Esercizi
7 - Applicazioni Lineari

Legenda:

😀 : *Un gioco da ragazzə, dopo aver riletto gli appunti del corso*
🤔 : *Ci devo pensare un po', ma posso arrivarci*
🤯 : *Non ci dormirò stanotte*

😀 **Esercizio 1.** Si determinino quali tra le seguenti sono applicazioni lineari, giustificando la risposta in modo esaustivo:

(a) $f_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x \end{array}$

(b) $f_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x^2,y^2) \end{array}$

(c) $f_3: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & (2x,0,-x) \end{array}$

(d) $f_4: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+1,x+y+z,z-3) \end{array}$

(e) $f_5: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\leq 3}[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ p(X) & \mapsto & (p(0),p(1)) \end{array}$

😀 **Esercizio 2.** Sia $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che

$$f(1,2,-1) = (1,0,0,2), \qquad f(0,1,-3) = (0,1,2,-5) \quad \text{e} \quad f(2,2,2) = (1,2,4,-8).$$

(a) Si determini $f(1,8,-17)$.
(b) Si determinino la dimensione e una base di $\ker(f)$.
(c) Si determinino la dimensione e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

🤔 **Esercizio 3.** Si stabilisca, giustificando opportunamente la rispossta, se esiste una funzione lineare $f:\mathbb{R}_{\leq 2}[X] \to \mathbb{R}$ che verifichi simultaneamente le condizioni seguenti:

- $f(X^2 - X) = 1$.
- $f(1) = 2$
- $f(X+3) = 3$

- $f(X^2 + 4) = 4$

Se esiste, dire se f è unica e in tal caso determinare $f(aX^2 + bX + c)$ in funzione di $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. Si consideri l'applicazione lineare:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (x+3y, -x, 2x-y). \end{array}$$

(a) Si determinino la dimensione e una base del nucleo di f.

(b) Si determinino la dimensione e una base dell'immagine di f.

(c) Si determini se f è iniettiva e/o suriettiva.

Esercizio 5. Si consideri l'endomorfismo:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (3x+z, x+2y+5z, -x+4y+9z). \end{array}$$

(a) Si scriva la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(b) Si determini il rango di f e se ne deduca se f è iniettiva e/o suriettiva.

(c) Si determini una base del nucleo e dell'immagine di f.

(d) Sia $W = \langle (1,2,3), (1,1,1) \rangle$. Si determini una base di $f(W)$.

(e) Si determini l'insieme delle controimmagini di $(1,-2,1)$, ossia $f^{-1}(1,-2,1) := \{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = (1,-2,1)\}$.

Esercizio 6. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare di spazi vettoriali e siano $v \in V$ e $w \in W$ tali che $f(v) = w$. Denotiamo $f^{(-1)}(w)$ l'insieme delle controimmagini di w. Dimostrare che $f^{(-1)}(w) = v + \ker(f) := \{v + v_1 : v_1 \in \ker(f)\}$. (Procedere per doppio contenimento.)

Esercizio 7. Per $k \in \mathbb{R}$ si condiseri l'endomorfismo $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1-k & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ k & -k & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino tutti i valori di k tali che f_k è un isomorfismo.

(b) Per $k = 0$ si determini la matrice associata all'isomorfismo inverso f_0^{-1} rispetto alla base canonica.

😀 **Esercizio 8.** Si consideri l'endomorfismo

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, -3x, x+z). \end{array}$$

(a) Si scriva la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$.

(b) Dopo aver verificato che $\mathcal{B}' = \{(0,1,1),(2,5,1),(0,0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, si scriva la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^3})$ del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$.

(c) Ricordando che $M_{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^3})$, calcolare la matrice $M_{\mathcal{B}'}(f)$ di f rispetto alla base $\mathcal{B}'$

🤔 **Esercizio 9.** Siano V e W due spazi vettoriali su K e sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare.

(a) Si dimostri che se $v_1, \dots, v_n \in V$ sono linearmente dipendenti, allora $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente dipendenti.

(b) Si mostri con un controesempio che l'implicazione inversa non è vera.

(c) Si assuma ora che f è iniettiva. Si mostri che $v_1, \dots, v_n \in V$ sono linearmente dipendenti se e solo se $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente dipendenti.

(d) Si usi il punto (c) per dimostrare che se f è iniettiva e U è un sottospazio di V allora $\dim(f(U)) = \dim(U)$.

🤔 **Esercizio 10.** Una matrice A si dice *diagonalizzabile* se è simile a una matrice diagonale D, ossia se esiste P invertibile tale che $A = P^{-1}DP$. Mostrare che se A è diagonalizzabile, allora per ogni $n \geq 1$ anche A^n è diagonalizzabile.

😀 **Esercizio 11.** Determinare se gli operatori di $\mathbb{R}^3$ associati alle seguenti matrici rispetto alla base canonica sono diagonalizzabili e in tal caso trovare una base diagonalizzante.

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Si proceda per i punti seguenti:

- Calcolare il polinomio caratteristico e determinare gli autovalori.
- Per ogni autovalore si determinino la molteplicità algebrica e geometrica e si trovi una base dell'autospazio corrispondente.
- Determinare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ diagonalizzante.
- Per $i = 1, 2, 3$ determinare, se esiste, una matrice invertibile P tale che $P^{-1}A_iP$ è diagonale.

😀 **Esercizio 12.** Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(1, 2, 1) = (1, 3, 3)$, $(1, 1, 0) \in \ker(f)$ e $(0, 1, 2)$ è un autovettore relativo all'autovalore 1. Discutere la diagonalizzabilità di f.

🤔 **Esercizio 13.** Per $k \in \mathbb{R}$, si consideri l'operatore f di $\mathbb{R}^3$ associato alla seguente matrice rispetto alla base canonica $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-k & k-2 & k \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori di f in funzione di k.

(b) Per quali valori di k l'operatore f è diagonalizzabile?

(c) Per $k = 2$ calcolare A^n per ogni $n \geq 1$.

🤯 **Esercizio 14.** Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice triangolare superiore tale che

- $a_{ii} = a_{jj}$, $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$;
- esistono $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, con $j > i$, tali che $a_{ij} \neq 0$.

Dimostrare che A non è diagonalizzabile.