Initiation à l'algèbre A - CC2 - Solutions

Université de la Polynésie Française, 2020-2021

14/10/2021

Fonctions et nombres complexes

Informations: Ce contrôle continu est noté sur 24 points. Toutefois votre note sera le minimum entre votre score et 20. Les calculatrices sont interdites et de toute manières elles ne sont pas nécessaires.

Ex 1. [8 points] Questions de cours et petites démonstrations:

a) Donner la définition de fonction injective et de fonction surjective.

b) Montrer que la composée de deux fonctions injectives est injective.

c) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = \bar{z}$.

d) Utiliser l'égalité $(e^{i\theta})^2 = e^{i2\theta}$ et la formule d'Euler pour démontrer les formules de duplication du sinus et du cosinus.

Solution

a) [1pt+1pt] Une fonction $f : E \to F$ este dite *injective* si $\forall\, x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$ on a $x = y$. La fonction f est dite *surjective* si $\forall\, y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

b) [2pt] Soient $f \colon E \to F$ et $g \colon F \to G$ deux applications injectives. Montrons que la composée $f \circ g$ est aussi injective. Soient donc $x, y \in E$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. On a:

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \overset{g \text{ injective}}{\Rightarrow} f(x) = f(y) \overset{f \text{ injective}}{\Rightarrow} x = y.$$

Donc $f \circ g$ est aussi injective.

c) [2pt] Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow$) Si $z \in \mathbb{R}$, alors $b = 0$. Donc $z = a$ et $\bar{z} = a = z$.

$\Leftarrow$) Si $z = \bar{z}$ alors $a + ib = a - ib$. Cela implique $2ib = 0$, donc $b = 0$. On en conclut que $z = a$ est réel.

d) [2pt] On rappelle l'identité d'Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Donc on a:

$$e^{i2\theta} = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

et

$$(e^{i\theta})^2 = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2 = (\cos(\theta))^2 - (\sin(\theta))^2 + i(2\sin(\theta)\cos(\theta)).$$

Puisque $e^{i2\theta} = (e^{i\theta})^2$, on a $\mathrm{Re}\left(e^{i2\theta}\right) = \mathrm{Re}\left((e^{i\theta})^2\right)$ et $\mathrm{Im}\left(e^{i2\theta}\right) = \mathrm{Im}\left((e^{i\theta})^2\right)$, donc:

$$\cos(2\theta) = (\cos(\theta))^2 - (\sin(\theta))^2$$

et

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta),$$

qui sont des formules de duplications du sinus et cosinus.

Ex 2. [4 points] Soit g la fonction suivante:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & 3n+1. \end{array}$$

a) La fonction g, est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

b) La fonction g, est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.

c) Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ & x & \mapsto & 3x+1. \end{array}$$

est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Solution

a) [1pt] La fonction g est injective. En effet, soient $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $g(m) = g(n)$. Alors on a

$$g(m) = g(n) \Rightarrow 3m+1 = 3n+1 \Rightarrow 3m = 3n \Rightarrow m = n.$$

b) [1pt] La fonction g n'est pas surjective. Par exemple $0 \notin g(\mathbb{Z})$. Pour voir cela, supposons par l'absurde que $0 \in g(\mathbb{Z})$. Alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $g(n) = 0$, mais alors:

$$g(n) = 0 \Rightarrow 3n+1 = 0 \Rightarrow n = -\frac{1}{3},$$

donc $n \notin \mathbb{Z}$, ce qui est une contradiction.

c) [1pt+1pt] Montrons d'abord que la fonction h est bijective.

- **Injectivité :** Soient $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que $h(x) = h(y)$. Alors on a

  $$h(x) = h(y) \Rightarrow 3x+1 = 3y+1 \Rightarrow 3x = 3y \Rightarrow x = y.$$

  Donc h est injective

- **Surjectivité :** Soit $y_0 \in \mathbb{Q}$. On a que $x_0 = \frac{y_0-1}{3} \in \mathbb{Q}$ est un antécédent de y_0. En effet on a

  $$h(x_0) = h\left(\frac{y_0-1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{y_0-1}{3} + 1 = y_0.$$

  Donc h est surjective.

Puisque h est bijective, il existe une bijection réciproque qui est définie par:

$$\begin{array}{rccc} h^{-1}: & \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ & x & \mapsto & \frac{x-1}{3}. \end{array}$$

En effet, pour tout $x \in \mathbb{Q}$ on a

$$(h^{-1} \circ h)(x) = h^{-1}(h(x)) = h^{-1}(3x+1) = \frac{(3x+1)-1}{3} = x,$$

c'est-à-dire $h^{-1} \circ h = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$.

Ex 3. [7 points] On considère la fonction suivante:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x. \end{array}$$

a) Déterminer les ensembles $f(\{(0,1),(-2,3),(11,7)\})$ et $f(\{(x,y): 1 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 1\})$.

b) La fonction f, est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

c) La fonction f, est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.

d) Déterminer les images réciproques de l'ensemble $\{1\}$ et de l'intervalle $[2,4]$. Décrire ces images réciproques géométriquement dans le plan $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

e) Trouver un sous-ensemble infini $A \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tel que la restriction $f|_A$ est injective.

f) Trouver un sous-ensemble infini $B \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tel que la restriction $f|_B$ est constante.

Solution

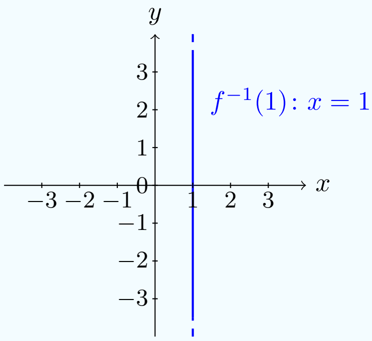
a) [1pt] On a $f(\{(0,1),(-2,3),(11,7)\}) = \{0,-2,11\}$ et $f(\{(x,y): 1 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 1\}) = [1,3]$.

b) [1pt] Non, f n'est pas injective, puisque $f((0,0)) = f((0,1)) = 0$.

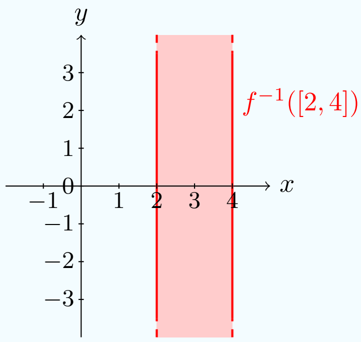
c) [1pt] Oui, f est surjective. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ un antécédent est donné par $(x,0) \in \mathbb{R}^2$, puisque $f((x,0)) = x$.

d) [2pt] On a :

- $f^{-1}(1) = \{(1,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$.



- $f^{-1}([2,4]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [2,4] \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$.



e) [1pt] Considérons l'ensemble $A = \mathbb{R}\times\{1\} = \{(x,1) : x \in \mathbb{R}\}$. La restriction de f à A:

$$f|_A: \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ (x,1) & \mapsto & x. \end{array}$$

est injective. En effet, soient $(x_1,1),(x_2,1) \in A$ tels que $f|_A(x_1,1) = f|_B(x_2,1)$. Alors on a $x_1 = x_2$.

f) [1pt] Considérons l'ensemble $B = \{1\}\times\mathbb{R} = \{(1,y) : y \in \mathbb{R}\}$. La restriction de f à B:

$$f|_B: \begin{array}{ccc} B & \to & \mathbb{R} \\ (1,y) & \mapsto & 1. \end{array}$$

est constante, puisque pour tout $(1,y) \in B$ on a $f|_B(1,y) = 1$.

Ex 4. [5 points] On considère le nombre complexe suivant:

$$z = \frac{6+2i}{2-i}.$$

a) Mettre z sous forme algébrique.

b) Calculer $|z|$ et déterminer l'argument principal de z.

c) Mettre z sous forme trigonométrique et exponentielle.

d) Montrer que z^{2022} est un nombre imaginaire pure.

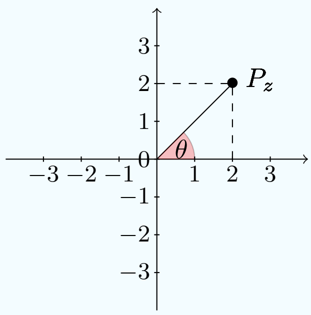
e) Soient A et B les points images respectivement de 1 et z dans le plan complexe. Soit C le point du plan tel que les triangles AOB et BOC sont semblables ($\frac{OA}{OB} = \frac{AB}{BC} = \frac{OB}{OC}$). Déterminer le module et un argument du nombre complexe w d'affixe C, et en déduire que z est une racine carrée de w.

Solution

a) [1pt] On a :

$$z = \frac{6+2i}{2-i} = \frac{6+2i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{12+6i+4i-2}{5} = \frac{10+10i}{5} = 2+2i.$$

b) [1pt] On a $|z| = |2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. En représentant z dans le plan complexe on trouve qu'un argument de z est $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$.



c) [1pt] Une forme trigonométrique de z est $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Une forme exponentielle de z est $z = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$.

d) [1pt] On a

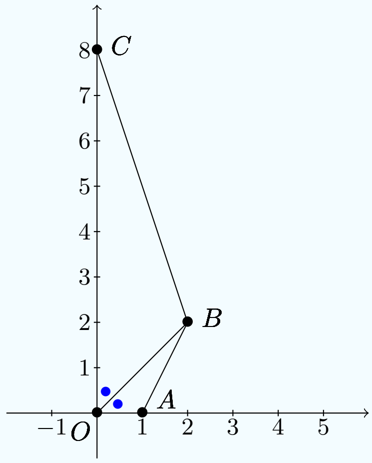
$$z^{2022} = \left(2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{2022} = 2^{2022+1011}e^{i\left(\frac{2022\pi}{4}\right)}.$$

Or $2022 = 8 \cdot 252 + 6$, donc

$$z^{2022} = 2^{3033}e^{i\left(\frac{(8\cdot 252+6)\pi}{4}\right)} = 2^{3033}e^{i\left(2\cdot 252\pi + \frac{3\pi}{2}\right)} = 2^{3033}e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}.$$

Donc $\arg(z^{2022}) = \frac{3\pi}{2}$ ce qui implique que z est un nombre imaginaire pure.

e) [1pt] On est dans la situation géométrique suivante:



Pour déterminer le module, on sait que $OA = |1| = 1$, $OB = |z| = 2\sqrt{2}$ et $OC = |w|$. Puisque les triangles AOB et BOC sont semblables, on a

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{|w|} \Rightarrow |w| = (2\sqrt{2})^2 = 8.$$

L'argument de w est donné par l'angle $A\hat{O}C = A\hat{O}B + B\hat{O}C$, où $A\hat{O}B = \arg(z)$. Puisque les triangles AOB et BOC sont semblables, on a $A\hat{O}B = B\hat{O}C$, donc

$$\arg(w) = A\hat{O}C = 2 \cdot A\hat{O}B = 2 \cdot \arg(z) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

En conclusion $w = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$. Puisque $z^2 = \left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 8e^{i\frac{\pi}{2}} = w$, on trouve aussi que z est une racine carrée de w.