

LEZIONE 5 - GEOMETRIA e ALGEBRA

21/03/23

Oggetti fondamentali di studio in algebra lineare sono i sistemi di equazioni lineari:

esempio di equazioni lineari in 2 incognite: $3x - y = 2$
(a coefficienti reali)

sistema di 2 equazioni lineari in 3 incognite: (*) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$
(a coefficienti reali)

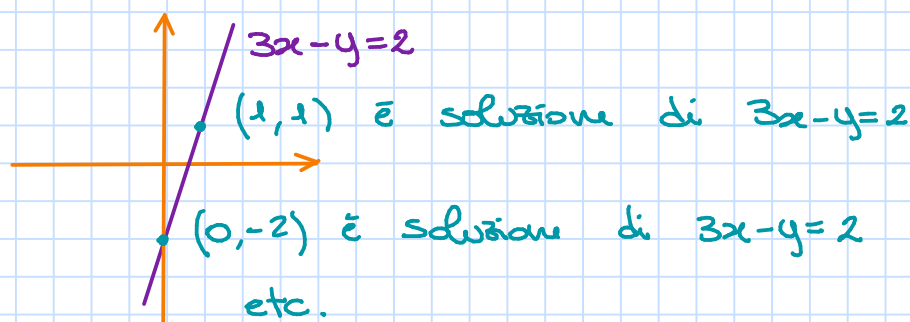
Una soluzione del sistema lineare (*) è un vettore $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che verifica tutte le equazioni del sistema

esempio: $(1, 2, 3)$ è una soluzione di $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 1 + 2 + 3 = 6 \checkmark \\ 2 \cdot 1 - 2 = 0 \checkmark \end{cases}$

Dato un sistema lineare, vogliamo poter rispondere alle seguenti domande

- 1) Il sistema ha soluzioni?
- 2) Se sì, "quante" sono? Come si calcolano?
- 3) Come possiamo interpretare geometricamente l'insieme delle soluzioni S ? (Soprattutto nel caso di 2 o 3 incognite, cioè $S \subseteq \mathbb{R}^2$ o $S \subseteq \mathbb{R}^3$).

esempio: le soluzioni di $3x - y = 2$ formano una retta nel piano



Notiamo che possiamo racchiudere tutte le informazioni del sistema lineare (*) in una tabella di numeri:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Questo è il nostro primo esempio di matrice...

Quindi uno strumento utile per la risoluzione di sistemi lineari (ma non solo!) sono le matrici.

LE MATRICI: un (altro) esempio di spazio vettoriale, ma soprattutto uno strumento compatto e conciso per rappresentare diversi oggetti matematici, tra cui molti nel contesto dell'algebra lineare.

Sia K un campo (potete sempre immaginare $K = \mathbb{R}$)
Siano $m, n \geq 1$ due interi.

Def: Una matrice $m \times n$ a elementi in K è una tabella rettangolare di $m \cdot n$ elementi di K disposti su m righe e n colonne.

esempio: $K = \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \sqrt{2} \\ \pi & 0 & 3 \end{pmatrix}$ è una matrice 2×3 .

numero colonne
↓
↑
numero righe

In un certo senso le matrici sono la versione "bidimensionale" dei vettori numerici di K .

Notazione: Denotiamo le matrici con le lettere maiuscole.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

→ i -esima riga

↓
 j -esima colonna

In maniera più compatta possiamo scrivere

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, \quad a_{ij} \in K$$

elemento generico: a_{ij} → indice di colonna
↓
indice di riga

Un po' di terminologia

- Ciascuno degli elementi della matrice è detto entrata (o coefficiente) della matrice.
- Se $n=m$, una matrice $n \times n$ si dice quadrata di ordine n .
Se A è quadrata di ordine n , gli elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ costituiscono la diagonale principale di A .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

diagonale: $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{ii}, \dots, a_{nn})$

- N.B.:
- ogni elemento della diagonale (principale) è della forma a_{ii} (stesso indice di riga e di colonna)
 - non si parla di diagonale per matrici non quadrate.

- Una matrice $1 \times n$ è chiamata vettore riga
- Una matrice $n \times 1$ è chiamata vettore colonna

esempio: • $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ è una matrice quadrata di ordine 2

• $B = (1 \ 0 \ -2)$ è un vettore riga 1×3

• $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ è un vettore colonna 2×1

Notazioni

$$M_{m,n}(K) = \{ \text{Matrici } m \times n \text{ a elementi in } K \}$$

$$M_n(K) = M_{n,n}(K) = \{ \text{matrici quadrate } n \times n \text{ a elementi in } K \}$$

esempio: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & \sqrt{2} \\ \pi & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$.

Def: Siano $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(K)$. Diciamo che $A=B$ se
 $a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$

esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$: $A \neq B$ perché $a_{12} \neq b_{12}$.

Definiamo due operazioni su $M_{m,n}(K)$:

• SOMMA DI MATRICI

$$+ : M_{m,n}(K) \times M_{m,n}(K) \longrightarrow M_{m,n}(K)$$

$$(A, B) \longmapsto A+B$$

dove $A+B \in M_{m,n}(K)$ è definita nel modo seguente:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad (A \text{ e } B \text{ hanno la stessa taglia})$$

$$A+B := (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$$

esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+(-3) & 2+0 & 3+4 \\ 4+5 & 5+\sqrt{2} & 6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 9 & 5+\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}$$

$A+C$ non è definita perché A e C non hanno la stessa taglia: $A \in M_{2,3}(\mathbb{R}), C \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.

• MOLTIPLICAZIONE PER SCALARI

$$\cdot : K \times M_{m,n}(K) \longrightarrow M_{m,n}(K)$$

$$(\lambda, A) \longmapsto \lambda \cdot A$$

dove $\lambda \cdot A \in M_{m,n}(K)$ è definita nel modo seguente:

$$\lambda \in K, A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$$

$$\lambda \cdot A := (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$$

esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \lambda = -2 \Rightarrow \lambda \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -14 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}$

Proprietà

- 1) + COMMUTATIVA : $A+B = B+A, \forall A, B \in M_{m,n}(K)$
- 2) + ASSOCIATIVA : $(A+B)+C = A+(B+C), \forall A, B, C \in M_{m,n}(K)$
- 3) ELEMENTO NEUTRO rispetto a +

$$O_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{la matrice nulla})$$

↘ dove 0 è l'elemento neutro di $(K, +)$

- 4) OPPOSTO rispetto a +
- Se $A = (a_{ij}) \Rightarrow -A = (-a_{ij})$
- ↖ $-a_{ij}$ è l'opposto di a_{ij} in K .

$$5) \lambda \cdot (A+B) = \lambda A + \lambda B, \forall A, B \in M_{m,n}(K), \forall \lambda \in K$$

$$6) (\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A, \forall A \in M_{m,n}(K), \forall \lambda, \mu \in K$$

$$7) (\lambda \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A), \forall A \in M_{m,n}(K), \forall \lambda, \mu \in K$$

$$8) 1 \cdot A = A, \forall A \in M_{m,n}(K).$$

Quindi $\forall m, n \geq 1$ $(M_{m,n}(K), +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su K .

Ma le matrici sono più di un semplice spazio vettoriale. In particolare è possibile definire un'operazione di prodotto tra matrici. Tale operazione prende anche il nome di **prodotto riga per colonna** e ora capiamo perché.

Siano $(a_1, \dots, a_n) \in M_{1,n}(K)$ un vettore riga e $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$ un vettore colonna.

Definiamo il prodotto di (a_1, \dots, a_n) per $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ come lo scalare ottenuto nel modo seguente:

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

esempio : $(-1 \ 2 \ 5) \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 1 = -1.$

Notiamo che questa definizione funziona solo nel caso in cui il vettore riga è costituito dallo stesso numero di elementi del vettore colonna, o in altre parole quando il numero di colonne del vettore riga è uguale al numero di righe del vettore colonna.

Più in generale il prodotto di matrici è una funzione:

$$\begin{aligned} \cdot : M_{m,n}(K) \times M_{n,p}(K) &\longrightarrow M_{m,p}(K) \\ (A, B) &\longmapsto C = AB \end{aligned}$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, \quad B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}, \quad C = AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$$

ogni entrata della matrice prodotto è il risultato del prodotto di una riga di A per una colonna di B. Poiché A ha m righe e B ha p colonne, $m \times p$ è la taglia di AB.

dove per ogni $1 \leq i \leq m$ e per ogni $1 \leq j \leq p$

$$c_{ij} = \underbrace{(a_{i1} \dots a_{in})}_{\substack{\uparrow \\ \text{i-esima riga} \\ \text{di A}}} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{j-esima colonna} \\ \text{di B}}} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

ovvero l'elemento generico c_{ij} di AB è il prodotto della i-esima riga di A e della j-esima colonna di B.

N.B: poiché per calcolare il prodotto AB dobbiamo calcolare i prodotti di righe di A per colonne di B , AB è definito se e solo se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B .

Esempi

$$\textcircled{1} A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$$

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{R})$$

B ha 4 colonne
 A ha 3 righe

Posso calcolare AB (ma non BA)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 31 & 11 & 6 & -7 \\ -5 & -5 & -2 & 3 \\ 5 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$$

$$\textcircled{2} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Notiamo che i prodotti AB e BA sono entrambi definiti, ma $AB \neq BA$.

Infatti il prodotto di matrici non è commutativo.

$$\textcircled{3} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{1,3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$$

Possiamo calcolare sia AB che BA , ma ottengo matrici di taglia diverse.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \end{pmatrix} \in M_{1,1}(\mathbb{R})$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$$

Def: Diciamo che due matrici commutano se $AB = BA$.

$$A, B \in M_n(K)$$

affinché $AB=BA$ entrambi i prodotti devono essere definiti e avere la stessa taglia. Quindi l'unica possibilità è che A, B siano quadrate dello stesso ordine.

esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

poiché $AB=BA$ diciamo che A e B commutano.

Proprietà del prodotto di matrici

1) è associativo:

$$\forall A \in M_{m,n}(K), \quad \forall B \in M_{n,p}(K), \quad \forall C \in M_{p,q}(K)$$

$$(AB)C = A(BC).$$

$m \times n, n \times p, p \times q$

2) è distributivo rispetto a $+$:

$$\forall A, B \in M_{m,n}(K), \quad \forall C, D \in M_{n,p}(K):$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

$$A(C+D) = AC + AD$$

$$4) \quad \forall \lambda \in K, \quad \forall A \in M_{m,n}(K), \quad \forall B \in M_{n,p}(K): \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

NB: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ abbiamo il prodotto notevole:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tale identità è una conseguenza della commutatività del prodotto in \mathbb{R} , e non è più vera nel contesto delle matrici.

Infatti, $\forall A, B \in M_n(K)$

$$(A+B)^2 := (A+B)(A+B) = (A+B)A + (A+B)B = A^2 + \underbrace{BA + AB}_{BA \neq AB \text{ (in genere)}} + B^2$$

proprietà distributiva

$BA \neq AB$
(in genere)

e non possiamo semplificare ulteriormente.

Ma se A e B commutano allora otteniamo di nuovo il prodotto notevole:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

\uparrow
 $AB = BA$

Elemento neutro rispetto al prodotto

Poiché il prodotto non è commutativo, dobbiamo distinguere tra elemento neutro a sinistra e a destra.

Partiamo da un esempio:

Consideriamo $M_{2,3}(\mathbb{R})$.

Una matrice I_s è un elemento neutro a sinistra per $M_{2,3}(\mathbb{R})$ rispetto al prodotto se

$$I_s A = A, \quad \forall A \in M_{2,3}(\mathbb{R}).$$

Sia $A \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Innanzitutto, se $I_s A = A \Rightarrow I_s \in M_2(\mathbb{R})$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 2 \times 2 & 2 \times 3 & 2 \times 3 \end{matrix}$

Cerchiamo dunque $I_s = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ tale che:

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} a'a + b'd = a \\ a'b + b'e = b \\ a'c + b'f = c \\ c'a + d'd = d \\ c'b + d'e = e \\ c'c + d'f = f \end{cases}$$

Si vede facilmente che $(a', b', c', d') = (1, 0, 0, 1)$ è una soluzione del sistema $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

In altre parole $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è un elemento neutro sinistro per $M_{2,3}(\mathbb{R})$ rispetto al prodotto.

Mostriamo che $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è l'unico elemento in $M_2(\mathbb{R})$ con tale proprietà, esibendo una matrice A per cui l'unico inverso a sinistra è proprio $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allora se $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ è tale che $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b'=0 \\ a'=1 \\ d'=1 \\ c'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

In modo simile si mostra che $I_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ è l'elemento neutro destro per $M_{2,3}(\mathbb{R})$ rispetto al prodotto.

Più in generale definiamo:

Def: $\forall n \geq 1$, la matrice identità o unità di ordine n è

$$I_n = (\delta_{ij}) \in M_n(K)$$

dove

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

↑
delta di Kronecker

dove 1 è l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione di K .

esempio: $I_1 = (1)$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Per $n \geq 1$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

cioè la matrice quadrata di ordine n che ha zeri ovunque tranne sulla diagonale dove ha tutti 1.

Si può facilmente mostrare che $\forall A \in M_{m,n}(K)$ si ha

$$I_m A = A \quad \text{e} \quad A I_n = A$$

cioè I_m (risp. I_n) è ^{l'} ~~un~~ elemento neutro sinistro (risp. destro) per $M_{m,n}(K)$ rispetto al prodotto. ma si può dimostrare che è unico

In particolare I_n è l'elemento neutro (sinistro e destro) per $M_n(K)$, cioè:

$$\forall A \in M_n(K), \quad I_n A = A I_n = A.$$

Prodotto di matrici in $M_n(K)$

Quando $m=n=p$, il prodotto di matrici diventa un'operazione binaria interna su $M_n(K)$:

$$M_n(K) \times M_n(K) \longrightarrow M_n(K)$$

$$(A, B) \longmapsto AB$$

che date due matrici quadrate di ordine n restituisce come risultato una matrice, anch'essa quadrata di ordine n .