

Esercizi

1 - CAMPI E SPAZI VETTORIALI

Legenda:

😊 : Un gioco da ragazzi, dopo aver riletto gli appunti del corso

😓 : Ci devo pensare un po', ma posso arrivarci

🤪 : Non ci dormirò stanotte

😊 **Esercizio 1.** Consideriamo \mathbb{R}^2 con le operazioni di addizione e moltiplicazione definite nel modo seguente:

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

$$\star : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (a, b) \star (c, d) := (ac, bd).$$

Mostrare che $(\mathbb{R}^2, +, \star)$ non è un campo, identificando almeno una proprietà di campo che non è soddisfatta dalle operazioni $+$ e \star .

😓 **Esercizio 2.** Consideriamo \mathbb{R}^2 con le operazioni di addizione e moltiplicazioni definite nel modo seguente:

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

$$\triangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (a, b) \triangle (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Mostrare che $(\mathbb{R}^2, +, \triangle)$ è un campo. In particolare determinare l'elemento neutro rispetto a $+$, l'elemento neutro rispetto a \triangle , l'opposto di $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ rispetto a $+$ e l'inverso di $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{elemento neutro di } +\}$ rispetto a \triangle .


😓 **Esercizio 3.** Sia V l'insieme delle funzioni continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Consideriamo le operazioni $+$ e \cdot su V definite nel modo seguente:

$$\forall f, g \in V, \quad f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) + g(x)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, f \in V, \quad \lambda \cdot f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda f(x)$$


Mostrare che $(V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale reale procedendo per i seguenti step:

- (1) Mostrare che il risultato di $+$ e \cdot appartiene a V .
- (2) Mostrare che $+$ e \cdot verificano le 8 proprietà di spazio vettoriale. Durante la discussione sottolineare i punti in cui si utilizzano le proprietà di \mathbb{R} come campo.

 **Esercizio 4.** Consideriamo su $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ le operazioni seguenti:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a + b := ab \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+, \lambda \cdot a := a^\lambda$$

Si noti che l'operazione $+$ non è altro che la moltiplicazione usuale di numeri reali. Mostrare che $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale reale.

 **Esercizio 5.** Sia V uno spazio vettoriale su K .

- (a) Siano $\lambda \in K$ e $v \in V$ tali che $\lambda \cdot v = \underline{0}$. Dimostrare che $\lambda = 0$ o $v = \underline{0}$.
- (b) Siano $\lambda, \mu \in K$ e $v \in V$, $v \neq \underline{0}$, tali che $\lambda \cdot v = \mu \cdot v$. Allora $\lambda = \mu$.