Aix-Marseille Université 2015-2016

Géométrie et Arithmétique

DEVOIR MAISON 1 (23/09/2016)

Exercice 1 On considère les vecteurs dans $\mathbb{R}^3$:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que u, v, w sont deux à deux non colinéaires.

b) Montrer que u, v, w sont coplanaires. Le triplet $\{u, v, w\}$ forme-t-il une base de $\mathbb{R}^3$?

c) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel k le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -k^2-1 \\ k \end{pmatrix} \in P(u, v)$, où $P(u, v)$ est le plan vectoriel engendré par u et v.

d) Considérons le vecteur $\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le triplet $\{u, v, \overrightarrow{i}\}$ forme-t-il une base de $\mathbb{R}^3$? Pourquoi ?

e) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ par rapport à la base $\{u, v, \overrightarrow{i}\}$.

Exercice 2 Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel k les couples suivants de vecteurs sont orthogonaux :

$$u = \begin{pmatrix} -2 \\ k \\ k \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \qquad u' = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix},\ v' = \begin{pmatrix} k^2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 3 Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Trouver un vecteur dans $\mathbb{R}^3$ de norme 1 orthogonal à u et v.

Exercice 4 Montrer que :

- $< u, v >= \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$;
- $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2)$.

Exercice 5 Démontrer que les quatre segments qui relient les milieux de deux côtés consécutifs d'un losange forment un rectangle.