

Отчёт 1

Анна Бондаренко

1 Описание исходной задач

Необходимо было решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} -u'' = f, & x \in (0; 1) \\ u(0) = a, \\ u(1) = b \end{cases} \quad (1)$$

Для каждого узла составляется дискретное уравнение, приближающее уравнение Лапласа на трехточечном шаблоне

$$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f_i \quad (2)$$

Общая система уравнений представляет собой линейную систему с трёхдиагональной матрицей, решить ее можно методом прогонки.

Решение методом прогонки

Линейная система для y_i представляется в виде:

$$\begin{cases} a_1 y_1 + b_1 y_2 = d_1 \\ c_i y_{i-1} + a_i y_i + b_i y_{i+1} = d_i, & i = 2, \dots, N-1 \\ c_N y_{N-1} + a_N y_N = d_N \end{cases} \quad (3)$$

Для этой системы уравнений метод прогонки задается следующими рекуррентными формулами:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{b_i}{a_i - c_i \alpha_{i-1}}, \\ \beta_i &= \frac{d_i + c_i \beta_{i-1}}{a_i - c_i \alpha_{i-1}}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = d_1/a_1$.

После вычисления всех α_i и β_i , решение для y_i находится по формуле:

$$y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i, \quad (5)$$

начиная с $y_N = \beta_N$ и до y_1 .

2 Результат

Желтый график: C-норма, оранжевый: L2-норма

