

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ



КУРСОВАЯ РАБОТА
МЕТОДОЛОГИЯ РАБОТЫ

Оптимизация агрегирования
котировок криптовалют с
разных торговых площадок

СТУДЕНТ:
ШМЕЛЕВА А.Р.

НАУЧНЫЕ
РУКОВОДИТЕЛИ:
ГАРАЩУК Г.В.
КУЧИН И.И.

Ключевые слова: агрегация, арбитраж, система цен

Аннотация: Описаны методы и подходы, использующиеся при реализации агрегирования котировок криптовалют, а также предложен авторский способ усреднения.

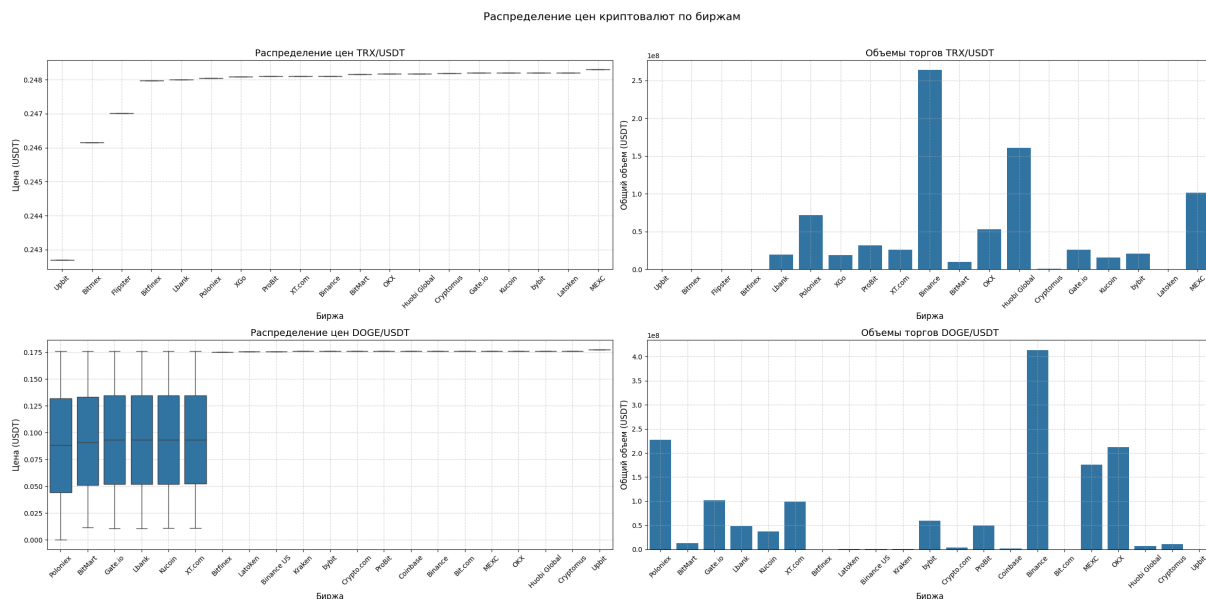
Содержание

1	Введение	2
2	Обзор литературы	3
3	Описание данных	4
4	Методы агрегации цен	7
4.1	Средневзвешенная цена (VWAP — Volume-Weighted Average Price)	7
4.1.1	Результаты на реальных данных	7
4.2	Медианное значение	9
4.2.1	Результаты на реальных данных	11
4.3	Оценка надежности (Trust Score)	12
4.3.1	Результаты на реальных данных	14
4.4	Популярные методы расчета	15
5	Сравнение результатов для разных валют	15
6	Агрегирование котировок через построение арбитражно-несовместимой системы цен	17
7	Формальная постановка задачи	19
8	Проблема множественности циклов	21
8.1	Результаты на реальных данных	25
9	Заключение	26
9.1	Дальнейшее развитие работы	27
10	Приложение	29

1 Введение

В последние годы рынок криптовалют активно развивается, привлекая внимание как индивидуальных инвесторов, так и крупных институциональных игроков. Одной из особенностей криптовалютных рынков является их высокая фрагментированность: большое количество независимых торговых площадок приводит к появлению различий в ценах одного и того же актива в разное время и на разных биржах.

Визуализация существенных ценовых различий на одни и те же криптовалютные пары (в качестве примера взяты DOGE/USDT, TRX/USDT):



Такие расхождения в котировках создают арбитражные возможности — ситуации, в которых можно получить безрисковую прибыль за счёт несовпадения цен. С одной стороны, арбитраж способствует выравниванию цен на рынках, а с другой — наличие неустранённых арбитражных возможностей указывает на недостаточную эффективность рынка и может искажать процесс агрегирования информации о реальной стоимости активов.

В условиях высокой волатильности, различных уровней ликвидности на биржах и отсутствия централизованного механизма синхронизации цен задача корректного агрегирования котировок становится крайне актуальной. Простые методы, такие как среднее арифметическое или медиана цен, часто оказываются недостаточными для устранения арбитражных возможностей и получения объективной оценки стоимости актива.

Цель данной работы — разработать и реализовать метод агрегирования котировок криптовалют, основанный на построении арбитражно-несовместимой системы цен, а также сравнить его с классическими подходами. Предлагаемый подход позволяет определить справедливые цены валют так, чтобы в результирующем графе обменных курсов отсутствовали циклы, обеспечивающие безрисковую прибыль. В рамках работы

также рассматриваются методы сбора данных с криптовалютных бирж, построение графа валютных обменов, решение системы неравенств для устранения арбитража, а также возможные направления дальнейшего развития проекта.

Таким образом, данная работа объединяет задачи стохастического анализа данных, оптимизации и практического применения методов финансового моделирования в контексте современных криптовалютных рынков.

2 Обзор литературы

Вопросы агрегирования данных в контексте финансовых и криптовалютных рынков активно рассматриваются в современной научной литературе. В ряде работ предлагаются как теоретические, так и прикладные методы объединения информации, учитывающие множество факторов — от рыночных долей и экспертных оценок до структурных особенностей данных и рыночной неопределённости.

В частности, в исследовании Rogers et al. (1991)[5] рассматривается применение методов математического программирования для построения оптимизированных агрегирующих моделей. Предложенный подход позволяет решать ряд ключевых задач, такие как оптимизация взвешенного усреднения цен с учётом ликвидности торговых площадок и автоматическая фильтрация выбросов, возникающих вследствие неликвидности или манипуляций на рынке. Данные методы особенно актуальны при создании автоматических алгоритмов обработки котировок, работающих в условиях высокой изменчивости рыночной информации.

Другой важный вклад принадлежит работе Bortolussi et al. (2018)[1], в которой предложен алгоритмический подход к поиску минимальных весовых циклов на криптовалютных рынках. В основе метода лежит графовое представление торговых операций, где узлы соответствуют валютам и биржам, а рёбра — возможным обменным операциям. Поиск циклов с произведением весов рёбер, превышающим единицу, позволяет выявлять арбитражные возможности без необходимости полного перебора всех путей. Кроме того, была проведена оптимизация вычислений, что существенно снижает алгоритмическую сложность задачи и делает подход практически применимым в условиях реального времени.

На стыке рассмотренных подходов была сформулирована идея унифицированного оператора агрегирования (Unified Aggregation Operator, UAO)[4], совмещающая различные методы агрегирования, включая взвешенное среднее, вероятностные подходы и оператор упорядоченного взвешенного усреднения (OWA).

Особое значение для формирования исследовательской идеи имела работа Bortolussi et al. (2018)[1], в которой предложен алгоритмический подход к поиску минимальных весовых циклов на криптовалютных рын-

ках. Авторы моделируют рынок в виде направленного графа, где вершины представляют валюты и биржи, а рёбра — возможные обменные операции. Поиск циклов, в которых произведение весов рёбер превышает единицу, позволяет выявить потенциальные арбитражные возможности. Метод также включает эффективную оптимизацию вычислений, что делает его применимым в условиях реального времени и высокочастотной торговли.

3 Описание данных

Для построения графа валютных обменов и агрегирования котировок в данной работе использованы данные, предоставленные фирмой COIN360, которые были собраны с API криптовалютных бирж. Такой подход позволил получить большой объем информации о прошедших сделках на разных криптовалютных площадках.

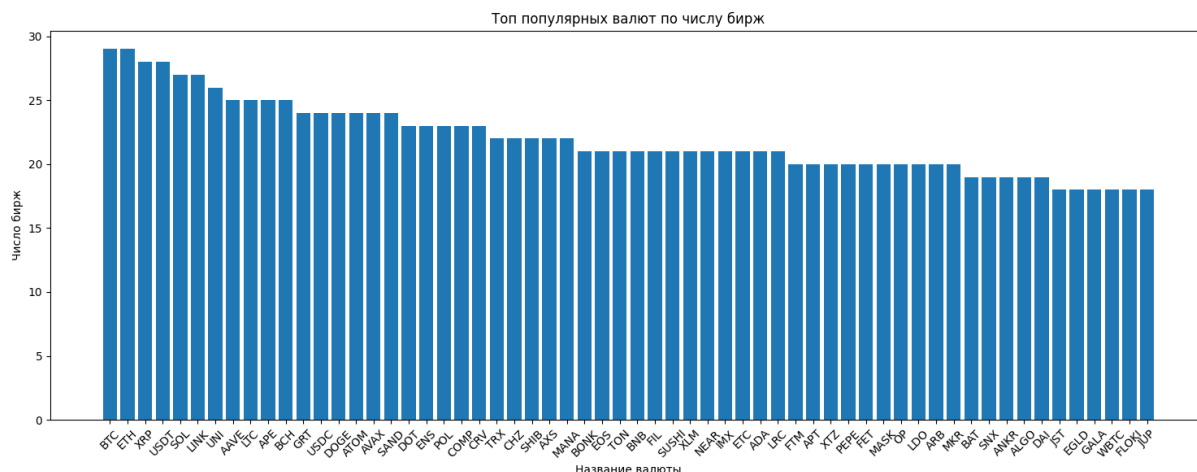
Данные собраны с разных бирж в период 2022-2025 год, изначальное число учтенных сделок составляло 28235.

Перед анализом была проведена обработка данных: удаление экстремальных значений (выбросов), а также неучет валют, торгующихся на 1 бирже, из-за их высокой ненадежности. Пропущенные данные удалялись из выборки, если их доля не превышала 5% от общего объема. В противном случае использовалась интерполяция на основе соседних по времени значений. После описанных преобразований количество наблюдений в датасете составило 19977.

Ниже представлены ключевые переменные, использовавшиеся для анализа:

Переменная	Описание
id_market	Уникальный идентификатор торговой пары на бирже
p (price)	Цена актива в валюте котировки
v (volume)	Объем сделки в базовой валюте
q (quantity)	Объем сделки в котируемой валюте
exchange_id	Внутренний ID биржи в системе
exchange	Название биржи
base_id	ID базового актива
base_code	Тикер базового актива
quote_id	ID валюты котировки
quote_code	Тикер валюты котировки

После проведенного анализа стало видно, что на максимально числе бирж торгуются монеты BTC, ETH, XRP, USDT, SOL.

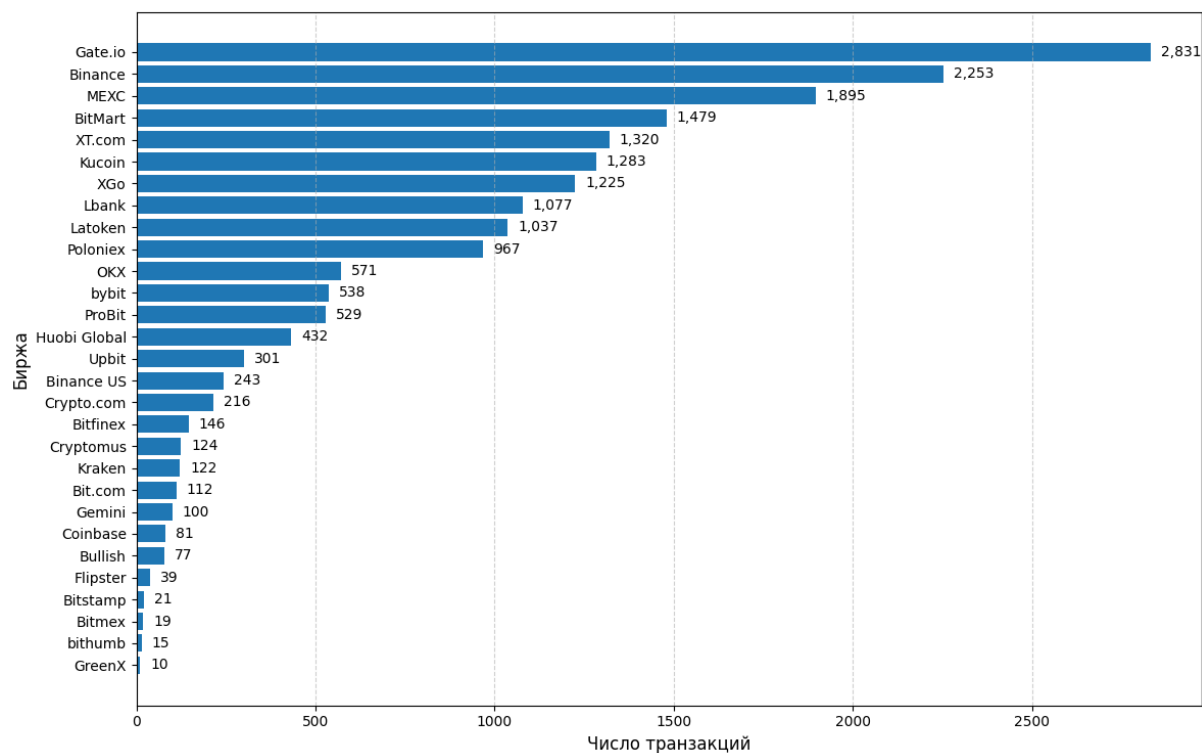


В среднем каждая из валют, участвующая в анализе, торгуется на 5 биржах, в то время как медианное значение числа бирж составляет 3.



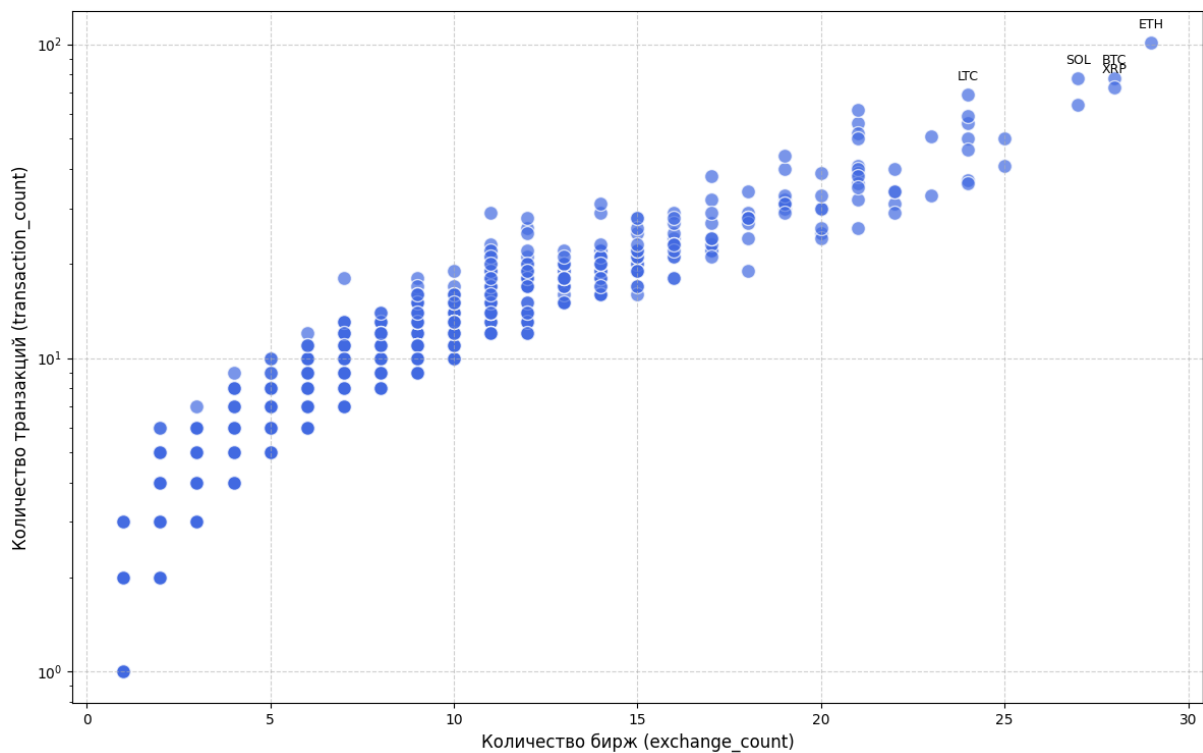
Биржами, через которые было проведено наибольшее число транзакций, оказались Gate.io, Binance, MEXC, BitMart, XT.com.

Число транзакций на биржах



Валюты для различного числа транзакций и бирж, на которых они торгуются:

Распределение валют по биржам и транзакциям



4 Методы агрегации цен

4.1 Средневзвешенная цена (VWAP — Volume-Weighted Average Price)

$$\text{VWAP} = \frac{\sum_{i=1}^N P_i \times V_i}{\sum_{i=1}^N V_i}, \quad (1)$$

где:

- P_i — цена актива на i -й бирже;
- V_i — объём торгов на i -й бирже за заданный период времени;
- N — количество бирж, участвующих в агрегации.

Пример расчета:

Рассмотрим пример данных с трёх бирж:

- Биржа 1: цена $P_1 = 100$, объём $V_1 = 500$;
- Биржа 2: цена $P_2 = 102$, объём $V_2 = 300$;
- Биржа 3: цена $P_3 = 101$, объём $V_3 = 200$.

Тогда:

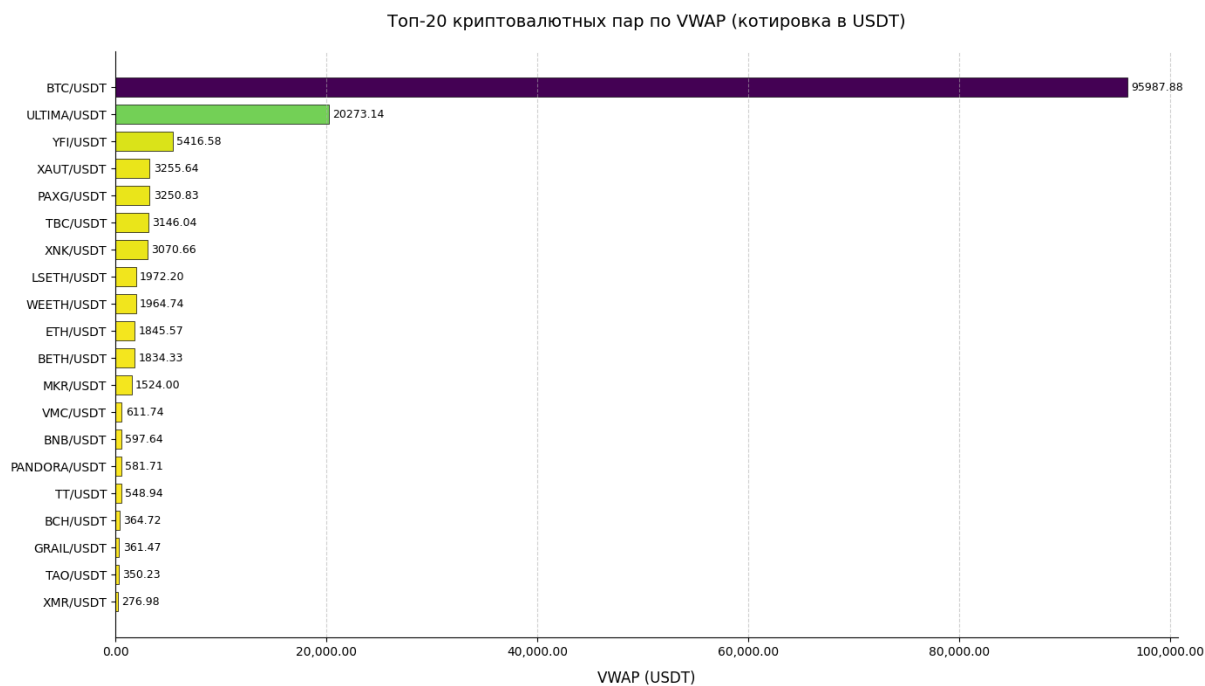
$$\text{VWAP} = \frac{(100 \times 500) + (102 \times 300) + (101 \times 200)}{500 + 300 + 200} = 100.8$$

Таким образом, итоговая агрегированная цена составляет 100,8.

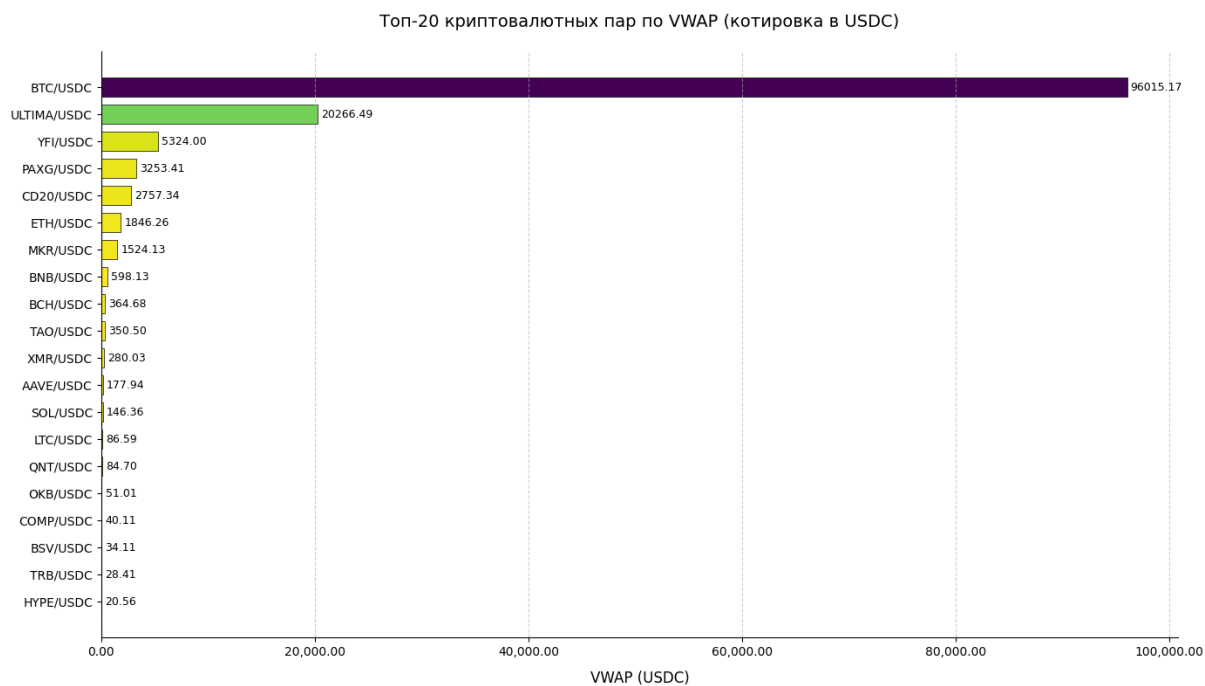
При значительном разбросе цен и объёмов между биржами необходимо обрабатывать выбросы: исключать цены, существенно отличающиеся от медианных значений (например, с использованием правила трёх сигм или межквартильного размаха), игнорировать данные с торговых площадок с подозрительно низким объёмом торгов (так как они могут предоставлять неточные или манипулированные котировки)

4.1.1 Результаты на реальных данных

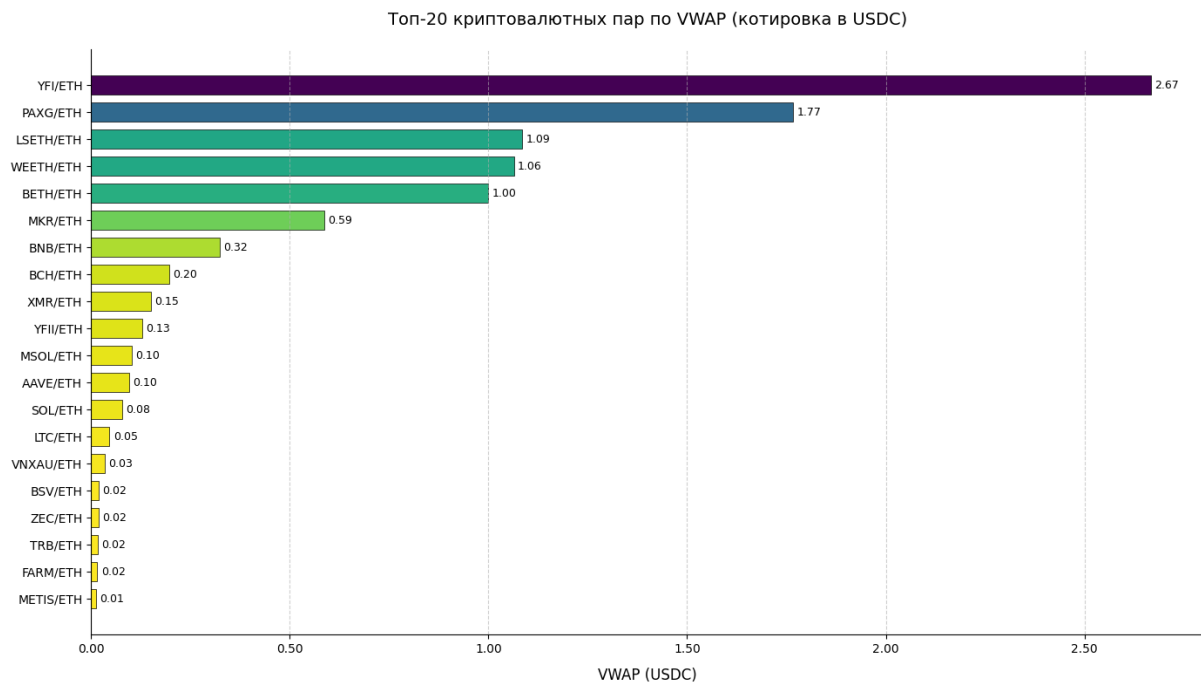
Топ-20 валют с максимальным VWAP в котируемой валюте USDT:



Топ-20 валют с максимальным VWAP в котируемой валюте USDC:



Топ-20 валют с максимальным VWAP в котируемой валюте ETH:



4.2 Медианное значение

Медиана набора данных — это такое значение, которое разделяет упорядоченное множество чисел на две равные части. [2]

Пусть имеется конечный набор чисел $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, упорядоченный по возрастанию.

Тогда медиана $\text{med}(X)$ определяется как:

$$\text{med}(X) = \begin{cases} x_{(k)}, & \text{если } n = 2k - 1 \text{ (нечётное количество элементов)}, \\ \frac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2}, & \text{если } n = 2k \text{ (чётное количество элементов)}, \end{cases}$$

где $x_{(i)}$ — i -й элемент отсортированного набора.

В отличие от среднего арифметического, медиана менее чувствительна к выбросам и аномальным значениям. Это особенно важно в условиях, когда отдельные биржи могут публиковать некорректные или нерепрезентативные котировки из-за низкой ликвидности, ошибок или манипуляций.

Пример расчета:

Рассмотрим данные о ценах и объёмах торгов актива на пяти биржах:

- Биржа А: цена $P_A = 99$, объём $V_A = 5000$
- Биржа В: цена $P_B = 105$, объём $V_B = 300$
- Биржа С: цена $P_C = 100$, объём $V_C = 7000$
- Биржа D: цена $P_D = 250$, объём $V_D = 50$
- Биржа Е: цена $P_E = 101$, объём $V_E = 6000$

Процесс нахождения медианы без учёта объёмов:

1. Сортируем цены по возрастанию:

99, 100, 101, 105, 250

2. Поскольку количество цен нечётное (5 цен), медиана — это третья по порядку цена:

Медиана = 101

Процесс нахождения медианы с учётом объёмов:

Чтобы учесть объёмы, каждый курс учитывается столько раз, сколько пропорционально его объёму по сравнению с другими биржами. Более формально, создаётся взвешенная последовательность цен, где каждой цене приписывается "вес" — её объём.

Рассчитаем долю каждого объёма от общего объёма:

$$V_{\text{total}} = 5000 + 300 + 7000 + 50 + 6000 = 18350$$

Доли:

- Биржа А: $\frac{5000}{18350} \approx 27.25\%$
- Биржа В: $\frac{300}{18350} \approx 1.64\%$
- Биржа С: $\frac{7000}{18350} \approx 38.16\%$
- Биржа D: $\frac{50}{18350} \approx 0.27\%$
- Биржа E: $\frac{6000}{18350} \approx 32.69\%$

Составляем кумулятивное распределение цен по объёмам:

99 (27.25%) → 100 (38.16%) → 101 (32.69%) → 105 (1.64%) → 250 (0.27%)

Найдем, при каком значении достигается кумулятивная медианная доля (50%):

- 1) 27.25% — процент сделок, совершенных по цене не выше 99
- 2) 27.25% + 38.16% = 65.41% — процент сделок, совершенных по цене не выше 100

Таким образом, **взвешенная медиана с учётом объёмов** оказывается равной **100**, а не 101.

Вывод:

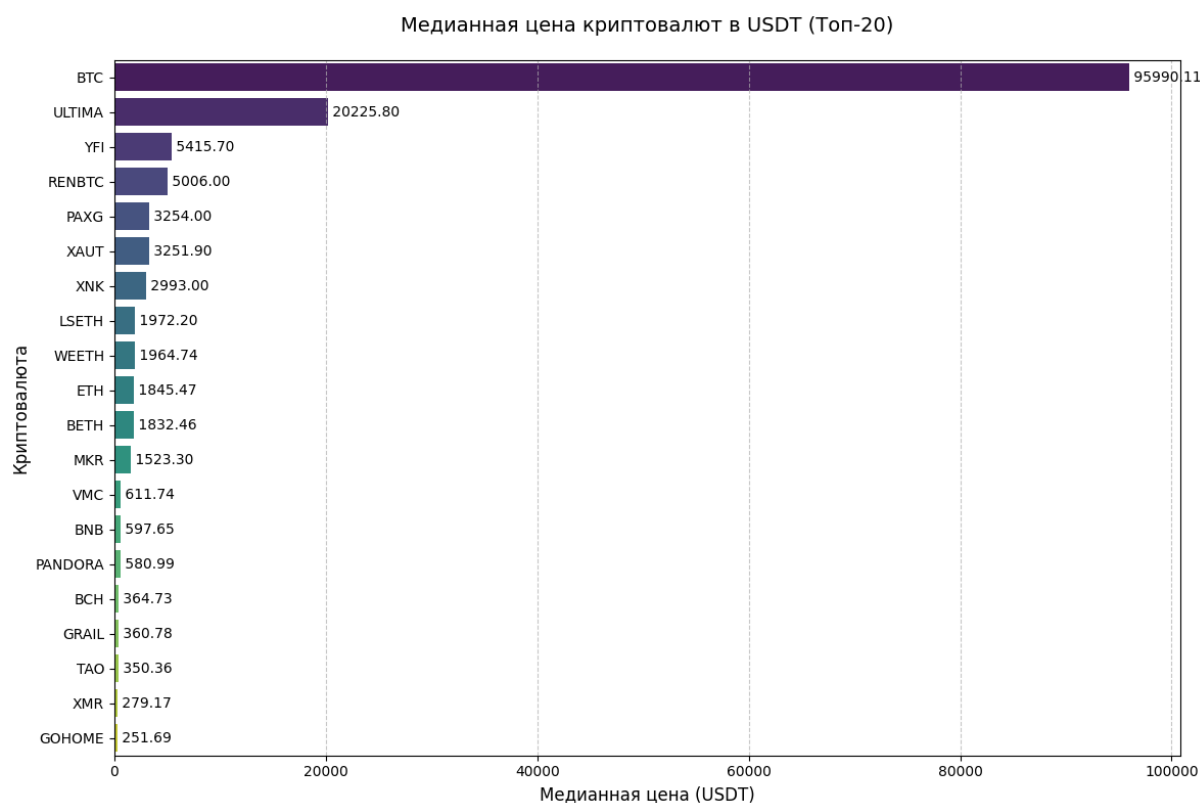
- **Без учёта объёмов** медианная цена равна 101.

- С учётом объёмов медианная цена равна 100.

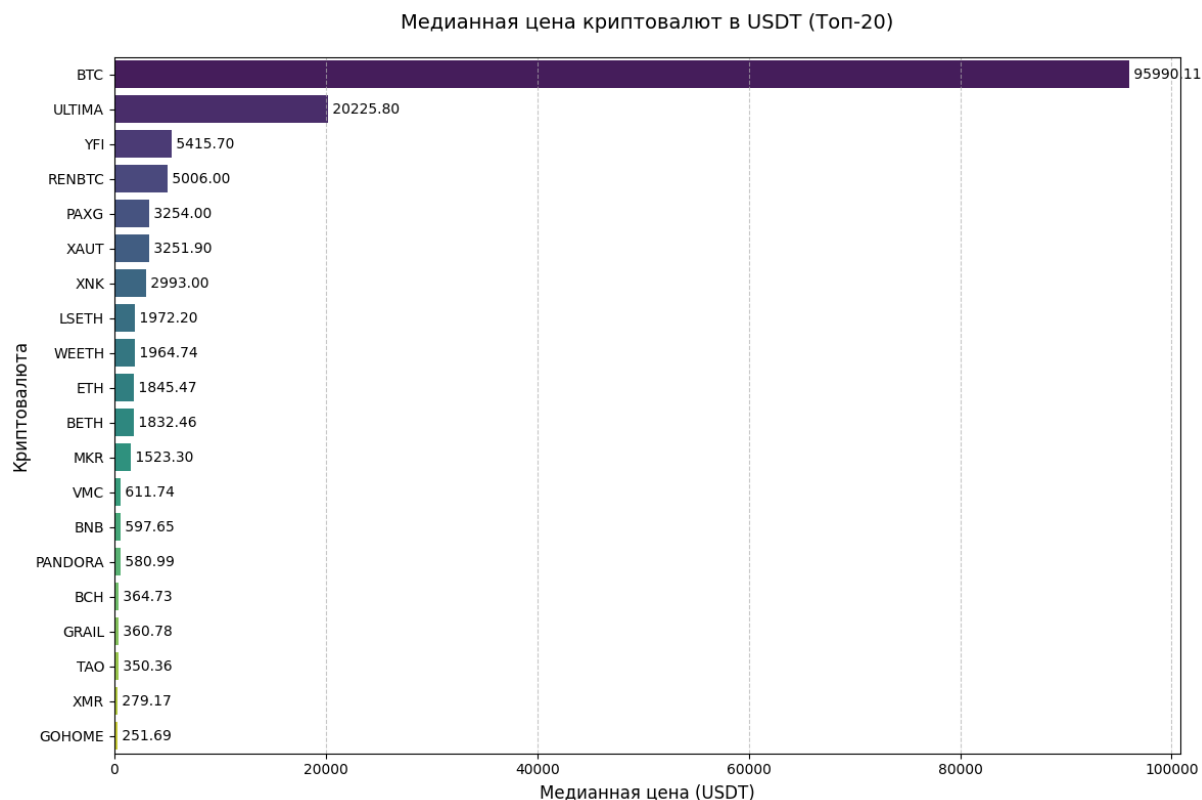
Учет объёмов позволяет снизить влияние цен, сопровождаемых незначительным торговым оборотом, и более точно отражает реальную рыночную ситуацию.

4.2.1 Результаты на реальных данных

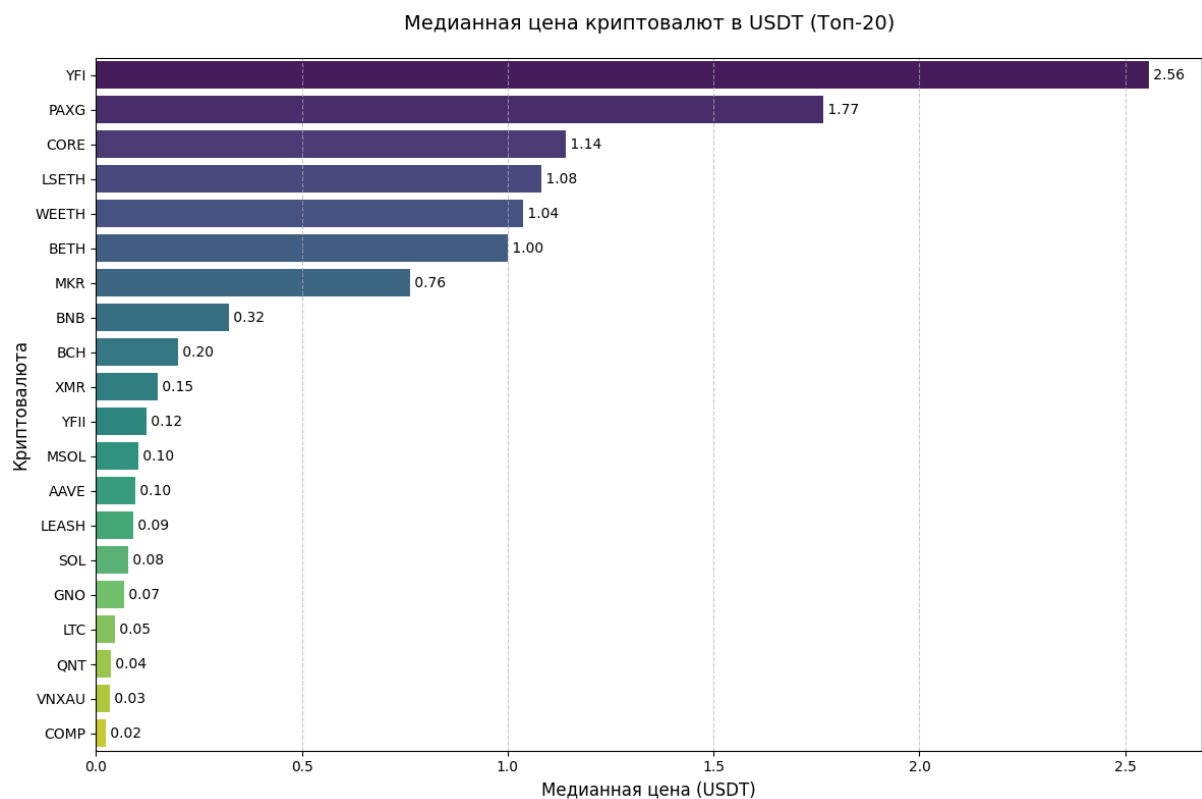
Топ-20 валют с максимальным VWAP в котируемой валюте USDT:



Топ-20 валют с максимальным VWAP в котируемой валюте USDC:



Топ-20 валют с максимальным VWAP в котируемой валюте ETH:



4.3 Оценка надежности (Trust Score)

Каждой бирже присваивается показатель надёжности (Trust Score), отражающий степень уверенности в корректности её котировок. Этот по-

казатель может быть определён на основе следующих критериев:

- **Объём торгов:** биржи с высоким стабильным объёмом торгов, как правило, предоставляют более репрезентативные данные.
- **Количество активных торговых пар:** большое число ликвидных торговых пар может свидетельствовать о реальной рыночной активности.
- **Историческая стабильность цен:** частые сильные отклонения цен от среднерыночных уровней могут указывать на низкую надёжность.
- **Репутация площадки:** наличие аудитов, регистрация в регулируемых юрисдикциях, отсутствие известных случаев манипуляций.
- **Наличие механизмов защиты пользователей:** такие как защита от манипуляций ордерами, доступность информации о механизмах ценообразования.

Для оценки надёжности бирж использовался Trust Score с платформы CoinGecko. Если для какой-либо биржи показатель Trust Score отсутствовал, он заменялся медианным значением по всем доступным площадкам. Это позволило избежать смещения оценок из-за недостатка данных.

Использование Trust Score в расчётах:

После присвоения каждой бирже коэффициента надёжности t_i (где $t_i \in [0, 1]$, где 1 — полностью надёжная биржа), его можно применять для корректировки весов цен в процессе агрегации:

- При расчёте средневзвешенной цены (VWAP) объём каждой биржи умножается на её коэффициент надёжности.

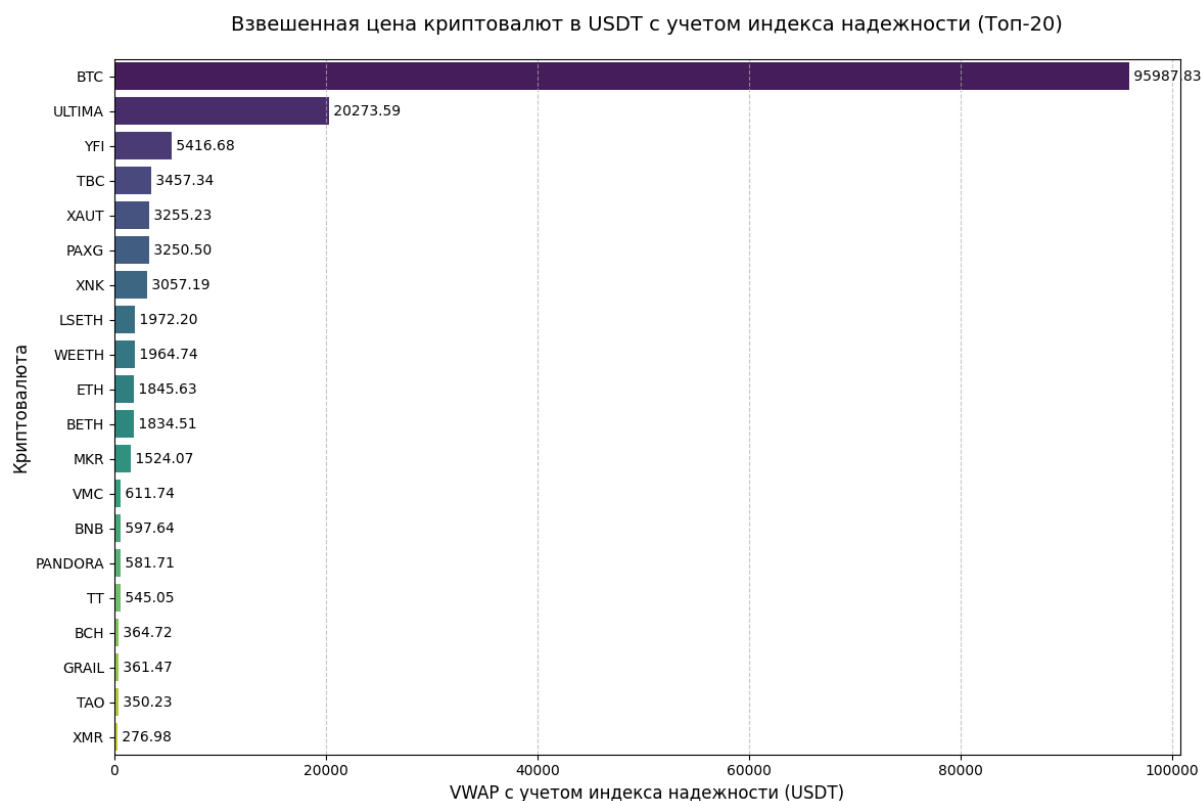
$$\text{VWAP}_{\text{trust}} = \frac{\sum_{i=1}^N t_i \times P_i \times V_i}{\sum_{i=1}^N t_i \times V_i},$$

где:

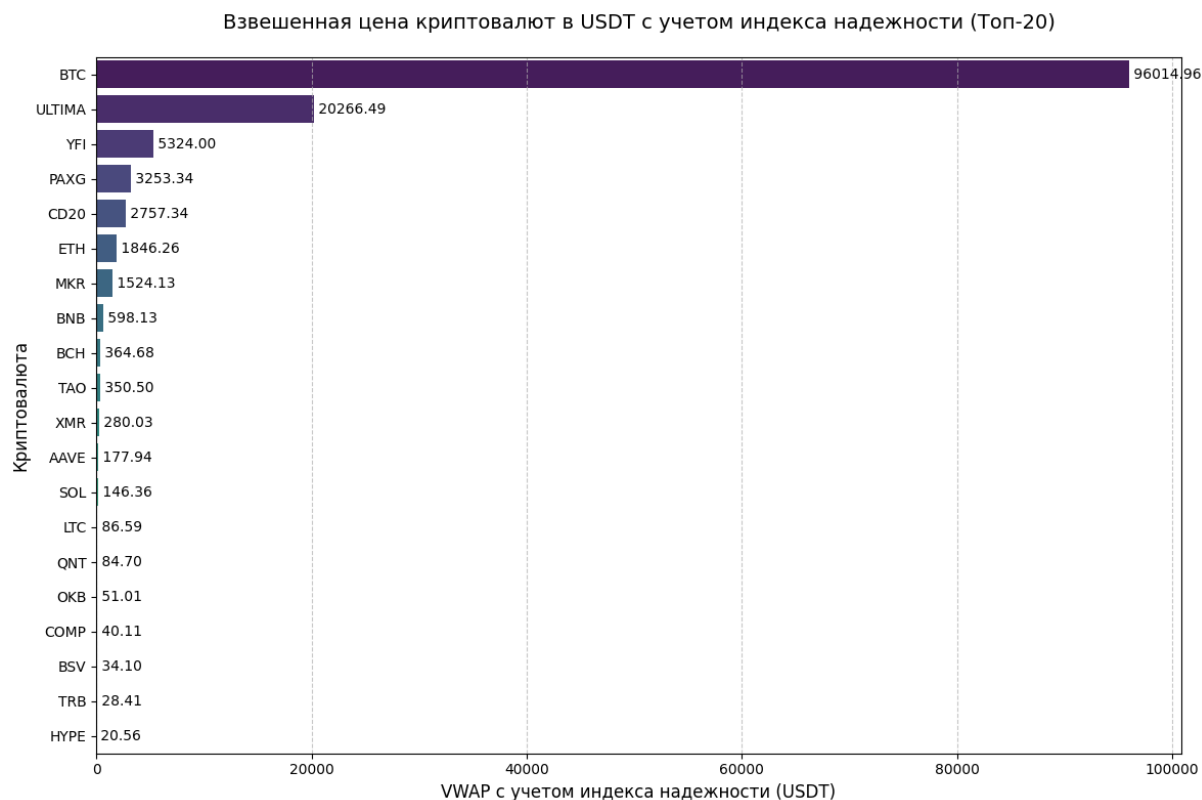
- P_i — цена актива на i -й бирже,
 - V_i — объём торгов на i -й бирже,
 - t_i — коэффициент надёжности i -й биржи.
- При расчёте медианного значения можно **исключать** биржи с Trust Score ниже заданного порога.

4.3.1 Результаты на реальных данных

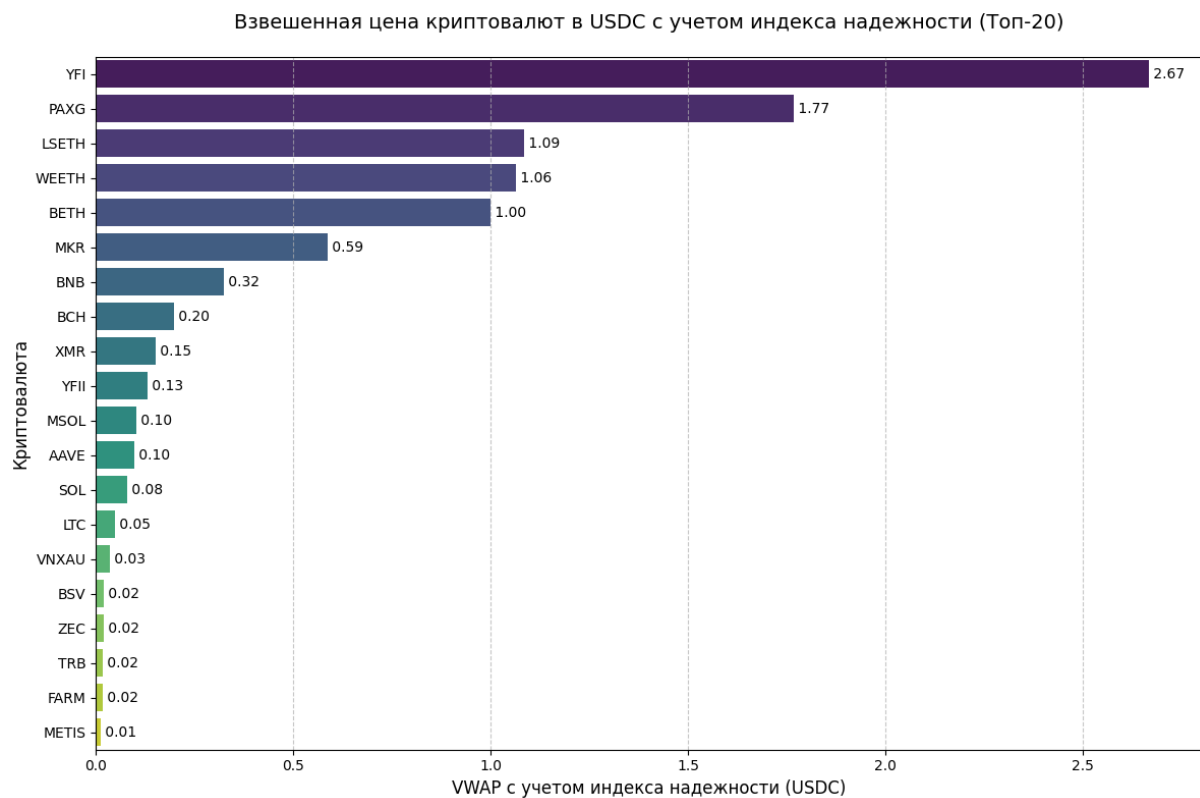
Топ-20 валют с максимальным VWAP в котируемой валюте USDT:



Топ-20 валют с максимальным VWAP в котируемой валюте USDC:



Топ-20 валют с максимальным VWAP в котируемой валюте ETH:



4.4 Популярные методы расчета

Сервис	Метод
CoinGecko	VWAP + фильтрация выбросов
CoinMarketCap	VWAP + Trust Score
Kaiko	VWAP + фильтрация выбросов
Chainlink	Медиана из провайдеров
Pyth	Confidence-weighted медиана
Band Protocol	Медиана между узлами
CF Benchmarks	Time-weighted VWAP

5 Сравнение результатов для разных валют

Рассмотрим, как различные методы применимы к разным типам валют.

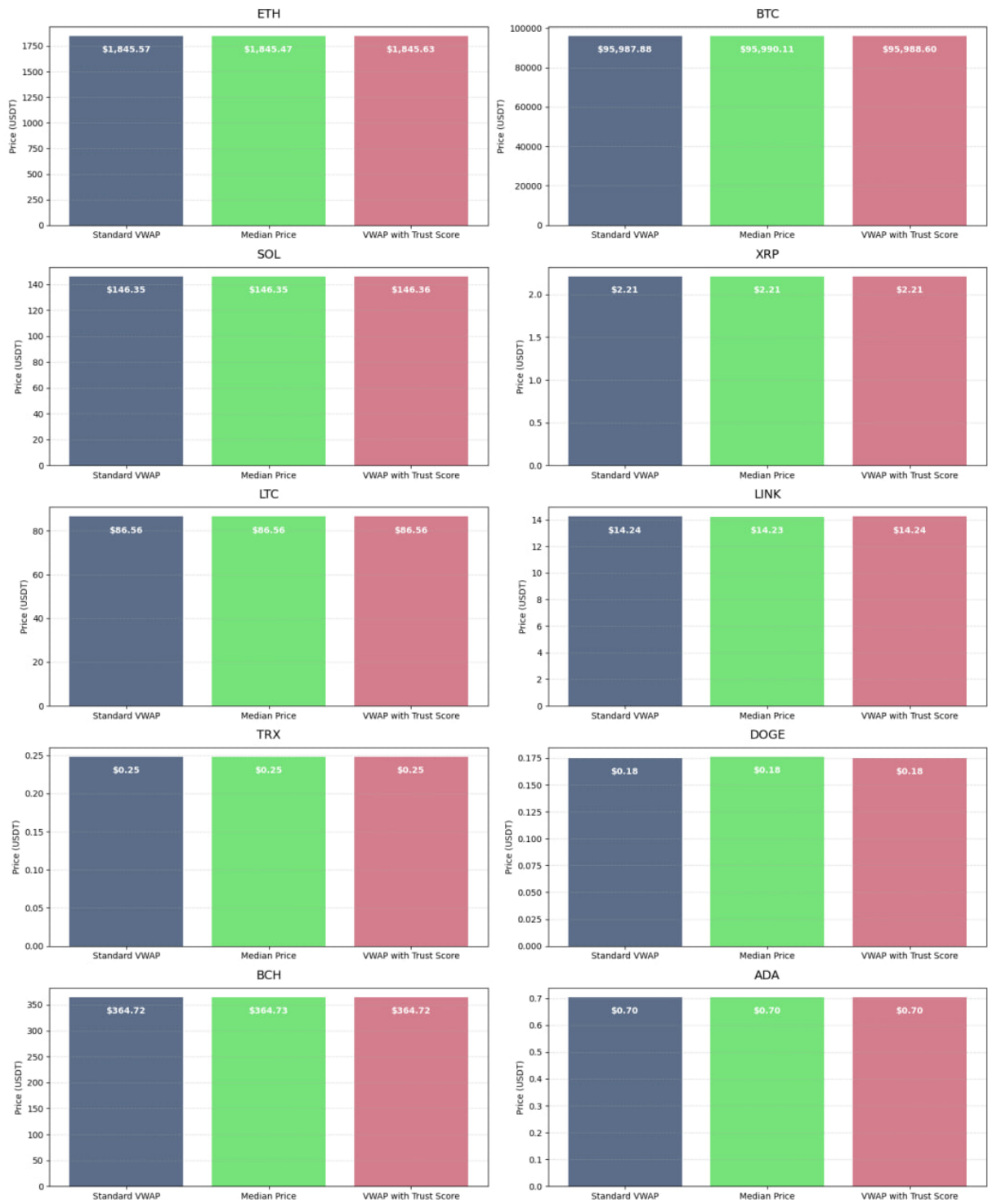


Рис. 1: Сравнение результатов для валют с максимальным числом тран-
закций

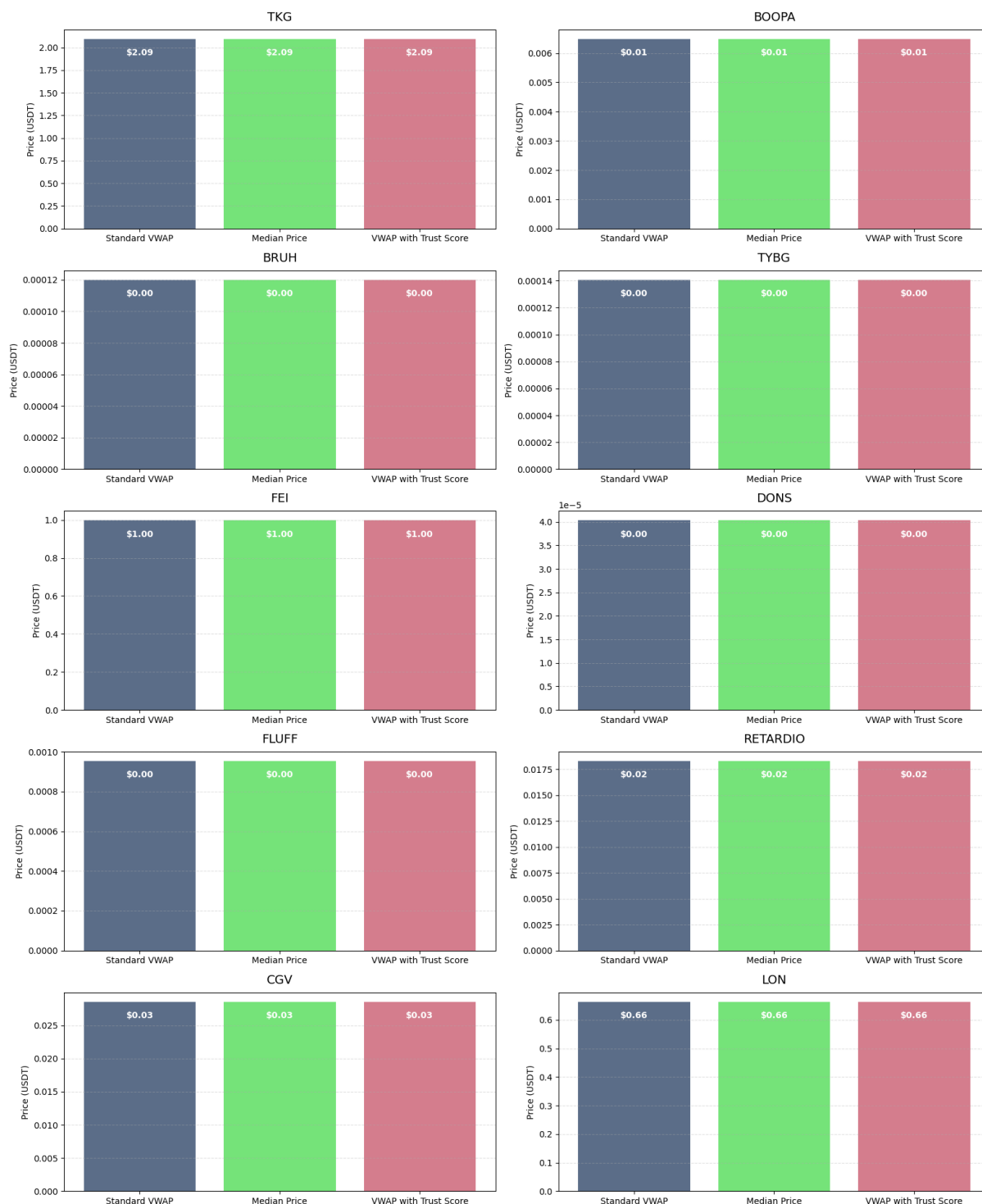


Рис. 2: Сравнение результатов для валют с минимальным числом транзакций

6 Агрегирование котировок через построенные арбитражно-несовместимой системы цен

Традиционные методы агрегации котировок, описанные выше, не позволяют гарантировать, что при найденном усредненном значении установится рыночное равновесие. В связи с этим для более точного опре-

деления агрегированного курса, адекватно отражающего реальную рыночную ситуацию, в данной работе предлагается использовать подход, основанный на построении арбитражно-несовместимой системы цен.

Арбитражная возможность — инвестиционная стратегия, которая гарантирует положительный доход в каком-либо случае, не содержит риска убытков и не требует первоначальных вложений. [3]

Пример арбитражной возможности в графе валютных обменов

Рассмотрим упрощённый рынок, включающий четыре валюты: USD, EUR, BTC и ETH. Пусть обменные курсы между валютами заданы следующим образом:

- $1 \text{ USD} \rightarrow 0.9 \text{ EUR}$
- $1 \text{ EUR} \rightarrow 0.00002 \text{ BTC}$
- $1 \text{ BTC} \rightarrow 15 \text{ ETH}$
- $1 \text{ ETH} \rightarrow 5000 \text{ USD}$

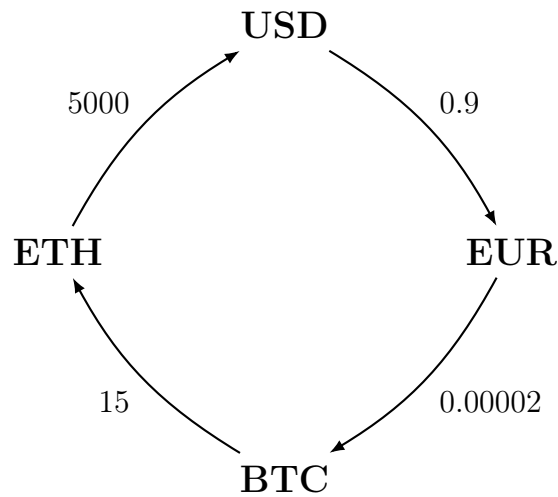
Произведём последовательный обмен, начиная с 1 USD:

$$\begin{aligned} 1 \text{ USD} \times 0.9 &= 0.9 \text{ EUR} \\ 0.9 \text{ EUR} \times 0.00002 &= 0.000018 \text{ BTC} \\ 0.000018 \text{ BTC} \times 15 &= 0.00027 \text{ ETH} \\ 0.00027 \text{ ETH} \times 5000 &= 1.35 \text{ USD} \end{aligned}$$

Таким образом, совершив полный круг обменов, мы получили 1.35 USD из первоначального 1 USD, что означает наличие арбитражной возможности с прибылью 35% без риска.

Графическое представление

Можно представить систему обменов в виде ориентированного графа, где вершины — валюты, а веса рёбер — обменные курсы:



Рассматриваемый цикл:

$$\text{USD} \xrightarrow{0.9} \text{EUR} \xrightarrow{0.00002} \text{BTC} \xrightarrow{15} \text{ETH} \xrightarrow{5000} \text{USD}$$

Анализ:

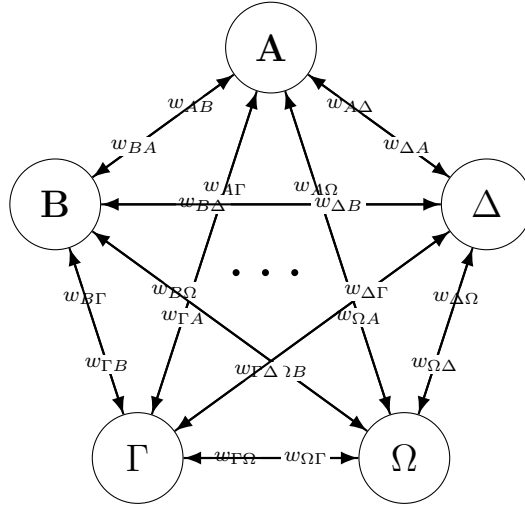
- Если произведение курсов вдоль цикла больше единицы, то возможно получить мгновенную безрисковую прибыль (то есть, реализовать арбитражную стратегию).
- В данном случае:

$$0.9 \times 0.00002 \times 15 \times 5000 = 1.35 > 1$$

7 Формальная постановка задачи

Представим рынок в виде ориентированного взвешенного графа $G = (V, E)$, где:

- V — множество вершин, соответствующих различным криптовалютам,
- E — множество ориентированных рёбер, соответствующих доступным обменным курсам между валютами.



Выбор веса ребра

Каждое ребро $(i, j) \in E$ связано с обменным курсом w_{ij} , который определяет, сколько единиц валюты j можно получить за одну единицу валюты i .

Поскольку обменные курсы между одной и той же парой валют могут различаться на разных торговых площадках, необходимо агрегировать информацию для построения единого веса ребра.

Для устранения арбитражных возможностей важно учитывать наиболее выгодные условия обмена, доступные на рынке. Следовательно, вес ребра w_{ij} определяется как **максимальный** из всех доступных обменных курсов между валютами i и j :

$$w_{ij} = \max \left(P_{ij}^{(1)}, P_{ij}^{(2)}, \dots, P_{ij}^{(M)} \right),$$

где:

- $P_{ij}^{(k)}$ — курс обмена валюты i в валюту j на k -й бирже,
- M — количество бирж, предоставляющих данные по паре (i, j) .

Выбор максимального курса среди всех доступных источников обеспечивает, что: даже при использовании наиболее выгодного на рынке курса трейдер не сможет построить цикл с положительной прибылью.

Условие наличия арбитража

В графе существует арбитражная возможность, если существует цикл C вида:

$$C = (i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow i_1),$$

такой, что:

$$\prod_{(i,j) \in C} w_{ij} > 1, \quad \text{или, эквивалентно,} \quad \sum_{(i,j) \in C} \log w_{ij} > 0.$$

Если $P(C) = \sum_{(i,j) \in C} \log w_{ij}$, то $P(C) > 0$ эквивалентно наличию арбитража.

Поиск равновесия

В условиях существования арбитражных возможностей рациональные участники рынка будут стремиться извлекать прибыль, совершая последовательные обмены валют по выгодным курсам. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока арбитражные возможности не исчезнут и не установится рыночное равновесие, при котором ни один игрок не сможет получить положительную прибыль, замыкая цикл обменов.

Следовательно, для моделирования состояния равновесия необходимо скорректировать цены валют таким образом, чтобы на рынке **отсутствовала возможность получения прибыли посредством арбитража**.

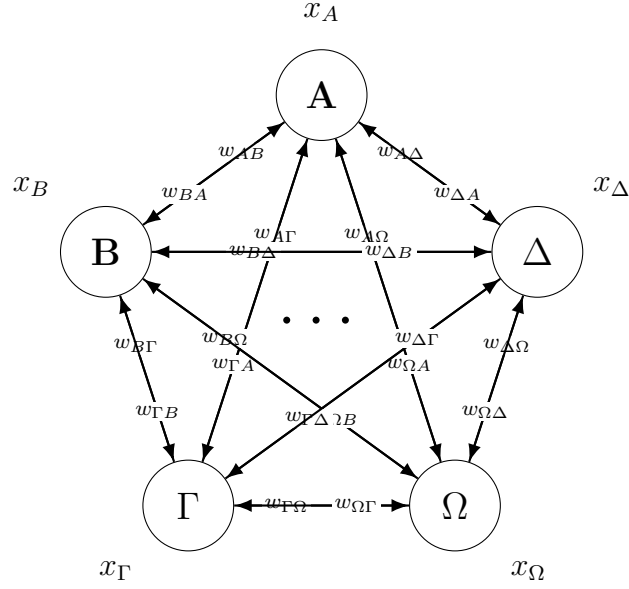
8 Проблема множественности циклов

В реальных рыночных данных один и тот же набор обменных курсов может одновременно входить в несколько различных арбитражных циклов. Следовательно, для устранения всех арбитражных возможностей недостаточно проверять отдельные замкнутые маршруты — требуется построить глобально согласованную систему цен.

Переход от курсов к внутренним ценам

Обозначим:

- P_i — равновесная цена валюты i в долларах США.
- w_{ij} — наблюдаемый обменный курс из валюты i в валюту j .
- $x_i = \log(P_i)$ — логарифмическая внутренняя цена валюты i .



Тогда, чтобы устранить все арбитражные возможности, необходимо подобрать значения внутренних цен x_i для каждой валюты $i \in V$. Это достигается решением системы неравенств:

$$x_i - x_j \leq \log w_{ij}, \quad \forall (i, j) \in E,$$

Это условие означает, что обмен валюты i в валюту j по их справедливой цене не должен быть выгоднее, чем через фактический рыночный курс.

Построение системы неравенств

Для всех наблюдаемых направлений обменов составляется система линейных неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_A - x_B \leq \log w_{AB}, \\ x_B - x_A \leq \log w_{BA}, \\ x_A - x_\Delta \leq \log w_{A\Delta}, \\ x_\Delta - x_A \leq \log w_{\Delta A}, \\ x_B - x_\Delta \leq \log w_{B\Delta}, \\ x_\Delta - x_B \leq \log w_{\Delta B}, \\ \vdots \\ x_N - x_{N'} \leq \log w_{NN'}, \end{array} \right.$$

- Каждое ребро графа обменов задаёт два неравенства: в прямом и обратном направлениях.
- Если система имеет решение, это означает, что можно подобрать внутренние цены валют так, чтобы отсутствовали арбитражные возможности во всём графе.

- Решение системы даёт арбитражно-несовместимую систему внутренних цен $\{P_i\}$, обеспечивающую справедливую агрегированную оценку котировок.

Решение системы неравенств

Запишем систему неравенств в матричном виде:

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad (2)$$

где:

- $A \in \mathbb{R}^{|E| \times |V|}$ - разреженная матрица инцидентности графа обменных курсов, где для каждого ребра $(i,j) \in E$ соответствующая строка содержит:
 - $+1$ в позиции i
 - -1 в позиции j
 - 0 во всех остальных позициях
- $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{|E|}$ - вектор правой части, где $b_k = \log w_{ij}$ для ребра $k = (i,j)$
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|V|}$ - вектор логарифмических цен (переменные оптимизации)

Для нахождения внутренних цен $\{x_i\}$ минимизируем квадратичное отклонение нарушений неравенств:

$$\|\max(0, A\mathbf{x} - \mathbf{b})\|_2^2 \rightarrow \min_{\mathbf{x}} \quad (3)$$

В случае существования решения неравенства, отклонение $A\mathbf{x}$ от \mathbf{b} будет нулевым. Однако при наличии арбитража, найденный набор цен будет иметь минимальное отклонение от фактических рыночных курсов.

L_2 -норма стремится равномерно распределить нарушения условий

$$x_i - x_j \leq \log w_{ij} \quad \forall (i,j) \in E \quad (4)$$

по всем рёбрам графа, а не сконцентрировать их в нескольких вершинах.

Нормализация решения

Для устранения неоднозначности (система инвариантна относительно сдвига $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + c$) добавляем условие:

$$x_{\text{base}} = 0 \quad (\text{для базовой валюты})$$

Это обеспечит наличие единственного решения, а также позволит интерпретировать $\exp(x_i)$ как относительную цену по отношению к базовой валюте.

Вычисление агрегированных котировок валютных пар

После нахождения арбитражно-несовместимой системы внутренних цен $\{P_i = e^{x_i}\}$ для всех валют $i \in V$ агрегированная котировка между двумя валютами i и j определяется как отношение их внутренних цен:

$$\tilde{w}_{ij} = \frac{P_j}{P_i}.$$

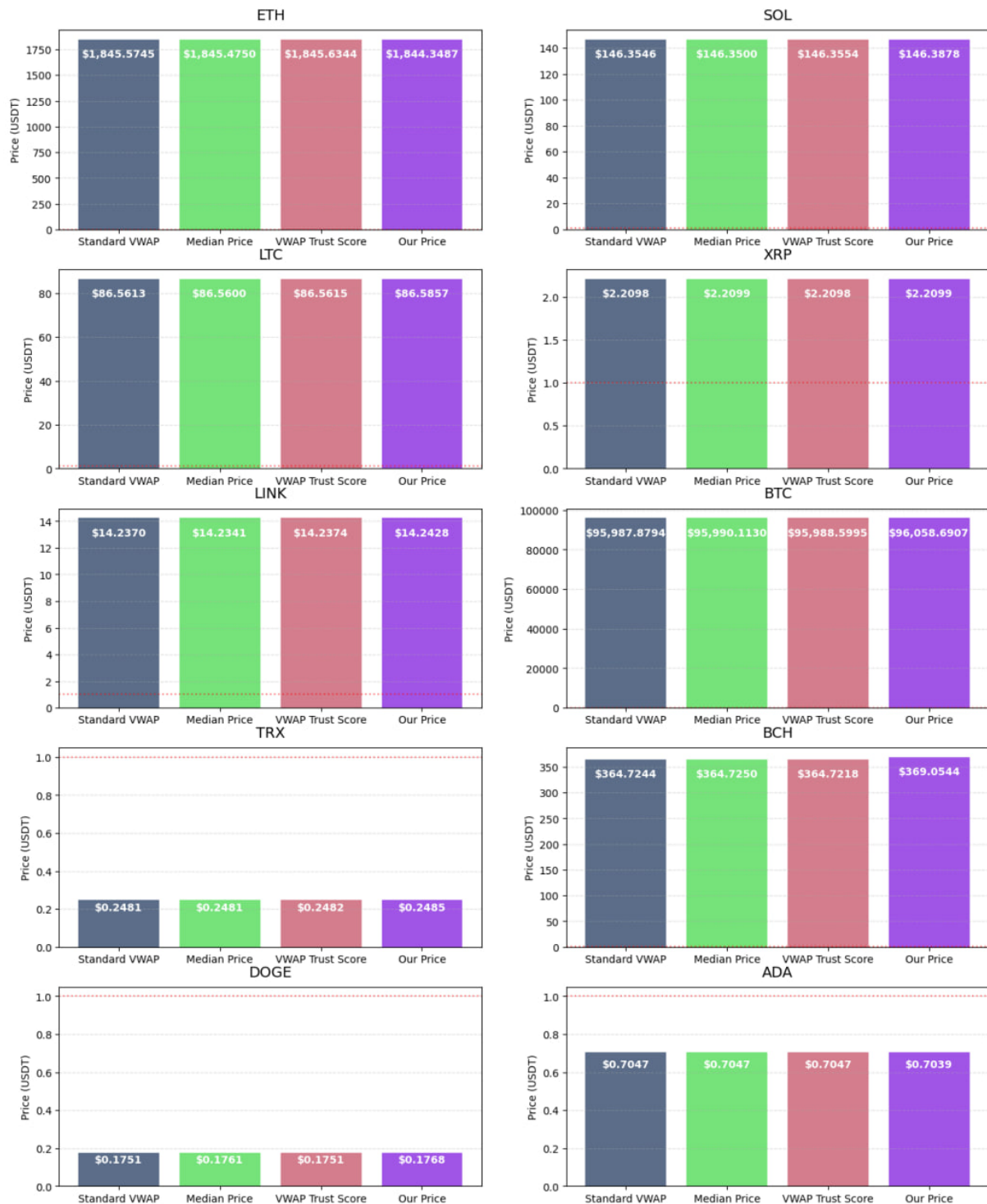
Таким образом, агрегированная котировка показывает, сколько единиц валюты j соответствует одной единице валюты i в справедливой системе цен. Эти значения согласованы между всеми валютами и не допускают наличия циклов с положительной прибылью в графе обменов, что исключает возможность арбитража.

Замечание:

В случае отсутствия на рынке арбитражных возможностей система имеет решение. (доказательство приведено в [приложении 1](#))

Если же на рынке присутствует реальный арбитраж, система неравенств оказывается несовместимой, что выявляет потенциальные рыночные неэффективности или указывает на наличие несогласованности в исходных данных.

8.1 Результаты на реальных данных



Данные цен активов, агрегированные разным способом показывают схожие результаты в условиях рыночной стабильности, однако в условиях резких ценовых скачков, могут наблюдаться существенные различия.

9 Заключение

Классические методы агрегирования, такие как *средневзвешенная цена* (VWAP) и *медиана*, широко используются в финансовой практике благодаря своей простоте и интуитивной интерпретируемости. VWAP отражает среднюю цену, взвешенную по объёму торгов, а медиана устойчива к выбросам и отдельным аномальным значениям. Однако оба метода предполагают, что рынок в целом эффективен и не содержит систематических искажений. При наличии значительных расхождений в котировках между биржами, манипуляций или арбитражных возможностей, такие методы могут давать неконсистентные результаты, позволяющие построить циклы с положительной безрисковой прибылью.

Агрегирование котировок на основе устранения арбитражных возможностей позволяет формировать *внутренне согласованную* систему цен, в которой отсутствуют циклы, дающие положительную безрисковую прибыль. Это важно при построении справедливого ценообразования для финансовых инструментов, таких как деривативы, индексы и децентрализованные протоколы (DeFi).

1. Снижение рыночных искажений. Традиционные методы, такие как VWAP или медиана, чувствительны к выбросам и недобросовестным котировкам (например, с бирж с низкой ликвидностью или подозрительной активностью). В отличие от них, арбитражно-несовместимая система цен строится таким образом, что даже при использовании наиболее выгодных рыночных курсов невозможно получить прибыль, замыкая валютный цикл:

$$\sum_{(i,j) \in C} \log w_{ij} \leq 0.$$

Это делает её устойчивой к манипуляциям и аномалиям в данных.

2. Применение в деривативах. Производные финансовые инструменты (фьючерсы, опционы и пр.) требуют корректного определения справедливой цены базового актива. Если базовая цена построена на арбитражно-устойчивой модели, это исключает возможность расхождений между спотовой ценой и ценой дериватива, что важно для корректного расчёта теоретической стоимости и греков.

3. Применение в индексах и DeFi. Криптовалютные индексы и DeFi-протоколы опираются на агрегированные котировки. При наличии арбитражных искажений может возникать риск манипуляции ценой с целью получения выгоды (например, при ликвидации залога в протоколах кредитования). Метод агрегирования позволяет построить глобально согласованную систему справедливых цен $\{P_i\}$, устойчивая к подобным атакам.

Таким образом, построение арбитражно-несовместимой системы цен

обеспечивает математически обоснованную структуру котировок, которая может быть напрямую использована для ценообразования в деривативных продуктах, расчёта индексов и безопасной работы DeFi-протоколов. Это делает подход универсальным и перспективным решением в условиях высокой фрагментированности криптовалютных рынков.

9.1 Дальнейшее развитие работы

В перспективе проект может быть расширен и улучшен в следующих направлениях:

1. Сбор данных в режиме реального времени

- Интеграция постоянного подключения через WebSocket для оперативного обновления графа котировок.
- Реализация механизма обработки высокочастотных потоков данных и адаптации агрегированной системы цен в реальном времени.

2. Визуализация данных

- Разработка системы графической визуализации:
 - отображение текущих котировок и их изменений,
 - выделение найденных арбитражных циклов,
 - демонстрация динамики агрегированных цен.

3. Создание пользовательского приложения

- Разработка программного интерфейса для запуска агрегации цен и анализа арбитражных возможностей.
- Возможность настраивать параметры агрегации, фильтрации и методов расчёта.
- Интеграция с различными источниками данных и экспорт результатов для последующего анализа.

4. Дополнительные исследования

- Оценка устойчивости агрегированных котировок при всплесках волатильности на рынке.
- Моделирование поведения систем цен при манипуляциях на отдельных биржах.

- Исследование оптимальных методов фильтрации аномальных данных и построения устойчивых агрегированных систем.

Список литературы

- [1] Francesco Bortolussi, Zeger Hooeboom и Frank W Takes. “Computing Minimum Weight Cycles to Leverage Mispricings in Cryptocurrency Market Networks”. В: *arXiv preprint arXiv:1807.05715* (2018).
- [2] Morris H. DeGroot и Mark J. Schervish. *Probability and Statistics*. 4-е изд. Boston: Pearson Education, 2012.
- [3] Philip H Dybvig и Stephen A Ross. “Arbitrage”. В: *Finance*. Springer, 1989, с. 57—71.
- [4] J. M. Merigó, D. Palacios-Marques и M. del M. Benavides-Espinosa. “Aggregation Methods to Calculate the Average Price”. В: *Journal of Business Research* 68.7 (2015), с. 1574—1580. DOI: [10.1016/j.jbusres.2014.11.036](https://doi.org/10.1016/j.jbusres.2014.11.036). URL: <https://doi.org/10.1016/j.jbusres.2014.11.036>.
- [5] D. F. Rogers и др. “Aggregation and Disaggregation Techniques and Methodology in Optimization”. В: *Operations Research* 39.4 (1991), с. 553—582. DOI: [10.1287/opre.39.4.553](https://doi.org/10.1287/opre.39.4.553). URL: <https://doi.org/10.1287/opre.39.4.553>.

Список литературы

- [1] Makarov, I., & Schoar, A. (2020). Trading and Arbitrage in Cryptocurrency Markets. *Journal of Financial Economics*, 135(2), 293-319. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2019.06.003>
- [2] Rogers, D. F., Plante, R. D., Wong, R. T., & Evans, J. R. (1991). Aggregation and Disaggregation Techniques and Methodology in Optimization. *Operations Research*, 39(4), 553–582. <https://doi.org/10.1287/opre.39.4.553>
- [3] Ionescu, L. (2020). Digital Data Aggregation, Analysis, and Infrastructures in FinTech Operations. *Review of Contemporary Philosophy*, 19, 92-98. Addleton Academic Publishers.
- [4] Liu, G., Xiao, F., Lin, C.-T., & Cao, Z. (2020). A Fuzzy Interval Time-Series Energy and Financial Forecasting Model Using Network-Based Multiple Time-Frequency Spaces and the Induced-Ordered Weighted Averaging Aggregation Operation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 28(11), 2677–2690. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2020.2999977>

- [5] Merigó, J. M., Palacios-Marques, D., & Benavides-Espinosa, M. del M. (2015). Aggregation Methods to Calculate the Average Price. *Journal of Business Research*, 68(7), 1574–1580. <https://doi.org/10.1016/j.jbusres.2014.11.036>
- [6] Bortolussi, L., Hoogeboom, P., & Takes, F. (2018). Computing Minimum Weight Cycles to Leverage Mispricings in Cryptocurrency Market Networks. *International Conference on Complex Networks and Their Applications*, 214–225. https://doi.org/10.1007/978-3-030-05411-3_18
- [7] Miranker, W. L., & Pan, V. Y. (1980). Methods of Aggregation. *Linear Algebra and Its Applications*, 29, 231–257. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(80\)90245-1](https://doi.org/10.1016/0024-3795(80)90245-1)
- [8] WL Global Solutions (2023). Liquidity Aggregation in Cryptocurrency Markets. <https://www.wlglobal.solutions/ru/solutions/liquidity-aggregator>

10 Приложение

Theorem 1. Система неравенств

$$x_i - x_j \leq \log w_{ij}, \quad \forall (i, j) \in E$$

имеет решение тогда и только тогда, когда в графе отсутствуют циклы с положительной суммой логарифмов весов рёбер.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что в графе существует цикл

$$C = (i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow i_1)$$

такой, что

$$\sum_{(i,j) \in C} \log w_{ij} > 0.$$

Просуммируем неравенства вдоль рёбер цикла:

$$(x_{i_1} - x_{i_2}) + (x_{i_2} - x_{i_3}) + \dots + (x_{i_k} - x_{i_1}) \leq \sum_{(i,j) \in C} \log w_{ij}.$$

Левая часть телескопируется:

$$(x_{i_1} - x_{i_2}) + (x_{i_2} - x_{i_3}) + \dots + (x_{i_k} - x_{i_1}) = 0.$$

Таким образом:

$$0 \leq \sum_{(i,j) \in C} \log w_{ij}.$$

Но по предположению:

$$\sum_{(i,j) \in C} \log w_{ij} > 0,$$

следовательно, получается противоречие. Таким образом, если существует цикл с положительной суммой логарифмов весов, система неравенств не имеет решения.

Достаточность. Предположим теперь, что в графе отсутствуют циклы с положительной суммой логарифмов весов.

Зафиксируем произвольную вершину $s \in V$ и положим:

$$x_s = 0.$$

Для каждой вершины $i \in V$ определим x_i как минимальную стоимость пути от s к i :

$$x_i = \min_{\text{пути из } s \text{ в } i} \sum \log w_{ij}.$$

Такое определение корректно, поскольку при отсутствии положительных циклов минимальная стоимость пути определена корректно и конечна.

Рассмотрим теперь любое ребро $(i, j) \in E$.

Путь из s в i , а затем переход по ребру (i, j) образует путь из s в j длиной:

$$x_i + \log w_{ij}.$$

Поскольку x_j — минимальная стоимость пути до j , имеем:

$$x_j \leq x_i + \log w_{ij}, \quad \text{то есть} \quad x_i - x_j \leq \log w_{ij}.$$

Таким образом, каждое неравенство системы выполнено.

Следовательно, система имеет решение. □