# Initiation à l'algèbre A

Université de la Polynésie Française, 2021-2022

**Devoir Maison 2**

07/10/2021

**Consignes :** Résolvez les exercices suivants sur une feuille. Vous pouvez travailler les exercices avec vos camarades, mais la rédaction finale doit être la vôtre. Ce devoir maison est à rendre le **mercredi 13 octobre à 10h30** (au début du cours). Cela vous donnera un **bonus maximum de 0.5pt** sur la note de votre CC2.

**Ex 1.** a) Montrer que la composée de deux applications injectives est injective.

b) Montrer que si $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ sont deux fonctions telles que la composée $g \circ f$ est surjective, alors $g$ est surjective.

**Ex 2.** On considère le nombre complexe suivant:

$$z = \frac{7+i}{3+4i}.$$

a) Mettre $z$ sous forme algébrique.

b) Déterminer $w \in \mathbb{C}$ (en forme algébrique) tel que $zw = 1$.

c) Calculer $|z|$ et déterminer un argument de $z$.

d) Mettre $z$ sous forme trigonométrique et exponentielle.

e) Utiliser la forme exponentielle de $z$ pour déterminer un nombre complexe $u$ tel que $u^2 = z$.

**Ex 3.** Les parties de cet exercice sont indépendantes les unes des autres:

a) Soit $z = \frac{1}{1+2i} + \frac{i}{1-2i}$. Mettre $z$ sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

b) Soit $z = 3(\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{24}\right))$. Mettre $z^4$ sous forme algébrique.

c) Déterminer partie réelle et imaginaire du nombre complexe $e^{e^{i\theta}}, \theta \in \mathbb{R}$.

d) Montrer que dans le plan complexe les points images des nombres complexes $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 - i$, $z_3 = (\sqrt{3} - 1)i$ forment un triangle équilatéral.

**Ex 4.** On considère les nombres complexes suivants:

$$z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i, \qquad z_2 = 1 + \sqrt{3}i.$$

a) Représenter sous forme algébrique le nombre complexe $w = \dfrac{z_2}{z_1}$.

b) Mettre $z_1$ et $z_2$ sous forme exponentielle.

c) Utiliser (b) pour représenter sous forme exponentielle le nombre complexe $w$.

d) En déduire de (a) et (c) la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

e) Mettre sous forme algébrique le nombre complexe $w^{2020}$.

f) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ le nombre complexe $w^n$ est-il réel? Et pour quelles valeurs de $n$ est-il imaginaire pure?