Geometria e Algebra - MIS-Z

Terzo appello - Settembre

06/09/2022

Nome e Cognome: ______________________________

Corso di laurea: ______________________________

Matricola: ______________________________

Informazioni

Questo appello contiene 5 esercizi per un totale di 34 punti. Il punteggio ottenuto x sarà convertito in 30esimi nella maniera seguente:

- se $x \leq 30$, allora x sarà il voto in 30esimi;
- se $30 < x \leq 34$, allora il voto sarà 30 e Lode.

Le risposte devono essere opportunamente giustificate per ottenere il punteggio massimo. Le risposte indecifrabili non verranno valutate.

Il tempo a disposizione è di 3 ore. È vietato l'utilizzo di ogni tipo di calcolatrice.

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	

TOTALE

ESERCIZIO 1 [6 punti]. **Vero o Falso?**

Per ciascun asserto si stabilisca se è vero o falso, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta.

(a) I vettori $(-1, 0, 1), (2, 2, 1), (0, -3, 0) \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

(b) L'insieme $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

(c) Per ogni $n \geq 1$, se $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

(d) Siano V uno spazio vettoriale, $\mathcal{B}$ una base di V e $f : V \to V$ un endomorfismo di V. Se 0 è un autovalore di f allora f <u>non</u> è un automorfismo.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

ESERCIZIO 2 [6 punti]. **Sistema con parametro.**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si discuta la compatibilità del sistema

$$\begin{cases} kX_1 + X_3 = 3k \\ kX_2 + X_4 = 1 \\ X_1 + kX_3 = 3 \\ X_2 + kX_4 = 1 \end{cases}$$

e, quando il sistema è compatibile, se ne determinino il "numero" delle soluzioni e l'insieme delle soluzioni. Si riassuma quanto trovato nella tabella seguente:

k	**Compatibile?**	**Numero di soluzioni**	**Insieme delle soluzioni**

ESERCIZIO 3 [7 punti]. **Sottospazi vettoriali.**

(a) In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio vettoriale

$$U = Span\{(1,3,2,6),(0,1,-1,2),(1,2,0,3),(-1,1,3,5)\}.$$

Si determini una base e la dimensione di U.

(b) In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio vettoriale

$$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x-2y+z=0 \text{ e } -2x+3y-w=0\}.$$

Si determini una base e la dimensione di W.

(c) Si determini la dimensione e una base di $U + W$.

(d) Si determini una base e la dimensione di $U \cap W$.

(e) Si mostri che $U \cap W$ è isomorfo a $\mathbb{R}^2$ esibendo un isomorfismo $\varphi : U \cap W \to \mathbb{R}^2$.

ESERCIZIO 4 [9 punti]. **Un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.**

(a) Si enunci il teorema del rango.

(b) Si dimostri l'enunciato seguente:

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Si mostri che se f è suriettivo, allora f è un automorfismo.

(c) Per $k \in \mathbb{R}$ si consideri l'endomorfismo

$$\begin{array}{cccc} f_k : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (-kx + 6z, -4x - y + 2kz, -x + z). \end{array}$$

(c1) Si determini(no) il/i valore/i di k per cui f <u>non</u> è un automorfismo e per <u>uno</u> di questi valori si determini una base di $\ker(f_k)$ e una base di $\mathrm{Im}(f_k)$.

(c2) Per $k = 4$, si determini se f_4 è diagonalizzabile e in caso affermativo si trovi una base diagonalizzante.

ESERCIZIO 5 [6 punti]. **Geometria nello spazio.**

Si consideri lo spazio $\mathbb{E}^3$ con il riferimento cartesiano standard.

(a) Si scriva un'equazione cartesiana del piano π perpendicolare alla retta

$$r : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t - 3 \\ z = -3t \end{cases}$$

e passante per il punto $A(0, 2, 0)$.

(b) Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si determini la posizione reciproca del piano π e della retta r_h, dove r_h è definita dalle equazioni cartesiane

$$r_h : \begin{cases} X + hY - 5Z = 0 \\ Y + (h + 1)Z - 2 = 0. \end{cases}$$

Per i valori di h per cui π e r_h sono incidenti si determini il punto di intersezione.

(c) Si consideri la retta r_0 definita al punto (b) per $h = 0$ e il piano π trovato al punto (a). Si determini la retta s contenuta in π, perpedicolare a r_0 e passante per il punto $B(5, -1, 1)$.