LEZIONE 17 - GEOMETRIA e ALGEBRA

09/05/23

APPLICAZIONI LINEARI

Def: Siano V e W due spazi vettoriali su K. Una funzione
$$f: V \to W$$
si dice un' APPLICAZIONE LINEARE se soddisfa le seguenti proprietà:

① $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, $\forall\, v_1, v_2 \in V$.

② $f(\lambda v) = \lambda f(v)$, $\forall\, \lambda \in K$, $\forall\, v \in V$.

Esempi

1) $V = W = \mathbb{R}^2$

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x+y, x)$.

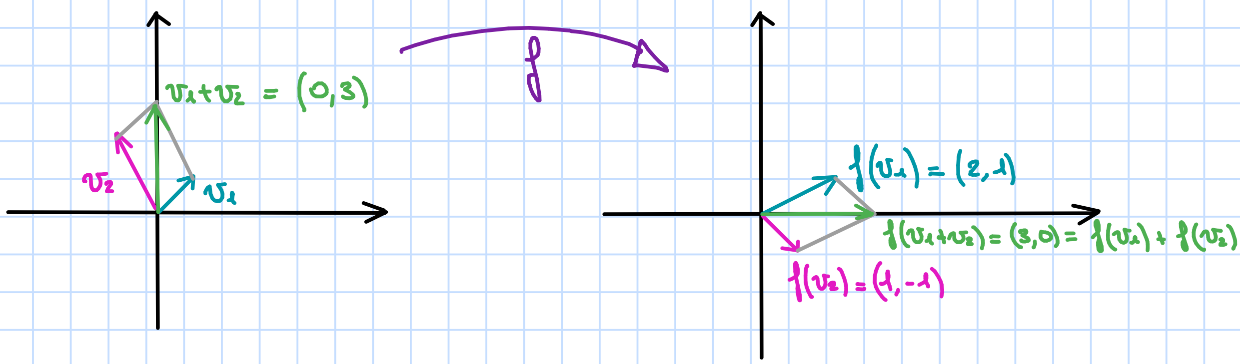
Mostriamo che f è un' applicazione lineare:

① Siano $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Allora:
$$f(v_1+v_2) = f((x_1+x_2, y_1+y_2)) = (x_1+x_2+y_1+y_2, x_1+x_2) =$$
$$= (x_1+y_1, x_1) + (x_2+y_2, x_2) = f(v_1) + f(v_2). \checkmark$$

② Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Allora
$$f(\lambda v) = f((\lambda x, \lambda y)) = (\lambda x + \lambda y, \lambda x) = \lambda(x+y, x) = \lambda f(v). \checkmark$$

Geometricamente

Siano $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (-1,2) \in \mathbb{R}^2$.



L' immagine del vettore somma v_1+v_2 è uguale alla somma delle immagini di v_1 e di v_2.

2) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2+y^2+z^2 \end{array}$

non è un' applicazione lineare.

Infatti, siano $v_1 = (1,0,0)$ e $v_2 = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$. Allora abbiamo:

$$f(v_1) = 1^2+0^2+0^2 = 1$$

$$f(v_2) = 1^2+1^2+1^2 = 3$$

$$f(v_1+v_2) = f((2,1,1)) = 2^2+1^2+1^2 = 6 \neq \overbrace{f(v_1)+f(v_2)}^{4 \,=}$$

Osservazioni: 1) Si noti che, come nel caso dei sottospazi vettoriali, ① e ② sono equivalenti all'unica condizione:

$$f(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2), \quad \forall\ \lambda, \mu \in K, \ \forall\ v_1, v_2 \in V.$$

2) Dalla prima osservazione si ottiene che $\forall\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, $\forall\ v_1, \dots, v_n \in V$

$$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$$ (f preserva le combinazioni lineari)

3) Sia $f: V \to W$ è un' applicazione lineare e siano 0_V e 0_W i vettori nulli rispettivamente di V e W. Allora:

$f(0_V) = 0_W$ (infatti $f(0_V) = f(0 \cdot 0_V) = 0 \cdot \underbrace{f(0_V)}_{\in W} = 0_W$).

Questa osservazione può essere utilizzata per mostrare che una funzione $f: V \to W$ non è un'applicazione lineare

Esempio: La funzione $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,1) \end{array}$

non è un' applicazione lineare poiché

$$f(\underbrace{(0,0,0)}_{0_{\mathbb{R}^3}}) = (0,1) \neq \underbrace{(0,0)}_{0_{\mathbb{R}^2}}.$$

Introduciamo un po' di terminologia:

Def: • Un' applicazione lineare $f: V \to V$ ($W=V$) è detta un ENDOMORFISMO di V

• Un' applicazione lineare $f: V \to K$ ($W=K$) è detta un FUNZIONALE LINEARE.

- Un'applicazione lineare $f: V \to W$ è detta un ISOMORFISMO se f è biunivoca (= iniettiva + suriettiva).
- Un isomorfismo $f: V \to V$ è detto un AUTOMORFISMO di V.

Esempi

1) L'applicazione lineare $f: V \to W$ tale che

$$f(v) = 0_W, \quad \forall\, v \in V$$

è detta APPLICAZIONE LINEARE NULLA.

2) L'applicazione lineare $id_V: V \to V$ tale che

$$id_V(v) = v, \quad \forall\, v \in V$$

è detta IDENTITÀ. È facile mostrare che id_V è biunivoca ed è pertanto un automorfismo di V.

3) Nella Lezione 12 avevamo già visto un esempio di applicazione lineare: l'ISOMORFISMO COORDINATO.

Sia V uno spazio vettoriale su K e sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V allora l'isomorfismo coordinato è l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} \varphi: V &\longrightarrow K^n \\ v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n &\longmapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n). \end{aligned}$$

che associa ad ogni elemento $v \in V$ le sue coordinate rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Abbiamo già mostrato che φ è biunivoca. Pertanto φ è un isomorfismo tra V e K^n.

4) Sia $V = U \oplus W$. Allora ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come

$$v = u + w, \quad u \in U \text{ e } w \in W.$$

Le funzioni:

$$\begin{aligned} \pi_1: V &\longrightarrow U \\ v = u + w &\longmapsto u \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} \pi_2: V &\longrightarrow W \\ v = u + w &\longmapsto w \end{aligned}$$

sono due applicazioni lineari chiamate rispettivamente PROIEZIONI di V su U e su W.

Diamo un significato geometrico all'applicazione lineare di proiezione.

Abbiamo visto che $\mathbb{R}^2 = \overbrace{<(1,0)>}^{U} \oplus \overbrace{<(0,1)>}^{W}$. Infatti $\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$

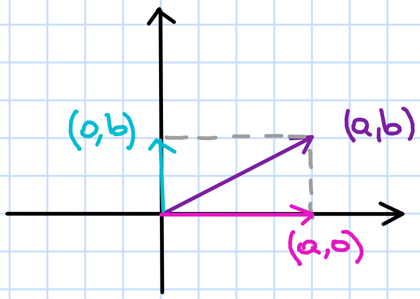
$$(a,b) = \underbrace{(a,0)}_{\in U} + \underbrace{(0,b)}_{\in W}.$$

Quindi in tal caso abbiamo:

$$\pi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow <(1,0)>$$
$$(a,b) \longmapsto (a,0)$$

$$\pi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow <(0,1)>$$
$$(a,b) \longmapsto (0,b)$$

ossia π_1 e π_2 sono rispettivamente le proiezioni sull'asse delle ascisse e sull'asse delle ordinate.



<u>Proposizione</u>: Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare di spazi vettoriali su K.
Siano $v_1, ..., v_n \in V$ e sia $w_i = f(v_i)$, $\forall\ i = 1, ..., n$.
Allora:

$v_1, ..., v_n$ sono lin. dipendenti $\Rightarrow$ $w_1, ..., w_n$ sono lin. dipendenti

$\Updownarrow$

$w_1, ..., w_n$ sono lin. indipendenti $\Rightarrow$ $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti

<u>Dim</u>: per esercizio.

<u>Proposizione</u>: Siano V e W due spazi vettoriali su K. Sia $\{v_1, ..., v_n\}$ una base di V e siano $w_1, ..., w_n$ vettori arbitrari di W.

Allora esiste un'unica applicazione lineare $f: V \to W$ tale che

$$f(v_i) = w_i\ ,\quad \forall\ \ i = 1, ..., n.$$

Dim

Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare tale che $f(v_i) = w_i,\ \forall\ i=1,\dots,n$.
Mostriamo che $\forall\ v \in V$, l'immagine $f(v)$ è univocamente determinata.

Poichè $\{v_1,\dots,v_n\}$ è una base di V, allora $\exists\ \lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$ tale che $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Ma allora, per linearità abbiamo:

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) \underset{f(v_i)=w_i}{=} \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n.$$

È possibile mostrare che f così definita è lineare ed è unica per costruzione

<u>Osservazione</u>: La proposizione precedente afferma che è possibile definire un'applicazione lineare $f: V \to W$ definendo semplicemente le immagini degli elementi di una base di V.

<u>Esempio</u>

Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che:

- $f((1,0,0)) = (3,2)$
- $f((0,1,0)) = (1,1)$
- $f((0,0,1)) = (-1,1)$

Qual è l'immagine di (a,b,c), $a,b,c \in \mathbb{R}$?

Siano $a,b,c \in \mathbb{R}$, allora per linearità abbiamo:

$$f((a,b,c)) = f(a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)) \underset{f \text{ lineare}}{=} a f((1,0,0)) + b f((0,1,0)) + c f((0,0,1)) =$$

decompongo (a,b,c) sulla base $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$$= a(3,2) + b(1,1) + c(-1,1) = (3a+b-c,\ 2a+b+c)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f((1,0,0)) = (3,2) \\ f((0,1,0)) = (1,1) \\ f((0,0,1)) = (-1,1) \end{array}}$$

Quindi f è l'applicazione lineare
$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (a,b,c) \mapsto (3a+b-c,\ 2a+b+c).$$

<u>Proposizione</u>: Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare. Allora:

1) Se S_V è un sottospazio di V, $f(S_V) = \{f(v) : v \in S_V\}$ è un sottospazio di W.

2) Se S_W è un sottospazio di W, $f^{-1}(S_W) = \{v \in V : f(v) \in S_W\}$ è un sottospazio di V.

<u>Dim</u>

1) Mostriamo che $f(S_V)$ è un sottospazio di W:

- $f(S_V) \neq \emptyset$: infatti, poichè $0_V \in S_V \Rightarrow f(0_V) = 0_W \in f(S_V)$.
- Siano $w_1, w_2 \in f(S_V)$ e $\lambda, \mu \in K$. Allora, per definizione di $f(S_V)$, $\exists\ v_1, v_2 \in S_V$ tali che $f(v_1) = w_1$ e $f(v_2) = w_2$. Quindi abbiamo:

$$\lambda w_1 + \mu w_2 = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2) \underset{\substack{\text{linearità} \\ \text{di } f}}{=} f(\overbrace{\lambda v_1 + \mu v_2}^{\in S_V}) \in f(S_V).$$

Quindi $f(S_V)$ è un sottospazio di W.

2) Mostriamo che $f^{-1}(S_W)$ è un sottospazio di V.

- $0_V \in f^{-1}(S_W)$ poichè $f(0_V) = 0_W \in S_W \Rightarrow f^{-1}(S_W) \neq \emptyset$.
- Siano $v_1, v_2 \in f^{-1}(S_W)$. Allora, per definizione di $f^{-1}(S_W)$, $\exists\ w_1, w_2 \in S_W$ tali che $w_1 = f(v_1)$ e $w_2 = f(v_2)$.

  Siano $\lambda, \mu \in K$. Mostriamo che $\lambda v_1 + \mu v_2 \in f^{-1}(S_W)$, o equivalentemente che $f(\lambda v_1 + \mu v_2) \in S_W$. Abbiamo:

$$f(\lambda v_1 + \mu v_2) \underset{f \text{ è lineare}}{=} \lambda f(v_1) + \mu f(v_2) = \lambda w_1 + \mu w_2 \underset{\substack{S_W \text{ è sottospazio} \\ \text{e } w_1, w_2 \in S_W}}{\in} S_W.$$

Concludiamo che $f^{-1}(S_W)$ è un sottospazio di V.

Consideriamo ora due casi particolari della proposizione precedente:

- $S_V = V \longrightarrow f(V)$ è l'IMMAGINE di f.
- $S_W = \{0_W\} \longrightarrow f^{-1}(\{0_W\})$ è il NUCLEO di f.

Più precisamente abbiamo la seguente definizione:

Def: Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare di spazi vettoriali su K. Il sottospazio di V:

Kernel $\to$ $$\mathrm{Ker}(f) := f^{-1}(\{0_W\}) = f^{-1}(0_W) = \{v \in V : f(v) = 0_W\}$$

è detto NUCLEO di f.

Il sottospazio di W:

$$\mathrm{Im}(f) := f(V) = \{f(v) : v \in V\}$$

è detto IMMAGINE di f.

Se $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ hanno dimensione finita, allora chiamiamo NULLITÀ la dimensione di $\mathrm{Ker}(f)$ e RANGO la dimensione di $\mathrm{Im}(f)$. Denotiamo il rango di f $\mathrm{rg}(f)$.

__Esempio__

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x+y, y+z)$$

- Determiniamo la dimensione e una base del nucleo di f. Partiamo dalla definizione:

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y, y+z) = (0,0)\} =$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0 \text{ e } y+z=0\} \underset{\uparrow}{=} \{(z,-z,z) : z \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{z(1,-1,1) : z \in \mathbb{R}^3\} = \langle (1,-1,1) \rangle$$

risolviamo il sistema omogeneo
$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

Quindi $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ e una base di $\mathrm{Ker}(f)$ è $\{(1,-1,1)\}$.

- Determinare la dimensione e una base di $\mathrm{Im}(f)$. Partiamo anche qui dalla definizione:

$$\mathrm{Im}(f) = \{f((x,y,z)) : x,y,z \in \mathbb{R}\} = \{(x+y, y+z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{x(1,0) + y(1,1) + z(0,1) : x,y,z \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0), \cancel{(1,1)}, (0,1) \rangle$$

$(1,1) = (1,0) + (0,1)$

Quindi $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ e $\{(1,0),(0,1)\}$ è una base di $\mathrm{Im}(f)$.

Ne segue che $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, ossia f è suriettiva.

Si noti che $\underset{3}{\dim(\mathbb{R}^3)} \overset{=}{=} \underset{1}{\dim(\mathrm{Ker}(f))} + \underset{2}{\mathrm{rg}(f)}$. Vedremo che questo risultato è vero per qualsiasi applicazione lineare $f: V \to W$ con $\dim(V) < +\infty$.

<u>Proposizione</u>: Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare di spazi vettoriali e siano $v_1, \dots, v_n \in V$. Allora

$$f(\langle v_1, \dots, v_n \rangle) = \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle.$$

<u>Dim</u>

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\}$$

$$f(\langle v_1, \dots, v_n \rangle) = \{f(v) : v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle\} = \{f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\} =$$

$$\underset{f \text{ lineare}}{=} \{\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\} = \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle.$$

<u>Osservazione</u>: Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, allora $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ e quindi, per la proposizione precedente,

$$\operatorname{Im}(f) = \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle.$$

Ne segue che l'immagine di f è generata dalle immagini degli elementi di una qualsiasi base di V. Quindi:

$$\operatorname{rg}(f) \le \dim(V).$$

Vediamo che per ogni applicazione lineare $f: V \to W$, con $\dim(V) < \infty$, la differenza $\dim(V) - \operatorname{rg}(f)$ è proprio uguale alla dimensione del nucleo di f. Abbiamo infatti il risultato seguente:

<u>Teorema del rango</u> ("nullità più rango")

Sia V uno spazio vettoriale di <u>dimensione finita</u> e sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare. Allora:

$$\underbrace{\dim(\operatorname{Ker}(f))}_{\text{NULLITÀ}} \underset{+}{+} \underbrace{\operatorname{rg}(f)}_{\text{RANGO}} = \dim(V).$$

<u>Idea della dim</u>

Sia $\dim(V) = n$.

Si noti innanzitutto che $\operatorname{Ker}(f)$ ha dimensione finita in quanto sottospazio di V. Sia quindi $\{v_1, \dots, v_p\}$ una base di $\operatorname{Ker}(f)$. Possiamo completare $\{v_1, \dots, v_p\}$ a una base di V: siano dunque $v_{p+1}, \dots, v_n \in V$ tali che $\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n\}$ sia una base di V.

La dimostrazione si conclude mostrando che $\{f(v_{p+1}), \dots, f(v_n)\}$ è una base di $\operatorname{Im}(f)$, da cui si ottiene

$$\underbrace{\dim(\operatorname{Im}(f))}_{\operatorname{rg}(f)} = n - p = \dim(V) - \dim(\operatorname{Ker}(f)).$$