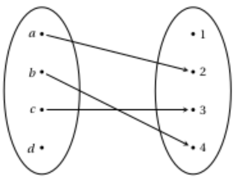
INITIATION À L'ALGÈBRE - A

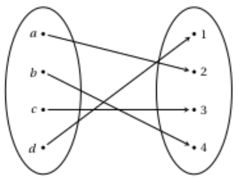
TD # 2 : Fonctions

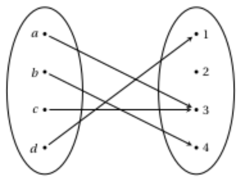
Généralités sur les fonctions

Exercice 1.

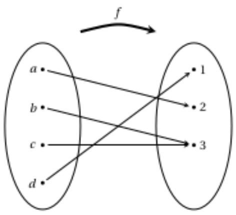
1. Dans les exemples ci-dessous, lorsqu'il s'agit d'applications, dire si elles sont injectives, surjectives et/ou bijectives.

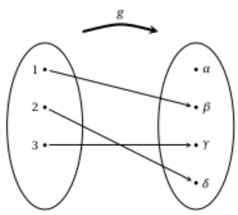






2. On considère les applications f et g suivantes :





— Les applications f et g sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
— Déterminer $g \circ f$.
— $g \circ f$ est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 2. Soient a, b, c, d quatre éléments distincts et soit $X = \{a, b, c, d\}$. Soit $f : X \longrightarrow X$ l'application définie par :

$$f(a) = d,\ f(b) = a,\ f(c) = c,\ f(d) = a.$$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Quels sont les ensembles $f(\{a, b, c\}), f(\{b, d\}), f(\{a, d\})$?
3. Quels sont les ensembles $f^{-1}(\{a\}), f^{-1}(\{b\}), f^{-1}(\{a, c, d\})$?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$.

1. Déterminer $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{-1\})$, $f^{-1}(\{3, 4\})$.
2. Déterminer graphiquement les ensembles suivants : $f([-3, -1])$, $f([-2, 1])$, $f([-3, -1] \cup [-2, 1])$ et $f([-3, -1] \cap [-2, 1])$. Les comparer.
3. Mêmes questions avec les ensembles $f^{-1}(]-\infty, 2])$, $f^{-1}([1, +\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty, 2] \cup [1, +\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty, 2] \cap [1, +\infty[)$.

Exercice 4. Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Montrer que, si A et A' sont des parties de E vérifiant $A \subset A'$, alors $f(A) \subset f(A')$.
2. Pour les sous-ensembles A, A', B, B' de E, comparer
   (a) $f(A \cup A')$ et $f(A) \cup f(A')$
   (b) $f(B \cap B')$ et $f(B) \cap f(B')$ (illustrer la non égalité).
3. Montrer que $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ où U et V sont deux parties de F.

Exercice 5. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
Lorsque la fonction est bijective, déterminer sa bijection réciproque.

1. $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto -5x + 1$.
2. $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$.
3. $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto x^2$.
4. $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \longmapsto 2n$.

Exercice 6. Soient $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ telles que $f(x)=3x+1$ et $g(x)=x^2-1$.

1. Calculer $f\circ g, g\circ f, f\times g$ et $f+g$.
2. A-t-on $f\circ g=g\circ f$?

Exercice 7. Montrer que l'application $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y)=(2x+y,x+3y)$$

et bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Langage des fonctions réelles : domaine de définition, antécédents, ...

Exercice 8. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$x\mapsto \ln(1+x+x^2),\qquad x\mapsto \sqrt[3]{x(x-2)},\qquad x\mapsto e^{\frac{x^2-3x+2}{x+1}},\qquad x\mapsto \frac{1}{\sqrt{\cos(x)+1}},$$

$$x\mapsto \sqrt{x+\frac{1}{x}},\qquad x\mapsto \sqrt{\log_2\left(\frac{x}{x^2-1}\right)},\qquad x\mapsto \ln\left(x-\sqrt{x}\right),\qquad x\mapsto \sqrt{\sqrt{x^2+1}-2},$$

$$x\mapsto \sqrt{4x-x^3},\qquad x\mapsto |4x-7|,\qquad x\mapsto \frac{\sqrt{2-x}}{4x-x^2-3},\qquad x\mapsto \log_{1/2}\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right).$$

Exercice 9. Soient $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x}-1}$, $g(x)=-x^2+1$ et $h(x)=\frac{1}{x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f, g et h.
2. Déterminer le domaine de définition de la fonction $g\circ f$, puis son expression. Déterminer le domaine de définition de la fonction $x\longmapsto 2-\frac{1}{x}$. Qu'en concluez vous ?
3. Déterminer le domaine de définition des fonctions $f\circ g, g\circ h, h\circ g, f\circ h, h\circ f$, puis leurs expressions.

Exercice 10.

1. Déterminer les antécédents de y_0 par f où

$$(1)\ f:x\longmapsto x^2,\ y_0=4,\quad (2)\ f:x\longmapsto x^2,\ y_0=-2,\quad (3)\ f:[1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}, x\longmapsto x^2,\ y_0=3.$$

2. Déterminer l'ensemble des réels dont l'image est 4 par la fonction

$$(1)\ f:x\longmapsto x^2,\quad (2)\ f:x\longmapsto |3-x|$$

Exercice 11. Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est inférieure à g
2. f est impaire
3. f ne s'annule jamais
4. f est croissante
5. f n'est pas la fonction nulle
6. f est constante
7. f est majorée.

Bijectivité et fonction réciproque

Exercice 12. Soit f définie sur $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\cos x}$.

1. Quel est le sens de variation de f ?
2. Déterminer $J=f(I)$ et montrer que f est une bijection de I sur J.

Exercice 13. Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$.

1. Étudier la parité de f.
2. Montrer, sans dériver, que la fonction f est strictement croissante.
3. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. Quelle est sa réciproque ?

Exercice 14. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{x}$

1. Montrer que f est strictement croissante sur $]0,1[$.
   En déduire que la restriction g de f sur $]0,1[$ définit une bijection sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
4. Soit $x \in]0,1[$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $y = f(x)$.
   (a) Montrer que, si $y > 0$ alors $x > \dfrac{1}{2}$.
   En déduire que $x = \dfrac{y-2+\sqrt{4+y^2}}{2y}$.
   (b) Montrer que, si $y < 0$ alors $x < \dfrac{1}{2}$.
   En déduire que $x = \dfrac{y-2+\sqrt{4+y^2}}{2y}$.
   (c) Ecrire la définition complète de la réciproque de g.

Exercice 15. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{1-\frac{2}{x}}$.

1. Étudier la continuité puis le sens de variation de f (SANS dériver).
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle que l'on précisera.
3. En déduire le tableau de variations de f^{-1}.
4. Déterminer la réciproque f^{-1} explicitement.

Comment montrer qu'une application $f : X \longrightarrow Y$ est injective ?

- On se donne deux éléments quelconque $x, x' \in X, f(x) = f(x')$ et on montre que $x = x'$. Autrement dit, on montre que tout élément Y a **au plus** un antécédent par f.
- On se donne deux éléments quelconque $x, x' \in X, x \neq x'$ et on montre que $f(x) \neq f(x')$.
- On cherche une application $g : Y \longrightarrow X$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$.

Comment montrer qu'une application $f : X \longrightarrow Y$ est surjective ?

- On se donne un élément quelconque $y \in Y$ et on cherche à montrer qu'il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit, on montre que tout élément a **au moins** un antécédent par f.
- On montre que $f(X) = Y$.
- On cherche une application $g : Y \longrightarrow X$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$.

Comment montrer qu'une application $f : X \longrightarrow Y$ est bijective ?

- On montre que f est injective et surjective.
- On cherche une application $g : Y \longrightarrow X$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_X$.
- Point de vue équation. On montre que, pour tout $y \in F$, il existe un **unique** élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
- Lorsque que X est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$, on peut montrer que f est strictement monotone.

Comment montrer que $y \in f(A)$?
Par définition, $f(A) = \left\{f(a) : a \in A\right\} = \left\{z \in Y : \exists a \in A, f(a) = z\right\}$. C'est l'ensemble des éléments de Y qui ont au moins un antécédent dans A. Il suffit donc de montrer qu'il existe un élément $a \in A$ tel que $f(a) = y$.

Comment montrer que $x \in f^{-1}(B)$?
Par définition, $f^{-1}(B) = \left\{x \in X : f(x) \in B\right\}$. C'est l'ensemble des éléments de X dont l'image est dans B. Il suffit donc de montrer que $f(x) \in B$.