Initiation à l'algèbre A - CC2 - Solutions

Université de la Polynésie Française, 2020-2021

28/10/2020

Fonctions et nombres complexes

Informations: Ce contrôle continu est noté sur 24 points. Toutefois votre note sera le minimum entre votre score et 20. Les calculatrices sont interdites et de toute manières elles ne sont pas nécessaires.

Ex 1. [6 points] Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $F = \{a, b, c, d\}$. On considère la fonction suivante:

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \to & F \\ & 1 & \mapsto & c \\ & 2 & \mapsto & a \\ & 3 & \mapsto & d \\ & 4 & \mapsto & c \\ & 5 & \mapsto & a \end{array}$$

a) Déterminer les ensembles $f(\{1, 2, 3\})$ et $f(E)$.

b) Déterminer les images réciproques des ensembles $\{b\}$ et $\{a, d\}$.

c) La fonction f, est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

d) La fonction f, est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.

e) Trouver un sous-ensemble non vide $G \subseteq E$ tel que la restriction $f|_G$ est injective et déterminer la fonction réciproque de $f|_G : G \to f(G)$.

Solution

a) [0,5pt+0,5pt] $f(\{1, 2, 3\}) = \{a, c, d\}$ et $f(E) = \{a, c, d\}$.

b) [0,5pt+0,5pt] $f^{-1}\{b\} = \varnothing$ et $f^{-1}\{a, d\} = \{2, 3, 5\}$.

c) [1,5pt] Non, parce que $f(1) = f(4) = c$.

d) [1,5pt] Non, parce que $b \notin f(E)$.

e) [1pt] Soit $G = \{1, 2, 3\}$. Alors on a:

$$\begin{array}{rccc} f|_G: & G = \{1, 2, 3\} & \to & f(G) = \{a, c, d\} \\ & 1 & \mapsto & c \\ & 2 & \mapsto & a \\ & 3 & \mapsto & d \end{array}$$

Donc $f|_G : \{1, 2, 3\} \to \{a, c, d\}$ est bijective et sa fonction réciproque est la fonction

$$\begin{array}{rccc} (f|_G)^{-1}: & \{a, c, d\} & \to & \{1, 2, 3\} \\ & a & \mapsto & 2 \\ & c & \mapsto & 1 \\ & d & \mapsto & 3 \end{array}$$

Ex 2. [6 points] Soit g la fonction suivante:

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \\ n & \mapsto & (n+7,0). \end{array}$$

a) Donner la définition de fonction injective et de fonction surjective.

b) La fonction g, est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

c) La fonction g, est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.

d) Déterminer une fonction $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$ telle que $f\circ g$ est bijective.

Solution

a) [1pt+1pt] Une fonction $f : E \rightarrow F$ este dite *injective* si $\forall\, x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$ on a $x = y$. La fonction f est dite *surjective* si $\forall\, y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

b) [1,5pt] La fonction g est injective. En effet, soient $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $g(n) = g(m)$. Alors on a:

$$g(n) = g(m) \Leftrightarrow (n+7,0) = (m+7,0) \Leftrightarrow n+7 = m+7 \Leftrightarrow n = m.$$

c) [1,5pt] La fonction g n'est pas surjective. Par exemple l'élément $(0,1)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ n'a pas d'antécedents.

d) [1pt] Soit

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ (n,m) & \mapsto & n-7. \end{array}$$

Alors, pour tout $n\in\mathbb{Z}$ on a :

$$(f\circ g)(n) = f(g(n)) = f((n+7,0)) = n+7-7 = n.$$

Donc $f\circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$ et la fonction $f\circ g : \mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$ est bijective.

Ex 3. [6 points] On considère le nombre complexe suivant:

$$z = \frac{7+i}{3+4i}.$$

a) Mettre z sous forme algébrique.
b) Déterminer $w \in \mathbb{C}$ (en forme algébrique) tel que $zw = 1$.
c) Calculer $|z|$ et déterminer un argument de z.
d) Mettre z sous forme trigonométrique et exponentielle.
e) Utiliser la forme exponentielle de z pour déterminer un nombre complexe u tel que $u^2 = z$.

Solution

a) [1pt] $z = \frac{7+i}{3+4i} = \frac{7+i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{25-25i}{25} = 1-i.$

b) [1pt] Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $zw = 1$. Alors $w = \frac{1}{z}$. On a:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-i} = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

c) [0,5pt +0,5pt] Dans le point (a) on a vu que $z = 1-i$. Donc $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. En représentant z dans le plan complexe on trouve que un argument de z est $arg(z) = -\frac{\pi}{4}$.

d) [1pt+1pt] Une forme trigonométrique de z est $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Une forme exponentielle de z est $z = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

e) [1pt] Dans le point (d) on a trouvé $z = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$. Soit $u = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ en forme exponentielle tel que $u^2 = z$. Alors on a:

$$u^2 = z \Leftrightarrow \left(\rho e^{i\theta}\right)^2 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow \rho^2 e^{i2\theta} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = \sqrt{2} \\ 2\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[4]{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

En particulier, pour $k = 0$, on a que $u = \sqrt[4]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{8}\right)}$ est un nombre complexe tel que $u^2 = z$.

Ex 4. [6 points] On considère les nombres complexes suivants:

$$z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i, \qquad z_2 = 1 + \sqrt{3}i.$$

a) Représenter sous forme algébrique le nombre complexe $w = \dfrac{z_2}{z_1}$.

b) Mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

c) Utiliser (b) pour représenter sous forme exponentielle le nombre complexe w.

d) En déduire de (a) et (c) la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

e) Mettre sous forme algébrique le nombre complexe w^{2020}.

f) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ le nombre complexe w^n est-il réel? Et pour quelles valeurs de n est-il imaginaire pure?

Solution

a) [1pt] $w = \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i} = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i} \cdot \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i.$

b) [0.5pt+0.5pt] On a $|z_1| = \sqrt{2+2} = 2$ et $|z_2| = \sqrt{1+3} = 2$. Donc:

$$z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{4}},$$
$$z_2 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

c) [1pt] On a:

$$w = \frac{z_2}{z_1} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

d) [1pt] De (a) et (c) on obtient:

$$w = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i \quad \text{(forme algébrique)}$$
$$w = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad \text{(forme trigonométrique)}.$$

En égalisant les parties réelles et les parties imaginaires on en déduit:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

e) [1pt] Pour calculer des puissances, on utilisera la forme exponentielle de $w = e^{i\frac{\pi}{12}}$. On obtient:

$$w^{2020} = \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{2020} = e^{i\frac{2020\pi}{12}} = e^{i\frac{(12\cdot 168+4)\pi}{12}} = e^{i\left(168\pi+\frac{\pi}{3}\right)} =$$
$$= e^{i\cdot 2\cdot 84\cdot\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

n) [1pt] On rappelle que un nombre complexe $z = \rho e^{i\theta}$ est réel si et seulement si $\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, et il est imaginaire pure si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$ on a:

$$w^n = e^{i\frac{n\pi}{12}}.$$

Donc:

$$w^n \text{ est réel } \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \frac{n\pi}{12} = k\pi \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n = 12k,$$

c'est à dire si et seulement si n est un multiple de k.
En plus:

$$w^n \text{ est imaginaire pure } \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \frac{n\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n = 12k + 6.$$