Initiation à l'algèbre A - CC2

Université de la Polynésie Française, 2021-2022

14/10/2021

Fonctions et nombres complexes

Informations: Ce contrôle continu est noté sur 24 points. Toutefois votre note sera le minimum entre votre score et 20. Les calculatrices sont interdites et de toute manière elles ne sont pas nécessaires.

Ex 1. [**8 points**] Questions de cours et petites démonstrations:

a) Donner la définition de fonction injective et de fonction surjective.

b) Montrer que la composée de deux fonctions injectives est injective.

c) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = \bar{z}$.

d) Utiliser l'égalité $(e^{i\theta})^2 = e^{i2\theta}$ et la formule d'Euler pour démontrer les formules de duplication du sinus et du cosinus.

Ex 2. [**4 points**] Soit g la fonction suivante:

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 3n+1. \end{array}$$

a) La fonction g, est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

b) La fonction g, est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.

c) Montrer que la fonction

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & 3x+1. \end{array}$$

est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Ex 3. [**7 points**] On considère la fonction suivante:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x. \end{array}$$

a) Déterminer les ensembles $f(\{(0,1),(-2,3),(11,7)\})$ et $f(\{(x,y) : 1 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 1\})$.

b) La fonction f, est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

c) La fonction f, est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.

d) Déterminer les images réciproques de l'ensemble $\{1\}$ et de l'intervalle $[2,4]$. Décrire ces images réciproques géométriquement dans le plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

e) Trouver un sous-ensemble infini $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que la restriction $f|_A$ est injective.

f) Trouver un sous-ensemble infini $B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que la restriction $f|_B$ est constante.

Ex 4. [**5 points**] On considère le nombre complexe suivant:

$$z = \frac{6+2i}{2-i}.$$

a) Mettre z sous forme algébrique.

b) Calculer $|z|$ et déterminer l'argument principal de z.

c) Mettre z sous forme trigonométrique et exponentielle.

d) Montrer que z^{2022} est un nombre imaginaire pure.

e) Soient A et B les points images respectivement de 1 et z dans le plan complexe. Soit C le point du plan tel que les triangles AOB et BOC sont semblables ($\frac{OA}{OB} = \frac{AB}{BC} = \frac{OB}{OC}$). Déterminer le module et un argument du nombre complexe w d'affixe C, et en déduire que z est une racine carrée de w.