Initiation à l'algèbre A - Examen 2ème chance

Solutions

Université de la Polynésie Française, 2020-2021

20/11/2020

Ex 1. [6 points] Les parties de cet exercice sont indépendantes les unes des autres:

a) Soit $z = \frac{1}{1+2i} + \frac{i}{1-2i}$. Mettre z sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

b) Soit $z = 3(\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{24}\right))$. Mettre z^4 sous forme algébrique.

c) Déterminer partie réelle et imaginaire du nombre complexe $e^{e^{i\theta}}, \theta \in \mathbb{R}$.

d) Montrer que dans le plan complexe les points images des nombres complexes $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 - i$, $z_3 = (\sqrt{3} - 1)i$ forment un triangle équilatéral.

Solution

a) [1pt+1pt] On a:

$$z = \frac{1}{1+2i} + \frac{i}{1-2i} = \frac{1-2i+i(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-2i+i-2}{5} = \frac{-1-i}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}i.$$

De plus on a $|z| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$, d'où:

$$z = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}i = \frac{\sqrt{2}}{5}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{5}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{5}e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

En conclusion la forme algébrique de z est $z = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}i$ et la forme exponentielle $z = \frac{\sqrt{2}}{5}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

b) [1,5pt] On a $z = 3(\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)) = 3e^{i\frac{\pi}{24}}$. Donc

$$z^4 = \left(3e^{i\frac{\pi}{24}}\right)^4 = 3^4e^{i\frac{4\pi}{24}} = 3^4e^{i\frac{\pi}{6}} = 3^4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3^4\sqrt{3}}{2} + \frac{3^4}{2}i.$$

c) [1,5pt] En utilisant la formule d'Euler on obtient:

$$e^{e^{i\theta}} = e^{\cos(\theta)+i\sin(\theta)} = e^{\cos(\theta)}e^{i\sin(\theta)}$$

Maintenant $|e^{e^{i\theta}}| = |e^{\cos(\theta)}e^{i\sin(\theta)}| = |e^{\cos(\theta)}| \cdot |e^{i\sin(\theta)}| = e^{\cos(\theta)} \cdot 1$. Donc

$$e^{e^{i\theta}} = e^{\cos(\theta)}e^{i\sin(\theta)} = e^{\cos(\theta)}(\cos(\sin(\theta)) + i\sin(\sin(\theta))).$$

En conclusion $\mathrm{Re}(e^{e^{i\theta}}) = e^{\cos(\theta)}\cos(\sin(\theta))$ et $\mathrm{Im}(e^{e^{i\theta}}) = e^{\cos(\theta)}\sin(\sin(\theta))$.

d) Pour $i = 1, 2, 3$ soit P_i le point image de z_i. Il suffit alors de montrer que les longueurs des côtés $[P_1P_2]$, $[P_1P_3]$ et $[P_2P_3]$ sont toutes égales. On a :

$P_1P_2 = |z_2 - z_1| = |-1 - i - 1 + i| = |-2| = 2.$

$P_1P_3 = |z_3 - z_1| = |(\sqrt{3} - 1)i - 1 + i| = |-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2.$

$P_2P_3 = |z_3 - z_2| = |(\sqrt{3} - 1)i + 1 + i| = |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2.$

Puisque $P_1P_2 = P_1P_3 = P_2P_3$, on en conclut que P_1, P_2 et P_3 forment un triangle équilatéral.

Ex 2. **[6 points]** Soit f la fonction suivante:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ & z & \mapsto & |z|, \end{array}$$

où $|z|$ représente le module du nombre complexe z.

a) La fonction f, est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.

b) La fonction f, est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

c) Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Décrire l'ensemble $f^{-1}(a)$. Interpréter géometriquement l'ensemble $f^{-1}(a)$.

d) Déterminer un sous-ensemble infini $E \subseteq \mathbb{C}$ tel que la restriction $f|_E$ est injective.

e) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $f(z) = 1$ si et seulement si $z^{-1} = \overline{z}$.

Solution

a) [1pt] La fonction f n'est pas surjective, puisque le module d'un nombre complexe est toujours positif. Donc tout $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$, n'a pas d'antécédent.

b) [1pt] La fonction f n'est pas injective puisque $f(1) = |1| = 1 = |i| = f(i)$.

c) [1pt] On rappelle qu'on dénote avec $f^{-1}(a)$ l'image réciproque de $\{a\}$. On a:

$$f^{-1}(a) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = a\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = a\}.$$

Puisque le module d'un nombre complexe z représente dans le plan complexe la distance du point image de z de l'origine $O(0,0)$, alors $f^{-1}(a)$ correspond géométriquement au cercle de rayon a et centre O.

d) [1pt] Soit $E = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Alors E est un sous-ensemble infini de $\mathbb{C}$ tel que $f|_E$ est injective. En effet, soient $x, y \in \mathbb{R}^+$ on a:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow |x| = |y| \overset{x,y\geq 0}{\Rightarrow} x = y.$$

e) [2pt] Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow z \cdot \overline{z} = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = z^{-1}.$$

Ex 3. [6 points] On considère l'ensemble:

$$A = \{\varnothing, 1, \{2\}\}.$$

a) Soit $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$. Lister les éléments de $A \cap B$.

b) Lister les éléments de $\left(A \cup \{1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}\}\right) \setminus \mathbb{Q}$.

c) Lister les éléments de $\mathscr{P}(A)$, l'ensemble des parties de A.

d) Lister les éléments de $A \times \{a, b\}$.

e) Soient C et D deux ensembles. Montrer que $\mathscr{P}(C \cap D) \subseteq \mathscr{P}(C) \cap \mathscr{P}(D)$.

Solution

a) [1pt] En résolvant l'équation on obtient $B = \{1, 2\}$. Donc $A \cap B = \{1\}$ (Attention, 2 et $\{2\}$ ne sont pas le même élément).

b) [1pt] $\left(A \cup \{1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}\}\right) \setminus \mathbb{Q} = \{\varnothing, 1, \{2\}, \sqrt{2}, \frac{3}{2}\}) \setminus \mathbb{Q} = \{\varnothing, \{2\}, \sqrt{2}\}$.

c) [1pt] $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{1\}, \{\{2\}\}, \{\varnothing, 1\}, \{\varnothing, \{2\}\}, \{1, \{2\}\}, \{\varnothing, 1, \{2\}\}\}$.

d) [1pt] $A \times \{a, b\} = \{(\varnothing, a), (1, a), (\{2\}, a), (\varnothing, b), (1, b), (\{2\}, b)\}$.

e) [2pt] Soit $A \in \mathscr{P}(C \cap D)$ (par définition de l'ensemble des parties, A est un sous-ensemble de $C \cap D$). Alors $A \subseteq C \cap D$. Donc $A \subseteq C$ et $A \subseteq D$, ou, en d'autres termes, $A \in \mathscr{P}(C)$ et $A \in \mathscr{P}(D)$. En conclusion $A \in \mathscr{P}(C) \cap \mathscr{P}(D)$.

Ex 4. [6 points]

a) Montrer par contraposée l'énoncé suivant:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \textit{ si } n^3 \textit{ est pair alors } n \textit{ est pair.}$$

b) Montrer par l'absurde que $\sqrt[3]{2}$ est irrationnel. (Utiliser, si nécessaire, l'énoncé du point (a).)

Solution

a) [3pt] Soit $P(n) =$"Si n^3 est pair alors n est pair". La contraposée de $P(n)$ est

Si n est impair alors n^3 est impair.

Soit donc n un entier impair. Par définition il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors on a:

$$n^3 = (2k + 1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1 = 2h + 1,$$

où $h = 4k^3 + 6k^2 + 3k \in \mathbb{Z}$. Donc n^3 est aussi impair.

b) [3pt] Supposons par l'absurde que $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ tels que

$$\sqrt[3]{2} = \frac{a}{b}. \tag{1}$$

On peut aussi assumer, sans perte de généralité, que a et b n'ont pas de facteurs en commun. De l'égalité (1) on obtient

$$2b^3 = a^3. \tag{2}$$

Donc a^3 est pair. D'après la partie (a) il en suit, que a est pair. Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$. En remplaçant dans (2) on a:

$$2b^3 = 8k^3 \Rightarrow b^3 = 4k^3 = 2 \cdot 2k^3.$$

Donc b^3 est aussi pair, et par conséquence b l'est aussi. Donc 2 est un facteur commun de a et b, mais cela contredit notre hypothèse que a et b n'ont pas de facteurs en commun. En conclusion $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.