BINARNE OPERACIJE

Neka je $A \neq \emptyset$.

Unarna operacija skupa A je svaka funkcija $' : A \longrightarrow A$. **Binarna operacija** skupa A je svaka funkcija $* : A^2 \longrightarrow A$.

Uobičajeno je da se za unarne operacije koriste simboli: $-$, $^{-1}$, $'$ i slično, a za binarne: $+$, $\cdot$, $\oplus$, $\odot$, $*$ i slično.

Takođe se umesto $*(a, b)$ piše $a * b$, na primer, umesto $+(1, 2) = 3$ piše se $1 + 2 = 3$.

Ako je $*$ binarna operacija nepraznog skupa A uređen par $\mathcal{A} = (A, *)$ se naziva **grupoid**.

Uređen par $(A, *)$ je grupoid ako je $A \neq \emptyset$ i operacija $*$ zatvorena u skupu A, tj. važi $\forall x, y \in A \Longrightarrow x * y \in A$.

Primer: Da li su sledeći uređeni parovi grupoidi?

$(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{N}, -)$, $(\mathbb{Z}, -)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, :)$, $(\mathbb{R}, :)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, :)$, $(\{-1, 0, 1\}, +)$, $(\{-2, -1, 0, 1, 2\}, \cdot)$.

Binarne operacije se obično zadaju (definišu) korišćenjem:

- Kejlijevih tablica.

  Pomoću Kejlijevih tablica se mogu zadati unarne i binarne operacije na konačnom skupu A. Na primer, neka je $A = \{0, 1, 2, 3\}$

$'$	
0	0
1	3
2	2
3	1

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	3
2	2	3	3	3
3	3	3	3	3

- Poznatih binarnih operacija .

  Pomoću poznatih operacija mogu se zadati nove unarne i binarne operacije. Na primer, na skupu $A = \{0, 1, 2, 3\}$ su sa

$$x' = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 4 - x, & x \neq 0 \end{cases} \qquad \text{i} \qquad x * y = min\{x + y, 3\}$$

  definisane iste operacije $'$ i $*$ koje su definisane Kejlijevim tablicama datim iznad.

Osobine grupoida.

Neka je A neprazan skup.

- Grupoid $(A, *)$ je asocijativan (polugrupa) ako $\forall x, y, z \in A$, $x * (y * z) = (x * y) * z$.
- Grupoid $(A, *)$ je komutativan ako $\forall x, y \in A$, $x * y = y * x$.
- Grupoid $(A, *)$ je idempotentan ako $\forall x \in A$, $x * x = x$.
- Grupoid $(A, *)$ je sa levim neutralnim elementom ako $\exists e \in A$, $\forall x \in A$, $e * x = x$.

  Grupoid $(A, *)$ je sa desnim neutralnim elementom ako $\exists e \in A$, $\forall x \in A$, $x * e = x$.

  Elemenat $e \in A$ je neutralni elemenat grupoida $(A, *)$ ako je on istovremeno i levi i desni neutralni elemenat.
- Neka je $e \in A$ levi neutralni element grupoida $(A, *)$. Ako za neki elemenat $x \in A$, $\exists x' \in A$, $x' * x = e$ tada je x' levi inverzni elemenat elementa x.

  Neka je $e \in A$ desni neutralni element grupoida $(A, *)$. Ako za neki elemenat $x \in A$, $\exists x' \in A$, $x * x' = e$ tada je x' desni inverzni elemenat elementa x.

  Neka je $e \in A$ neutralni element grupoida $(A, *)$. Ako za neki elemenat $x \in A$ postoji elemenat $x' \in A$ koji je istovremeno i levi i desni inverzni elemenat elementa x, tada je elemenat x' inverzni elemenat, elementa x.
- Grupoid $(A, *)$ je kancelativan ako $\forall x, y, z \in A$, $x * y = x * z \Longrightarrow y = z$ i $y * x = y * x \Longrightarrow y = z$ (levi i desni zakon kancelacije).

- Grupoid $(A,*)$ je sa levim nilpotentnim elementom ako $\exists\,\mathbf{0} \in A$, $\forall x \in A$, $\mathbf{0} * x = \mathbf{0}$.

  Grupoid $(A,*)$ je sa desnim nilpotentnim elementom ako $\exists\,\mathbf{0} \in A$, $\forall x \in A$, $x * \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

  Elemenat $\mathbf{0} \in A$ je nilpotentni elemenat grupoida $(A,*)$ ako je on istovremeno i levi i desni nilpotentni elemenat.

Ako postoji neutralni element, on je jedinstven.
Ako postoji inverzni element, on je jedinstven.

Ako je grupoid komutativan, levi neutralni element mora biti i desni, levi inverzni element mora biti i desni, levi nilpotentni element mora biti i desni, tj. pri ispitivanju neutralnog, nilpotentnog i inverznih elemenata dovoljno je ispitivati samo leve, odnosno samo desne.

Ako u asocijativnom grupoidu postoji i neutralni i inverzni elementi on je kancelativan.

Ako je neka operacija zadata preko poznatih binarnih i unarnih operacija, tada se pri ispitivanju njenih osobina koriste poznate osobine operacija preko kojih je definisana.

Neka je $\mathcal{A} = (A,*)$ grupoid, i neka je B neprazan podskup skupa A. Ukoliko je $\mathcal{B} = (B,*)$ grupoid, tj. ako je operacija $*$ zatvorena u skupu B, tada je $\mathcal{B}$ **podgrupoid** grupoida $\mathcal{A}$.

Operacija $*$ grupoida $\mathcal{B}$ je ustvari restrikcija operacije $*$ grupoida $\mathcal{A}$, ali je uobičajeno da se one isto označavaju.

Zakonitosti u kojima od kvantifikatora figuriše samo $\forall$ (na primer komutativnost i asocijativnost) prenose se sa grupoida na svaki njegov podgrupoid.

Primer: Neka je $A = [0,1]$ i $B = \{0,1\}$. Ispitati da li su uređeni parovi (A, min) i (B, min) grupoidi i ako jesu ispitati njihove osobine.

(A, min) jeste grupoid jer:

- $A \neq \emptyset$;
- zatvorenost: važi jer za $\forall x, y \in A$, $min\,(x,y) \in [x,y] \subseteq A$,

Za grupoid (A, min):

- asocijativnost: važi jer za $\forall x, y, z \in A$, $min\,(x, min\,(y,z)) = min\,(x,y,z) = min\,(min\,(x,y)\,, z)$;
- komutativnost: važi jer za $\forall x, y \in A$, $min\,(x,y) = min\,(y,x)$;
- idempotentnost: važi jer za $\forall x \in A$, $min\,(x,x) = x$;
- neutralni elemenat: je 1 jer je za $\forall x \in A$, $min\,(1,x) = x$;
- inverzni elementi: samo elemenat 1 ima inverzni i to je sam sebi inverzan, tj. važi $min\,(1,1) = 1$, ostali elementi nemaju inverzne;
- nilpotentni elemenat: je 0 jer je za $\forall x \in A$, $min\,(0,x) = 0$;
- kancelativnost: ne važi jer je na primer $min\,(0,1) = min\,(0,0)$ a $0 \neq 1$.

Skup B je neprazan podskup skupa A, i on je zatvoren za operaciju min jer $\forall x, y \in B$, $min\,(x,y) \in \{x,y\} \subseteq B$, pa je (B, min) grupoid, što znači da je (B, min) podgrupoid grupoida (A, min). Kako je operacija min u skupu B restrikcija operacije min u skupu A, i kako 1 i 0 pripadaju skupu B, u grupoidu (B, min) važe potpuno iste osobine kao i u grupoidu (A, min).

Primer: Ispitati da li su uređeni parovi $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $((0,\infty), \cdot)$, $((0,1], \cdot)$, $((0,1), \cdot)$, $(\{0,1\}, \cdot)$, $(A, \cdot)$ gde je $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$ i $(\mathbb{I}, \cdot)$ grupoidi i ako jesu ispitati njihove osobine. Odrediti koji su grupoidi podgrupoidi nekih drugih ovde posmatranih grupoida.

Svi navedeni skupovi su neprazni.

$\cdot$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$(0,\infty)$	$(0,1]$	$(0,1)$	$\{0,1\}$	A	$\mathbb{I}$
grupoid	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2 \notin \mathbb{I}$
asocijativnost	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	/
komutativnost	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	/
idempotentnost	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	/
neutralni element	1	1	1	1	$-$	1	$-$	/
inverzni elementi	0 nema, ostali $+$	$+$	$+$	1 ima, ostali -	$-$	1 ima, 0 nema	$-$	/
nilpotentni element	0	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$-$	/
kancelacija	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	/

Svaki od posmatranih grupoida je sam sedi podgrupoid i osim toga:

- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R}, \cdot)$;
- $((0,\infty), \cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R}, \cdot)$ i $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$;
- $((0,1], \cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ i $((0,\infty), \cdot)$;
- $((0,1), \cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $((0,\infty), \cdot)$ i $((0,1], \cdot)$;
- $(\{0,1\}, \cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R}, \cdot)$;
- $(A, \cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $((0,\infty), \cdot)$, $((0,1], \cdot)$ i $((0,1), \cdot)$.

Ako je operacija $*$ na nepraznom skupu A zadata Kejlijevom tablicom, neke od osobina se mogu proveriti "vizuelno" uočavanjem određenog, specifičnog, rasporeda u tablici.

- zatvorenost: u tablici se javljaju samo elementi skupa A;
- komutativnost: tablica je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu;
- idempotentnost: na glavnoj dijagonali su poređani elementi skupa A onako kako su poređani u graničnoj vrsti i koloni č
- neutralni elemenat: $e \in A$ je levi neutralni elemenat ako je vrsta elementa e jednaka graničnoj vrsti, a $e \in A$ je desni neutralni elemenat ako je kolona elementa e jednaka graničnoj koloni;
- inverzni elemenat: ako je e levi neutralni elemenat, tada postoji levi inverzni elemenat x' elementa x ukoliko se u koloni elementa x pojavljuje bar jednom neutralni elemenat e, a ako je e desni neutralni elemenat, tada postoji desni inverzni elemenat x' elementa x ukoliko se u koloni elementa x pojavljuje bar jednom neutralni elemenat e.
  Svaki elemenat ima svoj inverzni akko se elemenat e pojavljuje tačno jednom u svakoj vrsti i koloni i simetrično je raspoređen odnosu na glavnu dijaginalu.
- nilpotentni element: element $\mathbf{0}$ je nilpotentni element ako su cela njegova vrsta i kolona popunjeni sa njim samim;
- asocijativnost i kancelacija se ne mogu ispitivati pomoću tablice.

Primer:* Neka je $A = \{a, b, c, d\}$, i neka je operacija $*$ skupa A zadata Kejlijevom tablicom

$$\begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & a & b \\ b & b & b & b & b \\ c & a & b & c & d \\ d & b & b & d & d \end{array}.$$

- zatvorenost: u tablici se javljaju samo elementi skupa $A \neq \emptyset$, pa $(A, *)$ jeste grupoid;
- komutativnost: tablica je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu pa grupoid $(A, *)$ jeste komutativan;
- idempotentnost: na glavnoj dijagonali su poređani elementi skupa A baš onako kako su poređani u graničnoj vrsti i koloni pa grupoid $(A, *)$ jeste idempotentan;

- neutralni elemenat: elemenat $c \in A$ je neutralni elemenat grupoida $(A, *)$ jer je njegova vrsta jednaka graničnoj vrsti, a njegova kolona jednaka graničnoj koloni;
- inverzni elemenat: osim elementa c koji je sam sebi inverzan ($c * c = c$) ostali elementi nemaju inverzne;
- nilpotentni elemenat: elemenat $b \in A$ je nilpotentni elemenat jer se cela njegova vrsta i kolona popunjeni sa njim samim;
- grupoid $(A, *)$ nije kancelativan jer je recimo $ba = bd$ a $a \neq d$ (što se vidi iz tablice ali se nije moglo zaključiti na osnovu nje);
- da bi se ispitala asocijativnost grupoida $(A, *)$ potrebno je proveriti jednakost $x*(y*z) = (x*y)*z$ za sve $x, y, z \in A$, što bi bilo $4^3 = 64$ slučaja. Kako je c neutralni elemenat, ako bar jedna promenljiva (x, y ili z) ima vrednost c, jednakost $x*(y*z) = (x*y)*z$ će biti zadovoljena jer c kao neutralni elemenat ne utiče na rezultat operacije. Sad ostaje da se proveri još $3^3 = 27$ slučajeva. Kako je b nilpotentni elemenat, ako bar jedna promenljiva (x, y ili z) ima vrednost b, jednakost $x*(y*z) = (x*y)*z$ će biti zadovoljena jer će izrazi na levoj i desnoj strani jednakosti imati vrednost b. Ostaje da se proveri još $2^3 = 8$ slučajeva. Ovo se može proveriti direktno očitavanjem iz tablice

$$\begin{array}{ll} a*(a*a) = a = (a*a)*a, & a*(a*d) = b = (a*a)*d, \\ a*(d*a) = b = (a*d)*a, & a*(d*d) = b = (a*d)*d, \\ d*(a*a) = b = (d*a)*a, & d*(a*d) = b = (d*a)*d, \\ d*(d*a) = b = (d*d)*a, & d*(d*d) = d = (d*d)*d, \end{array}$$

  pa grupoid $(A, *)$ jeste asocijativan.

Neka su $(G, *)$ i $(H, \circ)$ grupoidi kod kojih je $G = \{a, b\}$ i $H = \{A, B\}$, a operacije $*$ i $\circ$ su definisane sledećim Kejlijevim tablicama

$$\begin{array}{c|cc} * & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & b & a \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \circ & A & B \\ \hline A & A & B \\ B & B & A \end{array}.$$

Može se uočiti da se grupoidi $(G, *)$ i $(H, \circ)$ razlikuju samo po simbolu operacije i po "veličini slova", tj. može se reći da je grupoid $(H, \circ)$ dobijen od grupoida $(G, *)$ tako što su u grupoidu $(G, *)$ preoznačeni elementi i operacija. Pri tome je struktura preoznačenog grupoida $(H, \circ)$ ostala ista kao i struktura polaznog grupoida $(G, *)$. U ovom slučaju kaže se da su ta dva grupoida ista (jednaka) do na izomorfizam, što se definiše na sledeći način.

Neka su $\mathcal{G} = (G, *)$ i $\mathcal{H} = (H, \circ)$ grupoidi, i neka je $h : G \longrightarrow H$. Funkcija h je **homomorfizam** grupoida $\mathcal{G}$ u grupoid $\mathcal{H}$ ako

$$\forall x, y \in G, h(x*y) = h(x) \circ h(y).$$

Ako je homomorfizam h bijektivna funkcija tada se funkcija h naziva **izomorfizam**, i kaže se da je grupoid $\mathcal{G}$ izomorfan sa grupoidom $\mathcal{H}$, što se zapisuje sa $\mathcal{G} \simeq \mathcal{H}$.

Primer: Funkcija $\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ je izomorfizam grupoida $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ u $(\mathbb{R}, +)$ jer je funkcija ln bijekcija i važi

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \quad \ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y.$$

Izomorfizam "prenosi" osobine sa jednog grupoida na drugi. Ako je $h : G \longrightarrow H$ izomorfizam grupoida $\mathcal{G} = (G, *)$ u grupoid $\mathcal{H} = (H, \circ)$, tada svaka "zakonitost" koja važi u $\mathcal{G}$ važi i u $\mathcal{H}$, tj.

- ako je grupoid $\mathcal{G}$ asocijativan tada je i grupoid $\mathcal{H}$ asocijativan;
- ako je grupoid $\mathcal{G}$ komutativan tada je i grupoid $\mathcal{H}$ komutativan;
- ako postoji neutralni element $e_1 \in G$ u grupoidu $\mathcal{G}$ tada je $e_2 = h(e_1) \in H$ neutralni elemenat grupoida $\mathcal{H}$;
- ako su $x \in G$ i $y \in G$ međusobno inverzni elementi u grupoidu $\mathcal{G}$ tada su $h(x) \in H$ i $h(y) \in H$ međusobno inverzni elementi u grupoidu $\mathcal{H}$.

Kako izomorfizam "prenosi" sve osobine iz jednog grupoida u drugi najčešće se koristi na sledeći način: Ako je potrebno ispitati osobine grupoida $(H, \circ)$, dovoljno je pronaći izomorfizam između njega i nekog grupoida čije osobine su već poznate pa će zbog izomorfizma one važiti i u $(H, \circ)$.

Ako su grupoidi $\mathcal{G} = (G, *)$ i $\mathcal{H} = (H, \circ)$ definisani Kejlijevim tablicama i ako je $h : G \longrightarrow H$ izomorfizam grupoida $\mathcal{G}$ u grupoid $\mathcal{H}$ tada, ako se u tablici grupoida $\mathcal{G}$ svaki elemenat $x \in G$ zameni elementom $h(x) \in H$ dobija se tablica grupoida $\mathcal{H}$, a važi i obrnuto, ako je $h : G \longrightarrow H$ bijekcija i ako se tablica grupoida $\mathcal{H}$ može dobiti tako što se u tablici grupoida $\mathcal{G}$ svaki elemenat $x \in G$ zameni elementom $h(x) \in H$ onda je h izomorfizam.

Primer: Neka je $B = \{1, 2, 3, 6\}$ i na skupu B neka je deta operacija "najmanji zajednički sadržalac" ($NZS\,(x, y)$ je najmanji elemenat skupa B koji je deljiv i sa x i sa y).

Na osnovu Kejlijeve tablice

NZS	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

može se zaključiti

- zatvorenost: u tablici se javljaju samo elementi skupa $B \neq \emptyset$, pa (B, NZS) jeste grupoid;
- komutativnost: tablica je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu pa grupoid (B, NZS) jeste komutativan;
- idempotentnost: na glavnoj dijagonali su poređani elementi skupa A baš onako kako su poređani u graničnoj vrsti i koloni pa grupoid (B, NZS) jeste idempotentan;
- neutralni elemenat: elemenat $1 \in B$ je neutralni elemenat grupoida (B, NZS) jer je njegova vrsta jednaka graničnoj vrsti, a njegova kolona jednaka graničnoj koloni;
- inverzni elemenat: osim elementa 1 koji je sam sebi inverzan $(1 * 1 = 1)$ ostali elementi nemaju inverzne;
- nilpotentni elemenat: elemenat $6 \in B$ je nilpotentni elemenat jer se cela njegova vrsta i kolona popunjeni sa njim samim;
- grupoid $(B, *)$ nije kancelativan jer je recimo $NZS\,(6, 1) = NZS\,(6, 2)$ a $1 \neq 2$;
- asocijativnost je ovde veoma teško pokazati i zbog toga će biti iskorišćen izomorfizam. Ako se pogleda Primer* može se uočiti da se do sad ispitane osobine grupoida (B, NZS) poklapaju sa osobinama grupoida $(A, *)$ iz Primera*. Funkcija $f : A \longrightarrow B$ data sa
$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
je očigledno bijekcija.
Kada se u tablici

$*$	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	b	b	b	b
c	a	b	c	d
d	b	b	d	d

zameni svako pojavljivanje slova a brojem 3, slova b brojem 6, slova c brojem 1 i slova d brojem 2 dobija se

$*$	3	6	1	2
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6
1	3	6	1	2
2	6	6	2	2

.

Kada se zatim preslažu kolone i vrste dobija se baš

NZS	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

što znači da je funkcija f izomorfizam grupoida $(A, *)$ u grupoid (B, NZS) .

Kako je u Primeru* dokazano da je $(A, *)$ asocijativan grupoid zbog ovog izomorfizma sledi da je i grupoid (B, NZS) asocijativan. Sve ostale osobine grupoida (B, NZS) takođe slede iz izomorfizma i nisu morale biti posebno ispitivane.