LEZIONE 6 - GEOMETRIA e ALGEBRA 23/03/22

Nella Lezione 5 abbiamo introdotto il prodotto di matrici, cioè una funzione:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{m,n}(K) \times \mathcal{M}_{n,p}(K) &\longrightarrow \mathcal{M}_{m,p}(K) \\ (A,B) &\longmapsto C = AB \end{aligned}$$

definita nel modo seguente:
Se $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ allora $C = AB = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,p}(K)$, dove

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

esempio:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{2\times 4} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}}_{4\times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} -14 & -26 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}}_{2\times 2}$$

Prodotto di matrici in $\mathcal{M}_n(K)$

Quando $m=n=p$, il prodotto di matrici diventa un'operazione binaria interna su $\mathcal{M}_n(K)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(K) \times \mathcal{M}_n(K) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(K) \\ (A, B) &\longmapsto AB \end{aligned}$$

che date due matrici quadrate di ordine n restituisce come risultato una matrice, anch'essa quadrata di ordine n.

Abbiamo visto, nella lezione precedente, che I_n è l'elemento neutro (destro e sinistro) del prodotto in $\mathcal{M}_n(K)$.

Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ per cui esiste un inverso rispetto al prodotto è detta invertibile. Più precisamente abbiamo la definizione seguente.

Def: $A \in M_n(K)$ si dice invertibile se esiste $B \in M_n(K)$ tale che

$$AB = I_n = BA.$$

Osservazione: • Se B esiste allora è unica.

Dim: Siano B, C tali che
- $AB = I_n = BA$
- $AC = I_n = CA$

allora: $C = CI_n \underset{AB=I_n}{=} C(AB) \overset{\text{associatività}}{=} (CA)B \underset{CA=I_n}{=} I_nB = B$

$\Rightarrow C = B.$

Chiamiamo dunque B l'inversa di A e la denotiamo A^{-1}.

• Per mostrare che $B = A^{-1}$ basta verificare una delle due identità:

$$AB = I_n \quad \text{o} \quad BA = I_n$$

L'altra sarà automaticamente verificata (purtroppo non abbiamo abbastanza strumenti per dimostrare questo fatto a questo punto del corso).

Esempi

1) I_n è invertibile $\forall\, n \geq 1$.

Infatti $I_n \cdot I_n = I_n \Rightarrow (I_n)^{-1} = I_n$

2) O_n (la matrice quadrata con tutti zero) non è invertibile.

Infatti $\forall\, A \in M_n(K)$ abbiamo $AO_n = O_n \; (\neq I_n)$.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ è invertibile?

Vediamo se esiste una matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ tale che:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{BA = I_2} \xRightarrow[\text{otteniamo un sistema}]{} \begin{cases} a+b=1 \\ a+b=0 \\ c+d=0 \\ c+d=1 \end{cases}$$

impossibile!

Quindi $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ non è invertibile.

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ è invertibile?

Cerchiamo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+3b=1 \\ 2a+4b=0 \\ c+3d=0 \\ 2c+4d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-2b \\ c=-3d \\ -2d=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-2 \\ c=3/2 \\ d=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Si può verificare facilmente che A^{-1} verifica anche $AA^{-1} = I_2$ (noi abbiamo mostrato che $A^{-1}A = I_2$)

<u>Proposizione</u>: Siano $A, B \in M_n(K)$ invertibili, con inverse rispettivamente A^{-1} e B^{-1}. Allora anche AB è invertibile e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

<u>Dim</u>

Abbiamo:

$$AB(B^{-1}A^{-1}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{associatività}}}{=} A(BB^{-1})A^{-1} \overset{\substack{B^{-1} \text{ è l'inversa di } B \\ \downarrow}}{=} A\, I_n A^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ AI_n = A}}{=} AA^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ A^{-1} \text{ è l'inversa di } A}}{=} I_n$$

Quindi $AB(B^{-1}A^{-1}) = I_n \Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

<u>Ancora un po' di terminologia.</u>

<u>Def</u>: Sia

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$$

La trasposta di A è la matrice

qui sto dicendo che nel posto (i,j) metto l'elemento a_{ji} di A.

$$A^T = (a_{ji})_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le i \le m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

a volte in letteratura si trova anche: A^t, ${}^tA$ o ${}^TA$.
Noi metteremo la "T" in alto a destra della matrice corrispondente.

si noti che la i-esima colonna di A^T è la i-esima riga di A.

esempio:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \implies A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \implies B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 0 & 8 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

Si noti che l'operazione di trasposizione lascia fissi gli elementi sulla diagonale di una matrice quadrata

Def: Una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_n(K)$ si dice SIMMETRICA se

$$A^T = A, \quad \text{cioè} \quad a_{ij} = a_{ji}, \ \forall \ 1 \le i, j \le n.$$

Si dice invece ANTISIMMETRICA se

$$A^T = -A, \quad \text{cioè} \quad a_{ij} = -a_{ji}, \ \forall \ 1 \le i, j \le n.$$

esempio:

a_{12} a_{21} a_{24} a_{42}

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ è simmetrica

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 6 \\ -3 & -5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ è antisimmetrica

non è un caso che tutti gli elementi sulla diagonale di B sono uguali a zero

Osservazione: Se $A = (a_{ij})$ è antisimmetrica allora $\forall i$:

$$a_{ii} = -a_{ii} \implies 2a_{ii} = 0 \implies a_{ii} = 0$$

Def: Una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_n(K)$ si dice ORTOGONALE se

$$(A^T)A = I_n = A(A^T)$$

ovvero se $A^{-1} = A^T$.

esercizio: Mostrare che $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

è ortogonale.

Vogliamo inoltre dare nomi specifici alle seguenti tipologie di matrici

$$\underset{\text{triangolare inferiore}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{triangolare superiore}}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{diagonale}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{scalare}}{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

Def: Una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_n(K)$ si dice:

- TRIANGOLARE INFERIORE (risp. SUPERIORE) se $a_{ij} = 0$ per $j > i$ (risp. se $a_{ij} = 0$ per $j < i$)
- DIAGONALE se A è sia triangolare inferiore che triangolare superiore, ossia se
- SCALARE se A è diagonale e tutti gli elementi della diagonale sono uguali. In tal caso $\exists\, \lambda \in K$ tale che

$$A = \lambda I_n.$$

esempio: La matrice nulla $O_n \in \mathcal{M}_n(K)$ è triang. inf., triang. sup., diagonale e scalare.