Initiation à l'algèbre A - Examen 2ème chance

Université de la Polynésie Française, 2020-2021

20/11/2020

Informations: Cet examen est noté sur 24 points. Toutefois votre note sera le minimum entre votre score et 20. Les calculatrices sont interdites et de toute manières elles ne sont pas nécessaires. Utilisez une feuille pour les exercices 1 et 2 et une autre pour les exercices 3 et 4. Bon courage !

Ex 1. [6 points] Les parties de cet exercice sont indépendantes les unes des autres:

a) Soit $z = \frac{1}{1+2i} + \frac{i}{1-2i}$. Mettre z sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

b) Soit $z = 3(\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{24}\right))$. Mettre z^4 sous forme algébrique.

c) Déterminer partie réelle et imaginaire du nombre complexe $e^{e^{i\theta}}, \theta \in \mathbb{R}$.

d) Montrer que dans le plan complexe les points images des nombres complexes $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 - i$, $z_3 = (\sqrt{3} - 1)i$ forment un triangle équilatéral.

Ex 2. [6 points] Soit f la fonction suivante:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ & z & \mapsto & |z|, \end{array}$$

où $|z|$ représente le module du nombre complexe z.

a) La fonction f, est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.

b) La fonction f, est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

c) Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Décrire l'ensemble $f^{-1}(a)$. Interpréter géometriquement l'ensemble $f^{-1}(a)$.

d) Déterminer un sous-ensemble infini $E \subseteq \mathbb{C}$ tel que la restriction $f|_E$ est injective.

e) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $f(z) = 1$ si et seulement si $z^{-1} = \overline{z}$.

Ex 3. [6 points] On considère l'ensemble:

$$A = \{\varnothing, 1, \{2\}\}.$$

a) Soit $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$. Lister les éléments de $A \cap B$.

b) Lister les éléments de $\left(A \cup \left\{1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}\right\}\right) \setminus \mathbb{Q}$.

c) Lister les éléments de $\mathscr{P}(A)$, l'ensemble des parties de A.

d) Lister les éléments de $A \times \{a, b\}$.

e) Soient C et D deux ensembles. Montrer que $\mathscr{P}(C \cap D) \subseteq \mathscr{P}(C) \cap \mathscr{P}(D)$.

Ex 4. [6 points]

a) Montrer par contraposée l'énoncé suivant:

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \textit{si } n^3 \textit{ est pair alors } n \textit{ est pair.}$$

b) Montrer par l'absurde que $\sqrt[3]{2}$ est irrationnel. (Utiliser, si nécessaire, l'énoncé du point (a).)