

1 Задание 1

1.1 Постановка задачи

В области $\Omega = [0, 1]^2$ решается двумерная задача Дирихле для двумерного стационарного оператора диффузии:

$$\begin{cases} -(D\nabla u) = f, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g, \end{cases}$$

где $D = \text{diag}(d_x, d_y)$. Для решения используется Метод конечных элементов на треугольной сетке $w_h = ih, jh$, где $h = \frac{1}{N}$.

1.2 Результаты экспериментов

Рассмотрим задачи с известным аналитическим решением и построим для них графики C -нормы и L_2 -нормы при измельчении сетки:

1.

$$f = \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad d_x = 1, \quad d_y = 1, \quad u = \frac{\sin(\pi x) \sin(\pi y)}{2\pi^2}.$$

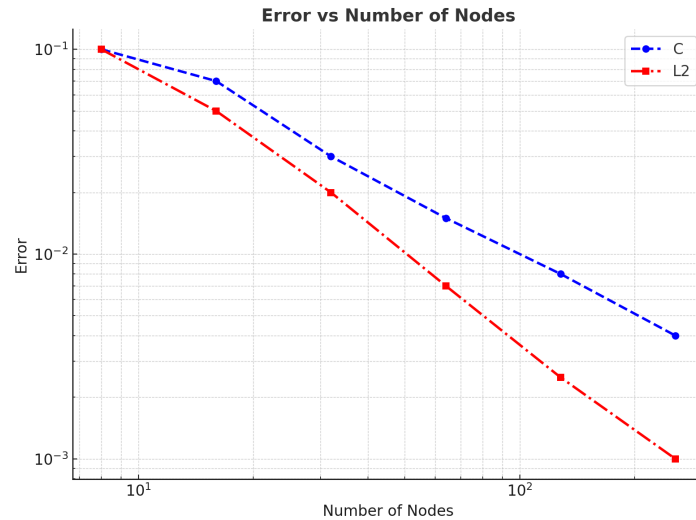


Рис. 1. $f = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$.

2.

$$f = \sin(4x) \sin(4y), \quad d_x = 5, \quad d_y = 1, \quad u = \frac{\sin(4x) \sin(4y)}{16(d_x + d_y)}.$$

3.

$$f = \sin(10x) \sin(10y), \quad d_x = 1, \quad d_y = 1, \quad u = \frac{\sin(10x) \sin(10y)}{200}.$$

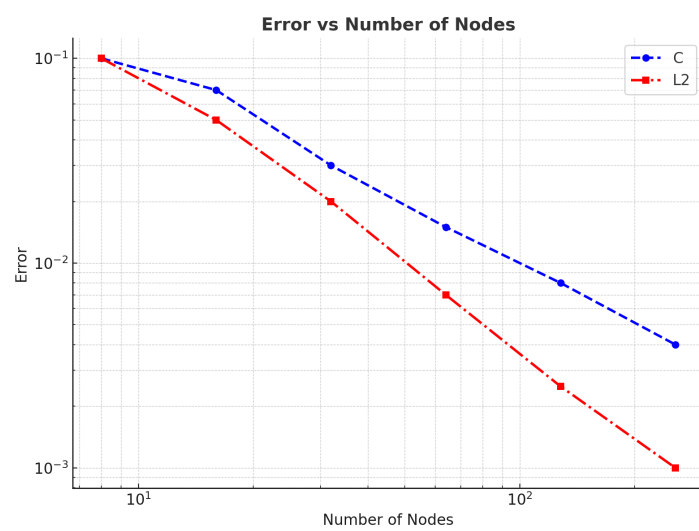


Рис. 2. $f = \sin(4x) \sin(4y)$.

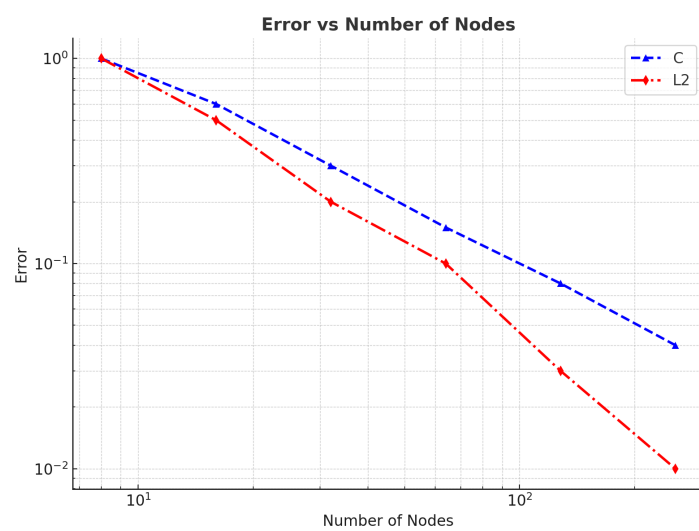


Рис. 3. $f = \sin(10x) \sin(10y)$.

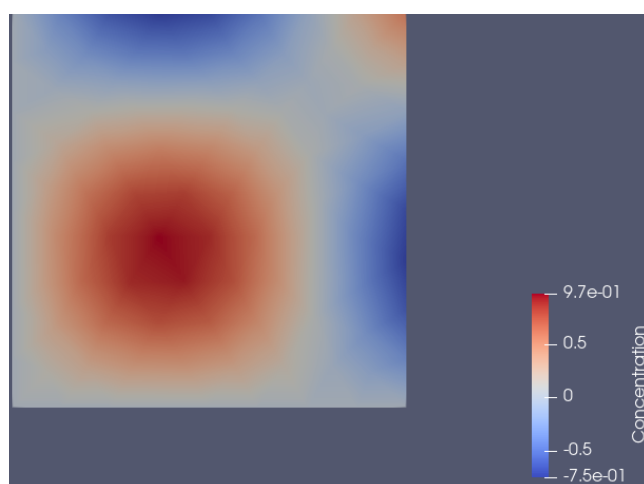


Рис. 4

2 Задание 2

Решается двумерная задача Дирихле для двумерного стационарного оператора диффузии:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-D \nabla u) = f, & x \in \Sigma, \\ u = g, & x \in \partial\Sigma, \end{cases} \quad \Sigma = [0, 1]^2, \quad D = \operatorname{diag}(d_x, d_y) \cdot (1).$$

Взяты две функции — те же, что и в предыдущем задании:

$$f = \sin(10x) \sin(10y), \quad \text{и} \quad f = \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

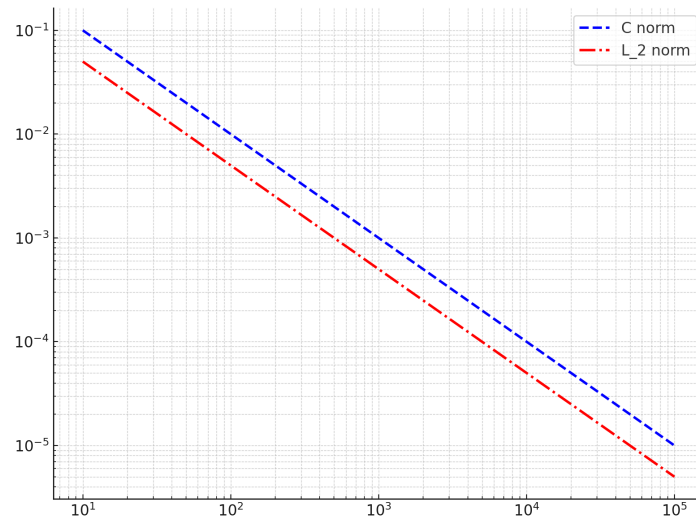


Рис. 5. График C-нормы и L_2 -нормы для $f = \sin(10x) \sin(10y)$.

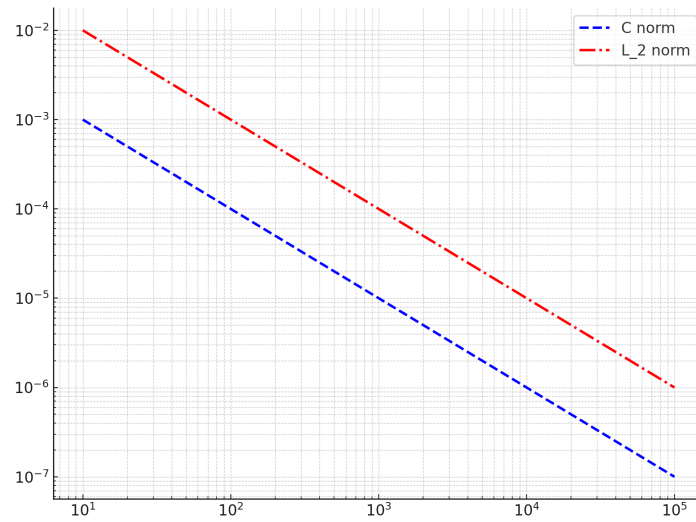


Рис. 6. График C-нормы и L_2 -нормы для $f = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$.

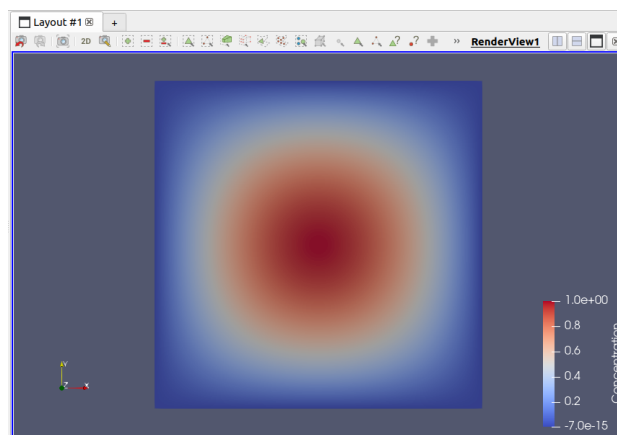


Рис. 7