

統計期末報告

（無限流設定，海底總動員背景，以上改編自本人真實夢境）

水藍色的天空、漂浮著的泡泡，滿天滿地遊走的魚兒。就像是陽光灑在海面上，波光粼粼，天空的顏色也無時無刻不變化著。附近一棵棵海草隨風搖擺，還有些小珊瑚，為這個景色增添了些色彩。小明坐在地上抬頭仰望，似乎還沒反應過來這裡到底是怎麼回事。

在他周圍還有一群跟他差不多大、20歲上下的男女，散佈在這片廣大的地方。有的跟他一樣，呆坐在滿是石頭的地上，也有些人已經聚集在一起討論這個地方的奇妙、以及為什麼大家會出現在這裡。

「嘿！你好。」一個穿著羽毛衣的少年微笑著走了過來，「我叫鵜鵜。」他蹲了下來，又問：「你知道這裡是什麼地方嗎？」

小明搖了搖頭。

突然，一隻大魚衝了出來。大大的眼睛、白色的條紋、橘裡透紅的身子，像極了海底總動員裡放大版的馬林。牠一邊游一邊緊張兮兮地問「有人看到我兒子嗎？有人看到我兒子嗎？」

「有人～看到他兒子嗎？長得就跟他一樣～」又一隻看起來醉醺醺的魚游來，長得就像海底總動員的多莉，語氣也一模一樣。

「那兩隻魚是在說話嗎？」

「是吧…」

所有人一瞬間呆住了，不知對於這個情形該如何反應。

「抓我兒子的人就是抓你們來的人啊！」神奇馬林有些抓狂的搔了搔頭，「快告訴我他們到底往什麼地方去了！」說完就站到中間不動了，旁邊橫著個告示牌寫著「回答錯誤將永久留存於此。」

留在這裡？大家似乎都被這句話嚇唬住了。

「這是要我們回答的意思嗎？」

「現在是什麼狀況？」

大家一時之間楞在了原地，一群人你看我、我看你。

「去向？」鵜鵜喃喃自語道，「我記得當初大家醒來的地方都不一樣。」

「跟這個有關係嗎？」不遠處有人抓了抓頭，「我在那顆海草旁邊醒來。」

「我是在這！」

「那裡。」

鵜鵜突然轉過頭來，手裡不知為何多出了一隻羽毛筆、再順手撿起一塊石頭，道：「我們來蒐集一下大家的資訊吧。」

接著他就積極地跑了出去，不一會兒就把大家到來時的位置以及大概清醒過來的時間記錄了下來，還順手紀錄了附近比較明顯的地標當作參考。

不一會兒他就又飛奔了回來。

「寫好啦～」所有人都聚集了過來，一起盯著那張簡陋的示意圖看。

「我們是不是可以假設大家從被抓來到甦醒的時間是一樣的。那如果 A 比 B 早醒來，就表示 A 比 B 早被抓來，那就推測犯人是從 A 地往 B 地移動的。」

「快看！如果以這個彩色的石頭為界，」他說完指了一下不遠處一塊散發著五彩繽紛光芒的石頭說道：「界線以上的人甦醒的時間點似乎比以下的人早。」

「那要怎麼確定是不是真的有關聯呢？」

小明一聽，終於有自己能發揮的地方了。他左看看右看看，發現沒人出聲後，舉起手來，才終於說出口：「可以讓我試試嗎？」

他拿起已經整理好的表格，上面寫著以下資訊：

(1)

最後有印象的時間（晚上 12 點為 0，單位：分）

石頭以上	石頭以下
n 上 = 12	n 下 = 8
s 上 = 10	s 下 = 15
\bar{x} 上 = 110	\bar{x} 下 = 150

(1a) 請寫出此檢定之虛無假設與對立假設

(1b) 請指出此假設檢定之拒絕區域為何($\alpha = 0.10$)

(1c) 請寫出(並求算出) 此檢定之檢定統計量

(1d) 請問是否可以以這顆石頭作為分界點去判斷方向？如果可以，犯人應該是往何方去了

答：

(1a) 虛無假設為 $H_0: \sigma^2_{\text{石頭以上}} = \sigma^2_{\text{石頭以下}}$

對立假設則為 $H_1: \sigma^2_{\text{石頭以上}} \neq \sigma^2_{\text{石頭以下}}$

(1b) 拒絕區域 $C = \{F | F > F_{0.05}(7, 9) \text{ 或 } F < 1/F_{0.05}(9, 7)\} = \{F | F > 3.29 \text{ or } F < 1/3.68 \approx 0.272\}$

(1c) $10^2 / 15^2 = 2/3$

(1d) 沒有足夠證據推翻 H_0 ，推測可以用此依據分類，石頭以上平均比石頭一下低，推測犯人應該是往石頭下方去了。

眼看著沒有人提出更好的答案，大家只好死馬當活馬醫地將答案交了出去。

一瞬間，所有在天上游來游去的魚兒都衝了下來。

一直站在中間的、跟馬林長很像的那位又活動了起來，「先恭喜各位過了第一關，作為獎勵、也是下一關的場所，魚兒們會帶你們前往下個地點。」

「恭喜過關！欸，你還記得我要說什麼嗎？到底是什麼？想不起來算啦～」多莉照常發揮。

「先給我解釋清楚這裡是什麼地方啊！」憤怒的人們怒吼著，畢竟突然就被帶到了一個奇妙的世界也是蠻驚悚的。不過，還沒等大家反應過來，他們一個人十幾隻魚就被帶走了。

「快點跟上！我要去找尼莫！」馬林的聲音從遠方傳來。

眾人被帶到了一個巨大的室內溫泉區，放眼望去有著大大小小的水坑，上方表示著各種不同的溫度。昏暗的燈讓一切都有了氣氛，再加上眾人緊張的神情，彷彿下一秒就會有人跳出來。

「各位你好啊，歡迎來參加溫泉派對！」果然，三隻鯊魚從溫泉區裡蹦了出來，登時所有人都往後退了一步。這三隻鯊魚也跟海底總動員的那三隻一模一樣。

「放心，不咬人不咬人。」其中一個興奮的大叫，「人類跟鯊魚是朋友！」

「我們宣示過了，絕對不會失信的！」

大家半推半就地就這麼進去了，大門也在大家進去之後隨之關閉。小明發現，這裡的人跟剛剛的不一樣，似乎不是所有通過第一關的人都會被帶到這裡，而且還多了許多新面孔，看來被帶進來的人不只這些呢。

小明暗中觀察了一下，發現每個人手中都多了一行數字，大小不一但差別不大。或許…這跟剛剛的第一關有關係？小明一邊思索，一邊暗暗記下所有人的數字，又透過觀察大家的互動狀況將他們分成了三個群體。

(2)

分數

第一批：118, 113, 140, 123, 131

第二批：110, 109, 114, 110, 100, 105

第三批：90, 100, 97, 105

他想知道不同區域的人的分數有無差異

(1a)請建立 ANOVA Table

(1b)請檢定區域別是否影響分數($\alpha = 0.05$)

答：

(1a) ANOVA Table

Source	SS	DF	MS	F
年齡	1020	2	510	22.01439
誤差	278	12	23.166667	
Total	1298	14		

Solution

$$Y_{ij} = \begin{bmatrix} 118 & 113 & 140 & 123 & 131 \\ 110 & 109 & 114 & 110 & 105 \\ 90 & 100 & 97 & 105 \end{bmatrix}$$

$$Y_{ij} - \bar{Y}_{\cdot j} = \begin{bmatrix} -1 & -6 & -9 & 4 & 12 \\ -3 & -4 & 1 & 0 & -3 \\ -8 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Y}_{\cdot j} = \begin{bmatrix} 119 & 119 & 119 & 119 & 119 \\ 113 & 113 & 113 & 113 & 113 \\ 98 & 98 & 98 & 98 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Y}_{\cdot j} - \bar{Y} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 13 & 13 & 13 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} 111 & 111 & 111 & 111 & 111 \\ 111 & 111 & 111 & 111 & 111 \\ 111 & 111 & 111 & 111 \end{bmatrix}$$

$$\sum \sum (Y_{ij} - \bar{Y})^2 = \sum \sum (Y_{ij} - \bar{Y}_{\cdot j})^2 + \sum \sum (\bar{Y}_{\cdot j} - \bar{Y})^2$$

$$ESS = \sum \sum (Y_{ij} - \bar{Y}_{\cdot j})^2 = 1^2 + 6^2 + 9^2 + 4^2 + 12^2 = 278$$

$$FSS = \sum \sum (\bar{Y}_{\cdot j} - \bar{Y})^2 = (8^2) \times 5 + (2^2) \times 6 + (13^2) \times 4 = 1020$$

① $H_0 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
 $H_1 = H_0$ 不為真

② $\alpha = 0.05$, $N_1 = 5$, $N_2 = 6$, $N_3 = 4$

③ 決定檢定統計量與虛無分配

④ 決策法則

$F = 22.01439$

Reject H_0 ，區域影響分數

「喔，看來你發現啦。」鯊魚三兄弟的鯊小弟從小明後面冒出頭來，「這個分數是你們第一關獲得的分數，答得快的分數就越高，當然貢獻度也是。」說完看了看小明手上的數字，「140分，蠻高的嘛。」

「回去的條件跟分數有關？」

「你猜對啦！分數低的那些都被變成魚關在這裡了。」他笑了一下，「所以要努力闖關啊。」

這時前方突然響起一聲慘叫，所有人往前一看，原來是有一個人沒站穩不小心摔了一跤。

「完了。」鯊小弟大叫：「大家快跑啊！」只見鯊大哥兩眼一紅，張大著嘴、口水直流，『咻』一下就往前竄了過去。受傷那人一被咬上就消失得無影無蹤，嚇得大家開始亂竄。越多人跑就有越多人受傷，眼看著人一個一個消失。

「二哥！這樣下去人會被吃光吧，怎麼辦？」兩兄弟一面阻止大哥發狂，一面討論著。

「我還是先把開門條件跟大家講了吧，小弟，幫我撐十秒！」

鯊二哥說話了。

(3)

「這裡有 200 個溫泉池，每個池子的水溫都不一樣。大門開的條件是這裡的池子裡 10%是 44 度、15%是 42 度、20%是 40 度、35%是 38 度、5%是 36 度、15%是冷泉，可以接受顯著水準 5%。只要大門開，空氣流動，讓血的氣味散去，大哥就會恢復正常了。」

沒被追著跑的人們開始一個一個地調整，但因為沒有總指揮的關係，再加上大家神經緊繃，每個人都手忙腳亂地調了些，導致所有溫泉池溫度的比例全部都被打散了。小明停了下來，或許現在已經達成他們要的比例了？畢竟調一個池子要耗費許多時間，很多人可撐不了那麼久。他開始計算：

溫泉度數	池子數
44 度	18
42 度	28
40 度	44
38 度	65
36 度	8
冷泉	37

請在 5% 的顯著水準下，檢定現在池子的溫度是否符合規定？(請詳細寫出檢定過程，包括假設、檢定統計量、決策法則、及結論，否則不予計分)

答：

H_0 = 池子比例跟要求一樣

H_1 = H_0 不為真

拒絕區域為 $C = \{\chi^2 > \chi^2_{0.05}(5)\} = \{\chi^2 > 11.07\}$

拒絕區域為 $C = \{\chi^2 > \chi^2_{0.05}(5)\} = \{\chi^2 > 11.07\}$

檢定統計量

$$\chi^2 = \frac{(18-20)^2}{20} + \frac{(28-30)^2}{30} + \frac{(44-40)^2}{40} + \frac{(65-70)^2}{70} + \frac{(8-10)^2}{10} + \frac{(37-30)^2}{30}$$
$$= 3.12381 < 11.07$$

我們沒有足夠證據推翻 H_0 ，可以知道我們現在已經符合要求。

「各位，我們達成目標了！」小明大聲呼喊著，「快點跑去門口吧！」

那些前隊友知道他的統計能力，一聽就跟著跑了過去。而剩下的那些人也不願自己被留在裡面，一個都不剩地也全都跟了過來。眾人手抵住大門，奮力

一推。外邊新鮮的空氣終於灌了進來，衝散了滿屋的血味。這一看才發現，竟只剩下 8 個人。

此時的鯊大哥恢復了原狀。

「剛剛真的很抱歉啊。」鯊大哥說：「我控制不住自己的慾望。現在不會了！」

「你們趕快前往下一關吧。」另一隻鯊魚指了指後面，「海龜大哥來接你們了。」

所有人逃命似的衝到海龜們的背上。

「坐穩嘍，朋友們！」海龜們一臉愜意地說，「出發！」烏龜們瞬間衝了出去，座上的人們就像坐上雲霄飛車一樣。

終於，他們到了最後一關。

眼前是十幾個形狀各異的巨大滑水道，由水中的漩渦形成，在遠處匯集成一道光芒，一旦進去就出不來了。這裡也是目前為止看到過最明亮的地方，接近水道處甚至能看見所謂的聖光。

載著大家來的烏龜們也向上飛去，進入到各個水道中。每個水道都可以看到他們嬉戲的身影。

「這就是你們回家的路。」一個看上去像長老烏龜的龜遊向大家，一邊說明，「你們可以請海龜幫忙，帶你們穿過水道。只要找到對的海龜，就能回家了。但相反，上錯龜就下不來了。請謹慎挑選啊。」說完又慢悠悠地遊走了。

「什麼情況？」附近的人嘀咕著。

這次又是一群不同的面孔，再加上這最後一關是個人挑戰賽，走的走散的散，沒一會兒場上的人就各自散開了。

(4)

小明發現，海龜們的移動範圍分成了三個區域，且個個身上都有著不同大小的數字。

或許這三個區域是適用於不同人的，如果能看出哪個區域的海龜才是適合自己的，那就可以縮短不少時間。

他觀察以後就將資料記錄下來：(單位：隻)

分數	第一團	第二團	第三團
500 分以下	60	15	15
500-1000	25	20	75
1000 以上	15	65	15

請在 5% 的顯著水準下，檢定三個群體的海龜分數的比例是否相同?(請詳細寫出檢定過程，包括假設、檢定統計量、決策法則、及結論，否則不予計分)($\alpha = 0.05$)?

答：

同質性問題

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 \frac{(n_{ij} - \frac{n_i n_j}{N})^2}{\frac{n_i n_j}{N}} \rightarrow \chi^2((3-1)(4-1))$$

⇒ 虛無分配為 6 個自由度的卡方分配
($\chi^2(6)$)

— H_0 = 海龜分數比例一樣

H_1 = H_0 不為真

— $\alpha = 0.05$

— $C = \{ \chi^2 > \chi^2_{0.05}(4) \} = \{ \chi^2 > 9.49 \}$

— 檢定統計量

$$\begin{aligned} \chi^2 = & \frac{(60-30)^2}{30} + \frac{(15-30)^2}{30} + \frac{(15-30)^2}{30} \\ & + \frac{(25-40)^2}{40} + \frac{(20-40)^2}{40} + \frac{(15-40)^2}{40} \\ & + \frac{(15-30)^2}{30} + \frac{(65-30)^2}{30} + \frac{(15-30)^2}{30} = 147.08333 \end{aligned}$$

在 $\alpha = 0.05$ 下，三團海龜們的分數比例不同。

「嗨！又遇見啦。」小明正好算完抬頭時，看到他在第一關認識的鵜鵜向他走了過來。

「好久不見。」

「看到那邊帶著小海龜們的大海龜沒有？」

小明點點頭。

「我剛剛看了一下，他們身上都有著不同的數字，就跟我們手上的數字長得一模一樣。你說，會不會有關聯呢？」

線性回歸？小明想起老海龜說的每個人都有相對應的海龜。

「我來試著算算看吧。」

「嘿嘿，我已經把數字都記錄下來了，用吧用吧。」鵜鵜說著就從口袋裡掏出了顆寫滿筆記的石頭。

試算小海龜身上數字(X)與大海龜身上數字(X)之間的關係。整理資料如下：

大海龜	520	550	640	650	720	750	840	850
小海龜	300	300	350	350	400	400	450	450

(5a) 請使用最小平方法找出可以從迴歸方程式 $\hat{Y} = b_0 + b_1X$ 。

(5b) 試求判定係數，並說明其意義。

(5c) 試檢定「小海龜分數越高，則大海龜分數愈高」的假設 ($\alpha = 0.05$)

(5d) 若小明的分數為 435，請預測他相對應的海龜？並求其 95% 預測區間。

答：

小海龜 分數	大海龜 分數	$X_i - \bar{x}$	$Y_i - \bar{y}$	$(X_i - \bar{x})^2$	$(Y_i - \bar{y})^2$	$(X_i - \bar{x})(Y_i - \bar{y})$
300	520	-75	-170	5625	28900	12750
300	550	-75	-140	5625	19600	10500
350	640	-25	-50	625	2500	1250
350	650	-25	-40	625	1600	1000
400	720	25	30	625	900	750
400	750	25	60	625	3600	1500
450	840	75	150	5625	22500	11250
450	850	75	160	5625	25600	12000
\bar{x}	\bar{y}			S_{xx}	S_{yy}	S_{xy}
375	690			25000	105200	51000

(4a) 求迴歸線

$$b_1 = S_{xy} / S_{xx} = 2.04$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = -75$$

$$y = 2.04x - 75$$

(4b)

$$R^2 = RSS / TSS = S_{xy}^2 / (S_{xx} * S_{yy}) = 0.98897$$

說明有足夠的解釋力

(4c)

(4c) 假設檢定

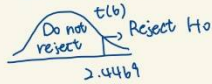
① $H_0: \beta_1 \leq 0$ $H_1: \beta_1 > 0$

② $\alpha = 0.05$, $n = 8$

③ 檢定統計量與 null dist

$$\frac{b_1 - B_1}{\frac{s}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}}} \sim t(n-2) = 6$$

④ 決策法則



④ 先計算 S

我們用 $MSE = \frac{ESS}{n-2} = \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}$ 來計算 S^2

$$ESS = TSS - RSS = S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} = 109200 - 104040 = 1160$$

$$MSE = S^2 = \frac{1160}{6} = 193.33 \quad S = 13.9$$

$$\frac{b_1 - B_1}{\frac{s}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}}} = \frac{1}{\frac{13.9}{\sqrt{25000}}} = 11.3751$$

Reject H_0 ，說明小海龜分數越高，則大海龜分數愈高

(4d)

(4d)

$$\hat{y} = 2.04x - 75 \quad X_0 = 435$$

$$\Rightarrow \hat{y}_0 = 2.04 \times 435 - 75 = 812.4$$

信賴區間

$$\hat{y}_0 \pm t(n-2) \cdot S \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$

$$= 812.4 \pm 2.4469 \cdot 13.9 \cdot \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{(435 - 375)^2}{25000}}$$

$$\approx (794.75965, 830.04035) \quad \text{with } 17.64035$$

就著這兩筆資料，兩人順利地找到了合適的海龜先生幫忙。

「有緣再見啦！」鵜鵜說完這話，爬上自己的海龜，向小明招了招手後，『咻』一道光點就消失在盡頭，似乎隱約看到了一雙潔白的翅膀。

「我也該走了。」小明坐上海龜，消失在一片光暈中。