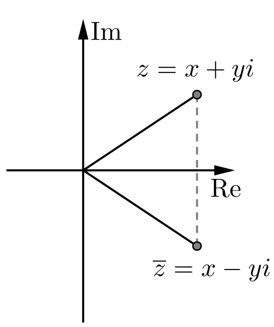
GEOMETRIJSKE INTERPRETACIJE U KOMPLEKSNOJ RAVNI

- 

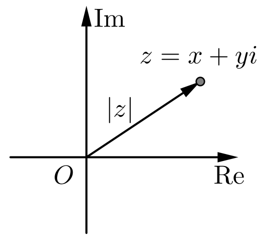
  Projekcija tačke z na realnu osu je $\mathrm{Re}\,(z)$.

- 

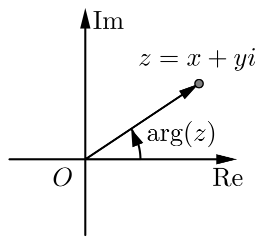
  Projekcija tačke z na imaginarnu osu je $\mathrm{Im}\,(z)$.

- 

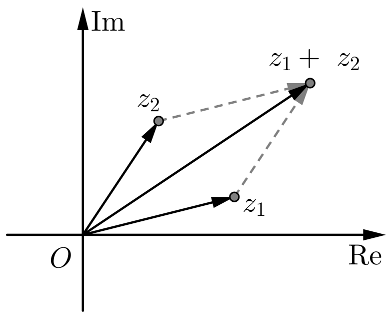
  Konjugovano kompleksan broj $\overline{z}$ je tačka koja je osnosimetrična tački z u odnosu na realnu osu.

- 

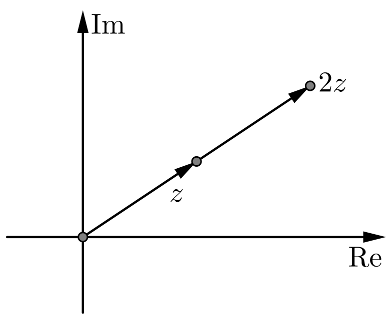
  Moduo kompleksnog broja z, $|z|$, je intenzitet vektora $\overrightarrow{Oz}$.

- 

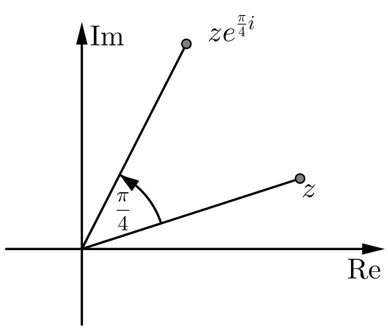
  Argument kompleksnog broja z, $\arg(z)$, je mera orijentisanog ugla kojeg zaklapaju pozitivan deo realne ose i vektor $\overrightarrow{Oz}$.

- 

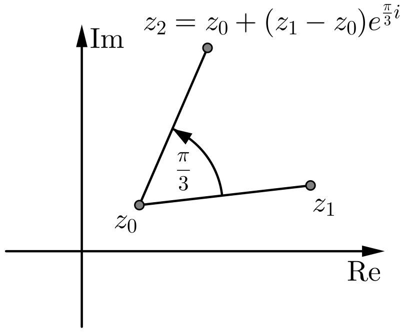
  Sabiranje kompleksnog broja z_1 sa kompleksnim brojem z_2 predstavlja translaciju vektora $\overrightarrow{Oz_1}$ za vektor $\overrightarrow{Oz_2}$.

- 

  Množenje kompleksnog broja z sa realnim brojem $\alpha \neq 0$ predstavlja homotetiju sa centrom u koordinatnom početku i koeficijentom α. (slika je data za $\alpha = 2$)

- 

  Množenje kompleksnog broja z sa kompleksnim brojem $e^{\theta i}$ predstavlja rotaciju broja z oko koordinatnog početka za ugao θ. (slika je data za $\theta = \frac{\pi}{4}$)

- 

Množenje kompleksnog broja $z_1 - z_0$ sa kompleksnim brojem $e^{\theta i}$ predstavlja rotaciju broja z_1 oko kompleksnog broja z_0 za ugao θ (slika je data za $\theta = \frac{\pi}{3}$), tj.

$$\rho_{z_0,\theta}\left(\overrightarrow{z_0 z_1}\right) = \overrightarrow{z_0 z_2} \iff z_2 - z_0 = (z_1 - z_0)\, e^{\theta i}.$$