## Esercizi

## 5 - Basi e dimensione

## Legenda:

😀 : Un gioco da ragazzə, dopo aver riletto gli appunti del corso

😕 : Ci devo pensare un po', ma posso arrivarci

🤯 : Non ci dormirò stanotte

 $\stackrel{\mathbf{C}}{\mathbf{C}}$  Esercizio 1. Consideriamo i seguenti sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^4$ :

$$U = \langle (1, 2, -1, 2), (1, -2, 1, 0), (3, -4, 2, 1) \rangle,$$
  
$$W = \langle (1, 0, 3, 4), (0, 0, 3, 0), (1, 0, 0, 5) \rangle.$$

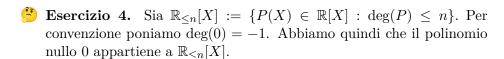
- (a) Determinare una base di U e una base di W e dedurne la dimensione di U e W.
- (b) Determinare una base di U+W e dedurne la dimensione di U+W.
- (c) È vero che  $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ ? In caso di risposta negativa, determinare una base di  $U \cap W$  e la dimensione corrispondente.
- $igoplus \mathbf{Esercizio} \ \mathbf{2.} \ \mathrm{Sia} \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$

Si consideri il sottospazio  $U = \langle A, A^2, A^3, A^4 \rangle \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

- (a) Determinare la dimensione e una base  $\mathcal{B}_U$  di U.
- (b) Completare  $\mathcal{B}_U$  a una base di  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- (c) Determinare un sottospazio  $W \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  tale che  $U \oplus W = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- **Esercizio 3.** Si considerino i seguenti vettori di  $\mathbb{R}^3$ :

$$v_1 = (1, 2, 3),$$
  $v_2 = (0, 1, k - 12),$   $v_3 = (3, 4, k).$ 

- (a) Si stabilisca per quali valori del parametro k i vettori  $v_1, v_2, v_3$  costituiscono una base di  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Determinare per quale valore di k il vettore (10, 16, 4) ha coordinate (1, 2, 3) rispetto alla base  $\{v_1, v_2, v_2\}$ .



- (a) Mostrare che  $\{1, x, x^2, x^3\}$  è una base di  $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$ . Dedurne la dimensione di  $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$ .
- (b) Più in generale, determinare per ogni  $n \geq 0$  una base di  $\mathbb{R}_{\leq n}[X]$  e dedurne la dimensione di  $\mathbb{R}_{\leq n}[X]$ .
- (c) Dimostrare che  $\mathbb{R}[X]$  non possiede una base finita (cioè con un numero finito di elementi). In particolare questo mostra che lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}[X]$  non ha dimensione finita.
- **Sercizio 5.** Consideriamo le seguenti matrici di  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tali matrici sono dette matrici di Pauli e sono spesso utilizzate in meccanica quantistica.

- (a) Mostrare che  $\{I_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$  è una base di  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , dove  $I_2$  è la matrice identità.
- (b) Calcolare le coordinate in tale base delle matrici

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Esercizio 6. Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale V e siano  $\mathcal{B}_U$  e  $\mathcal{B}_W$  due basi rispettivamente di U e W
  - (a) Si dimostri che se  $U \cap W = \{\underline{0}\}$  allora  $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$  è una base di  $U \oplus W$ .
  - (b) Si utilizzi la formula di Grassmann per dimostrare che se  $U \cap W \neq \{\underline{0}\}$  allora  $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$  non è mai una base di  $U \oplus W$ .