

Συστήματα Αναμονής

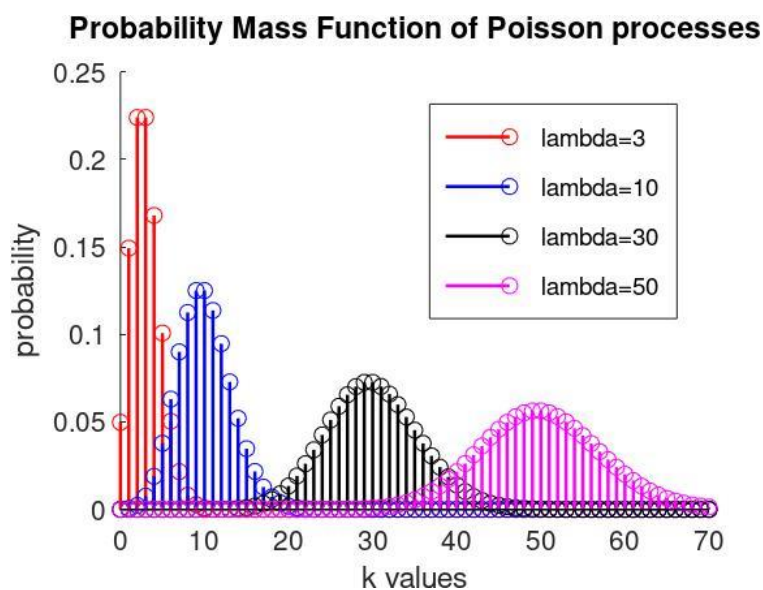
1^η Ομάδα Ασκήσεων

Άννα Κουτσώνη 03120019

Άσκηση 1^η

Κατανομή Poisson

- A) Μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$
Για $\lambda = \{3, 10, 30, 50\}$:



Καθώς μεγαλώνει η τιμή της παραμέτρου λ τόσο μειώνεται το ύψος των γραφικών παραστάσεων και απλώνεται με ομαλότερο τρόπο στον οριζόντιο άξονα, ώστε σε κάθε περίπτωση να αθροίζουν στο 1 όλες οι πιθανότητες. Η μέση τιμή κάθε κατανομής εμφανίζεται στο λ , αφού για την κατανομή Poisson έχουμε $E[X] = \lambda$.

Κώδικας octave:

```
8  #A ERWTHMA
9  k = 0:1:70;
10 lambda = [3, 10, 30, 50];
11
12 for i = 1 : columns(lambda)
13     poisson(i, :) = poisspdf(k, lambda(i));
14 endfor
15
16 colors = "rbkm";
17 figure(1);
18 hold on;
19 for i = 1 : columns(lambda)
20     stem(k, poisson(i, :), colors(i), "linewidth", 1.2);
21 endfor
22 hold off;
23
24 title("Probability Mass Function of Poisson processes");
25 xlabel("k values");
26 ylabel("probability");
27 legend("lambda=3", "lambda=10", "lambda=30", "lambda=50");
```

- B) Μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ έχει μέση τιμή $E[X] = \lambda$ και διακύμανση $\sigma^2 = Var[X] = \lambda$. Για $\lambda=30$ προκύπτει $E[X] = Var[X] = \lambda = 30$. Κώδικας octave:

```

31 #B ERWTHMA
32 index = find(lambda == 30);
33 chosen = poisson(index, :);
34 mean_value = 0;
35 for i=0:(columns(poisson(index, :)) - 1)
36     mean_value = mean_value + i .* poisson(index,i+1);
37 endfor
38
39 display("mean value of Poisson with lambda 30 is");
40 display(mean_value);
41
42 second_moment = 0;
43 for i = 0 : (columns(poisson(index, :)) - 1)
44     second_moment = second_moment + i .* i .* poisson(index, i + 1);
45 endfor
46
47 variance = second_moment - mean_value .^ 2;
48 display("Variance of Poisson with lambda 30 is");
49 display(variance);
50

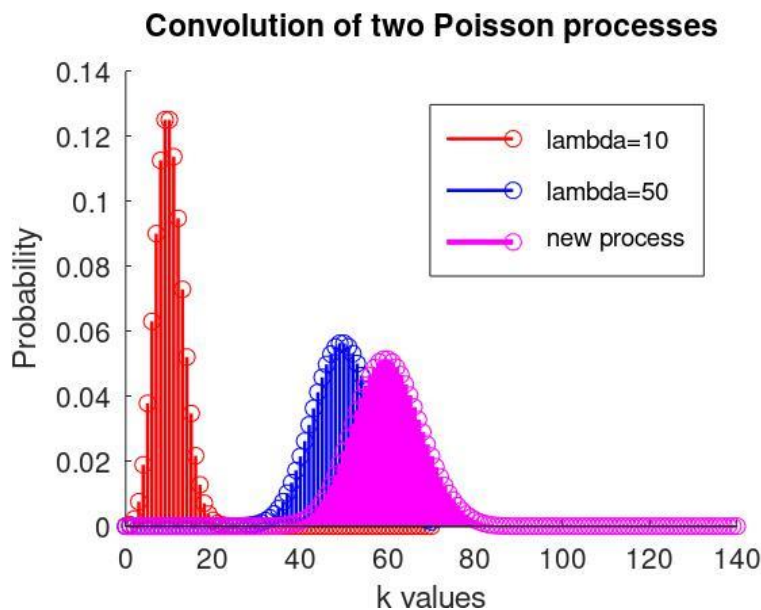
```

```

mean value of Poisson with lambda 30 is
mean_value = 30.000
Variance of Poisson with lambda 30 is
variance = 30.000
>> |

```

- C) Προκύπτει μια νέα κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda=\lambda_1+\lambda_2=10+50=60$. Απαραίτητη προϋπόθεση για αυτό είναι οι δύο αρχικές κατανομές να είναι ανεξάρτητες.

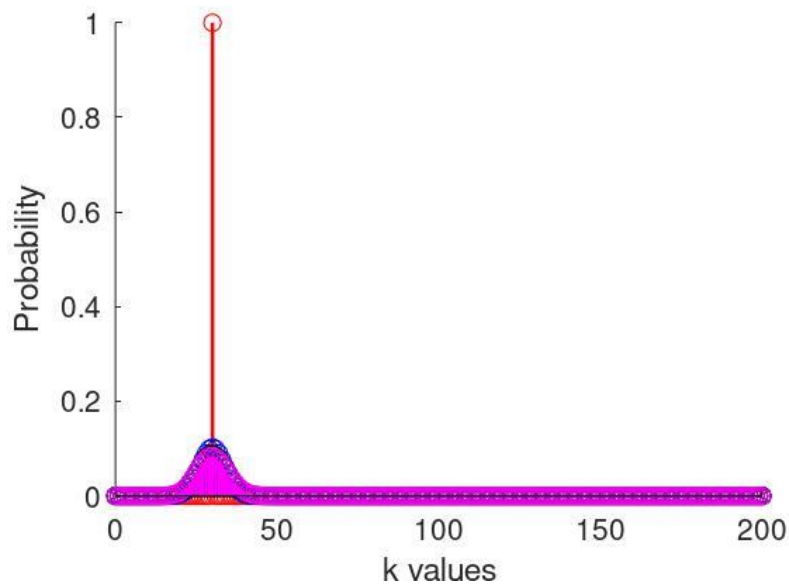


Κώδικας octave:

```
53 #Γ ERWTHMA
54 first = find(lambda == 10);
55 second = find(lambda == 50);
56 poisson_first = poisson(first, :);
57 poisson_second = poisson(second, :);
58
59 composed = conv(poisson_first, poisson_second);
60 new_k = 0 : 1 : (2 * 70);
61
62 figure(2);
63 hold on;
64 stem(k, poisson_first(:), colors(1), "linewidth", 1.2);
65 stem(k, poisson_second(:), colors(2), "linewidth", 1.2);
66 stem(new_k, composed, "mo", "linewidth", 2);
67 hold off;
68 title("Convolution of two Poisson processes");
69 xlabel("k values");
70 ylabel("Probability");
71 legend("lambda=10", "lambda=50", "new process");
```

- D) Μια κατανομή Poisson με παράμετρο λ μπορεί να προσεγγιστεί ως το όριο μιας διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους n, p εάν $n \rightarrow \infty$ και $p \rightarrow 0$ και $np = \lambda$.

Poisson process as the limit of the binomial process



Κώδικας octave:

```
74 #Δ ERWTHMA
75 k = 0 : 1 : 200;
76 # Define the desired Poisson Process
77 lambda = 30;
78 i = 1 : 1 : 5;
79 n = lambda .* i;
80 p = lambda ./ n;
81
82 figure(3);
83 title("Poisson process as the limit of the binomial process");
84 xlabel("k values");
85 ylabel("Probability");
86 hold on;
87 for i = 1 : 4
88     binomial = binopdf(k, n(i), p(i));
89     stem(k, binomial, colors(i), 'linewidth', 1.2);
90 endfor
91 hold off;
```

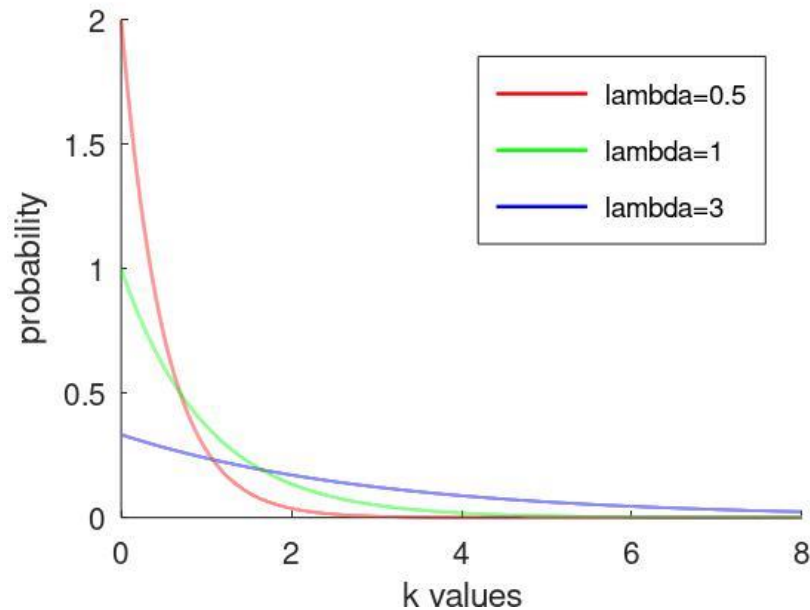
Άσκηση 2^η

Εκθετική Κατανομή

- A) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta > 0$ (όπου $\theta = 1/\lambda$) είναι

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} * e^{-\frac{x}{\theta}} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

Probability Density Function of Exponential distributic



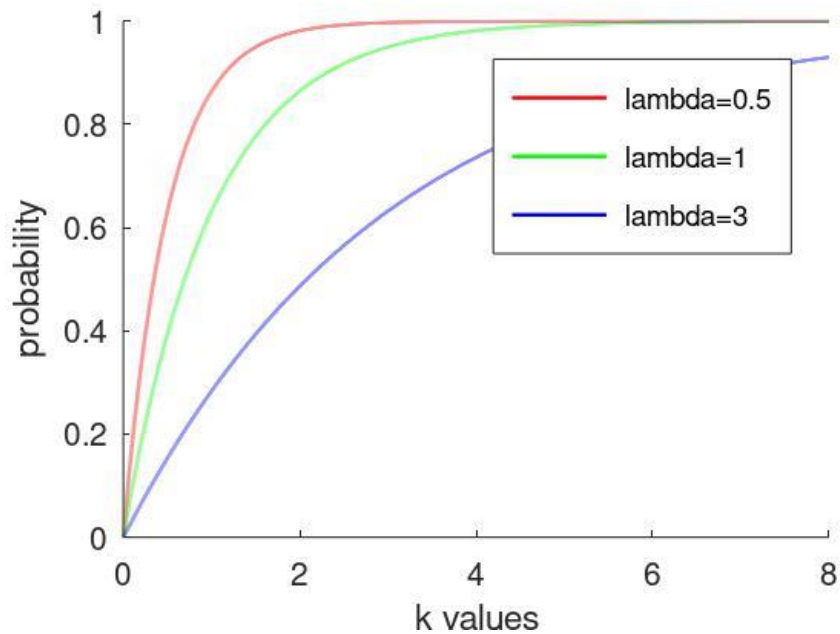
Κώδικας octave:

```
6 %A Erwthma
7 k = 0:0.0001:8;
8 lambda = [0.5,1,3];
9
10 for i=1:columns(lambda)
11     exp(i,:) = exppdf(k,lambda(i));
12 endfor
13
14 colors="rgb";
15 figure(1);
16 hold on;
17 for i=1:columns(lambda)
18     plot(k,exp(i,:),colors(i),"linewidth",1.2);
19 endfor
20
21 hold off;
22
23 title("Probability Density Function of Exponential distribution");
24 xlabel("k values");
25 ylabel("probability");
26 legend("lambda=0.5","lambda=1","lambda=3");
27
```

B) Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta > 0$ (όπου $\theta = 1/\lambda$) είναι

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

Probability Cumulative Function of Exponential distribution



Κώδικας octave:

```

28
29 #B Erwthma
30 k = 0:0.0001:8;
31 lambda = [0.5,1,3];
32
33 for i=1:columns(lambda)
34     exp(i,:) = expcdf(k,lambda(i));
35 endfor
36
37 colors="rgb";
38 figure(2);
39 hold on;
40 for i=1:columns(lambda)
41     plot(k,exp(i,:),colors(i),"linewidth",1.2);
42 endfor
43
44 hold off;
45
46 title("Probability Cumulative Function of Exponential distribution");
47 xlabel("k values");
48 ylabel("probability");
49 legend("lambda=0.5","lambda=1","lambda=3");
50

```

C) $P(X > 30000) = p1$ και $P(X > 50000|20000) = p2$

```
p1 = 0.8869  
p2 = 0.8869  
>>
```

Παρατηρούμε ότι οι δυο πιθανότητες είναι ίσες. Αυτό συμβαίνει λόγω της ιδιότητας έλλειψης μνήμης: $P(X \geq a + b | X \geq a) = P(X \geq b)$ όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση $a=20000$ και $b=30000$.

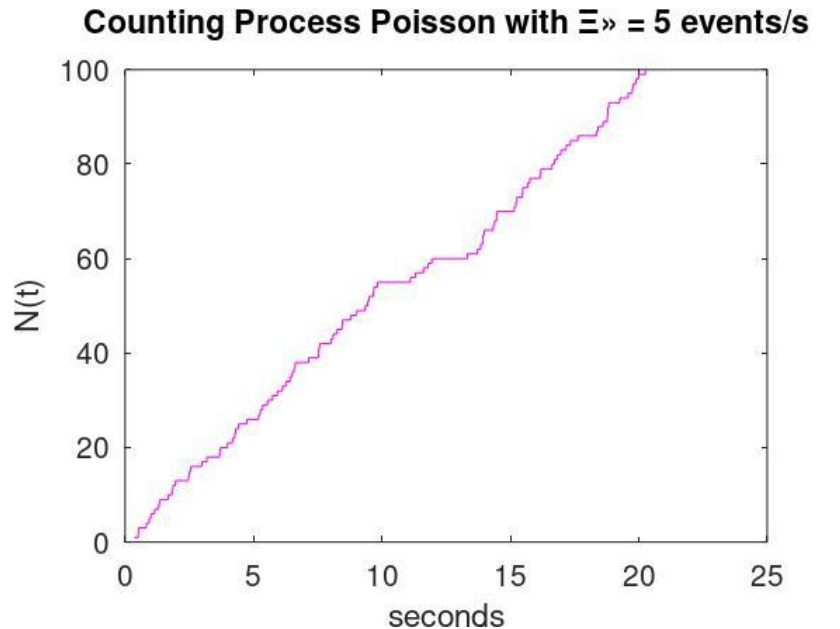
Κώδικας octave

```
51 #C Erwthma  
52  
53  
54 k = 0:0.00001:8;  
55  
56  
57 exp = expcdf (k,2.5);  
58 p1=1 - exp(30000);  
59 #P(X>30000)="   
60 display(p1);  
61 p2=(1-exp(50000))./(1-exp(20000));  
62 #P(X>50000|X>20000)="   
63 display(p2);
```

Άσκηση 3^η

Διαδικασία καταμέτρησης Poisson

- A) Οι χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα στην εμφάνιση δύο διαδοχικών γεγονότων Poisson ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\lambda$.



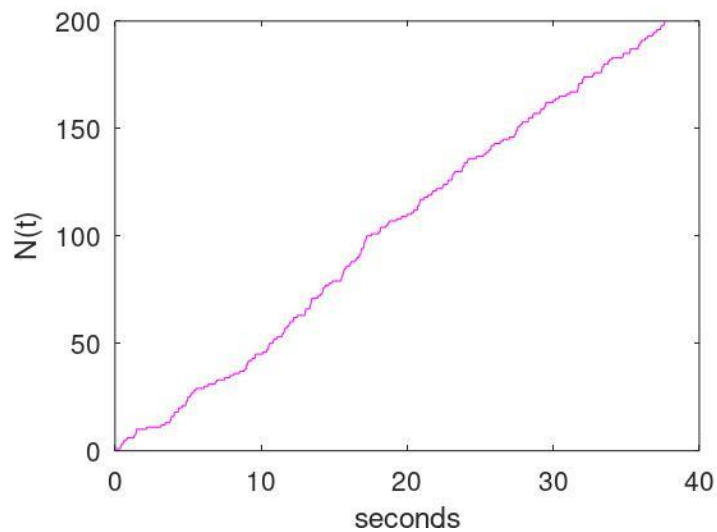
Κώδικας octave:

```
#A Erwthma
x = exprnd(0.2,1,100);
y = ones(100,1);
for i=1:99
    x(i+1)=x(i+1)+x(i);
    y(i+1)=y(i+1)+y(i);
endfor
figure(1);
stairs(x,y, color= 'm');
title("Counting Process Poisson with  $\lambda = 5$  events/s");
xlabel("seconds");
ylabel("N(t)");
```

- B) Ο αριθμός γεγονότων σε ένα χρονικό παράθυρο $\Delta T = t_1 - t_2$ ακολουθεί κατανομή Poisson με μέσο αριθμό γεγονότων $\lambda \Delta T$, όπου λ είναι ο μέσος ρυθμός εμφανίσεων γεγονότων ανά μονάδα χρόνου. Στα παρακάτω σχήματα παρατηρούμε ότι αυξάνοντας τα γεγονότα η προσέγγιση του λ γίνεται ακριβέστερη, καθώς προσεγγίζει ακριβέστερα το 5.

i)

Counting Process Poisson with $\lambda = 5$ events/s for 200 events



Προσέγγιση του λ για 200 γεγονότα:

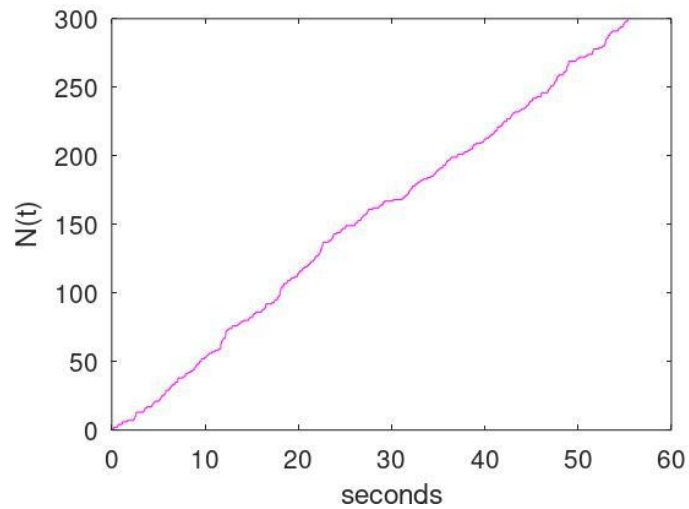
```
display("200/x(200)=");  
display(200/x(200));  
200/x(200)=  
5.1685  
>> |
```

Κώδικας octave:

```
20 #B Erwthma  
21  
22 # (i)  
23 x = exprnd(0.2,1,200);  
24 y = ones(200,1);  
25 for i=1:199  
26     x(i+1) = x(i+1) + x(i);  
27     y(i+1) = y(i+1) + y(i);  
28 endfor  
29 figure(2);  
30 stairs(x,y, color= 'm');  
31 title("Counting Process Poisson with  $\lambda = 5$  events/s for 200 events");  
32 xlabel("seconds");  
33 ylabel("N(t)");  
34 display("200/x(200)=");  
35 display(200/x(200));  
36 .....
```


ii)

Counting Process Poisson with $\lambda = 5$ events/s for 300 events



Προσέγγιση του λ για 300 γεγονότα:

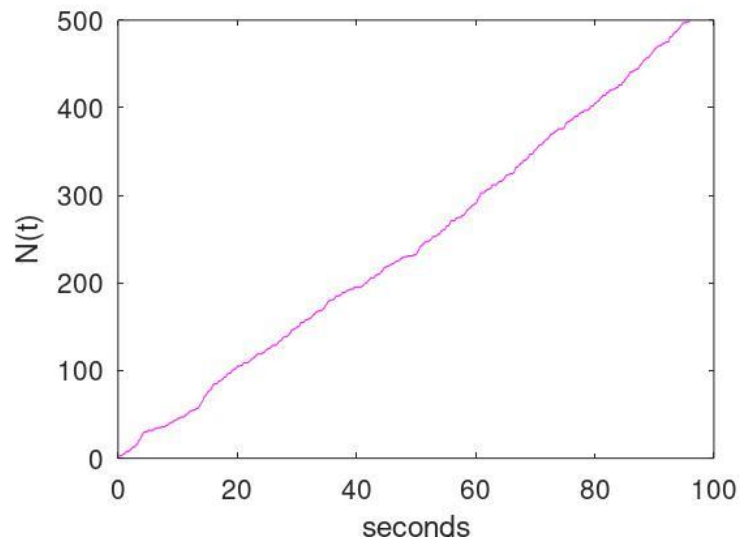
```
display("300/x(300)=")
display(300/x(300));
300/x(300)=
4.8444
>> |
```

Κώδικας octave:

```
36 # (ii)
37 x = exprnd(0.2,1,300);
38 y = ones(300,1);
39 for i=1:299
40     x(i+1) = x(i+1) + x(i);
41     y(i+1) = y(i+1) + y(i);
42 endfor
43 figure(3);
44 stairs(x,y, color= 'm');
45 title("Counting Process Poisson with  $\lambda = 5$  events/s for 300 events");
46 xlabel("seconds");
47 ylabel("N(t)");
48 display("300/x(300)=")
49 display(300/x(300));
```

iii)

Counting Process Poisson with $\lambda = 5$ events/s for 500 events



Προσέγγιση του λ για 500 γεγονότα:

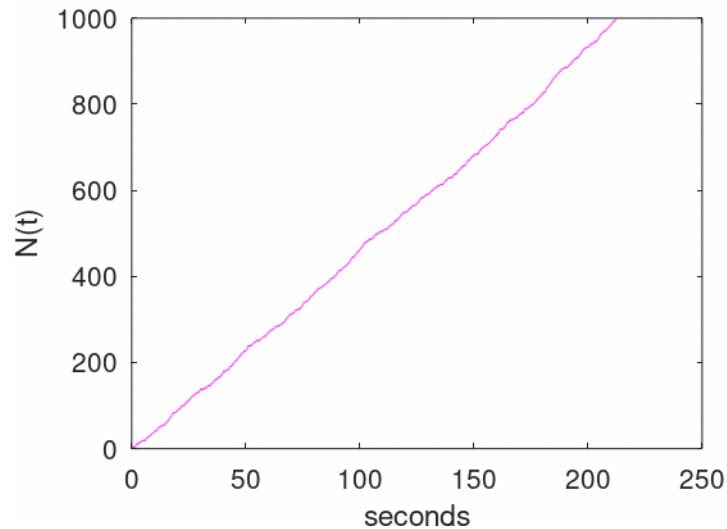
```
ylabel("N(t)");  
display("500/x(500)=");  
display(500/x(500));  
500/x(500)=  
5.0145  
>> |
```

Κώδικας octave:

```
50 # (iii)  
51 x = exprnd(0.2,1,500);  
52 y = ones(500,1);  
53 for i=1:499  
54     x(i+1) = x(i+1) + x(i);  
55     y(i+1) = y(i+1) + y(i);  
56 endfor  
57 figure(4);  
58 stairs(x,y, color= 'm');  
59 title("Counting Process Poisson with  $\lambda = 5$  events/s for 500 events");  
60 xlabel("seconds");  
61 ylabel("N(t)");  
62 display("500/x(500)=");  
63 display(500/x(500));
```

iv)

Counting Process Poisson with $\lambda = 5$ events/s for 1000 events



Προσέγγιση του λ για 1000 γεγονότα:

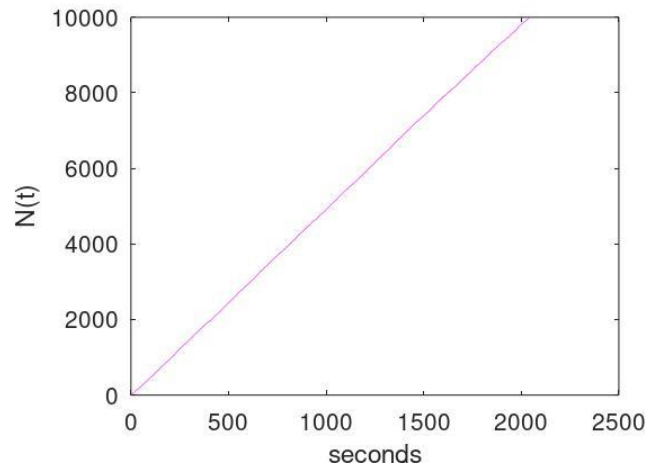
```
display("1000/x(1000)=");  
display(1000/x(1000));  
1000/x(1000)=  
4.9627  
>> |
```

Κώδικας octave:

```
64 # (iv)  
65 x = exprnd(0.2,1,1000);  
66 y = ones(1000,1);  
67 for i=1:999  
68     x(i+1) = x(i+1) + x(i);  
69     y(i+1) = y(i+1) + y(i);  
70 endfor  
71 figure(5);  
72 stairs(x,y, color= 'm');  
73 title("Counting Process Poisson with  $\lambda = 5$  events/s for 1000 events");  
74 xlabel("seconds");  
75 ylabel("N(t)");  
76 display("1000/x(1000)=");  
77 display(1000/x(1000));  
78 # (v)
```

v)

Counting Process Poisson with $\lambda = 5$ events/s for 10000



Προσέγγιση του λ για 10000 γεγονότα:

```
display("10000/x(10000)=");  
display(10000/x(10000));  
10000/x(10000)=  
5.0374  
>> |
```

Κώδικας octave:

```
78 # (v)  
79 x = exprnd(0.2,1,10000);  
80 y = ones(10000,1);  
81 for i=1:9999  
82     x(i+1) = x(i+1) + x(i);  
83     y(i+1) = y(i+1) + y(i);  
84 endfor  
85 figure(6);  
86 stairs(x,y, color= 'm');  
87 title("Counting Process Poisson with  $\lambda = 5$  events/s for 10000 events");  
88 xlabel("seconds");  
89 ylabel("N(t)");  
90 display("10000/x(10000)=");  
91 display(10000/x(10000));
```