LEZIONE 2 - GEOMETRIA e ALGEBRA 08/03/23

Vediamo infine alcuni richiami sulle funzioni.

III) RICHIAMI SULLE FUNZIONI

<u>Def</u>: Siano A e B due insiemi.

Una funzione $f: A \to B$ è una legge che associa <u>ad ogni</u> elemento di A <u>uno e un solo</u> elemento di B.

$$f: A \to B$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

L'insieme A è detto dominio e l'insieme B è detto codominio di f.

Se $y = f(x)$, $x \in A$, allora y è l'immagine di x e x è una controimmagine di y.

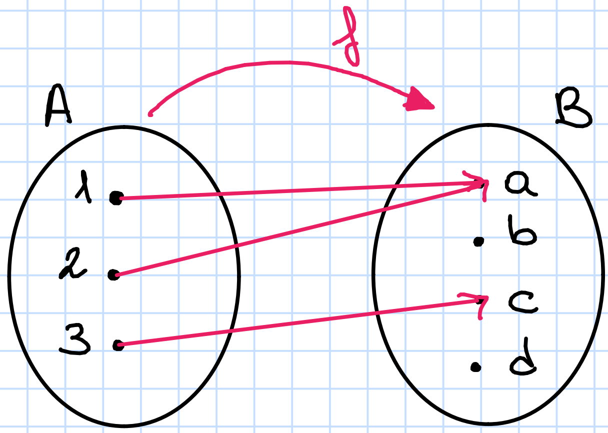
articolo indeterminativo poiché y può possedere più di una controimmagine

articolo determinativo, poiché l'immagine di x è unica

<u>Esempio</u>

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{a, b, c, d\}$



Consideriamo la funzione

$$f: A \to B$$
$$1 \mapsto a$$
$$2 \mapsto a$$
$$3 \mapsto c$$

- $a \in B$ è l'immagine di 1.
- 1 è una controimmagine di a

Notiamo che $f(1) = f(2) = a$, ovvero due elementi distinti di A hanno la stessa immagine. Diciamo che f <u>non è iniettiva</u>.

Def: Una funzione $f: A \to B$ si dice INIETTIVA se

$$\forall x, y \in A, \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

(elementi distinti di A hanno immagini distinte)

$$\Updownarrow$$

$$\forall x, y \in A, \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

usiamo queste implicazione per dimostrare che una funzione è iniettiva

Equivalentemente f è iniettiva se ogni elemento di B ha al più una controimmagine

Def: Sia $f: A \to B$ una funzione e sia $X \subseteq A$. Allora

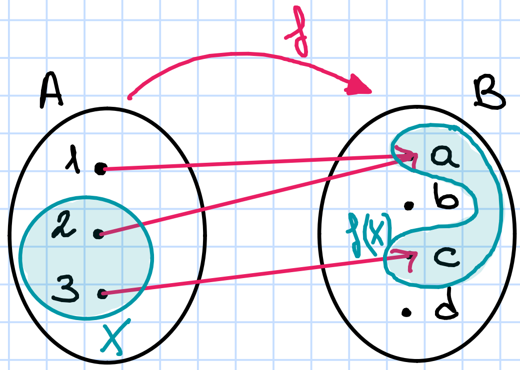
$$f(X) := \{ f(x) : x \in X \}$$

è l'immagine di X tramite f. In particolare

$$\mathrm{Im}(f) := f(A)$$

è detta immagine di f.

Torniamo all'esempio



$X = \{2, 3\} \subseteq A$

$f(X) = \{ f(2), f(3) \} = \{a, c\}$

$\mathrm{Im}(f) = \{ f(1), f(2), f(3) \} = \{a, c\}.$

Notiamo che $\mathrm{Im}(f) \subsetneq B$. In particolare $\mathrm{Im}(f) \neq B$, ovvero esistono elementi di B privi di controimmagine. Diciamo che f non è suriettiva

Def: Una funzione $f: A \to B$ si dice SURIETTIVA se $\mathrm{Im}(f) = B$, o equivalentemente se

$$\forall y \in B, \ \exists x \in A \text{ t.c. } f(x) = y.$$

Equivalentemente f è suriettiva se ogni elemento di B possiede almeno una controimmagine.

Def: Una funzione $f: A \to B$ si dice <u>biettiva</u> o <u>biunivoca</u> se f è iniettiva e suriettiva.

Equivalente f è biunivoca se ogni elemento di B possiede <u>esattamente</u> una controimmagine.

<u>Esempio</u>

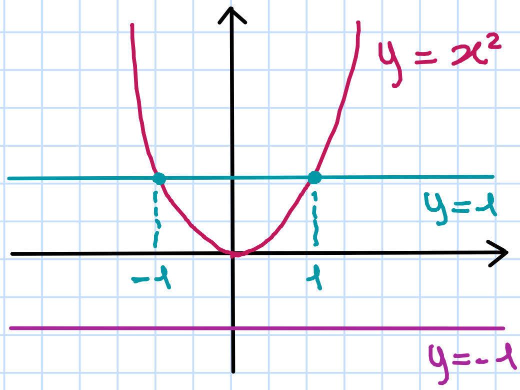
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

→ funzioni di variabile reale e a valori reali.

- INIETTIVA? No perché $f(1) = f(-1) = 1$
- SURIETTIVA? No perché $f(x) = x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow Im(f) \subseteq \mathbb{R}^+ \Rightarrow Im(f) \neq \mathbb{R}$

geometricamente una funzione f è <u>iniettiva</u> se ogni retta $y=k$, $k \in \mathbb{R}$ interseca il grafico $y = f(x)$ in <u>al più</u> un punto



geometricamente, una funzione f è <u>suriettiva</u> se ogni retta $y=k$, $k \in \mathbb{R}$ interseca il grafico $y = f(x)$ in <u>almeno</u> un punto

NOZIONE DI CAMPO

INSIEME + OPERAZIONI che soddisfano certe proprietà = STRUTTURA ALGEBRICA

Esempi di strutture algebriche: gruppo, anello, campo, etc.

gruppo ↑ 1 operazione; anello ↑ 2 operazioni; campo ↑ 2 operazioni

Def: Sia X un insieme.

Un' <u>operazione binaria interna</u> su X è una funzione dal prodotto cartesiano $X \times X$ in X.

$$* : X \times X \to X$$
$$(x, y) \mapsto x * y$$

Esempio: l'addizione su $\mathbb{R}$ è un'operazione binaria interna

$$+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x+y$$
$$(2,3) \longmapsto 5$$

operazione di addizione che conosciamo

Proprietà di $(\mathbb{R},+)$

1) COMMUTATIVITÀ: $x+y = y+x$, $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$
2) ASSOCIATIVITÀ: $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$
3) ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO:
$\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x+0 = 0+x = x$
4) ESISTENZA DELL'OPPOSTO:
$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\exists\, x' \in \mathbb{R}$ t.c. $x+x' = x'+x = 0$ $(x' = -x)$

Anche la moltiplicazione su $\mathbb{R}$ è un'operazione binaria interna

$$\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x\cdot y$$

Proprietà di $(\mathbb{R},\cdot)$

5) COMMUTATIVITÀ: $x\cdot y = y\cdot x$ $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$
6) ASSOCIATIVITÀ $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$, $\forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$
7) ELEMENTO NEUTRO: $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $x\cdot 1 = 1\cdot x = x$
8) ESISTENZA INVERSO: $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\exists\, x' \in \mathbb{R}$ t.c.
$x\cdot x' = x'\cdot x = 1$ $\left(x' = x^{-1} = \frac{1}{x}\right)$

9) Infine $+$ e $\cdot$ soddisfano la PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA.
$\forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$, $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$, $(x+y)\cdot z = xz+yz$

$\mathbb{R}$ dotato delle operazioni di addizione e moltiplicazione è chiamato <u>campo</u> dei numeri reali

Più in generale abbiamo (definizione di campo)

Def: Sia $K \neq \emptyset$ un insieme dotato di due operazioni binarie:

$$+ : K \times K \to K$$

$$\cdot : K \times K \to K$$

$(K, +, \cdot)$ è detto un <u>campo</u> se

1) $+$ è commutativa $(\forall x, y \in K,\ x+y = y+x)$
2) $+$ è associativa $(\forall x, y, z \in K,\ (x+y)+z = x+(y+z))$
3) esiste elemento neutro 0 rispetto a $+$ $(0+x = x+0 = x, \forall x \in K)$
4) $\forall x \in K$ esiste un opposto x' t.c. $x+x' = x'+x = 0$
5) $\cdot$ è commutativa $(\forall x, y \in K,\ x \cdot y = y \cdot x)$
6) $\cdot$ è associativa $(\forall x, y, z \in K,\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$
7) esiste elemento neutro 1 rispetto a $\cdot$ $(x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \forall x \in K)$
8) $\forall x \in K \setminus \{0\}$ esiste un inverso x' t.c. $x \cdot x' = x' \cdot x = 1$
9) $\cdot$ è distributiva rispetto a $+$ $(\forall x, y, z \in K\ \ x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$, $(x+y)z = xz + yz)$

Esempi

1) $\mathbb{N}$ è dotato di due operazioni binarie

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad\qquad \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$(n, m) \mapsto n+m \qquad\qquad (n, m) \mapsto nm$$

<u>Attenzione</u>: $+$ <u>non</u> verifica ④ (esistenza opposto), poichè $\nexists\ n \in \mathbb{N}$ tale che $x+1 = 0$
$(-1 \notin \mathbb{N})$

$\Longrightarrow$ $\mathbb{N}$ <u>non</u> è un campo

2) $\mathbb{Z}$ è dotato di due operazioni binarie

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad\qquad \cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$(n, m) \mapsto n+m \qquad\qquad (n, m) \mapsto nm$$

<u>Attenzione</u>: $\cdot$ <u>non</u> verifica ⑧ (esistenza inverso), poichè $\nexists\ n \in \mathbb{Z}$ tale che $2n = 1$ $\left(\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}\right)$

$\Longrightarrow$ $\mathbb{Z}$ <u>non</u> è un campo.

3) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$: campo dei numeri razionali
$(\mathbb{R}, +, \cdot)$: " " " reali
$(\mathbb{C}, +, \cdot)$: " " " complessi

4) $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$: campo finito a due elementi.

$+ : \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \longrightarrow \mathbb{F}_2$

$$(0,0) \longmapsto 0$$
$$(0,1) \longmapsto 1$$
$$(1,0) \longmapsto 1$$
$$(1,1) \longmapsto 0$$

$\cdot : \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \longrightarrow \mathbb{F}_2$

$$(0,0) \longmapsto 0$$
$$(0,1) \longmapsto 0$$
$$(1,0) \longmapsto 0$$
$$(1,1) \longmapsto 1$$

0 è l'elemento neutro di +
1 è l'elemento neutro di ·
1 è l'opposto e l'inverso di se stesso.

È possibile verificare che + e · verificano 1, 2, ..., 9.

ESERCIZI : Fare gli esercizi 1,2,3 del Foglio 1 "Campi e Spazi vettoriali"

In questo corso studieremo le basi dell' ALGEBRA LINEARE, partendo da una delle sue nozioni fondamentali:

lo SPAZIO VETTORIALE.

Introdurremo la definizione di spazio vettoriale attraverso l'esempio dei vettori geometrici del piano.

I VETTORI GEOMETRICI

I VETTORI sono usati in fisica per rappresentare grandezze fisiche caratterizzate da:

- una direzione
- un verso
- un'intensità

Tali grandezze sono dette vettoriali.

esempi: velocità, forza, accelerazione, campo elettrico, momento angolare.

[si differenziano dalle grandezze scalari che sono definite unicamente dalla loro intensità

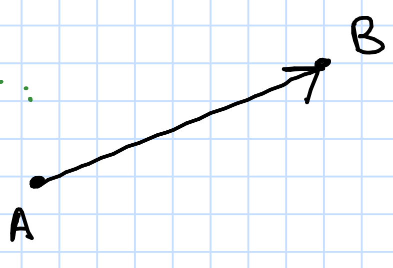
esempi: massa, temperatura, volume, lavoro, pressione, etc.]

GEOMETRICAMENTE rappresentiamo un vettore con un "segmento orientato".

Nel piano euclideo π:

punto finale

punto di applicazione o iniziale



Def: Un segmento orientato è una coppia ordinata di punti $(A,B) \in \pi \times \pi$.

prodotto cartesiano

Notazione: $\overrightarrow{AB} := (A,B)$

FISICA		GEOMETRIA
direzione	$\leftrightarrow$	qualsiasi retta parallela al segmento $\overline{AB}$
verso	$\leftrightarrow$	punto iniziale $\rightarrow$ finale
intensità	$\leftrightarrow$	lunghezza di $\overline{AB}$

Nota: $\forall\ P \in \pi$, $\overrightarrow{PP}$ corrisponde al vettore nullo (per cui non è possibile definire né una direzione né un verso)

Vogliamo definire una relazione di equivalenza sull'insieme dei segmenti orientati del piano.

Richiamiamo innanzitutto cos'è una relazione di equivalenza.

Def: Sia X un insieme.
Una relazione binaria R su X è un sottoinsieme di $X \times X$.

Siano $x, y \in X$. Diciamo x è in relazione con y, e scriviamo $x \sim_R y$, se $(x,y) \in R$.

La relazione R è detta di equivalenza se verifica le seguenti proprietà:

- RIFLESSIVA: $\forall\ x \in X,\quad x \sim_R x$.
- SIMMETRICA: $\forall\ x, y \in X,\quad x \sim_R y \Rightarrow y \sim_R x$
- TRANSITIVA: $\forall\ x, y, z \in X,\quad x \sim_R y,\ y \sim_R z \Rightarrow x \sim_R z$.

Se R è una relazione di equivalenza su X $\forall\ x \in X$ definiamo la classe di equivalenza di x:

$$[x]_R := \{ y \in X : x \sim_R y \}.$$

Si noti che classi di equivalenza distinte corrispondono a sottoinsiemi di X disgiunti.
Inoltre l'unione di tutte classi di equivalenza è uguale a X.

In altre parole $\{ [x]_R : x \in X \}$ è una partizione di X.

insieme delle classi di equivalenza di R

Esempio:

Considieriamo l'insieme

$X = \{$ le studentesse e gli studenti di Geometria e Algebra $\}$

e la seguente relazione su X. $\forall\, x, y \in X$

$x \sim y \iff x$ e y sono nati nello stesso mese

Sappiamo che

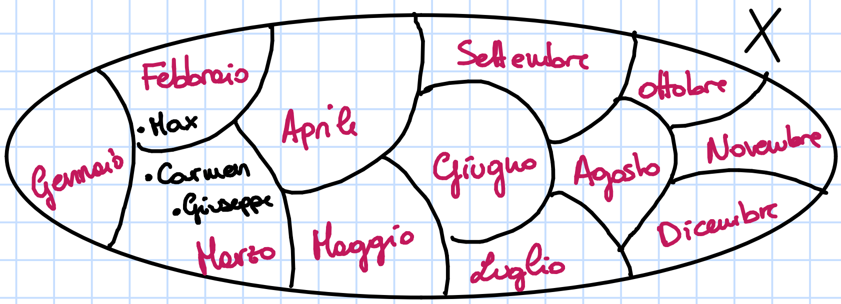
- Massimiliano è nato a Febbraio
- Giuseppe è nato a marzo
- Carmen è nata a marzo

Quindi: Giuseppe $\sim$ Carmen (poiché sono nati entrambi a marzo)

Massimiliano $\nsim$ Giuseppe (perché sono nati in mesi diversi)

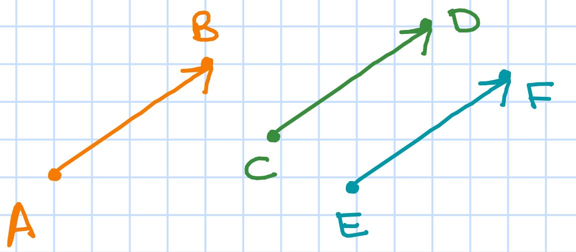
$\sim$ soddisfa le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, ed è quindi una relazione di equivalenza.

Ogni classe di equivalenza è costituita dagli studenti che sono nati nello stesso mese.
Esistono quindi al più 12 classi di equivalenza, una per ogni mese e tali classi costituiscono una partizione di X



Nel piano esistono infiniti segmenti orientati che hanno "stessa direzione, stesso verso, stessa intensità".
Diciamo che questi segmenti orientati sono "equipollenti" due a due.

<u>esempio</u> :



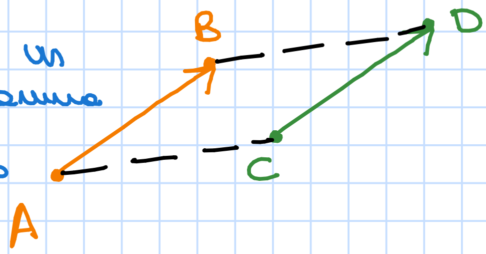
$\vec{AB}$, $\vec{CD}$ e $\vec{EF}$ sono "equipollenti" tra loro

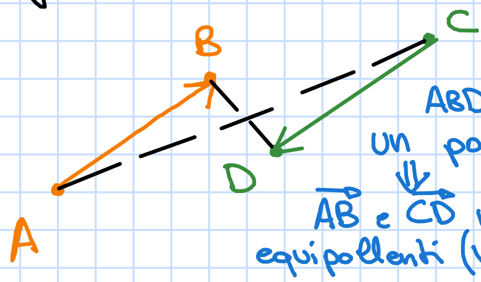
L'unica cosa che cambia è il punto di applicazione

Più formalmente :

<u>Def</u>: Due segmenti orientati $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ si dicono <u>equipollenti</u> e scriviamo $\vec{AB} \sim \vec{CD}$ se il <u>quadrilatero</u> avente vertici, ordinatamente ABDC è un parallelogramma.

ABDC è un parallelogramma
⇓
$\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ sono equipollenti





ABDC <u>non</u> è un parallelog.
⇓
$\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ non sono equipollenti (verso diverso)

L'equipollenza è una relazione di equivalenza:

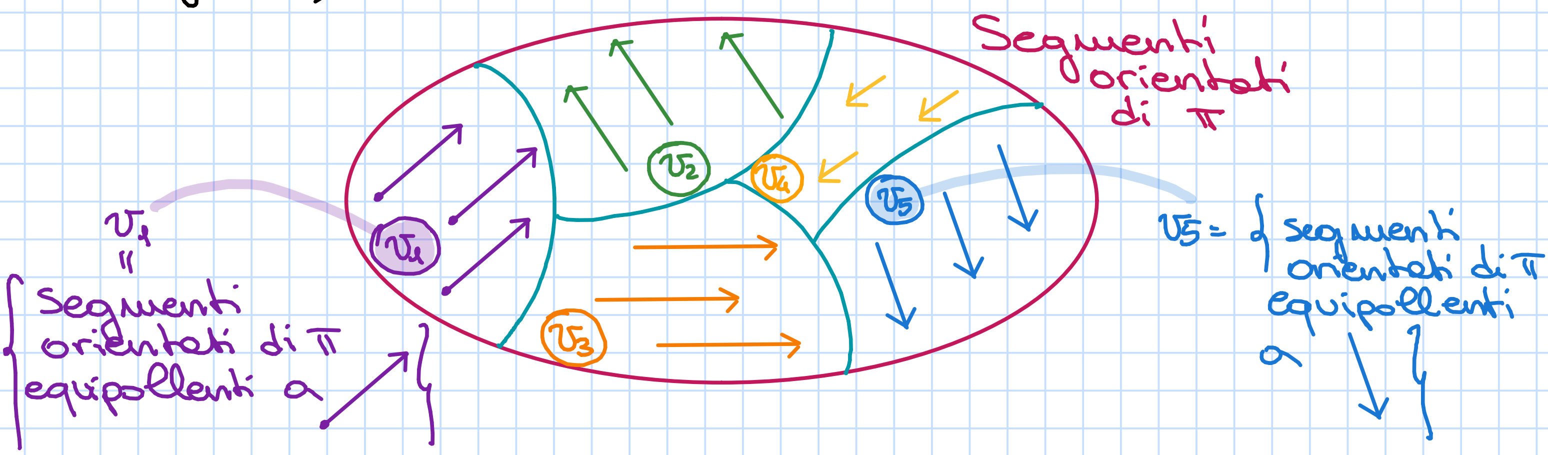
- riflessiva (ogni segmento orientato è equipollente a se stesso: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$)
- simmetrica (se $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ allora $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$)
- transitiva (se $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$ allora $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$)

Per ogni segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ posso considerare la corrispondente classe di equipollenza:

$$\text{Classe}_{\overrightarrow{AB}} = \{ \overrightarrow{CD} : \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \}$$

insieme dei segmenti orientati equivalenti ad $\overrightarrow{AB}$.

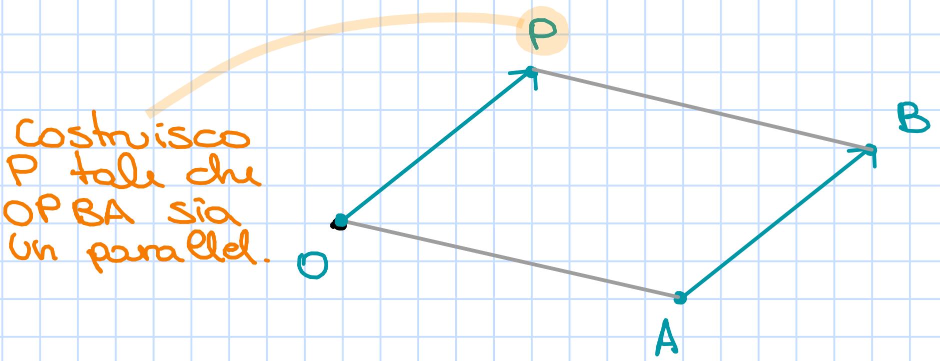
Ne risulta che possiamo partizionare l'insieme dei segmenti orientati in classi di equivalenza (disgiunte)



Def: Un vettore geometrico del piano π è una classe di equipollenza

Sia ora $O \in \pi$ un punto fissato. Mostriamo che per ogni vettore geometrico (= classe di equipollenza) possiamo trovare un "rappresentante" con punto di applicazione O.

Basta mostrare che per ogni segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ esiste un punto $P \in \pi$ tale che $\overrightarrow{OP}$ è equipollente ad $\overrightarrow{AB}$



Per transitività, $\overrightarrow{OP}$ è equipollente a tutti i segmenti orientati equipollenti a $\overrightarrow{AB}$ e posso sceglierlo come <u>rappresentante</u> della classe di equipollenza di $\overrightarrow{AB}$.

Sia $V = \{$vettori geometrici del piano$\}$

Abbiamo quindi una funzione biunivoca:

stesso punto di applicazione O

$V = \{$Vettori geometrici del piano$\} \longleftrightarrow \{$segmenti orientati $\overrightarrow{OP}$, $P \in \pi\}$

v (classe di equipollenza) $\longmapsto$ rappresentante di v con punto di applicazione O

classe di equipollenza di $\overrightarrow{OP}$ $\longleftarrow$ $\overrightarrow{OP}$

A partire da ora lavoreremo solo con segmenti orientati aventi lo stesso punto di applicazione: