Esercizi

3 - Sistemi Lineari

Legenda:

😀 : Un gioco da ragazzə, dopo aver riletto gli appunti del corso

😕 : Ci devo pensare un po', ma posso arrivarci

🤯 : Non ci dormirò stanotte

Esercizio 1. Ognuna delle matrici seguenti è la matrice orlata di un sistema lineare. Per ognuna di esse si determini se il sistema corrispondente è compatibile e, in caso affermativo, si trovi l'insieme delle soluzioni. (Si noti che tutte le matrici sono a scalini.)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha + 3 \end{pmatrix}, \text{ al variare di } \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & k & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2 - 2k & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k^3 - 4k \end{pmatrix}, \text{ al variare di } k \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2. Risolvere i seguenti sistemi lineari utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan.

(a)
$$\begin{cases} X_1 + 2X_3 + X_4 = 8\\ 2X_1 + 3X_2 - X_3 - 2X_4 = -2\\ -X_1 + 5X_2 + 2X_3 + 3X_4 = -1\\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 4 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} X_3 + 2X_4 + 4X_5 = 1\\ 3X_1 + 2X_2 - 5X_3 + X_4 = 0\\ -2X_2 + 4X_4 + 2X_5 = 9\\ -3X_1 - 2X_2 + 5X_3 - X_4 - X_5 = 9 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} X_3 - X_4 = 0 \\ X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 = 5 \\ X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 5X_4 = 8 \\ 2X_3 - 2X_4 = 3 \end{cases}$$

Esercizio 3. Al variare del/dei parametro/i si discuta la compatibilità del sistema. Per ogni sistema compatibile si determini il "numero" e l'insieme delle soluzioni (in funzione del/dei parametro/i).

(a)
$$\begin{cases} X + Y + hZ = 0 \\ X + hY + Z = 0 \\ hX + Y + Z = 0 \end{cases}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} kX_1 + kX_2 - kX_3 = 0 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} kX_1 + kX_2 - kX_3 = 0\\ -X_3 + 2X_4 = -3\\ kX_1 + kX_2 - (k+1)X_3 + (k+5)X_4 = k-3\\ X_1 + X_2 - X_3 = k^2 + 3k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$(nX + Y + Z = 0)$$

$$\begin{cases}
kX_1 + kX_2 - kX_3 = 0 \\
-X_3 + 2X_4 = -3 \\
kX_1 + kX_2 - (k+1)X_3 + (k+5)X_4 = k - 3
\end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$X_1 + X_2 - X_3 = k^2 + 3k$$

$$(c)$$

$$\begin{cases}
\alpha X_1 + X_2 + 5X_3 = 2 \\
-\alpha X_1 + (\alpha + 1)X_2 + (\alpha - 5)X_3 - 3X_4 - X_5 = -1 \\
\alpha X_4 + X_5 = 2 \\
-2\alpha X_1 - 2X_2 + (\alpha - 11)X_3 - 2X_5 = -4
\end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases}
bY + Z = 1
\end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} bY + Z = 1 \\ X + Y + Z = a + b \\ X + (b+1)Y + (a+3)Z = 1 + a + 2b \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 4. Sia:

$$(\star) \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n = b_m \end{cases}$$

un sistema lineare e sia

$$(\star\star) \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = 0 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n = 0 \end{cases}$$

il corrispondente sistema omogeneo. Siano S e S_0 gli insiemi delle soluzioni rispettivamente di (\star) e $(\star\star)$ e sia $(x_1,\ldots,x_n)\in S$.

Si dimostri che

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) : (y_1, \dots, y_n) \in S_0\},\$$

ovvero che ogni soluzione di un sistema lineare si può scrivere come la somma di una soluzione particolare del sistema e di una soluzione del sistema omogeneo corrispondente.

Esercizio 5. Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. È possibile mostrare che ogni operazione elementare sulle righe di A corrisponde alla moltiplicazione <u>a sinistra</u> per una matrice <u>invertibile</u>, ottenuta dalla matrice identità I_m effettuando su di essa l'operazione corrispondente (una tale matrice è detta matrice elementare).

Ad esempio, scambiare la prima e la terza riga di una matrice 3×3 corrisponde a moltiplicare a sinistra per la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ottenuta scambiando la prima e la terza riga della matrice identità I_3 . Abbiamo ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Si determinino delle matrici elementari P_1, \ldots, P_r tali che

$$P_r \cdots P_1 A = B$$
,

dove B è una matrice a scalini. (Una volta determintate P_1, \ldots, P_r si verifichi che effettivamente il prodotto $P_r \cdots P_1 A$ è uguale a una matrice a scalini.)

(i) Sia $A \in \mathcal{M}_n(K)$ una matrice quadrata. Dimostrare che se effettuando l'algoritmo di Gauss-Jordan su A si ottiene una matrice con almeno una riga nulla, allora A non è invertibile. (Indizio: si utilizzi il punto (i) dell'esercizio 4 del secondo foglio di esercizi...)

🧖 Esercizi facoltativi per chi ama programmare 🎮

Nel linguaggio di programmazione preferito si svolgano gli esercizi seguenti.

- 1) Scrivere una funzione **moltiplica_riga**(A, i, a) che data una matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, un intero $i \in \{1, \ldots, m\}$ e uno scalare $a \in \mathbb{R}$ restituisce la matrice ottenuta da A moltiplicando la riga i-esima per a $(L_i \leftarrow aL_i)$.
- 2) Scrivere una funzione **permuta_righe**(A, i, j) che data una matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e due interi $i, j \in \{1, ..., m\}$ restituisce la matrice ottenuta da A scambiando la riga i-esima con la riga j-esima $(L_i \leftrightarrow L_j)$.
- 3) Scrivere una funzione **sostituisci_riga**(M, i, j, a) che data una matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e due interi $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ restituisce la matrice ottenuta da A sostistuendo la riga i-esima con la somma della riga i-esima più a volte la riga j-esima $(L_i \leftarrow L_i + aL_j)$.
- 4) Scrivere una funzione **risolvi_sistema_scalini**(A, b) che data una matrice a scalini $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con n pivots (non nulli) e un vettore colonna $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ calcola l'unica soluzione del sistema AX = b, dove X è il vettore delle indeterminate.

Si testi la funzione con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

5) Si implementi l'algoritmo di Gauss-Jordan, ossia si scriva una funzione **algoritmo_gauss**(A) che data una matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ restituisca una matrice a scalini ottenuta effettuando delle operazioni elementari su A.

Si testi la funzione con le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 0 & 1 & 12 \\ -3 & 0 & 27 & -10 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 19 & -1 & 1 & -1 & -13 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1. \end{pmatrix}$$