Geometria e Algebra - MIS-Z

Terzo appello - Settembre - Soluzioni

06/09/2022

Nome e Cognome:

Corso di laurea:

Matricola:

Informazioni

Questo appello contiene 5 esercizi per un totale di 34 punti. Il punteggio ottenuto x sarà convertito in 30esimi nella maniera seguente:

- se $x \leq 30$, allora x sarà il voto in 30esimi;
- se $30 < x \leq 34$, allora il voto sarà 30 e Lode.

Le risposte devono essere opportunamente giustificate per ottenere il punteggio massimo. Le risposte indecifrabili non verranno valutate.

Il tempo a disposizione è di 3 ore. È vietato l'utilizzo di ogni tipo di calcolatrice.

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	

TOTALE

ESERCIZIO 1 [6 punti]. **Vero o Falso?**

Per ciascun asserto si stabilisca se è vero o falso, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta.

(a) I vettori $(-1,0,1),(2,2,1),(0,-3,0) \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti.

■ **VERO**

□ **FALSO**

Giustificazione

I vettori $(-1,0,1),(2,2,1),(0,-3,0)$ sono linearmente indipendenti se e solo se il rango dell'insieme $\{(-1,0,1),(2,2,1),(0,-3,0)\}$ è uguale a 3 o, equivalentemente, se la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo. Abbiamo

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 \neq 0,$$

quindi i vettori dati sono linearmente indipendenti.

(b) L'insieme $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

□ **VERO**

■ **FALSO**

Giustificazione

L'insieme W non è un sottospazio vettoriale, in quanto non è chiuso rispetto alla somma: $(1,0),(1,1)$ appartengono a W, ma $(2,1) = (1,0) + (1,1)$ non appartiene a W poiché la prima componente è strettamente superiore a 1.

(c) Per ogni $n \geq 1$, se $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

☐ **VERO**

■ **FALSO**

Giustificazione

Mostriamo che l'enunciato non è vero, ad esempio, per $n = 3$. Si considerino le matrici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}).$$
Calcolando il prodotto AB otteniamo
$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$
Quindi $AB \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ma $A \notin \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ e $B \notin \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(d) Siano V uno spazio vettoriale, $\mathcal{B}$ una base di V e $f : V \to V$ un endomorfismo di V. Se 0 è un autovalore di f allora f <u>non</u> è un automorfismo.

■ **VERO**

☐ **FALSO**

Giustificazione

Se 0 è un autovalore di f, allora esiste un vettore non nullo $v \in V$ tale che $f(v) = 0 \cdot v = \underline{0}$. Quindi $v \in \ker(f)$ e, poiché $v \neq \underline{0}$, si ha $\ker(f) \neq \{\underline{0}\}$. Ne segue che f non è iniettiva e quindi che f non è un automorfismo.

ESERCIZIO 2 [6 punti]. **Sistema con parametro.**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si discuta la compatibilità del sistema

$$\begin{cases} kX_1 + X_3 = 3k \\ kX_2 + X_4 = 1 \\ X_1 + kX_3 = 3 \\ X_2 + kX_4 = 1 \end{cases}$$

e, quando il sistema è compatibile, se ne determinino il "numero" delle soluzioni e l'insieme delle soluzioni. Si riassuma quanto trovato nella tabella seguente:

k	**Compatibile?**	**Numero di soluzioni**	**Insieme delle soluzioni**
$k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$	SI	1	$\left\{\left(3, \frac{1}{k+1}, 0, \frac{1}{k+1}\right)\right\}$
$k = -1$	NO	0	-
$k = 1$	SI	∞^2	$\{(3-s, 1-t, s, t)\,, s, t \in \mathbb{R}\}$

Svolgimento

Consideriamo la matrice dei coefficienti A e la matrice orlata $(A|b)$ associate al sistema:

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \end{pmatrix}, \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 & 0 & 3k \\ 0 & k & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & k & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & k & 1 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo innanzitutto i valori di k tali che $\det(A) \neq 0$. Infatti per tali valori avremo $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$ e quindi, per Rouché–Capelli, il sistema sarà compatibile ed ammetterà un'unica soluzione che determineremo con il metodo di Cramer.

Abbiamo

$$\det(A) = k^4 - 2k^2 + 1 = (k^2-1)^2 = (k-1)^2(k+1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \text{ o } k = -1.$$

<u>CASO 1</u>. Sia dunque $k \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. Applicando il metodo di Cramer otteniamo:

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3k & 0 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 & 1 \\ 3 & 0 & k & 0 \\ 1 & 1 & 0 & k \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{3k^4 - 6k^2 + 3}{k^4 - 2k^2 + 1} = 3.$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} k & 3k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{k^3 - k^2 - k + 1}{k^4 - 2k^2 + 1} = \frac{(k-1)^2(k+1)}{(k-1)^2(k+1)^2} = \frac{1}{k+1}.$$

CASO 1.

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} k & 0 & 3k & 0 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{0}{k^4 - 2k^2 + 1} = 0.$$

$$X_4 = \frac{\begin{vmatrix} k & 0 & 1 & 3k \\ 0 & k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{k^3 - k^2 - k + 1}{k^4 - 2k^2 + 1} = \frac{(k-1)^2(k+1)}{(k-1)^2(k+1)^2} = \frac{1}{k+1}.$$

Quindi per ogni $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ l'insieme delle soluzioni è

$$S_k = \left\{ \left(3, \frac{1}{k+1}, 0, \frac{1}{k+1} \right) \right\}.$$

CASO 2. Se $k = -1$ allora la matrice orlata è

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_3 \leftarrow R_3 + R_1$,
2. $R_3 \leftrightarrow R_4$,
3. $R_3 \leftarrow R_3 + R_2$,

si ottiene la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In tal caso abbiamo quindi $\operatorname{rg}(A) = 2$ e $\operatorname{rg}(A|b) = 3$. Dal teorema di Rouché–Capelli segue che il sistema è incompatibile.

CASO 3. Se $k = 1$ allora la matrice orlata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$,
2. $R_4 \leftarrow R_4 - R_2$,

si ottiene la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

CASO 3 In tal caso abbiamo quindi $\mathrm{rg}(A) = 2 = \mathrm{rg}(A|b)$. Dal teorema di Rouché–Capelli segue che il sistema è compatibile ed ammette $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni. Scegliendo X_3 e X_4 come variabili libere otteniamo l'insieme di soluzioni

$$S_1 = \{(3 - s, 1 - t, s, t)\, , s, t \in \mathbb{R}\}\, .$$

ESERCIZIO 3 [7 punti]. **Sottospazi vettoriali.**

(a) In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio vettoriale

$$U = Span\{(1,3,2,6),(0,1,-1,2),(1,2,0,3),(-1,1,3,5)\}.$$

Si determini una base e la dimensione di U.

Svolgimento

Per determinare una base e la dimensione di U ci basterà ridurre a gradini la matrice che ha per righe i quattro vettori che generano U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$,
2. $R_4 \leftarrow R_4 + R_1$,
3. $R_3 \leftarrow R_3 + R_2$,
4. $R_4 \leftarrow R_4 - 4R_2$,
5. $R_4 \leftarrow R_4 + 3R_3$,

si ottiene la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi la dimensione di U è 3 (numero di righe non nulle) e una base è $\{(1,3,2,6),(0,1,-1,2),(0,0,-3,-1)\}$ (le righe non nulle della matrice ridotta a scalini).

(b) In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio vettoriale

$$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z = 0 \text{ e } -2x + 3y - w = 0\}.$$

Si determini una base e la dimensione di W.

Svolgimento

Il sottoinsieme W coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x + 3y - w = 0. \end{cases}.$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$W = \{(3s - 2t, 2s - t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\} = Span\{(3,2,1,0),(-2,-1,0,1)\}.$$

Quindi W ha dimensione 2 e una base di W è $\{(3,2,1,0),(-2,-1,0,1)\}$.

(c) Si determini la dimensione e una base di $U + W$.

Svolgimento

Il sottopazio $U + W$ è generato dall'unione delle basi di U e di W, ovvero

$$U + W = Span\{(1, 3, 2, 6), (0, 1, -1, 2), (0, 0, -3, -1), (3, 2, 1, 0), (-2, -1, 0, 1)\}.$$

Similarmente al punto (a), determiniamo la dimensione e una base di $U+W$ riducendo a scalini la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_4 \leftarrow R_4 - 3R_1$,
2. $R_5 \leftarrow R_5 + 2R_1$,
3. $R_4 \leftarrow R_4 + 7R_2$,
4. $R_5 \leftarrow R_5 - 5R_2$,
5. $R_4 \leftarrow R_4 - 4R_3$,
6. $R_5 \leftarrow R_5 + 3R_3$,

si ottiene la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi la dimensione di $U + W$ è 3 e una base di $U + W$ è $\{(1, 3, 2, 6), (0, 1, -1, 2), (0, 0, -3, -1)\}$. In particolare notiamo che $U + W = U$.

(d) Si determini una base e la dimensione di $U \cap W$.

Svolgimento

Essendo $W \subseteq U + W$ e $U + W = U$, si ha $W \subseteq U$. Quindi $U \cap W = W$, da cui $U \cap W$ ha dimensione 2 e una base di $U \cap W$ è data dalla base di W trovata al punto (b).

(e) Si mostri che $U \cap W$ è isomorfo a $\mathbb{R}^2$ esibendo un isomorfismo $\varphi : U \cap W \to \mathbb{R}^2$.

Svolgimento

Nel punto (d) abbiamo visto che $U \cap W = W$. Ora W è isomorfo a $\mathbb{R}^2$ in quanto $\dim(W) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. Un isomorfismo è dato dall'isomorfismo coordinato

$$\varphi : W \to \mathbb{R}^2$$

definito nel modo seguente. Sia $w \in W$, allora esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $w = a(3, 2, 1, 0) + b(-2, -1, 0, 1) = (3a - 2b, 2a - b, a, b)$. Definiamo allora

$$\varphi(w) = \varphi(3a - 2b, 2a - b, a, b) = (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

ESERCIZIO 4 [9 punti]. **Un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.**

(a) Si enunci il teorema del rango.

Teorema

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora
$$\dim(\ker(f)) + \text{rg}(f) = \dim(V),$$
dove $\dim(\ker(f))$ denota la dimensione del nucleo di f e $\text{rg}(f)$ la dimensione dell'immagine di f.

(b) Si dimostri l'enunciato seguente:

Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Si mostri che se f è suriettivo, allora f è un automorfismo.

Dimostrazione

Se f è suriettivo allora $\mathrm{I}m(f) = V$, ovvero $\text{rg}(f) = \dim(V)$. Dal teorema del rango si ottiene quindi
$$\dim(\ker(f)) + \dim(V) = \dim(V) \Rightarrow \dim(\ker(f)) = 0.$$
Ne segue che $\ker(f) = \{\underline{0}\}$ e che quindi che f è iniettivo. In conclusione f è un endormorfismo iniettivo e suriettivo, ed è quindi un automorfismo.

(c) Per $k \in \mathbb{R}$ si consideri l'endomorfismo

$$\begin{array}{cccc} f_k: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (-kx+6z, -4x-y+2kz, -x+z). \end{array}$$

(c1) Si determini(no) il/i valore/i di k per cui f <u>non</u> è un automorfismo e per <u>uno</u> di questi valori si determini una base di $\ker(f_k)$ e una base di $\operatorname{Im}(f_k)$.

Svolgimento

Sia A_k la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Dall'espressione di f_k abbiamo

$$A_k = \begin{pmatrix} -k & 0 & 6 \\ -4 & -1 & 2k \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora f_k non è un automorfismo se e solo se $\mathrm{rg}(A_k) < 3$, ovvero se e solo se $\det(A_k) = 0$. Abbiamo

$$\det(A_k) = k - 6,$$

quindi f_k non è un automorfismo se e solo se $k = 6$.

Per $k = 6$ determiniamo una base del nucleo e dell'immagine di f_6:

- Abbiamo:

$$\begin{aligned} \ker(f_6) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f_6(x,y,z) = (0,0,0)\} = \\ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (-6x+6z, -4x-y+12z, -x+z) = (0,0,0)\} = \\ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \text{ e } y = 8z\} = \\ = Span\{(1,8,1)\}. \end{aligned}$$

  Quindi $\{(1,8,1\}$ è una base di $\ker(f_6)$.

- Abbiamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f_6) &= Span\{f_6(1,0,0), f_6(0,1,0), f_6(0,0,1)\} = \\ &= Span\{(-6,-4,-1), (0,-1,0), (6,12,1)\} = \\ &= Span\{(-6,-4,-1), (0,-1,0)\}, \end{aligned}$$

  dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che $(6,12,1) = -(-6,-4,-1) - 16(0,-1,0)$.

  Quindi $\{(-6,-4,-1), (0,-1,0)\}$ è una base di $\operatorname{Im}(f_6)$.

(c2) Per $k=4$, si determini se f_4 è diagonalizzabile e in caso affermativo si trovi una base diagonalizzante.

Svolgimento

Per $k=4$ abbiamo

$$\begin{array}{rccc} f_4: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (-4x+6z,-4x-y+8z,-x+z). \end{array}$$

Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. La matrice associata a f_4 rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$A_4=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ -4 & -1 & 8 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per studiare la diagonalizzabilità di f_4 cominciamo con il determinare gli autovalori di f_4, trovando le radici del polinomio caratteristico:

$$P_{f_4}(T)=\begin{vmatrix} -4-T & 0 & 6 \\ -4 & -1-T & 8 \\ -1 & 0 & 1-T \end{vmatrix}=-T^3-4T^2-5T-2=-(T+1)^2(T+2).$$

Pertanto gli autovalori di f sono -2 con molteplicità algebrica 1 e -1 con molteplicità algebrica 2. Per ognuno di essi determiniamo l'autospazio corrispondente:

- $V_{-2}(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ -4 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}=\ker(f)=Span\{(3,4,1)\}.$

- $V_1(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ -4 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}=$
  $=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -x+2z=0\big\}=\{(2t,s,t) : s,t\in\mathbb{R}\}=Span\{(0,1,0),(2,0,1)\}.$

Poiché $\dim(V_{-2}(f))=1$ e $\dim(V_{-1}(f))=2$, la molteplicità algebrica e geometrica di -1 e di -2 coincidono. Ne segue che l'operatore f è diagonalizzabile e l'unione delle basi dei due autospazi $V_{-2}(f)$ e $V_{-1}(f)$

$$\mathcal{B}'=\{(3,4,1),(0,1,0),(2,0,1)\}$$

è una base diagonalizzante per f.

ESERCIZIO 5 [6 punti]. **Geometria nello spazio.**

Si consideri lo spazio $\mathbb{E}^3$ con il riferimento cartesiano standard.

(a) Si scriva un'equazione cartesiana del piano π perpendicolare alla retta

$$r : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t - 3 \\ z = -3t \end{cases}$$

e passante per il punto $A(0, 2, 0)$.

Svolgimento

Se π è un piano perpendicolare alla retta r, allora il vettore direttore $(1, 2, -3)$ di r è un vettore normale a π. Quindi un'equazione cartesiana di π è della forma

$$X + 2Y - 3Z + d = 0.$$

Per determinare d imponiamo il passaggio per $A(0, 2, 0)$:

$$4 + d = 0 \Rightarrow d = -4.$$

Quindi un'equazione cartesiana di π è

$$X + 2Y - 3Z - 4 = 0.$$

(b) Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si determini la posizione reciproca del piano π e della retta r_h, dove r_h è definita dalle equazioni cartesiane

$$r_h : \begin{cases} X + hY - 5Z = 0 \\ Y + (h + 1)Z - 2 = 0. \end{cases}$$

Per i valori di h per cui π e r_h sono incidenti si determini il punto di intersezione.

Svolgimento

Per determinare la posizione reciproca del piano π e della retta r_h, studiamo il numero delle soluzioni del sistema

$$(\star) : \begin{cases} X + 2Y - 3Z - 4 = 0 \\ X + hY - 5Z = 0 \\ Y + (h + 1)Z - 2 = 0. \end{cases}$$

Infatti

- π e r_h sono incidenti se e solo se $(\star)$ ha un'unica soluzione;
- r_h è contenuta in π se e solo se $(\star)$ ha infinite soluzioni;
- r_h parallela disgiunta a π se e solo se $(\star)$ non ha soluzioni.

Si consideri la matrice orlata associata al sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & h & -5 & 0 \\ 0 & 1 & h + 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$,
2. $R_2 \leftrightarrow R_3$,
3. $R_3 \leftarrow R_3 - (h - 2)R_2$,

si ottiene la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & h+1 & 2 \\ 0 & 0 & -h^2+h & -2h \end{pmatrix}.$$

Pertanto, se $h \neq 0, 1$, allora il sistema $(\star)$ ha un'unica soluzione, ovvero π e r_h sono incidenti. In tal caso π e r_h si intersecano nel punto $\left(\frac{10+4h}{h-1}, -\frac{4}{h-1}, \frac{2}{h-1}\right)$.
Si vede inoltre che per $h = 0$ il sistema $(\star)$ ha ∞^1 soluzioni, ovvero $r_h \subseteq \pi$. Infine per $h = 1$ il sistema $(\star)$ non è compatibile, ovvero r_h e π sono paralleli disgiunti.

(c) Si consideri la retta r_0 definita al punto (b) per $h = 0$ e il piano π trovato al punto (a). Si determini la retta s contenuta in π, perpendicolare a r_0 e passante per il punto $B(5, -1, 1)$.

Svolgimento

Per $h = 0$ otteniamo la retta

$$r_0 : \begin{cases} X - 5Z = 0 \\ Y + Z - 2 = 0 \end{cases},$$

le cui equazioni parametriche sono

$$r_0 : \begin{cases} x = 5t \\ y = -t + 2 \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Un vettore direttore di r_0 è pertanto $v_{r_0} = (5, -1, 1)$. Sia $v_s = (a, b, c)$ un vettore direttore di s. Poiché s è perpendicolare a r_0 si deve avere

$$\langle v_{r_0}, v_s \rangle = 0 \Leftrightarrow 5a - b + c = 0 \Leftrightarrow c = b - 5a.$$

Quindi $v_s = (a, b, b - 5a)$ e s ha equazioni parametriche

$$s : \begin{cases} x = at + 5 \\ y = bt - 1 \\ z = (b - 5a)t + 1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Non resta che imporre che s è contenuta in π. A tale scopo imponiamo che per ogni t il punto $(at + 5, bt - 1, (b - 5a)t + 1)$ soddisfa l'equazione cartesiana di π:

$$at + 5 + 2(bt - 1) - 3(b - 5a)t + 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow (16a - b)t = 0 \Leftrightarrow 16a - b = 0 \Leftrightarrow b = 16a.$$

Quindi $v_s = (a, 16a, 11a)$, e poiché un vettore direttore è definito a meno di una costante non nulla, possiamo scegliere $a = 1$. Quindi la retta s cercata ha equazioni parametriche

$$s : \begin{cases} x = t + 5 \\ y = 16t - 1 \\ z = 11t + 1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$