<u>Συστήματα Αναμονής</u>

<u>2η Ομάδα Ασκήσεων</u>

Άννα Κουτσώνη 03120019

<u>Άσκηση 1η</u>

<u>Θεωρητική μελέτη της ουράς M/M/1</u>

A. Η απαραίτητη συνθήκη ώστε η ουρά M/M/1 να είναι εργοδική είναι η ένταση κυκλοφορίας του συστήματος (traffic intensity), η οποία είναι $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ να είναι μικρότερη της μονάδας. Η ένταση κυκλοφορίας εκφράζει την πιθανότητα να μην είναι άδειο το σύστημα δηλαδή η μονάδα εξυπηρέτησης να είναι απασχολημένη. Άρα η απαραίτητη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται για να είναι εργοδική η ουρά M/M/1 είναι η εξής: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ (συνθήκη Erlang - οριακή συνθήκη ισορροπίας - εργοδικότητας)
Το σύστημα M/M/1 είναι το πιο απλό σύστημα αναμονής και οι ρυθμοί γεννήσεων-θανάτων είναι ανεξάρτητοι από την κατάσταση του συστήματος. Επομένως οι εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος είναι:

$$\lambda_n = \lambda \quad , n = 0,1,2,..$$
$$\mu_n = \mu \quad , n = 1,2,..$$

Ισχύει επίσης η σχέση κανονικοποποίησης:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

Και ακόμη:

$$p_n = p_0 * \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_i + 1} \qquad , n = 1,2,\ldots$$

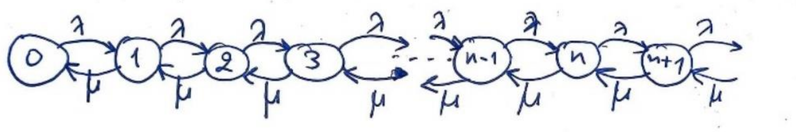
Συνδυάζοντας τις παρακάτω σχέσεις και αντικαθιστώντας τα λ,μ παίρνουμε τελικά:

$$p_n = p_0 * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \quad , n \geq 0$$
$$p_0 = [\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu})^n]^{-1}$$

Δεδομένου ότι $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ θα είναι :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu})^n] = \frac{1}{1-\rho}$$

Άρα τελικά $p_0 = 1 - \rho$ και $p_n = (1-\rho) * \rho^n \quad , n = 0,1,2,\ldots$
Δηλαδή ο αριθμός πελατών στο σύστημα ακολουθεί γεωμετρική κατανομή.



<u>Διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων της ουράς M/M/1.</u>

B. Ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα είναι:

$$T = \frac{E[n(t)]}{\lambda} = \frac{1}{\mu} * \frac{1}{1-\rho}$$

Ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα είναι το άθροισμα του χρόνου καθυστέρησης και του χρόνου εξυπηρέτησης. Άρα ο μέσος χρόνος καθυστέρησης είναι:

$$W = T - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} * \frac{\rho}{1-\rho}$$

C. Από την εξίσωση $p_n = (1-\rho) * \rho^n \quad , n = 0,1,2, \ldots$ και την συνθήκη $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$

Προκύπτει ότι για n=57 λόγω του παράγοντα ρ^n η p_{57} θα είναι πολύ μικρή. Όσο το ρ πλησιάζει στο 1 η πιθανότητα αυτή αυξάνεται και παύει να είναι οριακά αμελητέα.

Άσκηση 2η

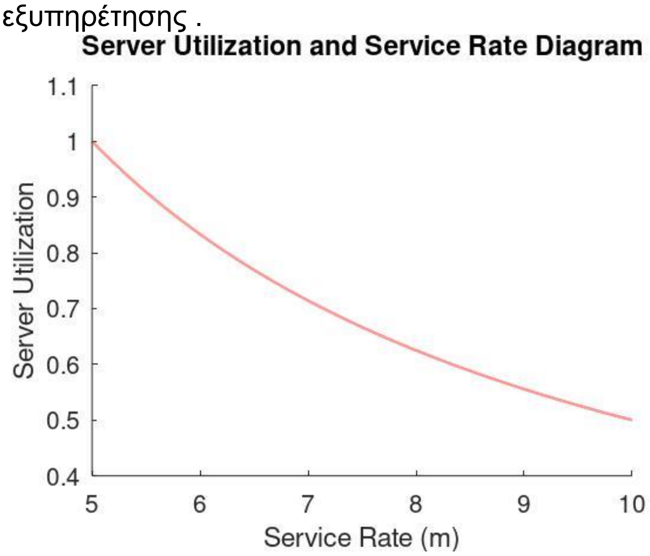
Ανάλυση ουράς M/M/1 με Octave

A. Για να είναι το σύστημα εργοδικό, σύμφωνα με την παραπάνω συνθήκη θα πρέπει $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \underset{\lambda=5}{\Longrightarrow} \mu > 5 \xRightarrow[0 \le \mu \le 10]{} 5 < \mu \le 10$ οι ρυθμοί εξυπηρέτησης που εξασφαλίζουν εργοδικότητα του συστήματος.

B. Χρησιμοποιούμε την εντολή qsmm1 του πακέτου queueing του Octave ως εξής:

```
clc;
close all;
clear all;

pkg load queueing;

lambda = 5;
mu = 5.0001 : 0.0001 : 10;

[U, R, Q, X, p0] = qsmm1 (lambda, mu);
```

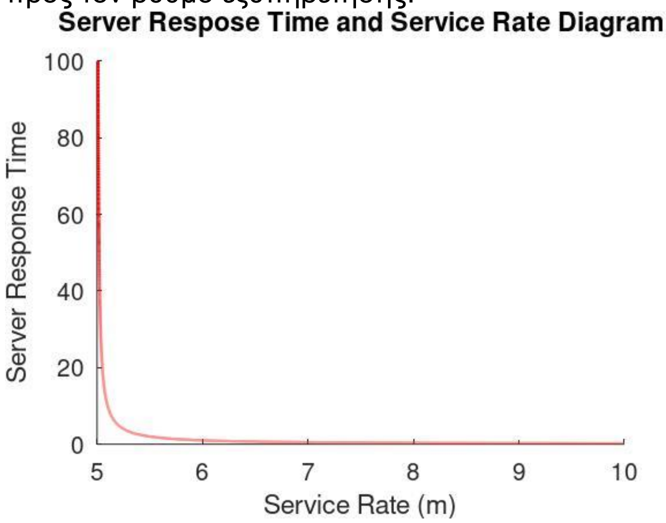
- Διάγραμμα βαθμού χρησιμοποίησης (utilization) ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης .



Κώδικας octave για την κατασκευή του ανωτέρω διαγράμματος:

```
figure(2);
hold on;
plot(mu,R,"r","linewidth",1.2);
axis([5 10 0 100]);
hold off;
title("Server Respose Time and Service Rate Diagram");
xlabel("Service Rate (m)");
ylabel("Server Response Time");
```

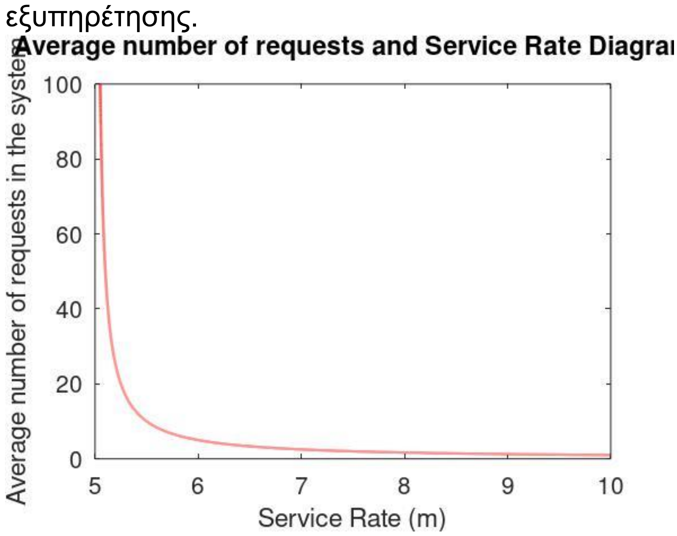
- Διάγραμμα μέσου χρόνου καθυστέρησης του συστήματος E(T) ως προς τον ρυθμό εξυπηρέτησης.



Κώδικας octave για την κατασκευή του ανωτέρω διαγράμματος:

```
figure(2);
hold on;
plot(mu,R,"r","linewidth",1.2);
axis([5 10 0 100]);
hold off;
title("Server Respose Time and Service Rate Diagram");
xlabel("Service Rate (m)");
ylabel("Server Response Time");
```

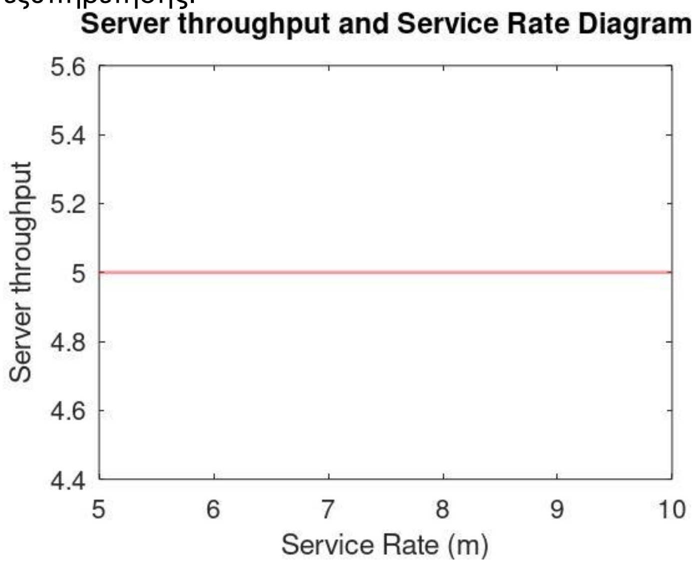
- Διάγραμμα μέσου αριθμού πελατών στο σύστημα ως προς τον ρυθμό εξυπηρέτησης.



Κώδικας octave για την κατασκευή του ανωτέρω διαγράμματος:

```
figure(3);
plot(mu,Q,"r","linewidth",1.2);
axis([5 10 0 100]);
title("Average number of requests and Service Rate Diagram");
xlabel("Service Rate (m)");
ylabel("Average number of requests in the system");
```

- Διάγραμμα ρυθμαπόδοσης (throughput) πελατών ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης.



Κώδικας octave για την κατασκευή του ανωτέρω διαγράμματος:

```
figure(4);
plot(mu,X,"r","linewidth",1.2);
title("Server throughput and Service Rate Diagram");
xlabel("Service Rate (m)");
ylabel("Server throughput");
```

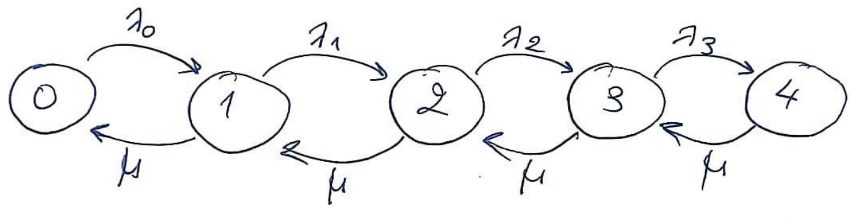
C. Ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης μ και ο μέσος χρόνος καθυστέρησης E(T) είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά όπως φαίνεται και στο διάγραμμα. Προκειμένου να ελαχιστοποιήσουμε τον μέσο χρόνο καθυστέρησης η καλύτερη επιλογή θα ήταν η μέγιστη μ=10. Μεγάλος ρυθμός εξυπηρέτησης ωστόσο επιφέρει μεγάλη οικονομική επιβάρυνση. Για αυτό προκειμένου να συνδυάσουμε μικρό μέσο χρόνο καθυστέρησης και να έχουμε όσο το δυνατόν μικρότερο κόστος, θα επιλέξουμε την μικρότερη τιμή του μ η οποία επιφέρει μέσο χρόνο καθυστέρησης όσο το δυνατόν πλησιέστερα σε αυτόν που προκύπτει αν επιλέξουμε μ=10. Από το διάγραμμα φαίνεται ότι η τιμή αυτή είναι περίπου μ=7.

D. Η ρυθμαπόδοση ισούται με $\gamma = \lambda * \left(1 - P(blocking)\right) = \lambda = 5$. Λόγω της άπειρης χωρητικότητας του συστήματος M/M/1 δεν υφίσταται απόρριψη πελατών, το σύστημα είναι ανεξάρτητο του ρυθμού εξυπηρέτησης και άρα η πιθανότητα να απορριφθεί κάποιος πελάτης είναι 0.

Άσκηση 3η

Διαδικασία γεννήσεων θανάτων (birth-death process): εφαρμογή σε σύστημα M/M/1/K

A. Διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων:



Οι εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος είναι οι εξής:

$$\lambda_i P_i = \mu P_{i+1} \quad ,0 \leq i \leq 3$$

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$$

Από αυτές προκύπτουν:

$$P_0 * \left[1 + \frac{\lambda_0}{\mu} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu^2} + \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu^3} + \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\mu^4}\right] = 1 \xRightarrow{\lambda=5,\mu=10} P_0 = 0.607$$

$$P_1 = \left(\frac{\lambda_0}{\mu}\right) P_0 = 0.304$$

$$P_2 = \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right) P_1 = 0.0759$$

$$P_3 = \left(\frac{\lambda_2}{\mu}\right) P_2 = 0.0126$$

$$P_4 = \left(\frac{\lambda_3}{\mu}\right) P_3 = 0.00158$$

Η πιθανότητα απώλειας πελάτη ισούται με την πιθανότητα της τελευταίας κατάστασης του συστήματος, διότι τότε είναι που το σύστημα γίνεται πλήρες και δεν μπορεί να δεχτεί νέους πελάτες με αποτέλεσμα να τους απορρίπτει. Άρα

$$P_{blocking} = P_4 = 0.00158$$

B. **i)** Μήτρα ρυθμού μεταβάσεων:

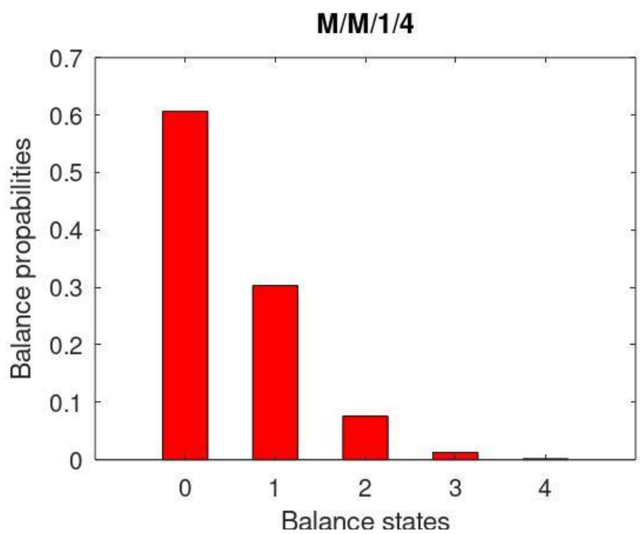
```
transition_matrix =

   -5.0000    5.0000         0         0         0
   10.0000  -12.5000    2.5000         0         0
         0   10.0000  -11.6667    1.6667         0
         0         0   10.0000  -11.2500    1.2500
         0         0         0   10.0000  -10.0000
```

Κώδικας octave:

```
clc;
clear all;
close all;

pkg load queueing;

lambda = 5;
mu = 10;
states = [0, 1, 2, 3, 4];
initial_state = [1, 0, 0, 0, 0];
births_B = [lambda, lambda/2, lambda/3, lambda/4];
deaths_D = [mu, mu, mu, mu];

transition_matrix = ctmcbd(births_B, deaths_D);
display(transition_matrix);
```

ii) Εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος:

```
0.6066
0.3033
0.075829
0.012638
1.5798e-03
```



Οι τιμές που υπολογίστηκαν θεωρητικά επιβεβαιώνονται.

Κώδικας octave:

```
P = ctmc(transition_matrix);
for i=1:5
  display(P(i));
endfor
figure(1);
bar(states, P, "r", 0.5);
title("M/M/1/4");
xlabel("Balance states");
ylabel("Balance propabilities");
```

iii) Μέσος αριθμός πελατών:

```
mean_clients = 0.4992
```

Κώδικας octave:

```
% mean number of clients in the system
mean_clients = 0;
for i = 1 : 1 : 5
  mean_clients = mean_clients + P(i)*(i-1);
endfor
display(mean_clients);
```

iv) Πιθανότητα απόρριψης πελάτη (blocking probability):

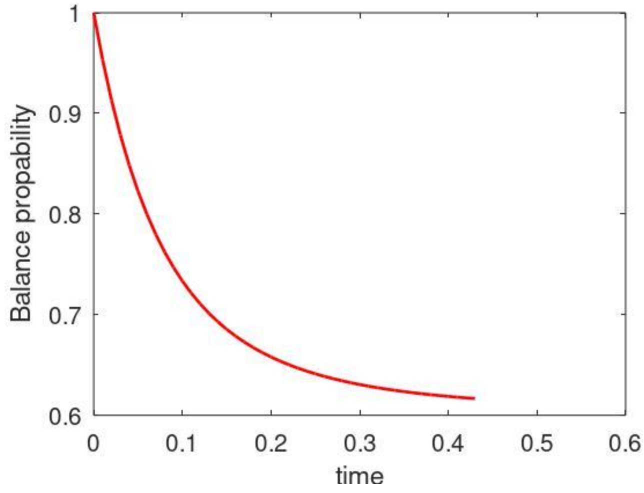
```
Blocking probability =
1.5798e-03
```

Κώδικας octave:

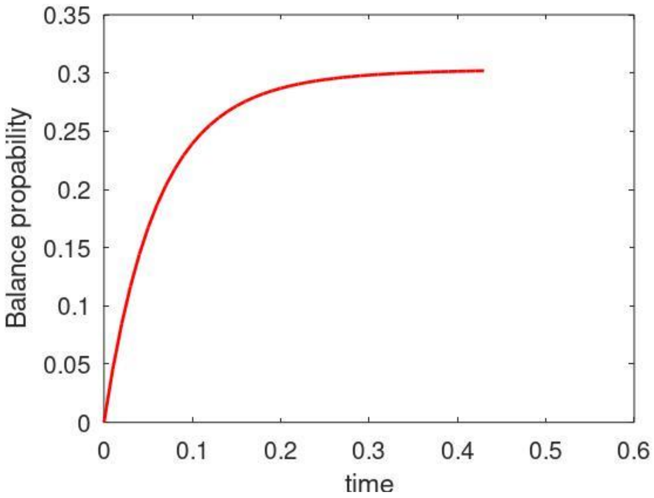
```
display("Blocking probability = ");
display(P(5));
```

v) Διαγράμματα των πιθανοτήτων των καταστάσεων του συστήματος σαν συναρτήσεις του χρόνου από την αρχική κατάσταση μέχρι οι πιθανότητες να έχουν απόσταση μικρότερη του 1% από τις εργοδικές πιθανότητες του ερωτήματος (2).

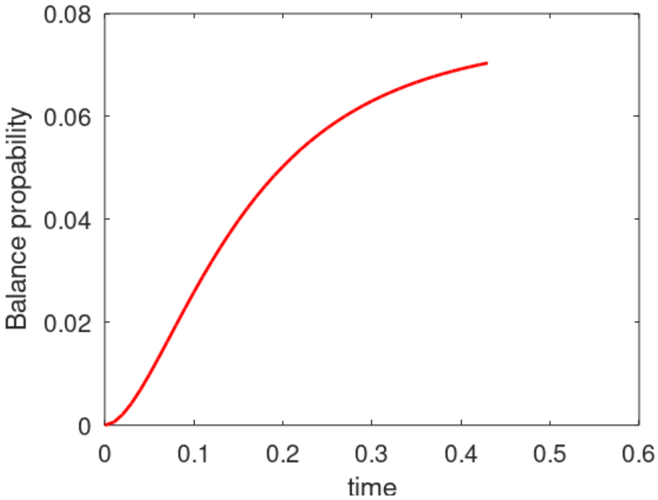
Πιθανότητα κατάστασης 0:



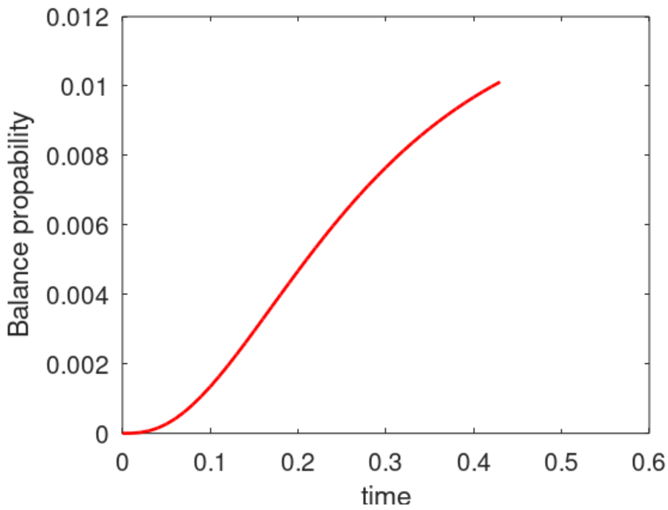
Πιθανότητα κατάστασης 1:



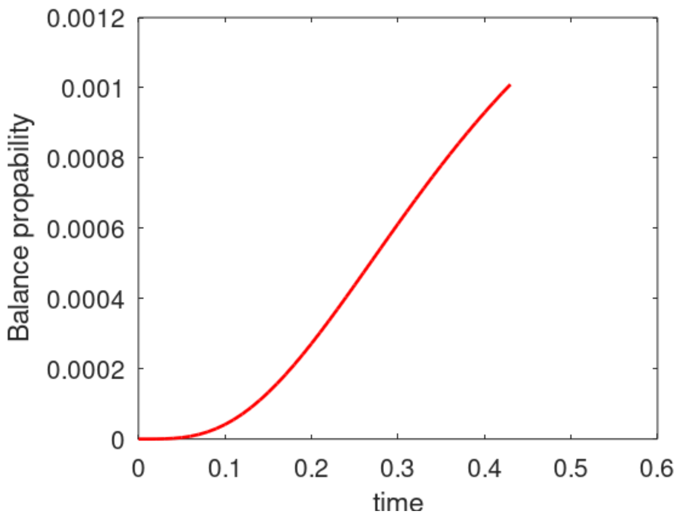
Πιθανότητα κατάστασης 2:



Πιθανότητα κατάστασης 3:



Πιθανότητα κατάστασης 4:



Κώδικας octave:

```
for j = 1:1:5
  index = 0;
  for T = 0 : 0.01 : 50
    index = index + 1;
    P0 = ctmc(transition_matrix, T, initial_state);
    Prob0(index) = P0(j);
    if P0 - P < 0.01
      break;
    endif
  endfor

  t = 0 : 0.01 : T;
  figure(j+1);
  plot(t, Prob0, "r", "linewidth", 1.3);
  xlabel("time");
  ylabel("Balance propability");
endfor
```