Initiation à l'algèbre A

Université de la Polynésie Française, 2021-2022

Devoir Maison 1 - Solutions

27/09/2021

Ex 1. Soit $E = \{1,2,3,4,5\}$ et $F = \{a,b,c,d,e\}$. On considère la fonction suivante:

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \to & F \\ & 1 & \mapsto & a \\ & 2 & \mapsto & b \\ & 3 & \mapsto & b \\ & 4 & \mapsto & d \\ & 5 & \mapsto & b \end{array}$$

a) Déterminer les ensembles $f(\{1,4,5\})$ et $f(E)$.

b) Déterminer les images réciproques des ensembles $\{b\}$ et $\{a,c\}$.

c) La fonction f, est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

d) La fonction f, est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.

e) Est-il possible de définir une fonction injective entre E et F. Si oui, définissez-la, sinon expliquez pourquoi.

f) Est-il possible de définir une fonction surjective entre E et F. Si oui, définissez-la, sinon expliquez pourquoi.

g) Trouver un sous-ensemble non vide $G \subseteq E$ tel que la restriction $f|_G$ est injective et déterminer la fonction réciproque de $f|_G : G \to f(G)$.

Solution

a) $f(\{1,4,5\}) = \{a,b,d\}$ et $f(E) = \{a,b,d\}$.

b) $f^{-1}\{b\} = \{2,3,5\}$ et $f^{-1}\{a,c\} = \{1\}$.

c) Non, parce que $f(2) = f(3) = b$.

d) Non, parce que $f(E) = \{a,b,d\} \neq F$.

e) Oui, par exemple la fonction suivante est une fonction injective de E dans F:

$$\begin{array}{rccc} g: & E & \to & F \\ & 1 & \mapsto & a \\ & 2 & \mapsto & b \\ & 3 & \mapsto & c \\ & 4 & \mapsto & d \\ & 5 & \mapsto & e \end{array}$$

f) Oui, la fonction g définie au point (d) est aussi surjective.

g) Soit $G = \{1,2\}$. Alors on a:

$$\begin{array}{rccc} f|_G: & G = \{1,2\} & \to & f(G) = \{a,b\} \\ & 1 & \mapsto & a \\ & 2 & \mapsto & b \end{array}$$

Donc $f|_G : \{1,2\} \to \{a,b\}$ est bijective et sa fonction réciproque est la fonction

$$\begin{array}{rccc} (f|_G)^{-1}: & \{a,b\} & \to & \{1,2\} \\ & a & \mapsto & 1 \\ & b & \mapsto & 2 \end{array}$$

Ex 2. On considère la fonction suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ (x,y) & \mapsto & x+2y. \end{array}$$

a) La fonction f est-elle injective ? Si oui démontrez-le, sinon expliquez pourquoi.

b) La fonction f est-elle surjective ? Si oui démontrez-le, sinon expliquez pourquoi.

Solution

a) La fonction f n'est pas injective. En effet, on a $f\left((4,0)\right) = f\left((0,2)\right) = 4$.

b) La fonction f est surjective. En effet, soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a $n = f\left((n,0)\right)$. Donc $f\left(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z}$.

Ex 3. On considère la fonction suivante :

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x-2}+1 \end{array}$$

a) La fonction g est-elle injective ? Si oui démontrez-le, sinon expliquez pourquoi.

b) La fonction g est-elle surjective ? Si oui démontrez-le, sinon expliquez pourquoi.

Solution

a) La fonction g est injective. Soient $x, y \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ tels que $g(x) = g(y)$. Alors on a:

$$\frac{1}{x-2}+1 = \frac{1}{y-2}+1 \Rightarrow \frac{1}{x-2} = \frac{1}{y-2} \overset{\text{multiplie par } (x-2)(y-2)}{\Rightarrow} x-2 = y-2 \Rightarrow x = y.$$

b) La fonction g n'est pas surjective, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ on a $g(x) \neq 1$ (et donc $1 \notin g(\mathbb{R}\setminus\{2\})$. En effet s'il existait $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ tel que $g(x) = 1$ alors on aurait:

$$\frac{1}{x-2}+1 = 1 \Rightarrow \frac{1}{x-2} = 0 \Rightarrow 1 = 0,$$

ce qui est absurde.

Ex 4. Soit $f\colon E \to F$ une fonction et soient $A, B \subseteq F$ deux ensembles. Montrer (par double inclusion) que

a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Solution

a) Montrons que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ par double inclusion:

$\subseteq$) Soit $x \in f^{-1}(A \cup B)$. Alors $f(x) \in A \cup B$, c'est-à-dire $f(x) \in A$ ou $f(x) \in B$. Donc $x \in f^{-1}(A)$ ou $x \in f^{-1}(B)$, ce qui implique $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

$\supseteq$) Soit $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Alors $x \in f^{-1}(A)$ ou $x \in f^{-1}(B)$, ce qui implique $f(x) \in A$ ou $f(x) \in B$. Donc $f(x) \in A \cup B$, c'est-à-dire $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

b) $\subseteq$) Soit $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Alors $f(x) \in A \cap B$, c'est-à-dire $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$. Donc $x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$, ce qui implique $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

$\supseteq$) Soit $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Alors $x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$, ce qui implique $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$. Donc $f(x) \in A \cap B$, c'est-à-dire $x \in f^{-1}(A \cap B)$.