Aix-Marseille Université 2015-2016

# Géométrie et Arithmétique

## Exercices complémentaires

**Exercice 1** Pour tout réel $m$, on considère le plan $P_m$ de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation cartésienne :

$$m^2x + (2m-1)y + mz = 3$$

1. Pour quelles valeurs du paramètre $m$ le point $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ appartient-il à $P_m$ ?
2. Pour quelle valeur de $m$ le vecteur $n = \begin{pmatrix}2\\-\frac{5}{2}\\-1\end{pmatrix}$ est-il normal à $P_m$ ?
3. Monter qu'il existe un unique point $Q$ appartenant à tous les plans $P_m$.

**Exercice 2** Soient $A$ et $B$ deux points de $\mathbb{R}^2$. Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M$ de $\mathbb{R}^2$ tels que le produit scalaire $<\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}>$ soit égal à zéro.

1. Soit $I$ le milieu du segment $\overline{AB}$. Démontrer qu'un point $M$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si
$$<\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM}> = <\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IB}> .$$
2. En déduire que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

**Exercice 3** Soient $A$ et $B$ deux points distincts de $\mathbb{R}^3$ muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1. Décrire l'ensemble des points $M$ de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0}$.
2. Décrire l'ensemble des points $M$ de l'espace vérifiant $<\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}> = \overrightarrow{0}$.
3. Décrire l'ensemble des points $M$ de l'espace vérifiant $<\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM}> = <\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}>$.
4. Décrire l'ensemble des points $M$ de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$.