

Initiation à l'algèbre A

Université de la Polynésie Française, 2021-2022

Devoir Maison 1

27/09/2021

Consignes : Résolvez les exercices suivants sur une feuille. Vous pouvez travailler les exercices avec vos camarades, mais la rédaction finale doit être la vôtre. Ce devoir maison est à rendre le **lundi 4 octobre à 10h30** (au début du cours). Cela vous donnera un **bonus maximum de 0.5pt** sur la note de votre CC2.

Ex 1. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $F = \{a, b, c, d, e\}$. On considère la fonction suivante:

$$\begin{array}{rcl} f : E & \rightarrow & F \\ 1 & \mapsto & a \\ 2 & \mapsto & b \\ 3 & \mapsto & b \\ 4 & \mapsto & d \\ 5 & \mapsto & b \end{array}$$

- Déterminer les ensembles $f(\{1, 4, 5\})$ et $f(E)$.
- Déterminer les images réciproques des ensembles $\{b\}$ et $\{a, c\}$.
- La fonction f , est-elle injective ? Justifiez votre réponse.
- La fonction f , est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.
- Est-il possible de définir une fonction injective entre E et F . Si oui, définissez-la, sinon expliquez pourquoi.
- Est-il possible de définir une fonction surjective entre E et F . Si oui, définissez-la, sinon expliquez pourquoi.
- Trouver un sous-ensemble non vide $G \subseteq E$ tel que la restriction $f|_G$ est injective et déterminer la fonction réciproque de $f|_G : G \rightarrow f(G)$.

Ex 2. On considère la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ (x, y) & \mapsto & x + 2y. \end{array}$$

- La fonction f est-elle injective ? Si oui démontrez-le, sinon expliquez pourquoi.
- La fonction f est-elle surjective ? Si oui démontrez-le, sinon expliquez pourquoi.

Ex 3. On considère la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} \setminus \{2\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x-2} + 1 \end{array}$$

- La fonction g est-elle injective ? Si oui démontrez-le, sinon expliquez pourquoi.
- La fonction g est-elle surjective ? Si oui démontrez-le, sinon expliquez pourquoi.

Ex 4. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction et soient $A, B \subseteq F$ deux ensembles. Montrer (par double inclusion) que

- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
- $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.