Initiation à l'algèbre A

Université de la Polynésie Française, 2021-2022

Devoir Maison 2 - Solutions

07/10/2021

Ex 1. a) Montrer que la composée de deux applications injectives est injective.

b) Montrer que si $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ sont deux fonctions telles que la composée $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Solution

a) Soient $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ deux applications injectives. Montrons que la composée $f \circ g$ est aussi injective. Soient donc $x, y \in E$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. On a:

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \overset{g \text{ injective}}{\Rightarrow} f(x) = f(y) \overset{f \text{ injective}}{\Rightarrow} x = y.$$

Donc $f \circ g$ est aussi injective.

b) On montre que $g \circ f$ est surjective, c'est-à-dire que pour tout $z \in G$ il existe $x \in E$ tel quel $(g \circ f)(x) = z$. Soit donc $z \in G$. Puisque g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$ et puisque f est surjective il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Mais alors on a:

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

On en conclu que $g \circ f$ est surjective.

Ex 2. On considère le nombre complexe suivant:

$$z = \frac{7+i}{3+4i}.$$

a) Mettre z sous forme algébrique.

b) Déterminer $w \in \mathbb{C}$ (en forme algébrique) tel que $zw = 1$.

c) Calculer $|z|$ et déterminer un argument de z.

d) Mettre z sous forme trigonométrique et exponentielle.

e) Utiliser la forme exponentielle de z pour déterminer un nombre complexe u tel que $u^2 = z$.

Solution

a) $z = \dfrac{7+i}{3+4i} = \dfrac{7+i}{3+4i} \cdot \dfrac{3-4i}{3-4i} = \dfrac{25-25i}{25} = 1 - i.$

b) Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $zw = 1$. Alors $w = \frac{1}{z}$. On a:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-i} = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

c) Dans le point (a) on a vu que $z = 1 - i$. Donc $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. En représentant z dans le plan complexe on trouve que un argument de z est $arg(z) = -\frac{\pi}{4}$.

d) Une forme trigonométrique de z est $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Une forme exponentielle de z est $z = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

e) Dans le point (d) on a trouvé $z = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$. Soit $u = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ en forme exponentielle tel que $u^2 = z$. Alors on a:

$$u^2 = z \Leftrightarrow \left(\rho e^{i\theta}\right)^2 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow \rho^2 e^{i2\theta} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = \sqrt{2} \\ 2\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[4]{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

En particulier, pour $k = 0$, on a que $u = \sqrt[4]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{8}\right)}$ est un nombre complexe tel que $u^2 = z$.

Ex 3. Les parties de cet exercice sont indépendantes les unes des autres:

a) Soit $z = \frac{1}{1+2i} + \frac{i}{1-2i}$. Mettre z sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

b) Soit $z = 3(\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{24}\right))$. Mettre z^4 sous forme algébrique.

c) Déterminer partie réelle et imaginaire du nombre complexe $e^{e^{i\theta}}, \theta \in \mathbb{R}$.

d) Montrer que dans le plan complexe les points images des nombres complexes $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 - i$, $z_3 = (\sqrt{3} - 1)i$ forment un triangle équilatéral.

Solution

a) On a:

$$z = \frac{1}{1+2i} + \frac{i}{1-2i} = \frac{1-2i+i(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-2i+i-2}{5} = \frac{-1-i}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}i.$$

De plus on a $|z| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$, d'où:

$$z = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}i = \frac{\sqrt{2}}{5}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{5}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{5}e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

En conclusion la forme algébrique de z est $z = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}i$ et la forme exponentielle $z = \frac{\sqrt{2}}{5}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

b) On a $z = 3(\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)) = 3e^{i\frac{\pi}{24}}$. Donc

$$z^4 = \left(3e^{i\frac{\pi}{24}}\right)^4 = 3^4e^{i\frac{4\pi}{24}} = 3^4e^{i\frac{\pi}{6}} = 3^4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3^4\sqrt{3}}{2} + \frac{3^4}{2}i.$$

c) En utilisant la formule d'Euler on obtient:

$$e^{e^{i\theta}} = e^{\cos(\theta)+i\sin(\theta)} = e^{\cos(\theta)}e^{i\sin(\theta)}$$

Maintentant $|e^{e^{i\theta}}| = |e^{\cos(\theta)}e^{i\sin(\theta)}| = |e^{\cos(\theta)}| \cdot |e^{i\sin(\theta)}| = e^{\cos(\theta)} \cdot 1$. Donc

$$e^{e^{i\theta}} = e^{\cos(\theta)}e^{i\sin(\theta)} = e^{\cos(\theta)}(\cos(\sin(\theta)) + i\sin(\sin(\theta)).$$

En conclusion $\mathrm{Re}(e^{e^{i\theta}}) = e^{\cos(\theta)}\cos(\sin(\theta))$ et $\mathrm{Im}(e^{e^{i\theta}}) = e^{\cos(\theta)}\sin(\sin(\theta))$.

d) Pour $i = 1, 2, 3$ soit P_i le point image de z_i. Il suffit alors de montrer que les longueurs des côtés $[P_1P_2]$, $[P_1P_3]$ et $[P_2P_3]$ sont toutes égales. On a :

$P_1P_2 = |z_2 - z_1| = |-1-i-1+i| = |-2| = 2.$

$P_1P_3 = |z_3 - z_1| = |(\sqrt{3}-1)i - 1 + i| = |-1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2.$

$P_2P_3 = |z_3 - z_2| = |(\sqrt{3}-1)i + 1 + i| = |1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2.$

Puisque $P_1P_2 = P_1P_3 = P_2P_3$, on en conclut que P_1, P_2 et P_3 forment un triangle équilatéral.

Ex 4. On considère les nombres complexes suivants:

$$z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i, \qquad z_2 = 1 + \sqrt{3}i.$$

a) Représenter sous forme algébrique le nombre complexe $w = \dfrac{z_2}{z_1}$.

b) Mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

c) Utiliser (b) pour représenter sous forme exponentielle le nombre complexe w.

d) En déduire de (a) et (c) la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

e) Mettre sous forme algébrique le nombre complexe w^{2020}.

f) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ le nombre complexe w^n est-il réel? Et pour quelles valeurs de n est-il imaginaire pure?

Solution

a) $w = \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i} = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i} \cdot \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i.$

b) On a $|z_1| = \sqrt{2+2} = 2$ et $|z_2| = \sqrt{1+3} = 2$. Donc:

$$z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{4}},$$

$$z_2 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

c) On a:

$$w = \frac{z_2}{z_1} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

d) De (a) et (c) on obtient:

$$w = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i \quad \text{(forme algébrique)}$$

$$w = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad \text{(forme trigonométrique).}$$

En égalisant les parties réelles et les parties imaginaires on en déduit:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

e) Pour calculer des puissances, on utilisera la forme exponentielle de $w = e^{i\frac{\pi}{12}}$. On obtient:

$$w^{2020} = \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{2020} = e^{i\frac{2020\pi}{12}} = e^{i\frac{(12\cdot 168+4)\pi}{12}} = e^{i\left(168\pi+\frac{\pi}{3}\right)} =$$

$$= e^{i\cdot 2\cdot 84\cdot\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

n) On rappelle que un nombre complexe $z = \rho e^{i\theta}$ est réel si et seulement si $\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, et il est imaginaire pure si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$ on a:

$$w^n = e^{i\frac{n\pi}{12}}.$$

Donc:

$$w^n \text{ est réel } \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \frac{n\pi}{12} = k\pi \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n = 12k,$$

c'est à dire si et seulement si n est un multiple de k.
En plus:

$$\begin{aligned} w^n \text{ est imaginaire pure } &\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \frac{n\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n = 12k+6. \end{aligned}$$