<u>Συστήματα Αναμονής</u>

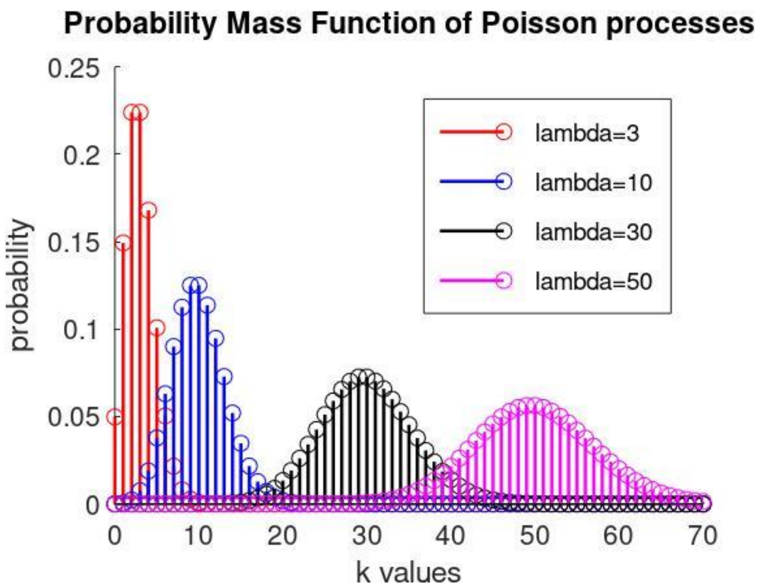
<u>1η Ομάδα Ασκήσεων</u>

Άννα Κουτσώνη 03120019

<u>Άσκηση 1η</u>

<u>Κατανομή Poisson</u>

A) Μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}{*}\lambda^{k}}{k!}$
Για λ={3,10,30,50} :



Καθώς μεγαλώνει η τιμή της παραμέτρου λ τόσο μειώνεται το ύψος των γραφικών παραστάσεων και απλώνεται με ομαλότερο τρόπο στον οριζόντιο άξονα, ώστε σε κάθε περίπτωση να αθροίζουν στο 1 όλες οι πιθανότητες. Η μέση τιμή κάθε κατανομής εμφανίζεται στο λ, αφού για την κατανομή Poisson έχουμε E[x]=λ.
Κώδικας octave:

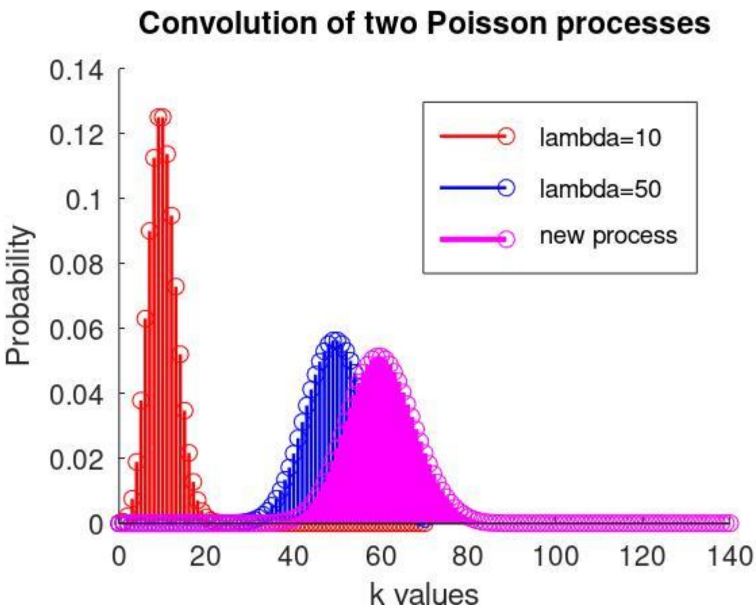
```
#A ERWTHMA
k = 0:1:70;
lambda = [3, 10, 30, 50];

for i = 1 : columns(lambda)
  poisson(i, :) = poisspdf(k, lambda(i));
endfor

colors = "rbkm";
figure(1);
hold on;
for i = 1 : columns(lambda)
  stem(k, poisson(i, :), colors(i), "linewidth", 1.2);
endfor
hold off;

title("Probability Mass Function of Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("lambda=3", "lambda=10", "lambda=30", "lambda=50");
```

B) Μια διακριτή τυχαία μεταβλητή Χ που ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ έχει μέση τιμή $E[X] = \lambda$ και διακύμανση $\sigma^2 = Var[X] = \lambda$.
Για λ=30 προκύπτει $E[X] = Var[X] = \lambda = 30$.
Κώδικας octave:

```
#B ERWTHMA
index = find(lambda == 30);
chosen = poisson(index, :);
mean_value = 0;
for i=0:(columns(poisson(index, :)) - 1)
  mean_value = mean_value + i .* poisson(index,i+1);
endfor

display("mean value of Poisson with lambda 30 is");
display(mean_value);

second_moment = 0;
for i = 0 : (columns(poisson(index, :)) - 1)
  second_moment = second_moment + i .* i .* poisson(index, i + 1);
endfor

variance = second_moment - mean_value .^ 2;
display("Variance of Poisson with lambda 30 is");
display(variance);
```

```
mean value of Poisson with lambda 30 is
mean_value = 30.000
Variance of Poisson with lambda 30 is
variance = 30.000
>>
```

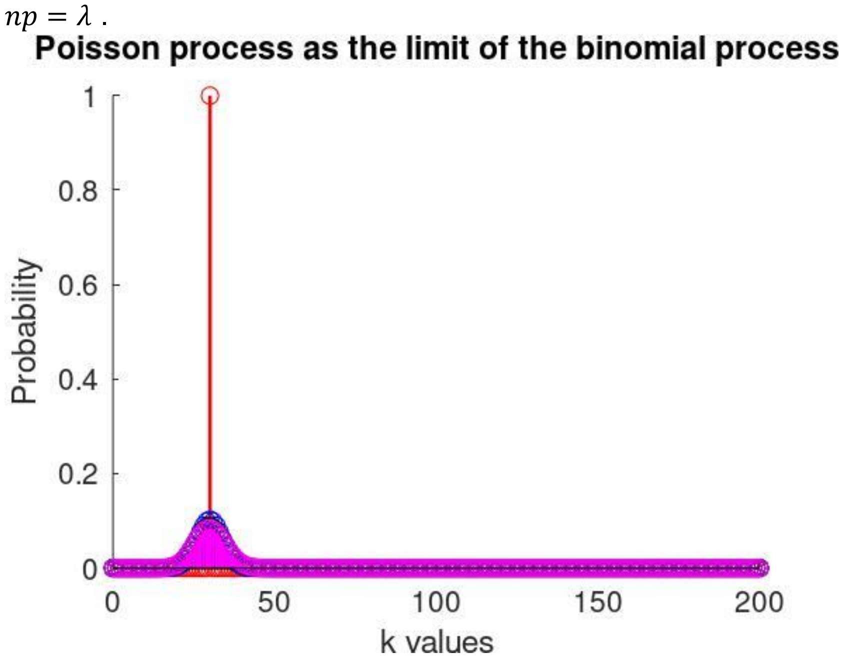
C) Προκύπτει μια νέα κατανομή Poisson με παράμετρο λ=λ1+λ2=10+50=60. Απαραίτητη προϋπόθεση για αυτό είναι οι δύο αρχικές κατανομές να είναι ανεξάρτητες.



Κώδικας octave:

```
#Γ ERWTHMA
first = find(lambda == 10);
second = find(lambda == 50);
poisson_first = poisson(first, :);
poisson_second = poisson(second, :);

composed = conv(poisson_first, poisson_second);
new_k = 0 : 1 : (2 * 70);

figure(2);
hold on;
stem(k, poisson_first(:), colors(1), "linewidth", 1.2);
stem(k, poisson_second(:), colors(2), "linewidth", 1.2);
stem(new_k, composed, "mo", "linewidth", 2);
hold off;
title("Convolution of two Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
legend("lambda=10", "lambda=50", "new process");
```

D) Μια κατανομή Poisson με παράμετρο λ μπορεί να προσεγγιστεί ως το όριο μιας διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους n,p εάν $n \to \infty$ και $p \to 0$ και $np = \lambda$.



Κώδικας octave:

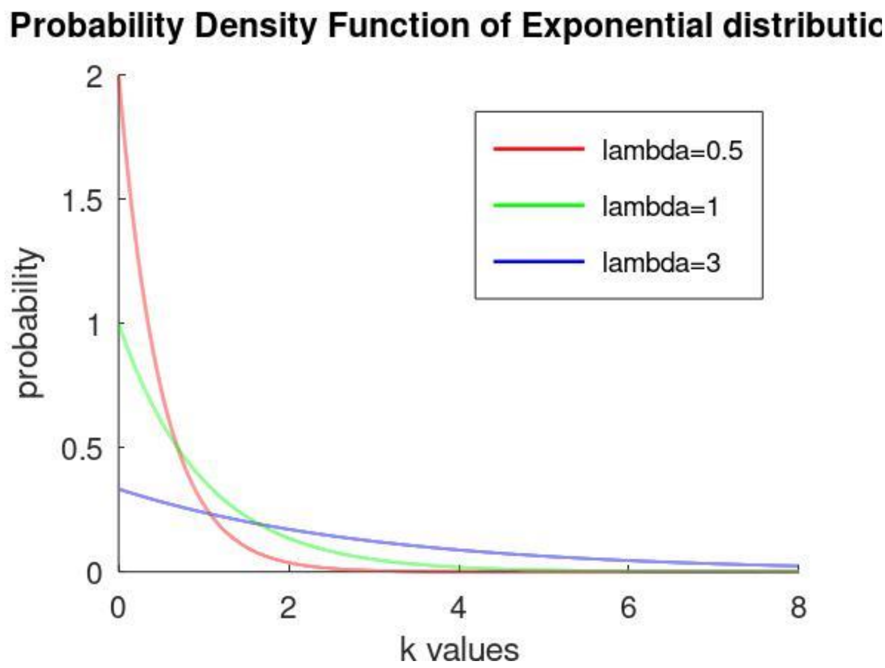
```
#Δ ERWTHMA
k = 0 : 1 : 200;
# Define the desired Poisson Process
lambda = 30;
i = 1 : 1 : 5;
n = lambda .* i;
p = lambda ./ n;

figure(3);
title("Poisson process as the limit of the binomial process");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
hold on;
for i = 1 : 4
  binomial = binopdf(k, n(i), p(i));
  stem(k, binomial, colors(i), 'linewidth', 1.2);
endfor
hold off;
```

<u>Άσκηση 2η</u>

<u>Εκθετική Κατανομή</u>

A) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής Χ που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο θ>0 (όπου θ=1/λ) είναι

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} * e^{-\frac{x}{\theta}} & , x \geq 0 \\ 0 & , \ x < 0 \end{cases}$$

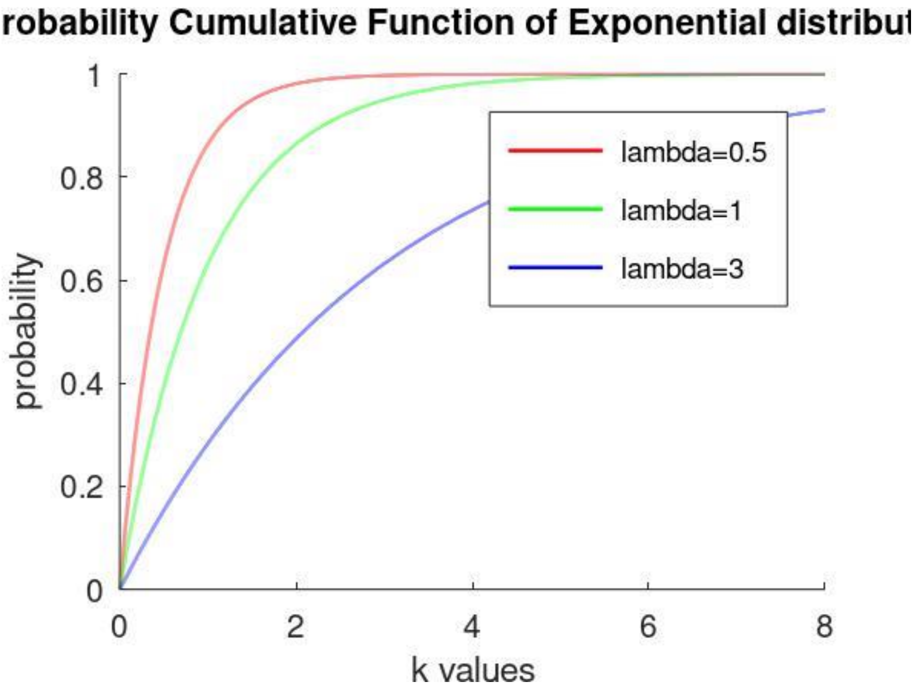


Κώδικας octave:

```
#A Erwthma
k = 0:0.0001:8;
lambda = [0.5,1,3];

for i=1:columns(lambda)
  exp(i,:) = exppdf(k,lambda(i));
endfor

colors="rgb";
figure(1);
hold on;
for i=1:columns(lambda)
  plot(k,exp(i,:),colors(i),"linewidth",1.2);
endfor

hold off;

title("Probability Density Function of Exponential distribution");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("lambda=0.5","lambda=1","lambda=3");
```

B) Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο θ>0 (όπου θ=1/λ) είναι

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$



Κώδικας octave:

```
#B Erwthma
k = 0:0.0001:8;
lambda = [0.5,1,3];

for i=1:columns(lambda)
  exp(i,:) = expcdf(k,lambda(i));
endfor

colors="rgb";
figure(2);
hold on;
for i=1:columns(lambda)
  plot(k,exp(i,:),colors(i),"linewidth",1.2);
endfor

hold off;

title("Probability Cumulative Function of Exponential distribution");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("lambda=0.5","lambda=1","lambda=3");
```

C) $P(X > 30000) = p1$ και $P(X > 50000|20000) = p2$

```
p1 = 0.8869
p2 = 0.8869
>>
```

Παρατηρούμε ότι οι δυο πιθανότητες είναι ίσες. Αυτό συμβαίνει λόγω της ιδιότητας έλλειψης μνήμης: $P(X \geq a + b|X \geq a) = P(X \geq b)$ όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση a=20000 και b=30000.

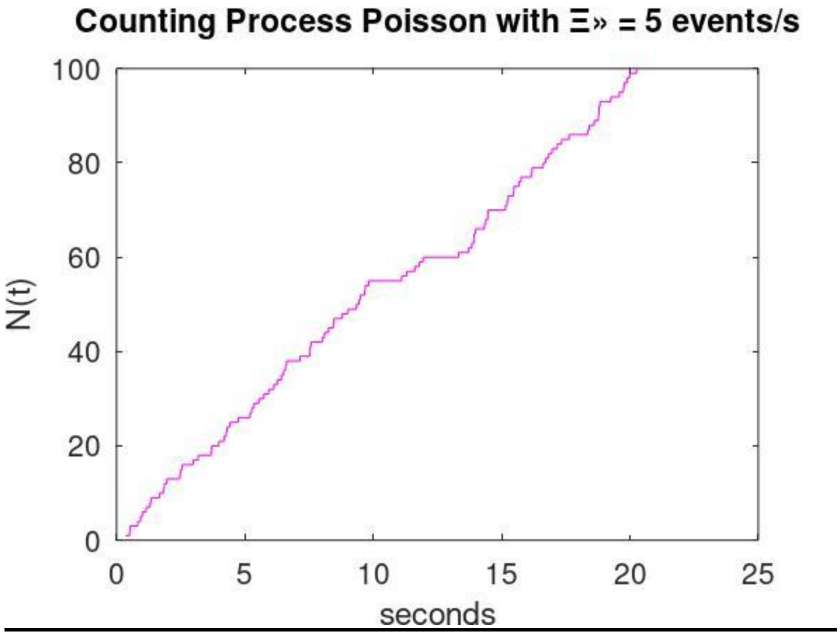
Κώδικας octave

```
#C Erwthma


k = 0:0.00001:8;


exp = expcdf (k,2.5);
p1=1 - exp(30000);
#"P(X>30000)="
display(p1);
p2=(1-exp(50000))./(1-exp(20000));
#"P(X>50000|X>20000)="
display(p2);
```

Άσκηση 3η

Διαδικασία καταμέτρησης Poisson

A) Οι χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα στην εμφάνιση δύο διαδοχικών γεγονότων Poisson ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/λ.

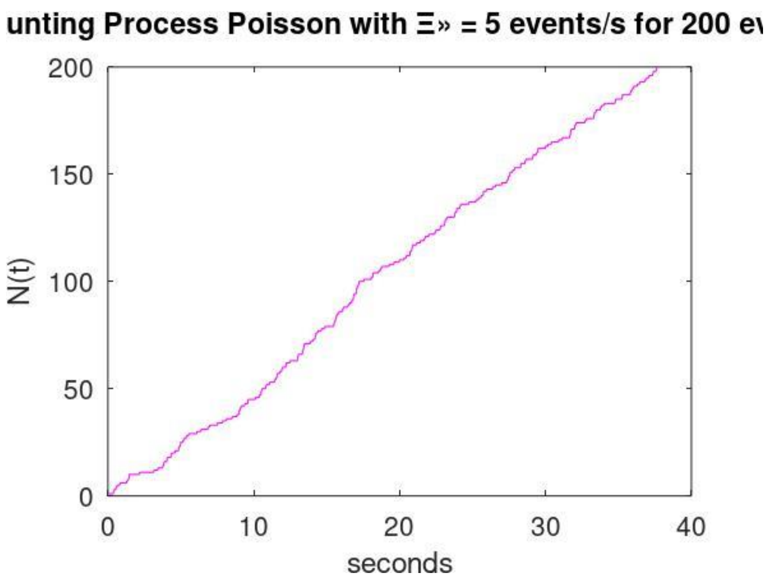


Κώδικας octave:

```
#A Erwthma
x = exprnd(0.2,1,100);
y = ones(100,1);
for i=1:99
  x(i+1)=x(i+1)+x(i);
  y(i+1)=y(i+1)+y(i);
 endfor
 figure(1);
 stairs(x,y, color= 'm');
 title("Counting Process Poisson with λ = 5 events/s");
 xlabel("seconds");
 ylabel("N(t)");
```

B) Ο αριθμός γεγονότων σε ένα χρονικό παράθυρο ΔT=t1-t2 ακολουθεί κατανομή Poisson με μέσο αριθμό γεγονότων λ*ΔT, όπου λ είναι ο μέσος ρυθμός εμφανίσεων γεγονότων ανά μονάδα χρόνου. Στα παρακάτω σχήματα παρατηρούμε ότι αυξάνοντας τα γεγονότα η προσέγγιση του λ γίνεται ακριβέστερη , καθώς προσεγγίζει ακριβέστερα το 5.

i)



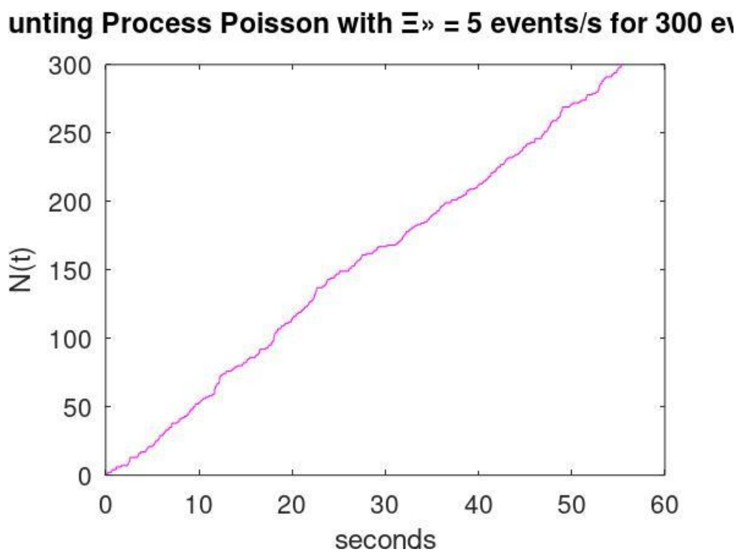
Προσέγγιση του λ για 200 γεγονότα:

```
display("200/x(200)=");
display(200/x(200));
200/x(200)=
5.1685
>>
```

Κώδικας octave:

```
#B Erwthma

#(i)
x = exprnd(0.2,1,200);
y = ones(200,1);
for i=1:199
  x(i+1) = x(i+1) + x(i);
  y(i+1) = y(i+1) + y(i);
endfor
 figure(2);
stairs(x,y, color= 'm');
title("Counting Process Poisson with λ = 5 events/s for 200 events");
xlabel("seconds");
ylabel("N(t)");
display("200/x(200)=");
display(200/x(200));
```

ii)



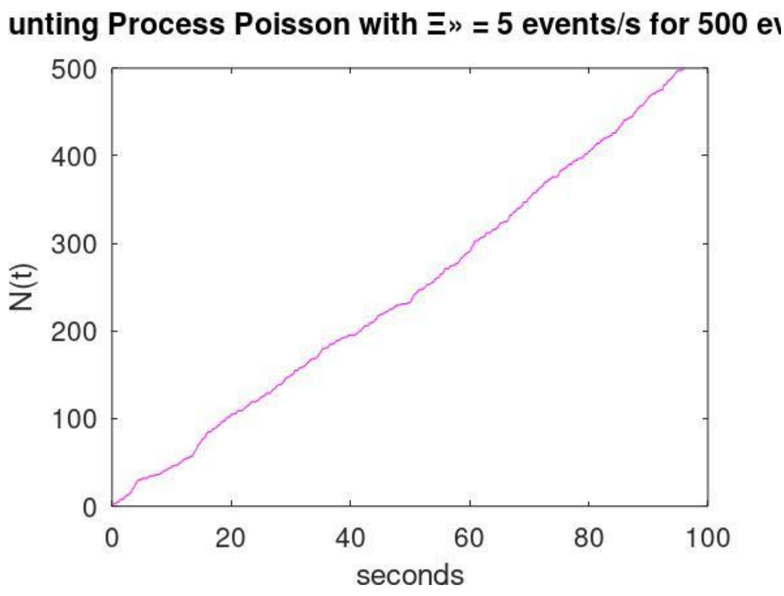
Προσέγγιση του λ για 300 γεγονότα:

```
display("300/x(300)=")
display(300/x(300));
300/x(300)=
4.8444
>>
```

Κώδικας octave:

```
#(ii)
x = exprnd(0.2,1,300);
y = ones(300,1);
for i=1:299
  x(i+1) = x(i+1) + x(i);
  y(i+1) = y(i+1) + y(i);
endfor
 figure(3);
stairs(x,y, color=  'm');
title("Counting Process Poisson with λ = 5 events/s for 300 events");
xlabel("seconds");
ylabel("N(t)");
display("300/x(300)=")
display(300/x(300));
```

iii)



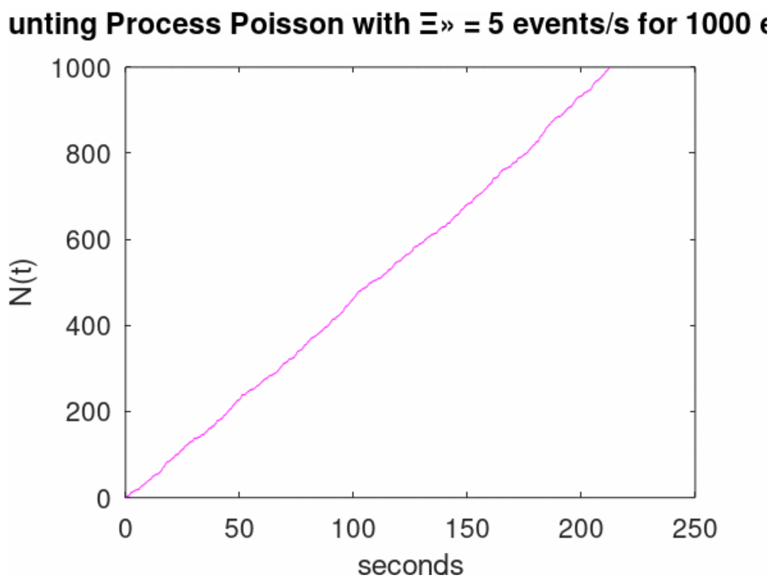
Προσέγγιση του λ για 500 γεγονότα:

```
ylabel("N(t)");
display("500/x(500)=");
display(500/x(500));
500/x(500)=
5.0145
>> |
```

Κώδικας octave:

```
#(iii)
x = exprnd(0.2,1,500);
y = ones(500,1);
for i=1:499
  x(i+1) = x(i+1) + x(i);
  y(i+1) = y(i+1) + y(i);
endfor
 figure(4);
stairs(x,y, color= 'm');
title("Counting Process Poisson with λ = 5 events/s for 500 events");
xlabel("seconds");
ylabel("N(t)");
display("500/x(500)=");
display(500/x(500));
```

iv)



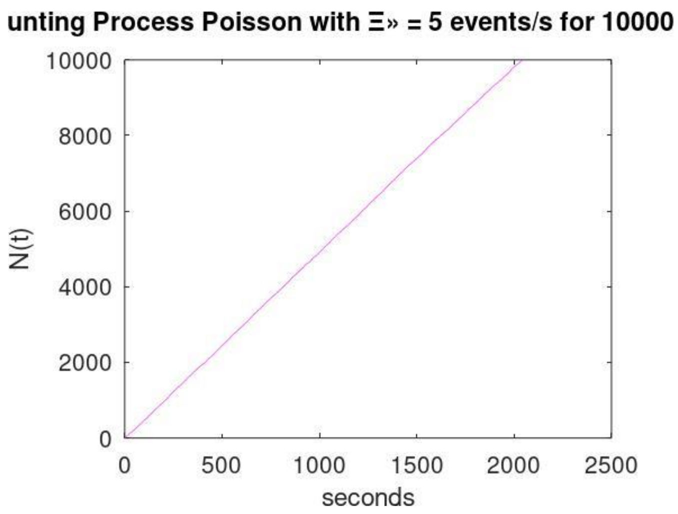
Προσέγγιση του λ για 1000 γεγονότα:

```
display("1000/x(1000)=");
display(1000/x(1000));
1000/x(1000)=
4.9627
>> 
```

Κώδικας octave:

```
#(iv)
x = exprnd(0.2,1,1000);
y = ones(1000,1);
for i=1:999
  x(i+1) = x(i+1) + x(i);
  y(i+1) = y(i+1) + y(i);
endfor
 figure(5);
stairs(x,y, color=  'm');
title("Counting Process Poisson with λ = 5 events/s for 1000 events");
xlabel("seconds");
ylabel("N(t)");
display("1000/x(1000)=");
display(1000/x(1000));
#(v)
```

v)



Προσέγγιση του λ για 10000 γεγονότα:

```
display("10000/x(10000)=");
display(10000/x(10000));
10000/x(10000)=
5.0374
>> 
```

Κώδικας octave:

```
#(v)
x = exprnd(0.2,1,10000);
y = ones(10000,1);
for i=1:9999
  x(i+1) = x(i+1) + x(i);
  y(i+1) = y(i+1) + y(i);
endfor
 figure(6);
stairs(x,y, color=  'm');
title("Counting Process Poisson with λ = 5 events/s for 10000 events");
xlabel("seconds");
ylabel("N(t)");
display("10000/x(10000)=");
display(10000/x(10000));
```