

Esercizi

8 - PRODOTTO SCALARE E TEOREMA SPETTRALE

Legenda:

- 😊 : Un gioco da ragazzi, dopo aver riletto gli appunti del corso
😞 : Ci devo pensare un po', ma posso arrivarci
🤪 : Non ci dormirò stanotte

😊 **Esercizio 1.** Dimostrare che il prodotto scalare standard in \mathbb{R}^n

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

è un prodotto scalare, ovvero è bilineare, simmetrico e definito positivo.

😊 **Esercizio 2.** Siano $v, w \in \mathbb{R}^2$ e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard in \mathbb{R}^2 . Dimostrare l'*identità di Lagrange*:

$$\langle v, w \rangle + (\det(v, w))^2 = \|v\|^2 \|w\|^2,$$

dove $\det(v, w)$ è il determinante della matrice 2×2 le cui colonne sono le coordinate dei vettori v e w .

😊 **Esercizio 3.** Determinare per qual* valor* del parametro reale k le coppie di vettori seguenti sono ortogonali rispetto al prodotto scalare standard di \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 :


- a) $v_1 = (-2, k, k)$ e $w_1 = (1, k, 1)$ in \mathbb{R}^3 .
- b) $v_2 = (k, 1)$ e $w_2 = (k^2, -1)$ in \mathbb{R}^2 .

😊 **Esercizio 4.** Si consideri \mathbb{R}^3 con il prodotto scalare standard. Siano $v = (1, 1, 2), w = (0, -2, 1) \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Verificare che v e w sono ortogonali.
- (b) Si determini un vettore u ortogonale a v e a w .
- (c) Verificare che $\{u, v, w\}$ è una base ortogonale di \mathbb{R}^3 e dedurne una base ortonormale.

😊 **Esercizio 5.** Sia V uno spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dimostrare le seguenti asserzioni:


- a) $\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2)$;
 b) $\|v\|^2 + \|w\|^2 = \frac{1}{2}(\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2)$;
 c) se $\|v\| = \|w\|$, allora $v + w$ e $v - w$ sono ortogonali. Interpretare questo risultato geometricamente quando $V = \mathbb{R}^2$ o $V = \mathbb{R}^3$.

 **Esercizio 6.** Si consideri uno spazio euclideo V con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Siano $v, w \in V$. Definiamo


$$p_v(w) := \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$


la *proiezione* di w su v .

- (a) Sia $w_1 := w - p_v(w)$. Si dimostri che w_1 è ortogonale a v e che $\text{Span}\{v, w\} = \text{Span}\{v, w_1\}$ (si ricorda che $\text{Span}\{v, w\}$ denota il sottospazio generato da v e w).
- (b) Sia ora $V = \mathbb{R}^4$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard. Siano $v = (1, 1, 1, 1)$ e $w = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$ e sia $W = \text{Span}\{v, w\}$.
- (b1) Si determini una base di W^\perp .
- (b2) Si usi il punto (a) per determinare una base ortogonale di W e di W^\perp .
- (b3) Si deduca dal punto (b2) una base ortonormale di \mathbb{R}^4 .

 **Esercizio 7.** Si consideri \mathbb{R}^2 con il prodotto scalare standard. Siano $v = (1, 3)$ e $w = (2, 1)$ in \mathbb{R}^2 .

- (a) Si calcoli l'angolo $\theta \in [0, \pi]$ compreso tra v e w .
- (b) Si calcoli la proiezione $p_w(v)$ di v su w .
- (c) Si verifichi che il vettore $p_w(v)$ trovato nel punto (b) è collineare a w e che $v - p_w(v)$ è ortogonale a w . (Interpretare tale fatto geometricamente, rappresentando nel piano cartesiano i vettori v , w e $p_w(v)$.)

 **Esercizio 8.** Si consideri \mathbb{R}^3 con il prodotto scalare standard. Determinare, se esistono, il/i valore/i di $k \in \mathbb{R}$ tali che l'angolo tra i vettori $v = (1, 0, 1)$ e $(1, 1, k)$ sia $\frac{\pi}{6}$. Per tal* valor* di k si calcoli la proiezione di w su v .

 **Esercizio 9.** Si consideri \mathbb{R}^3 con il prodotto scalare standard. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Si determini una base ortonormale diagonalizzante per f (si noti che l'esistenza di tale base è garantita dal teorema spettrale poiché A è simmetrica).

🙄 **Esercizio 10.** Si consideri \mathbb{R}^3 con il prodotto scalare standard. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Si determini una base ortonormale diagonalizzante per f . (*Può risultare utile quanto dimostrato nell'esercizio 6a.*)

🤖 **Esercizio 11.** Dimostrare che i quattro segmenti che congiungono i punti medi di due lati consecutivi di un rombo formano un rettangolo.

