INITIATION À L'ALGÈBRE - A

TD # 1 : Introduction au langage mathématique et à la théorie des ensembles

Logique

Exercice 1. *Implications*

Pour chacune des affirmations suivantes :
- dire si elle est vraie ou fausse. Dans le cas où elle est fausse, donner un contre-exemple.
- dire si l'affirmation réciproque est vraie ou fausse.
- conclure alors sur les énoncés où l'on peut employer : « ssi ».

1. Si je suis espagnol, alors je suis européen.
2. Si je suis enfant unique, alors je n'ai ni frère ni soeur.
3. Soit ABC un triangle. Si ABC est équilatéral, alors ABC est isocèle.
4. Si $x \leq 1$, alors $x < 2$.
5. Si $y^2 = 16$, alors $y = 4$.
6. Si $x < 0$ et $x^2 = 9$, alors $x = -3$.
7. Si $x = 2$, alors x est solution de l'équation : $-2x + 4 = 0$.
8. Si $x = 2$, alors x est solution de l'équation : $x^2 - 2x = 0$.

Exercice 2. *Opérateurs logiques*

Compléter par « et » ou par « ou » :
- $(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2 \ldots\ldots x = 3$.
- $(x+5)(x-1) \neq 0 \Rightarrow x \neq -5 \ldots\ldots x \neq 1$.
- n est divisible par 10 $\Rightarrow$ n est divisible par 5 …… n est divisible par 2.
- $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ est défini pour $x \in]-\infty; -1] \ldots\ldots x \in [1; +\infty[$.

Exercice 3. *Opérateurs logiques*

Ces assertions sont-elles vraies ou fausses? Justifier vos réponses.
- $((-1)^2 = 1) \wedge (-1^2 = 1)$.
- $(12 \times 8 = 96) \vee (12 \times 8 = 88)$.
- $\neg(\ln(1) = 0) \wedge (\ln(e) = 1)$.
- $(\sqrt{3^2+4^2} = 3+4) \vee (\sqrt{3^2+4^2} = 5)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$.
- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x^2 - 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 0) \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{R}, y > 0 \wedge xy > 1)$.

Exercice 4. *Négation*

Pour chacune des affirmations suivantes :
- dire si elle est vraie ou fausse. Dans le cas où elle est fausse, donner un contre-exemple.
- donner leur négation.

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ x > 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ (\forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x)$.

Donner la négation de la proposition suivante : $\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z}, (xyz \neq 0) \wedge (x^n + y^n = z^n)$.

Exercice 5. *Implications, équivalences*

On suppose $x \in \mathbb{R}$. Pour chacune des propositions P et Q suivantes, indiquer si les assertions $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$ sont vraies.
- $P : x \leq 2, \quad Q : x^2 \leq 4$.

— $P : |x| \leq 2, \quad Q : x^2 \leq 4.$

Exercice 6. *Contraposée*

Pour chacune des propositions suivantes

— écrire leur contraposée;
— démontrer que cette contraposée est vraie;
— en déduire que la proposition initiale est vraie.

1. Si l'entier n^2 est impair, alors n est impair.
2. Si x est un nombre réel tel que $x^3 + x^2 + 2x + 1 < 0$, alors $x < 0$.
3. Si $a + b$ est irrationnel, alors a est irrationnel ou b est irrationnel.

Exercice 7. Soient p, q, r et s quatre propositions. Ecrire les propositions suivantes, sous formes simplifiées, en utilisant uniquement les opérateurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$:

— $(\neg p \wedge q) \Longrightarrow r$;
— $\neg(p \vee \neg q) \wedge (s \Longrightarrow t)$;
— $\neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q)$.

Exercice 8. *Raisonnement par l'absurde*

1. Montrer que pour tout nombre réel x différent de -2 on a : $\dfrac{x+1}{x+2}$ différent de 1.
2. Montrer par l'absurde que $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel.
3. Sachant que $\sqrt{2}$ est irrationnel, montrer par l'absurde que pour tout $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$: $a + b\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer par l'absurde que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

Exercice 9. *Raisonnement par l'absurde*

1. Étant donné r nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_r$, montrer que l'entier $N = p_1 p_2 \cdots p_r + 1$ n'est divisible par aucun des entiers p_i.
2. En utilisant la question précédente, montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Ensembles

Exercice 10. *Appartenir et inclusion*

Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut-on écrire :

(1) $a \in E$,	(2) $a \subset E$,	(3) $\{a\} \subset E$,
(4) $\emptyset \in E$,	(5) $\emptyset \subset E$,	(6) $\{\emptyset\} \subset E$.

Exercice 11. *Ensemble des parties*

Donner la liste des éléments de $\mathscr{P}(\{1,2\})$ (ensemble des parties de l'ensemble $\{1,2\}$).
Idem avec $\{a, b, c\}$.

Exercice 12. *Opérations ensemblistes*

Soient a, b, c, d, e cinq éléments distincts. On pose $W = \{a, b, c, d, e\}$, $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, c, e\}$ et $Z = \{d, e\}$.

1. Quels sont les ensembles $W \cap Y, W \cup X, X \cap Z$?
2. A-t-on $\emptyset \subset X, X \subset W, X \subset Y$?
3. Quels sont les ensembles $\overline{X}, \overline{X \cap Y}, \overline{X} \cup \overline{Y}$?

Remarque : $\overline{X} = W \setminus X$ est le complémentaire de X dans l'ensemble W.

Montrer qu'en général, pour tous sous-ensembles A et B d'un ensemble E, on a

$$(\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{et} \quad (\overline{A \cap B}) = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Exercice 13. *Union et Intersection*

Définir dans chaque cas $A \cup B$ et $A \cap B$.

1. $A = \{n | n \text{ est un entier pair}\}$ et $B = \{n | n \text{ est un nombre premier}\}$.
2. $A = \{\text{point } M \text{ du plan} \,|\, MX = MY\}$, $B = \{\text{point } M \text{ du plan} \,|\, MX + MY = XY\}$ et X et Y sont deux points distincts du plan $\mathbb{R}^2$.

3. $A =]-\infty;5[$ et $B =]-2;8]$.
4. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| \leq 3\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+2| > 3\}$.

Exercice 14. Combien d'éléments y a-t-il dans l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : n < 100\} \setminus (\{2k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{3k : k \in \mathbb{N}\})$?

Exercice 15. Vérifier que l'ensemble des réels de la forme $2x+1$ avec $x \in [2;3[$ est un intervalle.
Faire de même avec les réels de la forme $x^2 + x$.

Exercice 16. *Représentation graphique*

Soit E un ensemble. Soient A, B, C des parties de E et soient $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ leurs complémentaires respectifs dans E. Vérifier graphiquement si les propriétés suivantes sont correctes ou non :

1. $(A \setminus B) \setminus C = A \cup \overline{B \cup C}$
2. $A \cap \overline{B \cup C} = A \setminus (B \cup C)$
3. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
4. $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cup B$

Exercice 17. *Différence symétrique*

Soit E un ensemble. On définit la **différence symétrique** de deux parties A et B de E par

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) $A \Delta A = \emptyset$;
   (b) $A \Delta B = B \Delta A$;
   (c) $A = B \iff A \Delta B = \emptyset$;
   (d) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
2. Représenter graphiquement :
   (a) $A \cup (B \Delta C)$;
   (b) $\bar{A} \Delta B$.

Exercice 18. Dans un lycée de 300 élèves, 152 savent jouer au poker, 83 au tarot et 51 au bridge. De plus, 24 savent jouer à la fois au poker et au tarot, 14 au poker et au bridge, et 8 au tarot et au bridge. Enfin, seulement 3 élèves savent jouer les trois jeux de cartes. Combien y-a-t'il d'élèves dans ce lycée qui savent jouer au moins un de ces trois jeux de cartes?

Exercice 19.

1. On considère les intervalles suivants $I = [0,3]$, $J = [0,4]$, $K = [1,4]$, $L = [1,5]$ de $\mathbb{R}$.
   — Dessiner dans le plan $\mathbb{R}^2$ les ensembles $I \times J$, $I \times \overline{J}$et $K \times L$.
   — Déterminer $(I \times J) \cup (K \times L)$.
2. Dessiner dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Exercice 20. Soit $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,5\}$ et C $= \{2,10\}$.

— Expliciter les produits cartésiens $A \times B$, $B \times A$, $C \times B$, $(A \cup C) \times B$, ainsi que l'ensemble $(A \times B) \cup (C \times B)$.
— Que remarque-t-on? Peut-on généraliser le résultat?
— Enoncer un résultat analogue avec les symboles $\cap$ et $\times$.

Comment montrer l'équivalence $P \iff Q$?

- On peut procéder par équivalences : on trouve des assertions $P_0, \dots, P_n$ telles que

$$P \iff P_0 \iff \cdots \iff P_n \iff Q.$$

- On peut procéder par double-implication : on montre $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Comment montrer l'égalité $A = B$ de deux ensembles ?

- On peut démontrer, pour tout $x \in A$, l'équivalence $(x \in A) \iff (x \in B)$.
- On peut procéder par double inclusion : on montre que $A \subset B$ et $B \subset A$.
- Utiliser les propriétés de la réunion, de l'intersection et du passage au complémentaire.

Comment montrer l'inclusion $A \subset B$ de deux ensembles ?

- On se donne un élément $x \in A$ (soit $x \in A$) et on montre que $x \in B$.
- On trouve C tel que $A = B \cap C$.
- Utiliser les propriétés de la réunion, de l'intersection et du passage au complémentaire.

Comment montrer que, pour tout $x \in X$, la propriété $Q(x)$ vraie ?
On se donne un élément $x \in X$ quelconque (soit $x \in X$) et on montre que x vérifie la propriété Q.