Geometria e Algebra - MIS-Z

Sesto appello - Febbraio - Soluzioni

07/02/2023

Nome e Cognome: ______________________

Corso di laurea: ______________________

Matricola: ______________________

Informazioni

Questo appello contiene 5 esercizi per un totale di 34 punti. Il punteggio ottenuto x sarà convertito in 30esimi nella maniera seguente:

- se $x \leq 30$, allora x sarà il voto in 30esimi;
- se $30 < x \leq 34$, allora il voto sarà 30 e Lode.

Le risposte devono essere opportunamente giustificate per ottenere il punteggio massimo. Le risposte indecifrabili non verranno valutate.

Il tempo a disposizione è di 3 ore. È vietato l'utilizzo di ogni tipo di calcolatrice.

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	

TOTALE

ESERCIZIO 1 [6 punti]. **Vero o Falso?**

Per ciascun asserto si stabilisca se è vero o falso, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta.

(a) La funzione

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \to & (x+1, y, z-2) \end{array}$$

è un'applicazione lineare.

☐ **VERO**

■ **FALSO**

Giustificazione

Si ha $f(0,0,0) = (1,0,-2)$. Poiché $f(0,0,0) \neq (0,0,0)$, f non è un'applicazione lineare.

(b) Il vettore $(1,0,0) \in \mathbb{R}^3$ appartiene a $Span\{(1,2,-1),(3,-1,-1)\}$.

☐ **VERO**

■ **FALSO**

Giustificazione

Poiché $(1,2,-1)$ e $(3,-1,-1)$ sono linearmente indipendenti, il vettore $(1,0,0)$ appartiene a $Span\{(1,2,-1),(3,-1,-1)\}$ se e solo se $(1,0,0),(1,2,-1)$ e $(3,-1,-1)$ sono linearmente dipendenti. Abbiamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

quindi $(1,0,0),(1,2,-1)$ e $(3,-1,-1)$ sono linearmente indipendenti e di conseguenza $(1,0,0) \notin Span\{(1,2,-1),(3,-1,-1)\}$.

(c) Nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$ le rette

$$r : 3X + Y - 2 = 0 \qquad \text{e} \qquad s : X - 3Y = 0$$

sono ortogonali.

■ **VERO**

□ **FALSO**

Giustificazione

Dalle equazioni cartesiane si deducono i vettori normali a r e a s, che sono rispettivamente $(3, 1)$ e $(1, -3)$. Poiché $\langle(3, 1), (1, -3)\rangle = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = 0$, concludiamo che r e s sono ortogonali.

(d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Se f è suriettiva, allora $m \leq n$.

■ **VERO**

□ **FALSO**

Giustificazione

Se f è suriettiva allora $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^m) = m$. Quindi per il teorema del rango abbiamo

$$n = \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(\ker(f)) + m \geq m,$$

dove l'ultima disuguaglianza è giustificata dal fatto che $\dim(\ker(f)) \geq 0$. Concludiamo che $n \geq m$.

ESERCIZIO 2 [6 punti]. **Sistema con parametro.**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si discuta la compatibilità del sistema

$$\begin{cases} X_2 + kX_4 = 0 \\ -X_1 + kX_3 = -1 \\ X_2 - X_4 = 4 \\ -X_1 + 2X_2 + kX_3 = 3 \end{cases}$$

e, quando il sistema è compatibile, se ne determinino il "numero" delle soluzioni e l'insieme delle soluzioni. Si riassuma quanto trovato nella tabella seguente:

k	**Compatibile?**	**Numero di soluzioni**	**Insieme delle soluzioni**
$k = 1$	SI	∞^1	$\{(t+1, 2, t, -2), t \in \mathbb{R}\}$
$k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$	NO	0	-

Svolgimento

Consideriamo la matrice dei coefficienti A e la matrice orlata $(A|b)$ associate al sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & k \\ -1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & k & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & k & 0 \\ -1 & 0 & k & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & k & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo innanzitutto i valori di k tali che $\det(A) \neq 0$. Infatti per tali valori avremo $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 4$ e quindi, per Rouché–Capelli, il sistema sarà compatibile ed ammetterà un'unica soluzione che determineremo con il metodo di Cramer.

Con il metodo di Laplace si calcola facilmente che $\det(A) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. Pertanto il sistema o risulterà incompatibile o ammetterà infinite soluzioni. Procediamo quindi con la riduzione di Gauss–Jordan della matrice orlata.

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_1 \leftrightarrow R_2$,
2. $R_4 \leftarrow R_4 - R_1$,
3. $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$,
4. $R_4 \leftarrow R_4 - 2R_2$,

si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & k & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-k & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2k & 4 \end{pmatrix}.$$

A questo punto dobbiamo distinguere due casi, $k \neq -1$ e $k = -1$.

CASO 1. Se $k \neq -1$ allora possiamo effettuare un'ulteriore operazione per rendere la matrice a scalini. Con l'operazione $R_4 \leftarrow R_4 - \frac{2k}{1+k} R_3$ (definita appunto quando $k \neq -1$), si ottiene

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & k & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-k & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4(1-k)}{1+k} \end{pmatrix}.$$

Notiamo quindi subito che se $k \neq -1$ e $k \neq 1$ il sistema non è compatibile, poiché in tal caso la matrice dei coefficienti ha rango 3 e la matrice orlata ha rango 4.

Per $k = 1$ la matrice a scalini è

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In tal caso sia la matrice dei coefficienti che la matrice orlata hanno rango 3. Quindi il sistema possiede $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni. Scegliendo X_3 come variabile libera otteniamo l'insieme di soluzioni

$$S_1 = \{(t+1, 2, t, -2), t \in \mathbb{R}\}.$$

CASO 2. Se $k = -1$ allora con le operazioni 1,2,3,4 si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

La terza riga corrisponde all'equazione $0 = 4$, pertanto per $k = -1$ il sistema non è compatibile.

In conclusione il sistema è compatibile se e solo se $k = 1$ e in tal caso l'insieme delle soluzioni è

$$S_1 = \{(t+1, 2, t, -2), t \in \mathbb{R}\}.$$

ESERCIZIO 3 [8 punti]. **Un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.**

(a) Si enunci il teorema spettrale.

Teorema

Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita e $f : V \to V$ un endomorfismo simmetrico di V, allora esiste una base ortonormale di V e diagonalizzante per f.

(b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si consideri l'endomorfismo

$$\begin{array}{rccc} f_k : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (2x - y + kz, -kx + y, x + kz). \end{array}$$

(b1) Si determinino i valori di k per cui $\mathrm{Im}(f_k) = \mathbb{R}^3$.

Svolgimento

Sia A_k la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$. Dall'espressione di f_k abbiamo

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & -1 & k \\ -k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Allora $\mathrm{Im}(f_k) = \mathbb{R}^3$ se e solo se $\mathrm{rg}(A_k) = 3$, ovvero se e solo se $\det(A_k) \neq 0$. Abbiamo

$$\det(A_k) = k - k^2 = k(1 - k),$$

quindi $\mathrm{Im}(f_k) = \mathbb{R}^3$ se e solo se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

(b2) Per $k = 1$ si spieghi perché l'operatore f_1 è diagonalizzabile e si determini una base diagonalizzante per f_1 e ortornomale rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}_3$.

Svolgimento

Per $k = 1$ abbiamo

$$\begin{array}{cccc} f_1 : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (2x - y + z, -x + y, x + z). \end{array}$$

Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ (si ricorda che $\mathcal{B}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare standard). La matrice associata a f_1 rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché A_1 è una matrice simmetrica, l'operatore f_1 è simmetrico ed è quindi diagonalizzabile per il teorema spettrale.

Per determinare una base ortonormale di V e diagonalizzante per f_1, cominciamo con il determinare gli autovalori di f_1, trovando le radici del polinomio caratteristico:

$$\begin{vmatrix} 2-T & -1 & 1 \\ -1 & 1-T & 0 \\ 1 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = -T^3 + 4T^2 - 3T = -T(T-1)(T-3).$$

Pertanto gli autovalori di f_1 sono $0, 1$ e 3, tutti di molteplicità algebrica 1. Per ognuno di essi determiniamo l'autospazio corrispondente:

- $V_0(f_1) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(1, 1, -1)\}.$

- $V_1(f_1) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(0, 1, 1)\}.$

- $V_3(f_1) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(2, -1, 1)\}.$

Sia $\mathcal{B}' = \{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (2, -1, 1)\}$ l'unione delle basi dei tre autospazi $V_0(f_1)$, $V_1(f_1)$ e $V_3(f_1)$. Allora $\mathcal{B}'$ è una base diagonalizzante per f_1. Inoltre $\mathcal{B}'$ è ortogonale in quanto gli autovalori di f_1 sono tutti distinti. Per ottenere da $\mathcal{B}'$ una base $\mathcal{B}''$ diagonalizzante per f_1 e ortonormale rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$ basterà dividere ciascun vettore di $\mathcal{B}'$ per la sua norma. Quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}'' &= \left\{ \frac{(1,1,-1)}{\|(1,1,-1)\|}, \frac{(0,1,1)}{\|(0,1,1)\|}, \frac{(2,-1,1)}{\|(2,-1,1)\|} \right\} \\ &= \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

(b3) Sia A_1 la matrice associata a f_1 rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si determini una matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tale che

$$^{T}PA_1P = D$$

dove $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ è una matrice diagonale, e si verifichi la risposta calcolando il prodotto di matrici.

Svolgimento

Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e sia $\mathcal{B}''$ la base ortonormale diagonalizzante trovata al punto (b2). Allora una matrice P tale che $^{T}PA_1P$ è diagonale è data dalla matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}$ del cambiamento di base da $\mathcal{B}''$ a $\mathcal{B}'$. Quindi

$$P = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}.$$

Essendo P la matrice del cambiamento di base tra due basi ortonormali di $\mathbb{R}^3$, P è ortogonale, ossia $P^{-1} = {}^{T}P$.

Effettuando il prodotto di matrici, si verifica con qualche conto che

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 4 [8 punti]. **Geometria nello spazio.**

Si consideri lo spazio $\mathbb{E}^3$ con il riferimento cartesiano standard.

(a) Si mostri che i punti $A(1,3,-1), B(-1,1,-3)$ e $C(0,2,-2)$ di $\mathbb{E}^3$ sono allineati e si determini la retta r che li contiene.

Svolgimento

Abbiamo $\overrightarrow{AB} = (-2,-2,-2)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1,-1,-1)$. Poiché $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$, ovvero $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ sono collineari, i punti A, B e C sono allineati.
Scriviamo le equazioni parametriche di r utilizzando $\overrightarrow{AC}$ e A:

$$r: \begin{cases} x = -t+1 \\ y = -t+3 \\ z = -t-1 \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Al variare di h in $\mathbb{R}$ si consideri la retta s_h descritta dalle equazioni cartesiane

$$s_h: \begin{cases} Y + Z = -h \\ -X + hY = 3 \end{cases}$$

e si determini la posizione reciproca di r e s_h. Inoltre, quando r e s_h sono incidenti, se ne determini il punto di intersezione.

Svolgimento

Innanzitutto determiniamo le equazioni cartesiane di r, ricavando t dall'ultima equazione e sostituendola nelle prime due:

$$\begin{cases} t = -z-1 \\ x = z+2 \\ y = z+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -z-1 \\ x - z = 2 \\ y - z = 4. \end{cases}$$

Le equazioni cartesiane di r sono quindi:

$$r: \begin{cases} X - Z = 2 \\ Y - Z = 4. \end{cases}$$

Sia dunque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -h \\ -1 & h & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

la matrice dei coefficienti delle equazioni cartesiane di r e s_h. Utilizzando il metodo di Laplace per il calcolo del determinante otteniamo:

$$\det(A) = h^2 - 5h + 6 = (h-2)(h-3).$$

Ne deduciamo che r e s_h sono sghembe se e solo se $h \neq 2$ e $h \neq 3$.

Per $h = 2$ o $h = 3$ le rette r e s_h sono complanari, e in base al loro numero di intersezioni determiniamo se sono incidenti, parallele disgiunte o parallele coincidenti.

- Sia $h = 2$. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} X - Z = 2 \\ Y - Z = 4. \\ Y + Z = -2 \\ -X + 2Y = 3 \end{cases}$$

  Risolvendo il sistema si ottiene l'unica soluzione $(-1, 1, -3)$. Quindi le rette r e s_2 sono incidenti e si intersecano nel punto $(-1, 1, -3) \in \mathbb{E}^3$.

- Sia $h = 3$. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} X - Z = 2 \\ Y - Z = 4. \\ Y + Z = -3 \\ -X + 3Y = 3 \end{cases}$$

  Risolvendo il sistema si ottiene l'unica soluzione $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right)$. Quindi le rette r e s_3 sono incidenti e si intersecano nel punto $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right) \in \mathbb{E}^3$.

(c) Per uno dei valori di h per cui r e s_h sono complanari, si determini il piano π che le contiene entrambe.

Svolgimento

Consideriamo il caso $h = 2$. La retta s_2 ha equazioni cartesiane:

$$s_2 : \begin{cases} Y + Z = -2 \\ -X + 2Y = 3 \end{cases}$$

Per determinare il piano π contenente r e s_2 basterà determinare tre punti non allineati che appartengono al piano. Ad esempio possiamo prendere un punto di r, un punto di s_2 e il punto di intersezione di r e s_2. Quindi scegliamo $P_1(1, 3, -1) \in r$, $P_2(-3, 0, -2) \in s_2$ e $P_3(-1, 1, -3)$.
Allora il piano π ha giacitura $Span\{\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}\} = Span\{(-4, -3, -1), (-2, -2, -2)\}$ e passa per il punto P_1. Deduciamo quindi che π ha equazioni parametriche

$$\pi : \begin{cases} x = -4s - 2t + 1 \\ y = -3s - 2t + 3 \\ z = -s - 2t - 1 \end{cases}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 5 [6 punti]. **Matrici e sottospazi vettoriali.**

(a) Enunciare il teorema di Binet.

Teorema

Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. In altre parole il determinante del prodotto di due matrici quadrate è uguale al prodotto dei loro determinanti.

(b) Utilizzando il fatto che una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$, dimostrare l'asserto seguente:

Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora A e B sono invertibili se e solo se AB è invertibile.

Dimostrazione

$\Rightarrow$) Se A e B sono invertibili, allora $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$. Per il teorema di Binet si ha $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, quindi $\det(AB) \neq 0$ in quanto è prodotto di due numeri reali non nulli. Ne segue che AB è invertibile.

$\Leftarrow$) Se AB è invertibile allora $\det(AB) \neq 0$. Dal teorema di Binet segue che $\det(A)\det(B) \neq 0$, quindi $\det(A)$ e $\det(B)$ sono entrambi non nulli (altrimenti il loro prodotto sarebbe uguale a zero). Concludiamo che A e B sono invertibili.

(c) Si determini se l'insieme delle matrici invertibili di taglia 2×2 è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Svolgimento

Sia $W = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A \text{ è invertibile}\}$. Il sottoinsieme W non è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Infatti

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W$$

poiché la matrice nulla ha determinante uguale a zero e quindi non è invertibile.

(d) Si richiama che la *traccia* di una matrice quadrata è la somma degli elementi sulla diagonale principale. In altre parole per $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la traccia di A è data da

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Si mostri che l'insieme delle matrici 2×2 di traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se ne determini una base e la dimensione.

Svolgimento

Consideriamo l'insieme

$$U := \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \operatorname{tr}(A) = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a + d = 0 \right\}.$$

Mostriamo innanzitutto che U soddisfa le proprietà di sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Si ha $U \neq \emptyset$, poiché la traccia di $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è uguale a zero e quindi $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$.
- Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e siano $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ due matrici in U. Allora $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B) = 0$, ossia $a_1 + d_1 = a_2 + d_2 = 0$. Si ha

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu a_2 & \lambda b_1 + \mu b_2 \\ \lambda c_1 + \mu c_2 & \lambda d_1 + \mu d_2 \end{pmatrix}.$$

  Quindi

$$\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda a_1 + \mu a_2 + \lambda d_1 + \mu d_2 = \lambda(a_1 + d_1) + \mu(a_2 + d_2) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0,$$

  da cui segue che $\lambda A + \mu B \in U$.

Concludiamo che U è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Determiniamo ora una base e la dimensione di U. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} U &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \mathit{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Si mostra facilmente che $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti, quindi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di U e U ha dimensione 3.