

Géométrie et Arithmétique

Contrôle continu 2

27/09/2016

Questions du cours

- 1) Donner la définition algébrique de produit scalaire de deux vecteurs dans \mathbb{R}^3 . Définir ensuite la norme d'un vecteur de \mathbb{R}^3 .

Corrigé. Soient $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . On définit le produit scalaire de u et v par

$$u \cdot v = xx' + yy' + zz'.$$

La norme de u est définie par :

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

- 2) Donner la définition de vecteurs orthogonaux.

Corrigé. Deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^2$ (ou \mathbb{R}^3) sont orthogonaux si $u \cdot v = 0$.

- 3) Montrer que deux vecteurs u, v sont orthogonaux si et seulement si $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ (Théorème de Pythagore).

Corrigé. On a

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v) \cdot (u + v) = \\ &= u \cdot (u + v) + v \cdot (u + v) = \\ &= u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v = \\ &= \|u\|^2 + 2(u \cdot v) + \|v\|^2. \end{aligned}$$

On en déduit que $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ si et seulement si $u \cdot v = 0$, c'est à dire si et seulement si u et v sont orthogonaux.

Exercice (Toutes les réponses doivent être justifiées)

- 4) Soient

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Calculer $u \cdot v$, $\|u\|$ et $\|v\|$. Déterminer ensuite l'angle (non orienté) $\theta \in [0, \pi]$ entre u et v .

Corrigé. On a :

$$* \quad u \cdot v = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) = -5;$$

$$* \quad \|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{5};$$

$$* \quad \|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{10} = 2\sqrt{5}.$$

On obtient

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2},$$

d'où $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

- 5) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel k les vecteurs de \mathbb{R}^3 suivants sont orthogonaux :

$$u = \begin{pmatrix} -2 \\ k \\ k \end{pmatrix} \quad \text{et } v = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé. On a

$$u \cdot v = -2 + k^2 + k.$$

Les valeurs réelles de k pour lesquelles u et v sont orthogonaux sont les solutions réelles de l'équation de second degré

$$k^2 + k - 2 = 0,$$

c'est à dire $k = -2$ ou $k = 1$.