INITIATION A L'ALGÈBRE - A

TD # 3 : Nombres complexes et trigonométrie

Exercice 1. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$\frac{1}{4i},\ \frac{3+i}{2-3i},\ \frac{1}{3+i}+\frac{1}{3-i},\ \frac{2+i}{1-2i}+\frac{i}{1+i},\ (1-2i)^6.$$

Exercice 2. Mettre sous forme algébrique :

$$\frac{3+6i}{3-4i},\quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2,\quad \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i},\quad \frac{52i}{1-2i},\quad \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3,$$
$$\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7},\quad -\frac{2}{1-i\sqrt{3}},\quad \frac{1}{(1+2i)(3-i)},\quad \frac{1+2i}{1-2i}.$$

Exercice 3. Montrer que pour tout nombre complexe a, b, z on a

$$|z-a|^2+|z-b|^2=2\left|z-\frac{a+b}{2}\right|^2+\frac{|b-a|^2}{2}.$$

Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Exercice 4. Soit z un nombre complexe. Montrer que

$$|z|\geq|\mathrm{Re}\,(z)|\geq\mathrm{Re}\,(z),\ \text{ et }\ |z|\geq\mathrm{Im}\,(z)|\geq\mathrm{Im}\,(z).$$

Exercice 5. Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz'\neq-1$. Démontrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel, et préciser son module.

Indication : on pourra utiliser les formes exponentielles $z=e^{i\theta}$ et $z'=e^{i\theta'}$ ainsi que les formules d'Euler.

Exercice 6. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$3+3i,\ -1-i\sqrt{3},\ -\tfrac{4}{3}i,\ -2,\ e^{i\theta}+e^{i2\theta}\ (\theta\in]-\pi,\pi[)$$
$$1+i,\ 1+i\sqrt{3},\ \sqrt{3}+i,\ \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i},\ 1+e^{i\theta}\ (\theta\in]-\pi,\pi[)$$
$$1+i(1+\sqrt{2}),\ \frac{\tan(\phi)-i}{\tan(\phi)+i}\ \left(\phi\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)$$
$$\frac{1}{1+i\tan(\theta)}\ \left(\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)$$

Exercice 7. Déterminer le module et un argument des nombres complexes $e^{e^{i\theta}}$ et $e^{i\theta}+e^{2i\theta}$ et $e^{i\theta}-1$ avec $\theta\in\mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, avec $r\in\mathbb{R}_+^*$, $\theta\in\mathbb{R}$. Ecrire sous forme trigonométrique $\overline{z}$, $-z$ et $\dfrac{1}{z}$.

Exercice 9. Ecrire sous forme exponentielle

$$-3,\ -2i,\ 1+i,\ 1-i,\ 1+i\sqrt{3},\ \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i},\ 1+e^{i\frac{\pi}{3}},\ e^{i\frac{4\pi}{3}}-1.$$

Exercice 10. Mettre sous forme algébrique

$$(1+i)^{21},\ \left(\frac{\sqrt{3}+1}{1+i}\right)^{20}.$$

Exercice 11. Développer

$$\cos(5\theta),\ \sin(5\theta),\ \sin(2x)\sin(3x),\ \cos(5x)\cos(7x).$$

Exercice 12. Linéariser
$$\cos(x)\sin^2(x),\ \cos^2(x)\sin(x),\ \cos^4(\theta)\sin^2(\theta).$$

Exercice 13. Déterminer l'ensemble E des nombres complexes tels que $|z-i| = |z-iz| = |z-1|$.

Exercice 14. Déterminer l'ensemble $E = \{z \in \mathbb{C}\ :\ \ |z+3| = 2|z|\}$.

Exercice 15. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(k\theta)$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(k\theta)$.

Exercice 16.

1. Evaluer $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(a+kb)}$.
2. En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kb)$.

Exercice 17. Soit a, b deux nombres complexes distincts. Déterminer $E_\theta = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{a,b\} \mid \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \theta \quad [\pi]\right\}$

1. Dans le cas où $\theta \equiv 0 \quad [\pi]$,
2. Dans le cas où $\theta \not\equiv 0 \quad [\pi]$.

Exercice 18.

1. Déterminer les racines 4-èmes de -1.
2. Déterminer les racines 5-èmes de $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.
3. Déterminer les racines 6-èmes de $27i$.

Exercice 19. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^2-(5-14i)z-2(5i+12) = 0$, $z^2-(3+4i)z-1+5i = 0$, $z^2-(3+4i)z-1+5i = 0$ et $z^4+2z^2+4 = 0$.

Exercice 20. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

1. $iz^3 = (1+i)z^2-(1-2i)z-(6+8i)$ sachant qu'elle possède une solution réelle.
2. $z^4-z^3+z^2-z+1 = 0$
3. $z^7 = \overline{z}$
4. $(z-1)^5 = (z+1)^5$
5. $e^z = 3\sqrt{3}-3i$.

Exercice 21. [**Construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier**]. On va construire un pentagone régulier avec un **compas et une règle non graduée**.

On note $w = e^{\frac{2i\pi}{5}}$

1. Montrer que w est une racine 5-ème de l'unité.
2. Calculer $1+w+w^2+w^3+w^4$.
   On pose $A = w+w^4$, $B = w^2+w^3$.
3. Calculer $A+B$ et AB.
4. En déduire la valeur de A et B.
5. En déduire la valeur de w puis celle de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
   Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on note $\mathscr{C}$ le cercle unité centré en O, C le point d'affixe -1, B le point d'affixe i et P_0 le point d'affixe 1. On note M le milieu de $[OC]$.
6. Comment peut-on obtenir M avec la règle et le compas ?
   Le cercle de centre M et de rayon $[MB]$ coupe la droite (OC) en D. La médiatrice de $[OD]$ coupe $\mathscr{C}$ en un point P_1.
7. Déterminer l'affixe de P_1.
8. En déduire une construction d'un pentagone régulier.

Exercice 22. On cherche à déterminer tous les réels t tels que
$$\cos t = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

1. Démontrer qu'il existe une unique solution dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$. Dans la suite, on notera t_0 cette solution.
2. Calculer $\cos(2t_0)$, puis démontrer que $\cos(4t_0) = -\cos(t_0)$.
3. En déduire t_0.
4. Résoudre l'équation.

Exercice 23. On souhaite montrer que arctan(2) n'est pas un multiple rationnel de π. Soient (a_n) et (b_n) les suites numériques réelles définies par $(1+2i)^n = a_n + ib_n$.

1. Montrer que (a_n) vérifie la relation de récurrence $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 5a_n,\ n \geq 0$.
2. Montrer par récurrence que $a_n \equiv 2^{n+1} \mod 5$ pour tout entier $n \geq 1$
3. Supposons que arctan(2) soit un multiple rationnel de π, i.e. $\exists p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\arctan(2) = \pi \frac{p}{q}$.
   (a) Montrer qu'il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que $(1+2i)^n \in \mathbb{R}$. On pourra écrire sous forme exponentielle $1+2i$ en fonction de arctan(2).
   (b) Conclure.