Esercizi sulle coniche

1. In un piano euclideo con sistema di riferimento $O_{\vec{i},\vec{j}}$ si consideri la conica $\mathcal{C}_t$ di equazione:

$$(2t-1)xy + x + y + x^2 + y^2 + xy = 0$$

   (a) Si determinino i valori di t per i quali la conica $\mathcal{C}_t$ è degenere e si scrivano, per ognuno di tali valori di t, le equazioni di una affinità tra $\mathcal{C}_t$ e una conica la cui equazione è in forma canonica.

   (b) si determini il valore di t per il quale $\mathcal{C}_t$ è una parabola non degenere. Si determinino l'asse di simmetria della parabola e le equazioni di una rotazione che porta l'asse in una retta parallela all'asse x.

   (Appello A del 24 gennaio 2008)

2. Sia $\mathcal{C}$ una conica in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Dimostrare che:

   - $\mathcal{C}$ è un'iperbole $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ ha 2 punti impropri;
   - $\mathcal{C}$ è una parabola $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ ha 1 punto improprio;
   - $\mathcal{C}$ è un'ellisse $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ non ha punti impropri;

   cioè ellissi, iperboli e parabole sono caratterizzate dal numero di punti impropri.

3. Nel piano proiettivo reale $\mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ si considerino le due coniche:

$$\mathcal{C}_1 : X_0^2 - 2X_0X_2 = 0$$

$$\mathcal{C}_2 : -3X_0^2 + 4X_0X_1 - X_1^2 + 2X_0X_2 + X_2^2 = 0$$

   (a) Si dimostri che $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ sono proiettivamente equivalenti.

   (b) Si scrivano le equazioni di una proiettività che manda $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$.

   (Appello B del 18 febbraio 2010)

4. Sia $\mathcal{D}$ la conica nel piano proiettivo reale di equazione

$$2X_0^2 + 3X_0X_1 + 2X_0X_2 + 3X_1X_2 = 0$$

   Si scriva l'equazione della forma canonica di $\mathcal{D}$.
   (Appello A del 29 gennaio 2010)

5. Sia $\mathcal{C} : f(x,y) = 0$ un'iperbole e sia A_{00} la matrice dei termini di secondo grado associata a f. Dimostrare che $\mathcal{C}$ è equilatera se e solo se $\mathrm{tr}A = 0$.

Suggerimenti per gli esercizi:

(1b) Ricordare che la direzione dell'asse della parabola è data:

- dall'autovettore relativo all'autovalore 0 della matrice A_{00} oppure
- dal punto improprio della parabola.

Quindi proseguire come nell'esercizio 4 del tutorato 7.
La rotazione cercata sarà quindi $\sigma_{P,-\vartheta}$ dove P è un punto qualsiasi del piano e ϑ l'angolo che l'asse della parabola forma con la direzione positiva dell'asse delle x.

(2) Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

I punti impropri di $\mathcal{C}$ sono le soluzioni dell'equazione:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0.$$

Risolvendo tale equazione in una delle due incognite, studiare il segno del discriminante...

(5) Un'iperbole è per definizione *equilatera* se gli asintoti sono perpendicolari.
Ricordare che gli asintoti sono le rette passanti per il centro dell'iperbole ed aventi la direzione di ciascuno dei due punti impropri.
Imporre quindi che le due direzioni siano perpendicolari...