Esercizi
2 - Vettori numerici e Matrici

Legenda:

😀 : *Un gioco da ragazzə, dopo aver riletto gli appunti del corso*
🤔 : *Ci devo pensare un po', ma posso arrivarci*
🤯 : *Non ci dormirò stanotte*

😀 **Esercizio 1.** Siano $\mathbf{v} = (1, 2)$, $\mathbf{w} = (3, 4) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Determinare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che
$$\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w} = (1, 0).$$

(b) Mostrare che $\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w} = (0, 0)$ se e solo se $\lambda = \mu = 0$.

(c) Dimostrare che per ogni $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che
$$\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w} = (a, b).$$
In particolare determinare λ e μ in funzione di a e b.

😀 **Esercizio 2.** Si considerino le matrici seguenti:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si effettuino, quando possibile, le operazioni seguenti:

(a) $(3A + B)C$.

(b) $(A + B)^2$.

(c) $-5AD$.

(d) $CD + EA$.

(e) ECD.

(f) AB^TC.

(g) $A^3 + I_3$.

😀 **Esercizio 3.** Una matrice $N \in \mathbb{M}_n(K)$ si dice *nilpotente* se esiste un intero $k \geq 1$ tale che $N^k = O_n$, dove $O_n \in \mathbb{M}_n(K)$ è la matrice nulla. Dimostrare che per ogni $a, b, c \in K$ la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

è nilpotente.

🤔 **Esercizio 4.**

(😀) Determinare, se esiste, l'inversa della matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Se esiste, verificare che il risultato ottenuto è corretto.

(🤔) Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice avente almeno una riga nulla, cioè tale che $\exists\ i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $a_{ij} = 0$ per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$. Dimostrare che A <u>non</u> è invertibile.

🤔 **Esercizio 5.** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Per $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, si determinino i coefficienti di A^k (in funzione di k) e si dimostri l'asserto utilizzando il principio di induzione.

🤔 **Esercizio 6.**

(😀) Mostrare che per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

è ortogonale.

(🤯) Dimostrare, più in generale, che una matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ è ortogonale se e solo se è della forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

con $a^2 + b^2 = 1$. (Si noti che essendo l'enunciato della forma *se e solo se* ci sono due implicazioni da dimostrare.)