TD 5

Groupes, sous-groupes et homomorphismes de groupes

Exercice 1. Soit $G = (\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\times$ le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.

(a) Lister tous les éléments de G.

(b) Pour tout $a \in G$, décrire le sous-groupe $\langle a \rangle$ engendré par a.

(c) Le groupe G, est-il cyclique ?

(d) Peut-on trouver deux éléments $a, b \in G$ tels que $G = \langle a, b \rangle := \{a^n b^m : n, m \in \mathbb{Z}\}$?

(e) Lister tous les sous-groupes de G.

(f) Soit $H = \langle 3 \rangle$. Décrire G/H.

Exercice 2. Montrer que si G est un groupe non abélien alors G n'est pas cyclique.

Exercice 3.

(a) Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Lesquels sont cycliques ?

(b) Soit $G = \langle g \rangle$ un groupe cyclique d'ordre n.

  (b1) Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique.

  (b2) Montrer que pour tout diviseur d de n il existe un unique sous-groupe de G d'ordre d.

Exercice 4. Soient $(G_1, *)$ et $(G_2, \triangle)$ deux groupes.

(a) Définir sur $G_1 \times G_2$ une opération qui en fasse un groupe.

(b) Montrer que G_1 et G_2 sont isomorphes à deux sous-groupes de $G_1 \times G_2$.

(c) Soit H un sous-groupe de $G_1 \times G_2$. Est-il toujours vrai que $H = H_1 \times H_2$, où H_1 et H_2 sont des sous-groupes respectifs de G_1 et G_2 ?

Exercice 5. Soit $(G, \cdot)$ un groupe et soit $f : G \to X$ une fonction bijective. Soient $x, y \in X$ et soient $g_1, g_2 \in G$, tels que $x = f(g_1)$ et $y = f(g_2)$. On pose alors

$$x * y := f(g_1 g_2).$$

(a) Montrer que $(X, *)$ est un groupe.

(b) Montrer que f est un isomoprhisme de groupes.

(c) Pourquoi l'hypothèse que f est injective est-elle nécessaire ?

Exercice 6. Existe-t-il un isomorphisme entre les groupes $\left(\frac{\mathbb{Z}}{4Z}, +\right)$ et $\left(\left(\frac{\mathbb{Z}}{8Z}\right)^{\times}, \cdot\right)$? Si oui, donnez un tel isomorphisme explicitement. Sinon, expliquez pourquoi un isomorphisme ne peut pas exister.

Exercice 7. Soit $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}, \cdot)$ le groupe multiplicatif des matrices inversibles d'ordre 2 à coefficients réels.

(a) Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & (\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot) & \to & (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \\ & A & \mapsto & \det(A). \end{array}$$

est un homomorphisme de groupes.

(b) Déterminer le noyau et l'image de φ et appliquer le premier théorème d'isomorphisme.

(c) Déterminer lesquels parmi ces sous-ensembles sont des sous-groupes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$:

i) $H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0) \right\}$

ii) $H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$

iii) $H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$

(d) Montrer que H_1 est isomorphe à $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Exercice 8. Soit $(G, \cdot)$ un groupe et soit $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des autormorphismes de G.

(a) Montrer que si $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(G)$, alors $\varphi \circ \psi \in \mathrm{Aut}(G)$.

(b) Montrer que $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ est un groupe, dont on déterminera l'élément neutre et l'inverse pour chaque élément.

Exercice 9. Soit $(G, \cdot)$ un groupe et soit $g \in G$. On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_g\colon & G & \to & G \\ & x & \mapsto & gxg^{-1}. \end{array}$$

(a) Montrer que, pour tout $g \in G$, φ_g est un homomorphisme de groupes.

(b) Montrer que φ_g est un automorphisme de G.

(c) On considère maintenant l'application :

$$\begin{array}{rccc} f\colon & G & \to & \mathrm{Aut}(G) \\ & g & \mapsto & \varphi_g. \end{array}$$

Montrer que g est un homomorphisme de groupes.

(d) Montrer que si G est commutatif, alors $\varphi_g = \mathrm{id}_G$, pour tout $g \in G$.