

**Esercizi**

## 7 - APPLICAZIONI LINEARI

**Legenda:**

😊 : Un gioco da ragazzi, dopo aver riletto gli appunti del corso

😬 : Ci devo pensare un po', ma posso arrivarci

🤪 : Non ci dormirò stanotte

😊 **Esercizio 1.** Si determinino quali tra le seguenti sono applicazioni lineari, giustificando la risposta in modo esaustivo:

$$(a) \quad \begin{array}{ccc} f_1 : & \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \mapsto x \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{ccc} f_2 : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto (x^2, y^2) \end{array}$$

$$(c) \quad \begin{array}{ccc} f_3 : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ & x & \mapsto (2x, 0, -x) \end{array}$$

$$(d) \quad \begin{array}{ccc} f_4 : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \mapsto (x + 1, x + y, y - 3) \end{array}$$

$$(e) \quad \begin{array}{ccc} f_5 : & \mathbb{R}_{\leq 3}[X] & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ & p(X) & \mapsto (p(0), p(1)) \end{array}$$

😊 **Esercizio 2.** Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'applicazione lineare tale che

$$f(1, 2, -1) = (1, 0, 0, 2), \quad f(0, 1, -3) = (0, 1, 2, -5) \quad \text{e} \quad f(2, 2, 2) = (1, 2, 4, -8).$$

- (a) Si determini  $f(1, 8, -17)$ .
- (b) Si determinino la dimensione e una base di  $\ker(f)$ .
- (c) Si determinino la dimensione e una base di  $\text{Im}(f)$ .

😬 **Esercizio 3.** Si stabilisca, giustificando opportunamente la risposta, se esiste una funzione lineare  $f : \mathbb{R}_{\leq 2}[X] \rightarrow \mathbb{R}$  che verifichi simultaneamente le condizioni seguenti:

- $f(X^2 - X) = 1$ .
- $f(1) = 2$
- $f(X + 3) = 3$

- $f(X^2 + 4) = 4$

Se esiste, dire se  $f$  è unica e in tal caso determinare  $f(aX^2 + bX + c)$  in funzione di  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

😊 **Esercizio 4.** Si consideri l'applicazione lineare:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x + 3y, -x, 2x - y). \end{aligned}$$

- (a) Si determinino la dimensione e una base del nucleo di  $f$ .
- (b) Si determinino la dimensione e una base dell'immagine di  $f$ .
- (c) Si determini se  $f$  è iniettiva e/o suriettiva.

😊 **Esercizio 5.** Si consideri l'endomorfismo:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (3x + z, x + 2y + 5z, -x + 4y + 9z). \end{aligned}$$

- (a) Si scriva la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Si determini il rango di  $f$  e se ne deduca se  $f$  è iniettiva e/o suriettiva.
- (c) Si determini una base del nucleo e dell'immagine di  $f$ .
- (d) Sia  $W = \langle (1, 2, 3), (1, 1, 1) \rangle$ . Si determini una base di  $f(W)$ .
- (e) Si determini l'insieme delle controimmagini di  $(1, -2, 1)$ , ossia  $f^{-1}(1, -1, -3) := \{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = (1, -1, -3)\}$ .

😊 **Esercizio 6.** Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare di spazi vettoriali e siano  $v \in V$  e  $w \in W$  tali che  $f(v) = w$ . Denotiamo  $f^{-1}(w)$  l'insieme delle controimmagini di  $w$ . Dimostrare che  $f^{-1}(w) = v + \ker(f)$ , dove  $v + \ker(f) := \{v + v_1 : v_1 \in \ker(f)\}$ . (Procedere per doppio contenimento.)

😊 **Esercizio 7.** Per  $k \in \mathbb{R}$  si consideri l'endomorfismo  $f_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 - k & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ k & -k & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Si determinino tutti i valori di  $k$  tali che  $f_k$  è un isomorfismo.
- (b) Per  $k = 0$  si determini la matrice associata all'isomorfismo inverso  $f_0^{-1}$  rispetto alla base canonica.

😊 **Esercizio 8.** Si consideri l'endomorfismo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + y + z, -3x, x + z). \end{aligned}$$

- (a) Si scriva la matrice  $M_{\mathcal{B}}(f)$  di  $f$  rispetto alla base canonica  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Dopo aver verificato che  $\mathcal{B}' = \{(0, 1, 1), (2, 5, 1), (0, 0, 1)\}$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ , si scriva la matrice  $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^3})$  del cambiamento di base dalla base  $\mathcal{B}'$  alla base  $\mathcal{B}$ .
- (c) Ricordando che  $M_{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^3})$ , calcolare la matrice  $M_{\mathcal{B}'}(f)$  di  $f$  rispetto alla base  $\mathcal{B}'$ .

😞 **Esercizio 9.** Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali su  $K$  e sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare.

- (a) Si dimostri che se  $v_1, \dots, v_n \in V$  sono linearmente dipendenti, allora  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  sono linearmente dipendenti.
- (b) Si mostri con un controesempio che l'implicazione inversa non è vera.
- (c) Si assuma ora che  $f$  è iniettiva. Si mostri che  $v_1, \dots, v_n \in V$  sono linearmente dipendenti se e solo se  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  sono linearmente dipendenti.
- (d) Si usi il punto (c) per dimostrare che se  $f$  è iniettiva e  $U$  è un sottospazio di  $V$  allora  $\dim(f(U)) = \dim(U)$ .

😞 **Esercizio 10.** Una matrice  $A$  si dice *diagonalizzabile* se è simile a una matrice diagonale  $D$ , ossia se esiste  $P$  invertibile tale che  $A = P^{-1}DP$ . Mostrare che se  $A$  è diagonalizzabile, allora per ogni  $n \geq 1$  anche  $A^n$  è diagonalizzabile.

😊 **Esercizio 11.** Determinare se gli operatori di  $\mathbb{R}^3$  associati alle seguenti matrici rispetto alla base canonica sono diagonalizzabili e in tal caso trovare una base diagonalizzante.


$$(a) \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$


$$(b) \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si proceda per i punti seguenti:

- Calcolare il polinomio caratteristico e determinare gli autovalori.
- Per ogni autovalore si determinino la molteplicità algebrica e geometrica e si trovi una base dell'autospazio corrispondente.
- Determinare, se esiste, una base di  $\mathbb{R}^3$  diagonalizzante.
- Per  $i = 1, 2, 3$  determinare, se esiste, una matrice invertibile  $P$  tale che  $P^{-1}A_iP$  è diagonale.

 **Esercizio 12.** Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  tale che  $f(1, 2, 1) = (1, 3, 3)$ ,  $(1, 1, 0) \in \ker(f)$  e  $(0, 1, 2)$  è un autovettore relativo all'autovalore 1. Discutere la diagonalizzabilità di  $f$ .

 **Esercizio 13.** Per  $k \in \mathbb{R}$ , si consideri l'operatore  $f$  di  $\mathbb{R}^3$  associato alla seguente matrice rispetto alla base canonica  $\mathbb{R}^3$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-k & k-2 & k \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare gli autovalori di  $f$  in funzione di  $k$ .
- (b) Per quali valori di  $k$  l'operatore  $f$  è diagonalizzabile?
- (c) Per  $k = 2$  calcolare  $A^n$  per ogni  $n \geq 1$ .

 **Esercizio 14.** Sia  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  una matrice triangolare superiore tale che

- $a_{ii} = a_{jj}$ ,  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ ;
- esistono  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , con  $j > i$ , tali che  $a_{ij} \neq 0$ .

Dimostrare che  $A$  non è diagonalizzabile.