Esercizi

9 - Geometria nel piano e nello spazio

Legenda:

😀 : *Un gioco da ragazzə, dopo aver riletto gli appunti del corso*
🤔 : *Ci devo pensare un po', ma posso arrivarci*
🤯 : *Non ci dormirò stanotte*

😀 **Esercizio 1.** Siano $A = (1,1)$, $B(1,3)$ e $C(1+\sqrt{3},4)$ tre punti del piano euclideo $\mathbb{E}^2$.

(a) Mostrare che A, B e C non sono allineati.

(b) Determinare l'angolo $B\widehat{A}C$ tra i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

(c) Determinare l'area del triangolo ABC.

(d) Determinare le coordinate del punto D del piano tale che $ABCD$ sia un parallelogramma.

(e) Mostrare che il parallelogramma trovato è un rombo.

😀 **Esercizio 2.** Sia $r_1 \subseteq \mathbb{E}^2$ la retta passante per i punti $P(0,-5)$ e $Q(-2,1)$.

(a) Scrivere le equazioni parametriche e un'equazione cartesiana di r_1.

(b) Sia r_2 la retta di equazioni parametriche

$$r_2 : \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+3. \end{cases}$$

Determinare la posizione reciproca delle rette r_1 e r_2. Se r_1 e r_2 sono incidenti, determinare il loro punto di intersezione e l'angolo $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tra r_1 e r_2.

(c) Determinare le coordinate dei punti di r_2 distanti 1 dalla retta r_1.

🤔 **Esercizio 3.** Si consideri in $\mathbb{E}^2$ il fascio di rette parallele

$$3X + 4Y + k = 0.$$

(a) Determinare il valore di $k \in \mathbb{R}$ corrispondente alla retta r_1 del fascio passante per il punto $P(5,-5)$.

(b) Determinare le equazioni parametriche della retta r_2 perpendicolare a r_1 e passante per il punto $Q(1, 1)$. Trovare le coordinate del punto di intersezione di r_1 e r_2.

(c) Determinare le equazioni delle rette parallele a r_1 a distanza 2 da r_1.

😀 **Esercizio 4.** Siano $A(2, -3, 1)$, $B(0, 1, 1)$ e $C(3, 3, -1)$ tre punti dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$.

(a) Determinare le equazioni parametriche e un'equazione cartesiana del piano π_1 che li contiene.

(b) Sia π_2 il piano di equazioni parametriche

$$\pi_2 : \begin{cases} x = 2t + s + 3 \\ y = t - s \\ z = 2s - 2. \end{cases}$$

Determinare la posizione reciproca di π_1 e π_2. Se π_1 e π_2 sono paralleli calcolare la distanza tra π_1 e π_2 altrimenti trovare le equazioni parametriche e cartesiane della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

🤔 **Esercizio 5.** Sia $\pi \subseteq \mathbb{E}^3$ il piano di equazione cartesiana

$$\pi : x + z = 0$$

Determinare le equazioni cartesiane dei due piani π_1 e π_2 perpendicolari a π e a distanza 1 da $O = (0, 0, 0)$.

🤔 **Esercizio 6.**

(a) Determinare le equazioni parametriche della retta $r_1 \subseteq \mathbb{E}^3$ passante per il punto $P(2, 1, 3)$ e parallela al vettore $v = (-1, -1, 1)$.

(b) Sia $r_2 \subseteq \mathbb{E}^3$ la retta di equazioni cartesiane

$$r_2 : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ z - 2 = 0. \end{cases}$$

Determinare la posizione reciproca di r_1 e r_2. Se r_1 e r_2 sono incidenti, determinare il loro punto di intersezione.

(c) Trovare le equazioni parametriche del piano π_1 passante per il punto $Q(1, -1, -2)$ e parallelo alle rette r_1 e r_2.

(d) Determinare un'equazione cartesiana del piano π_2 contenente r_1 e passante per il punto $A(1, -1, 6)$.

(e) Sia $r_3 = \pi_1 \cap \pi_2$. Determinare la retta r_4 complanare alle rette r_1 e r_2 e tale che $r_3 \cap r_4 = \{(0, 2, -1)\}$

🤔 **Esercizio 7.** Si considerino le rette seguenti al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$r_1 : \begin{cases} kx - 8z = k \\ y = 1. \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x - 2kz = 0 \\ y + (2-k)z = 0. \end{cases}$$

(a) Si studi, al variare di k, la posizione reciproca delle rette r_1 e r_2, ovvero si determinino i valori di k per i quali le rette sono sghembe e quelli per i quali le rette sono complanari (in quest'ultimo caso precisare se le rette sono incidenti, parallele distinte o coincidenti).

(b) Per i valori di k per cui le rette r_1 e r_2 sono incidenti si determini un'equazione cartesiana del piano π che contiene r_1 e r_2.

(c) Per $k = 0$ si determinino le equazioni parametriche di una retta ortogonale e incidente sia a r_1 che a r_2.

(d) Nel caso $k = 1$ si determini l'equazione cartesiana di un piano parallelo a r_1 e a r_2 e passante per il punto $P(2, 1, 0)$.