Initiation à l'algèbre A - CC2

Université de la Polynésie Française, 2020-2021

28/10/2020

Fonctions et nombres complexes

Informations: Ce contrôle continu est noté sur 24 points. Toutefois votre note sera le minimum entre votre score et 20. Les calculatrices sont interdites et de toute manières elles ne sont pas nécessaires.

Ex 1. [6 points] Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $F = \{a, b, c, d\}$. On considère la fonction suivante:

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \to & F \\ & 1 & \mapsto & c \\ & 2 & \mapsto & a \\ & 3 & \mapsto & d \\ & 4 & \mapsto & c \\ & 5 & \mapsto & a \end{array}$$

a) Déterminer les ensembles $f(\{1, 2, 3\})$ et $f(E)$.

b) Déterminer les images réciproques des ensembles $\{b\}$ et $\{a, d\}$.

c) La fonction f, est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

d) La fonction f, est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.

e) Trouver un sous-ensemble non vide $G \subseteq E$ tel que la restriction $f|_G$ est injective et déterminer la fonction réciproque de $f|_G : G \to f(G)$.

Ex 2. [6 points] Soit g la fonction suivante:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & (n + 7, 0). \end{array}$$

a) Donner la définition de fonction injective et de fonction surjective.

b) La fonction g, est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

c) La fonction g, est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.

d) Déterminer une fonction $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f \circ g$ est bijective.

Ex 3. [6 points] On considère le nombre complexe suivant:

$$z = \frac{7 + i}{3 + 4i}.$$

a) Mettre z sous forme algébrique.

b) Déterminer $w \in \mathbb{C}$ (en forme algébrique) tel que $zw = 1$.

c) Calculer $|z|$ et déterminer un argument de z.

d) Mettre z sous forme trigonométrique et exponentielle.

e) Utiliser la forme exponentielle de z pour déterminer un nombre complexe u tel que $u^2 = z$.

Ex 4. [6 points] On considère les nombres complexes suivants:

$$z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i, \qquad z_2 = 1 + \sqrt{3}i.$$

a) Représenter sous forme algébrique le nombre complexe $w = \dfrac{z_2}{z_1}$.

b) Mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

c) Utiliser (b) pour représenter sous forme exponentielle le nombre complexe w.

d) En déduire de (a) et (c) la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

e) Mettre sous forme algébrique le nombre complexe w^{2020}.

f) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ le nombre complexe w^n est-il réel? Et pour quelles valeurs de n est-il imaginaire pure?