CALCOLO DIFFERENZIALE

Limiti in più variabili

def (limiti in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$). Sia $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ p.to di acc. per A ovvero tale che

$$\forall r > 0 \quad A \cap B(x_0, r) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

$L \in \mathbb{R}$. Su $\mathbb{R}^n$ dist. standard, sappiamo che

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \in A)}} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tc } x \in A, \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Se poi $x_0 \in A$ (non è detto essendo x_0 p.to di accumulazione) ed $L = f(x_0)$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ diremo che f è continua in x_0.

Esercizi

[6.2] Studiare la continuità della funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Per $(x,y) \neq (0,0)$, f è il quoziente di polinomi $\Rightarrow f$ è continua

- fisso $y \in \mathbb{R}$: $x \mapsto f(x,y)$ è continua in x
- fisso $x \in \mathbb{R}$: $y \mapsto f(x,y)$ è continua in y

test delle rette Ora fisso $v \in \mathbb{R}^2$ con $|v| = 1$ e considero

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto \varphi_v(t) = f(tv)$$

Calcolo il limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{(t^2 v_1^2)(t v_2)}{t^4 v_1^4 + t^2 v_2^2} = \lim_{t \to 0} t \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } v_2 \neq 0 \\ 0 & \text{se } v_2 = 0 \end{cases}$$

Tuttavia, f non è continua in 0, infatti considero la curva

$$x \mapsto (x, x^2)$$

Calcolo $\displaystyle \lim_{x \to 0} f(x, x^2) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 x^2}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq 0$

Dunque il test delle rette dice solo se può esserci continuità, ma non la garantisce

[6.1] Determinare tutti gli $\alpha, \beta > 0$ tali che la $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{|x|^\alpha |x|^\beta}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

sia continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

<u>Test delle rette</u> Fisso $v \in \mathbb{R}^2$, $|v| = 1$ versore e studio

$$t \mapsto f(tv) = \frac{|tv_1|^\alpha \, |tv_2|^\beta}{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2} = \frac{t^{\alpha+\beta}}{t^2} \quad \frac{|v_1|^\alpha |v_2|^\beta}{v_1^2 + v_2^2}$$

e ora studio per $t \to 0^+$, ottenendo 3 casi diversi:

$$\begin{cases} 0 & \text{se } \alpha+\beta > 2 \\ \dfrac{|v_1|^\alpha |v_2|^\beta}{v_1^2+v_2^2} & \text{se } \alpha+\beta = 2 \\ \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases} & \begin{matrix} \text{se } \alpha+\beta < 2 \\ \text{se } |v_1||v_2| = 0 \end{matrix} \end{cases}$$

conclusione parziale: se $\alpha+\beta \leq 2$, f non è continua,

perchè avrei 0 soltanto in 2 direzioni, mentre lo voglio per tutte

Studio ora $\alpha+\beta > 2$ e stimo con conto diretto:

$$0 \leq f(x,y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} = \frac{x^{2\cdot\frac{\alpha}{2}} \; y^{2\cdot\frac{\beta}{2}}}{x^2+y^2}$$

$$\leq \frac{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}} \; (x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}{x^2+y^2}$$

$$= (x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-1} = |\langle x,y\rangle|^{\alpha+\beta-2}$$

Fisso $\varepsilon > 0$ e cerco $\delta > 0$ tale che $|\langle x,y\rangle| < \delta$ implichi $0 \leq f(x,y) < \varepsilon$

Suppongo $0 \leq f(x,y) \leq |\langle x,y\rangle|^{\alpha+\beta-2} \leq \varepsilon$ e scelgo δ tale che

$\varepsilon \geq \delta^{\alpha+\beta-2}$ posso farlo perchè per hp $\alpha+\beta > 2$

$\Rightarrow \delta \leq \varepsilon^{\frac{1}{\alpha+\beta-2}}$

$\Rightarrow \alpha+\beta > 2$, f è continua in $(0,0)$.

Oss Ipotesi: $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(0)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

$\iff \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$ tc $\forall (x,y)$

$$0<|(x,y)|<\delta \Rightarrow |f(x,y)|<\varepsilon$$

equivalentemente

$$0<r<\delta \Rightarrow |f(r\cos\theta, r\sin\theta)|<\varepsilon \quad \forall r, \forall\theta\in[0,2\pi)$$

nella scrittura di coordinate polari $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

$$\iff \lim_{r\to 0^+} \sup_{\theta\in[0,2\pi)} |f(r\cos\theta, r\sin\theta)|=0$$

se $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq \varphi(r) \xrightarrow[r\to 0]{} 0 \quad \forall\theta\in[0,2\pi)$ ho che necessariamente la mia funzione è continua in $(0,0)$, poiché ho dimostrato che la stima radiale dipende solo da r stesso e non dall'angolo θ

Prima avevo:

$$\frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^2+y^2} = \frac{r^{\alpha+\beta}|\cos\theta|^\alpha|\sin\theta|^\beta}{r^2} \leq r^{\alpha+\beta-2} \xrightarrow[r\to 0]{} 0 \qquad \text{se } \alpha+\beta-2>0$$

valuto $f(x^2,y)$ con $\alpha,\beta=1$.

$$0 \leq \frac{x^2|y|}{x^4+y^2} = \frac{r^{\cancel{3}}}{\cancel{r^2}} \frac{\cos^2\theta|\sin\theta|}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}$$

$$= r\frac{\cos^2\theta\, r}{r^2\cos\theta+r^2} = \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta+1} \xrightarrow[\theta\to 1]{r\to 0} \frac{1}{2}$$

scelgo $r=\sin\theta$

[6.3] Calcolare tutti gli $\alpha>0$ tali che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|^\alpha}{(x^2+y^4)(x^2+y^2)}=0$$

test delle rette $\quad |v|=1, \quad t>0$

$$f(tv)=\frac{tv_1\, t^\alpha|v_2|^\alpha}{(t^2v_1^2+t^4v_1^4)(t^2v_1^2+t^2v_2^2)} = \frac{t^{1+\alpha}\, v_1|v_2|^\alpha}{t^4(v_1^2+t^2v_2^4)(v_1^2+v_2^2)} \xrightarrow{t\to 0^+} \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha>3 \\ \neq 0 & \text{se } \alpha\leq 3 \end{cases}$$

Sia ora $\alpha > 3$:

$$0 \leq |f(x,y)| = \frac{|x||y|^{\alpha-2}\, y^2}{(x^2+y^4)(x^2+y^2)} = \frac{|x||y|^{\alpha-2}}{x^2+y^4} \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2}^{<1}$$

$$\frac{|x||y|^{\alpha-2}}{x^2+y^4} \underset{y^2=z\geq 0}{=} \frac{|x|\,|z|^{\frac{\alpha-2}{2}}}{x^2+z^2} \underset{\substack{\text{coord.}\\ \text{polari}}}{=} \frac{r\, r^{\frac{\alpha-2}{2}}}{r^2} \cdot \frac{|\cos\theta||\sin\theta|^{\frac{\alpha-2}{2}}}{1}$$

$$= \frac{r\, r^{\frac{\alpha-2}{2}}}{r^2} \cdot |\cos\theta||\sin\theta|^{\frac{\alpha-2}{2}}$$

$$\leq r^{1+\frac{\alpha-2}{2}-2} = r^{\frac{\alpha-4}{2}} \xrightarrow[r\to 0]{\alpha>4} 0$$

Devo capire $\alpha \in (3,4]$. Ragiono sul punto critico $\alpha = 4$.

$$x = y^2 \Rightarrow f(y^2,y) = \frac{y^2 y^\alpha}{(y^4+y^4)(y^4+y^2)} = \frac{y^{2+\alpha}}{y^4 \cdot 2 \cdot y^2(y^2+1)} = y^{\alpha-4}\,\frac{1}{2(y^2+1)} \xrightarrow[y\to 0]{} \neq 0 \text{ se } \alpha \leq 4.$$

<u>Conclusione</u> $\quad L = 0 \iff \alpha > 4$

ESERCIZIO. Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,|y|^{\alpha}}{(x^2+y^4)(x^2+y^2)} = 0.$$

SOLUZIONE. Tentativo con le coordinate polari

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta.$$

Si ottiene

$$\left| \frac{r^{1+\alpha}\cos\theta\,|\sin\theta|^{\alpha}}{r^4(\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)} \right| = r^{\alpha-3}\,\frac{|\cos\theta|\,|\sin\theta|^{\alpha}}{\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}.$$

La stima purtroppo dipende da θ.

Altro tentativo:

$$\left| \frac{x\,|y|^{\alpha}}{(x^2+y^4)(x^2+y^2)} \right| = \frac{|x|\,|y|^{\alpha-2}}{x^2+y^4} \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

$$\leq \frac{|x|\,|y|^{\alpha-2}}{x^2+y^4}$$

Osserviamo ora che con la sostituzione $z = y^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|\,|y|^{\alpha-2}}{x^2+y^4} = \lim_{(x,z)\to(0,0)} \frac{|x|\,|z|^{\frac{\alpha-2}{2}}}{x^2+z^2} = (*)$$

Con coordinate polari $x = r\cos\theta$ e $z = r\sin\theta$

si trova

$$(*) = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^{1+\frac{\alpha-2}{2}}}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} r^{\frac{\alpha-2}{2}-1}$$

$$= 0 \quad \text{se e solo se} \quad \frac{\alpha-2}{2}-1>0 \iff \alpha>4.$$

Dunque, se $\alpha>4$ il limite è 0.

Supponiamo $\alpha \leq 4$. Con la scelta $x=y^2$ ($e\ y>0$)

si trova

$$\frac{x\,|y|^\alpha}{(x^2+y^4)(x^2+y^2)} = \frac{y^{2+\alpha}}{2y^4\cdot y^2(1+y^2)} = \frac{y^{\alpha-4}}{2(1+y^2)}$$

e per $\alpha\leq 4$ si ha

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{y^{\alpha-4}}{1+y^2} \neq 0.$$

Conclusione: $L=0 \iff \alpha>4.$

$\square$

Derivate parziali e direzionali in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$

Fissare la base canonica $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ $\quad i = 1, \dots, n$

def Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ (aperto), $x \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Definiamo, se esiste, la

DERIVATA PARZIALE i-esima $\quad i \in \{1, \dots, n\}$ di f in x

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t e_i) - f(x)}{t} \in \mathbb{R}$$

Diciamo che f è **DERIVABILE** in A se $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}$ esiste $\forall x \in A$ e $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

notazioni $\quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = D_i f = D_{x_i} f = \nabla_i f = \partial_i f = \partial_{x_i} f$

esempio

- sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = e^{x^2} \sin(y) \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x e^{x^2} \sin y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x^2} \cos(y)$

- sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \|x\|$.

  Fisso $i = 1, \dots, n$

  $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(\dots)^{-1/2}(2x_i)$$

  $$= \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \qquad \forall x \neq 0$$

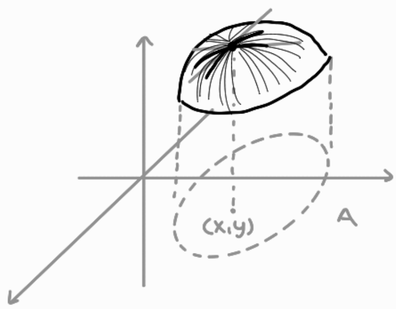
  $$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{\|x\|}$$

def Sia $f : A \to \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}^n$ aperto) derivabile in A. Definiamo il **GRADIENTE** di f

$$\underset{\in A}{\nabla f(x)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^n$$

oss (significato geometrico delle derivate parziali).

Considero $A \subset \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile, $(x,y) \in A$



$\gamma_1(t) = (x + t, y, f(x+t, y)) \qquad t \in (-\delta, \delta)$

$\gamma_1(0) = (x, y, f(x,y))$

$\dot{\gamma}_1(0) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$ vettore velocità tangente alla superficie nel punto considerato rispetto alla x

$\dot{\gamma}_2(0) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$ " rispetto alla y

Questi due vettori sono linearmente indipendenti e generano un

piano tangente al punto preso in esame

def Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $x \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$ e fisso $v \in \mathbb{R}^n$. Se esiste il limite, definiamo la DERIVATA DIREZIONALE di f nel punto x e nella direzione v come:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \in \mathbb{R}$$

esempio Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & x=y=0 \end{cases}$

Fisso $v = \binom{v_1}{v_2} \in \mathbb{R}^2$ e calcolo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t^3}}{t^3} \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2} = \begin{cases} 0 & v_2 = 0 \\ \frac{v_1^2}{v_2} & v_2 \neq 0 \end{cases}$$

oss
- questa funzione non è continua in 0 (visto precedentemente)
- ha tutte le derivate direzionali in 0
- il $gr(f)$ non può avere piano tg in 0

Funzioni a valori vettoriali

$A \subset \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}^m$ $\quad n, m \in \mathbb{N}$

Avremo $f = {}^t(f_1, \dots, f_m)$ $\quad f_i: A \to \mathbb{R}$

def Definiamo $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \end{pmatrix}$ $\quad i = 1, \dots, n$

def Sia $f: A \to \mathbb{R}^m$ derivabile in $A (\subset \mathbb{R}^n)$, allora $\forall x \in A$ definiamo la MATRICE JACOBIANA

$$J f(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{matrice } m \times n$$

CAPITOLO 6

Calcolo differenziale in più variabili

1. Limiti in più variabili

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione di A. Ricordiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in A$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$. Se poi $x_0 \in A$ ed $L = f(x_0)$ diremo che f è continua in x_0.

L'Esercizio 6.13.2 mostra che esistono funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

1) La funzione $x \mapsto f(x, y)$ è continua in $x \in \mathbb{R}$, per ogni $y \in \mathbb{R}$ fissato;
2) La funzione $y \mapsto f(x, y)$ è continua in $y \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato;
3) La funzione $(x, y) \mapsto f(x, y)$ non è continua, ad esempio nel punto $(0, 0)$.

La seguente osservazione sui limiti "in coordinate polari" risulta spesso utile negli esercizi. Supponiamo che $0 \in \mathbb{R}^2$ sia punto di accumulazione per $A \subset \mathbb{R}^2$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$; allora

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = L \in \mathbb{R}$$

se e solo se

$$\lim_{\varrho \to 0^+} \left(\sup_{\vartheta \in [0, 2\pi]} |f(\varrho \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta) - L| \right) = 0.$$

Nel caso $L = \pm\infty$ esiste un' analoga caratterizzazione del limite in coordinate polari, che omettiamo.

2. Derivate parziali e derivate direzionali in $\mathbb{R}^n$

Fissiamo su $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, la base canonica $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$, dove, per ogni $i = 1, \ldots, n$, si ha

$$\mathrm{e}_i = \big(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\big) \in \mathbb{R}^n,$$

con 1 nella posizione i-esima.

Definizione 6.2.1 (Derivata parziale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Diciamo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ ha derivata parziale i-esima, $i = 1, \ldots, n$, nel punto $x \in A$ se esiste finito il limite

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\mathrm{e}_i) - f(x)}{t}.$$

Diremo che f è *derivabile in x* se esistono tutte le derivate parziali $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Osserviamo che, essendo A aperto ed $x \in A$, si ha $x + te_i \in A$ per ogni t sufficientemente piccolo e quindi il limite che definisce la derivata parziale è ben definito.

Esempio 6.2.2. Le derivate parziali si calcolano con le regole del calcolo differenziale di una variabile. Sia ad esempio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2} \sin y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Allora le derivate parziali esistono in ogni punto e sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x\mathrm{e}^{x^2} \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \mathrm{e}^{x^2} \cos y.$$

Esempio 6.2.3. La funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$, non è derivabile in $x = 0$. Per $x \neq 0$, f è invece derivabile e inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{|x|}, \quad x \neq 0.$$

Osservazione 6.2.4. Nella letteratura si incontrano le seguenti notazioni alternative per indicare le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_i f = \partial_{x_i} f = D_i f = f_{x_i}.$$

Osservazione 6.2.5 (Significato geometrico delle derivate parziali). Consideriamo una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile nel punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le due curve $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma_1(t) = \big(x + t, y, f(x + t, y)\big), \quad \gamma_2(t) = \big(x, y + t, f(x, y + t)\big), \quad t \in \mathbb{R},$$

sono derivabili in $t = 0$ e i vettori in $\mathbb{R}^3$

$$\gamma_1'(0) = \big(1, 0, f_x(x, y)\big), \quad \gamma_2'(0) = \big(0, 1, f_y(x, y)\big)$$

sono linearmente indipendenti e generatono dunque un piano 2-dimensionale in $\mathbb{R}^3$. Questo è il *candidato* piano tangente al grafico di

$$\mathrm{gr}(f) = \big\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2\big\}$$

nel punto $(0, f(0)) \in \mathrm{gr}(f)$.

Definizione 6.2.6 (Gradiente). *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $x \in A$. Il vettore*

$$Df(x) = \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \in \mathbb{R}^n$$

si dice gradiente di f in x.

Osservazione 6.2.7 (Significato geometrico del gradiente). Supponiamo che sia $\nabla f(x) \neq 0$. Il vettore $\nabla f(x)$ contiene due informazioni:

i) Il versore orientato $\nabla f(x)/|\nabla f(x)|$ indica la direzione orientata di massima crescita della funzione f.
ii) La lunghezza $|\nabla f(x)|$ misura la velocità di crescita.

Lasciamo, per ora, tali affermazioni alla loro vaghezza.

DEFINIZIONE 6.2.8 (Derivata direzionale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Diciamo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ ha derivata direzionale nella direzione $v \in \mathbb{R}^n$ nel punto $x \in A$ se esiste finito il limite

$$f_v(x) = \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}.$$

ESEMPIO 6.2.9. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel seguente modo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & x = y = 0. \end{cases}$$

Calcoliamo le derivate direzionali di f in $0 \in \mathbb{R}^2$ in una generica direzione $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ con $v \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2}.$$

Quando $v_1 = 0$ oppure $v_2 = 0$ il limite è certamente 0. Dunque, si trova in particolare

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0.$$

Inoltre, quando $v_2 \neq 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2} = \frac{v_1^2}{v_2}.$$

Osserviamo che il limite ottenuto non è un'espressione lineare in v.

La funzione f, dunque, ha derivata direzionale in 0 in ogni direzione. Tuttavia, f non è continua in 0, dal momento che per ogni $m \in \mathbb{R}$ risulta

$$\lim_{t \to 0} f(t, mt^2) = \frac{m}{1 + m^2}$$

e il valore del limite dipende dall'apertura della parabola.

Nel grafico di f

$$\mathrm{gr}(f) = \left\{ (x, y, f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

c'è uno "strappo" nel punto $0 \in \mathrm{gr}(f)$. Questo impedisce l'esistenza di un "piano tangente" al grafico, comunque si intenda la nozione di "piano tangente".

In conclusione, la nozione di funzione derivabile è naturale ed utile. Tuttavia è insoddisfacente per almeno due motivi: per $n \geq 2$ la derivabilità (anche in tutte le direzioni) non implica la continuità; sempre per $n \geq 2$ la derivabilità non implica l'esistenza di un piano tangente al grafico della funzione.

3. Funzioni a valori vettoriali

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e consideriamo una funzione $f : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Avremo $f = (f_1, \ldots, f_m)$ dove $f_j : A \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, sono le funzioni coordinate di f. D'ora in avanti, ci atterremo alla convenzione di rappresentare f come un vettore colonna

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}. \tag{6.3.15}$$

Diciamo che f è derivabile in un punto $x \in A$ se ciascuna coordinata $f_1, \dots, f_m$ è derivabile in x. In questo caso, scriveremo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}(x) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n.$$

DEFINIZIONE 6.3.1 (Matrice Jacobiana). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione derivabile nel punto $x \in A$. La matrice

$$J_f(x) = Jf(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix}$$

si dice *matrice Jacobiana di f in x*. La matrice $Jf(x)$ ha m righe and n colonne.

Il significato geometrico della matrice Jacobiana è più recondito. Ritorneremo su questo punto più avanti.

4. Funzioni differenziabili

In questa sezione introduciamo la definizione di funzione *differenziabile*. Facciamo prima alcuni richiami di algebra lineare.

Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una trasformazione lineare, $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Fissiamo le basi

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n \quad \text{base canonica di } \mathbb{R}^n, \\ &\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_m \quad \text{base canonica di } \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Siano $T_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, i numeri reali definiti tramite la seguente relazione

$$T\mathrm{e}_j = \sum_{i=1}^m T_{ij}\mathrm{e}_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Esiste una corrispondenza biunivoca fra la trasformazione lineare T e la matrice $(T_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$. Scriviamo il punto $x \in \mathbb{R}^n$ come vettore colonna

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Funzioni differenziabili

$e_1, \dots, e_n$ b.c. in $\mathbb{R}^n$; $e_1, \dots, e_m$ b.c. in $\mathbb{R}^m$

$A \subset \mathbb{R}^n$ aperto . $f : A \to \mathbb{R}^m$. Voglio def il differenziale di f in A. Identifico $x \in \mathbb{R}^n$ con $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Se $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ trasformazione lineare

$$T(x) = Tx = \begin{pmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m1} & \cdots & T_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j^n T_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_j^n T_{mj} x_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

def Diciamo che $f : A \to \mathbb{R}^m$ ($A \subset \mathbb{R}^n$ aperto) è DIFFERENZIABILE SECONDO FRÉCHET nel punto $x_0 \in A$ se $\exists\, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

Chiameremo $T = df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ il DIFFERENZIALE di f in x_0.

oss

- il differenziale, se esiste, è unico. Seguirà dal fatto che
$$Tv = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

- La definizione equivale alla definizione di derivabilità per $n = 1$.
Sia ad esempio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$
$$\Rightarrow T = df(x_0) = f'(x_0)$$
La nostra trasformazione in questo caso è la moltiplicazione per scalare.

- Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è lineare, allora $\exists\, df(x_0) = f \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$
$$f(x) - f(x_0) - f(x - x_0) \underset{\text{linearità}}{=} f(x - x_0) - f(x - x_0) = 0 \quad \forall x$$

- $f : A \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in x_0 con $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ se e solo se $\forall f_j : A \to \mathbb{R} \quad \forall j = 1, \dots, m$ sono differenziabili in x_0

def $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi normati. Sia $A \subset X$ aperto, $x_0 \in A$, $f: A \to Y$

Diciamo che f è FRECHET-DIFFERENZIABILE in x_0 se esiste $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ lineare e limitata tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\| f(x) - f(x_0) - T(x-x_0) \|_Y}{\| x - x_0 \|_X} = 0$$

Chiameremo $T = df(x_0)$ il diff. di f in x_0.

prop $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in A$, $f: A \to \mathbb{R}^n$. Sono equivalenti:

A) f è F-differenziabile in x_0

B) Esistono $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $E_{x_0}: A \to \mathbb{R}^m$ tali che

- $f(x) = f(x_0) + T(x-x_0) + E_{x_0}(x)$ (Taylor)
- $\lim_{x \to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|x-x_0|} = 0$ ovvero $E_{x_0}(x) \underset{x \to x_0}{=} o(|x-x_0|)$

dim A) => B). Scelgo $T = df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e poi definiamo l'errore $E_{x_0}(x) = f(x) - f(x_0) - T(x-x_0)$.

f differenziabile $\Rightarrow E_{x_0}(x)$ verifica $\lim_{x \to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|x-x_0|} = 0$.

B) => A). $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x-x_0)}{|x-x_0|} = \lim_{x \to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|x-x_0|} = 0$. □

TEOREMA Sia $f: A \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in A \subset \mathbb{R}^n$. Sono vere:

1) f è diff in $x_0 \Rightarrow f$ è continua in x_0

2) f è diff in $x_0 \Rightarrow f$ ha tutte le derivate direzionali in x_0

Inoltre $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0)\, v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

dim 1) Uso B). $f(x) = f(x_0) + \underbrace{T(x-x_0)}_{\xrightarrow{x \to x_0} 0} + \underbrace{E_{x_0}(x)}_{\xrightarrow{x \to x_0} 0}$ con $T = df(\cdot)$

Ovunque $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$ ovvero f è cont. in x_0.

2) Fisso $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$, siano $x = x_0 + tv$, $t \in \mathbb{R}$.

Uso B). $f(x_0 + tv) = f(x_0) + df(x_0)(tv) + E_{x_0}(x_0 + tv)$

dove $\dfrac{E_{x_0}(x_0+tv)}{|tv|} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ quindi

$$\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} = df(x_0)v + \underbrace{\frac{E_{x_0}(x_0+tv)}{t}}_{\xrightarrow[t\to 0]{} 0}$$

se passo al limite $t\to 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0)v \qquad \forall v\in\mathbb{R}^n \qquad \square$$

oss (1) Identificazione di $T = df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ con $Jf(x_0)$. Sia $(T_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ la matrice $m\times n$ dove

$$T_{ij} = \langle Te_j, e_i\rangle = \langle df(x_0)e_j, e_i\rangle$$
$$= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0), e_i\right\rangle = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$$

$\Rightarrow$ matrice $T = Jf(x_0)$

(2) se poi $m=1$ $\quad df(x_0) \equiv \nabla f(x_0)$

$$df(x_0)(e_j) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+te_j)-f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$$

$$df(x_0)(v) = df(x_0)(v_1e_1+\dots+v_ne_n) =$$
$$v = \begin{pmatrix} v_1\\ \vdots \\ v_n\end{pmatrix}$$
$$= v_1\, df(x_0)(e_1)+\dots+v_n\, df(x_0)(e_n)$$
$$= v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)+\dots+v_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = \langle\nabla f(x_0), v\rangle$$

(3) sempre $m=1$ e $|v|=1$

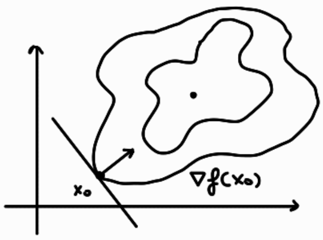
$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v\rangle \underset{=}{\leq} |\nabla f(x_0)|$$

$=$ perché $v = \dfrac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|\neq 0}$

(3) Significato geometrico di $\nabla f(x_0)\neq 0$.

Contiene 2 informazioni:

- $v = \dfrac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$ direzione di massima crescita



- $|\nabla f(x_0)|$ velocità di crescita

(4) test della differenziabilità

$f: A\to\mathbb{R}$, $x_0\in A$, $m=1$. Voglio sapere se f è Fr-diff. in x_0

i) calcolo $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ $\quad\forall i=1,\dots,n$

ii) se esistono, $\nabla f(x_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0),\dots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$ e controllo se

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-\langle\nabla f(x_0), x-x_0\rangle}{|x-x_0|} = 0$$

Se f è Fr-diff. in x_0, allora

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle}_{\varphi(x)} + E_{x_0}(x), \qquad \frac{E_{x_0}(x_0)}{|x-x_0|} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

dove $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è affine (lineare + costante)

il $gr(\varphi) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ è un piano affine di dimensione n.

Inoltre $f(x) - \varphi(x) = E_{x_0}(x) = o(|x - x_0|)$

<u>def</u> Chiamiamo il grafico di φ il piano affine tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0)) \in gr(f)$:

$$gr(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) \ : \ x \in \mathbb{R}^n\}$$

<u>esercizio</u> calcolare il piano tangente al grafico di $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$y = f(x) = \sqrt{1 + |x|^2}$ in un generico punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

$\varphi(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{2}(1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{\sqrt{1+|x|^2}}$$

$$\nabla f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+|x|^2}}$$

$$\varphi(x) = \sqrt{1+|x_0|^2} + \left\langle \frac{x_0}{\sqrt{1+|x_0|^2}}, x - x_0 \right\rangle$$

$$= \sqrt{1+|x_0|^2} + \frac{\langle x_0, x \rangle - |x_0|^2}{\sqrt{1+|x_0|^2}}$$

$$= \frac{1 + \cancel{|x_0|^2} + \langle x_0, x \rangle - \cancel{|x_0|^2}}{\sqrt{1+|x_0|^2}} = \frac{1 + \langle x_0, x \rangle}{\sqrt{1+|x_0|^2}}$$

$x_{n+1} = \varphi(x) \implies x_{n+1}\sqrt{1+|x_0|^2} = 1 + \langle x_0, x \rangle$

$gr(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) \ : \ x \in \mathbb{R}^n\}$

$= \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x \in \mathbb{R}^n\}$

<u>nota</u> se $x_0 = 0$ ho il piano $y = 1$

prop 1) $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$

se f e g sono diff in $x_0 \in A$, allora $f+g : A \to \mathbb{R}^m$ è diff. in x_0 e

$$d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$$

2) $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$

se f e g sono diff in $x_0 \in A$, allora $f \cdot g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ è diff. in x_0 e

$$d(f \cdot g)(x_0) = f(x_0)\, dg(x_0) + df(x_0)\, g(x_0)$$

dim
$$\begin{cases} f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x-x_0) + F_{x_0}(x) \\ g(x) = g(x_0) + dg(x_0)(x-x_0) + G_{x_0}(x) \end{cases}$$

moltiplico e trovo l'equazione sopra. $\square$

TEOREMA (differenziale della funzione composta).

Sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diff. in x_0. Sia poi $g : B \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ diff. in $y_0 = f(x_0) \in B$, con $f(A) \subset B$. Allora $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}^k$ è diff in x_0 ed inoltre:

$$\underbrace{d(g \circ f)(x_0)}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)} = \underbrace{dg(f(x_0))}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)} \circ \underbrace{df(x_0)}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}$$

In termini di matrici Jacobiane

$$J(g \circ f)(x_0) = J g(f(x_0)) \cdot Jf(x_0)$$

dunque composizione di funzioni $\longleftrightarrow$ prodotto di matrici

dim $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ differenziabile in $x_0 \in A$

$$f(x) = f(x_0) + T(x-x_0) + F_{x_0}(x)$$

$$T = df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \qquad F_{x_0}(x) \overset{x \to x_0}{=} o(|x-x_0|)$$

$g : B \longrightarrow \mathbb{R}^k$ differenziabile in $y_0 = f(x_0)$ con $f(A) \subset B$.

$$g(y) = g(y_0) + S(y-y_0) + G_{y_0}(y)$$

$$S = dg(y_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k) \qquad G_{y_0}(x) \overset{y \to y_0}{=} o(|y-y_0|)$$

componiamo

$$g(f(x_0)) = g(f(x_0)) + S(f(x) - f(x_0)) + G_{f(x_0)}(f(x))$$

$$= g(f(x_0)) + S(T(x-x_0)) + \underbrace{S(F_{x_0}(x)) + G_{f(x_0)}(f(x))}_{H_{x_0}(x)}$$

Devo controllare che $H_{x_0}(x) = o(|x-x_0|)$

- $\dfrac{S(F_{x_0}(x))}{|x-x_0|} = S\left(\dfrac{F_{x_0}(x)}{|x-x_0|}\right) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$

- $\dfrac{G_{f(x_0)}(f(x))}{|x-x_0|} = \dfrac{G_{f(x_0)}(f(x))}{|f(x)-f(x_0)|} \cdot \dfrac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|}$

$$= \underbrace{\dfrac{G_{f(x_0)}(f(x))}{|f(x)-f(x_0)|}}_{} \cdot \dfrac{|T(x-x_0)+E_{x_0}(x)|}{|x-x_0|} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

f è differenziabile in x_0
$\Rightarrow$ f cont in x_0:
$x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to f(x_0)$
$\Rightarrow$ tende a 0

Dunque, esiste $d(g\circ f)(x_0) = S\circ T = dg(f(x)) \circ df(x_0)$. $\square$

<u>oss</u> $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\|T\| = \sup_{|x|\le 1} |Tx| < \infty$, segue che

$\|Tx\| < \|T\|\,|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \dfrac{T(x-x_0)}{|x-x_0|} = T\left(\dfrac{x-x_0}{|x-x_0|}\right) \le \|T\| < \infty$

↳ "normalizzo" il vettore $x-x_0$

<u>esempio</u> $A \subset \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}$ differenziabile su A

sia $\gamma: [0,1] \to A$ derivabile su $[0,1]$

Allora la composizione

$(0,1) \ni t \mapsto f(\gamma(t)) = f\circ\gamma(t)$ è differenziabile $\forall t$

Inoltre $d(f\circ g)(t) = \dfrac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma(t) \rangle$

Funzioni di classe C^1

<u>def</u> Diciamo che $f: A \to \mathbb{R}^m$ ($A \subset \mathbb{R}^n$ aperto) è di classe C^1 su A

se esistono e sono continue tutte le derivate parziali

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) \qquad x\in A \qquad i=1,\dots,n \quad j=1,\dots,m$$

Indichiamo con $C^1(A, \mathbb{R}^m)$ quello insieme

<u>**TEOREMA**</u> Se $f \in C^1(A,\mathbb{R}^m)$ allora f è diff. in tutto A.

<u>dim</u> WLOG $m=1$

Sia $x_0 \in A$ e considero $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $h \in \mathbb{R}^n$ (incremento) di f. D'ora in avanti, ci atterremo alla convenzione di rappresentare f come un vettore colonna

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}. \tag{6.3.15}$$

Diciamo che f è derivabile in un punto $x \in A$ se ciascuna coordinata $f_1, \dots, f_m$ è derivabile in x. In questo caso, scriveremo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}(x) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Definizione 6.3.1 (Matrice Jacobiana). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione derivabile nel punto $x \in A$. La matrice

$$J_f(x) = Jf(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix}$$

si dice *matrice Jacobiana di f in x*. La matrice $Jf(x)$ ha m righe and n colonne.

Il significato geometrico della matrice Jacobiana è più recondito. Ritorneremo su questo punto più avanti.

4. Funzioni differenziabili

In questa sezione introduciamo la definizione di funzione *differenziabile*. Facciamo prima alcuni richiami di algebra lineare.

Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una trasformazione lineare, $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Fissiamo le basi

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n \quad \text{base canonica di } \mathbb{R}^n, \\ &\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_m \quad \text{base canonica di } \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Siano $T_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, i numeri reali definiti tramite la seguente relazione

$$T\mathrm{e}_j = \sum_{i=1}^m T_{ij}\mathrm{e}_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Esiste una corrispondenza biunivoca fra la trasformazione lineare T e la matrice $(T_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$. Scriviamo il punto $x \in \mathbb{R}^n$ come vettore colonna

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Avremo allora, con la notazione di prodotto righe-colonne,

$$T(x) = Tx = \begin{pmatrix} T_{11} & \dots & T_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m1} & \dots & T_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} T_{1j}x_j \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} T_{mj}x_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

La corrispondenza fra T e la matrice $(T_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ dipende dalla scelta delle basi canoniche su $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$.

Definizione 6.4.1 (Differenziale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, un insieme aperto. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, si dice *differenziabile* (o Fréchet-differenziabile) in un punto $x_0 \in A$ se esiste una trasformazione lineare $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0. \tag{6.4.16}$$

Chiameremo la trasformazione lineare $df(x_0) = T$ il *differenziale di f in x_0*.

Osservazione 6.4.2. Lasciamo al lettore il compito di verificare le seguenti affermazioni.

1. Unicità del differenziale. Se il differenziale esiste allora esso è unico. Precisamente, se $T, \widehat{T} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ sono trasformazioni lineari che verificano (6.4.16) (per lo stesso punto x_0), allora $T = \widehat{T}$. Infatti, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$Tv = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

e l'unicità di T segue dall'unicità del limite.

2. Caso $n = 1$. Quando $n = 1$ (e indipendentemente da $m \geq 1$), le nozioni di derivabilità e differenziabilità coincidono e inoltre

$$df(x_0) = f'(x_0) \quad \text{come vettori di } \mathbb{R}^m.$$

La verifica di queste affermazioni è lasciata come esercizio.

3. Differenziale di una trasformazione lineare. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare, allora $df(x_0) = f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Questo segue in modo elementare dal fatto che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0) = f(x) - f(x_0) - f(x - x_0) = 0.$$

4. Caso vettoriale. Una funzione f a valori in $\mathbb{R}^m$ è differenziabile se e solo se le sue m coordinate sono differenziabili.

La Definizione 6.4.1 ha una generalizzazione naturale nell'ambito degli spazi normati.

Definizione 6.4.3. Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati, e sia $A \subset X$ un aperto. Una funzione $f : A \to Y$ si dice *Fréchet-differenziabile* in un punto $x_0 \in A$ se esiste una trasformazione lineare e continua $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|_Y}{\|x - x_0\|_X} = 0. \tag{6.4.17}$$

La trasformazione lineare $df(x_0) = T$ si chiama il *differenziale di f in x_0*.

Il differenziale è per definizione una trasformazione lineare e *continua*.

TEOREMA 6.4.4 (Caratterizzazione della differenziabilità). Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione con $A \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto e $x_0 \in A$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) La funzione f è differenziabile in x_0.

B) Esistono una trasformazione lineare $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ed una funzione $E_{x_0} : A \to \mathbb{R}^m$ tali che $f(x) = f(x_0) + T(x - x_0) + E_{x_0}(x)$ per $x \in A$ e

$$E_{x_0}(x) = o(|x - x_0|), \quad x \to x_0.$$

DIM. A)⇒B). Scegliamo $T = df(x_0)$ e definiamo $E_{x_0}(x) = f(x)-f(x_0)-T(x-x_0)$. La funzione E_{x_0} verifica la proprietà richiesta

$$\lim_{x\to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|x - x_0|} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0,$$

in quanto f è differenziabile.

B)⇒A) Proviamo che $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, R^m)$ data in B) è il differenziale di f:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = \lim_{x\to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|x - x_0|} = 0.$$

□

TEOREMA 6.4.5. Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile nel punto $x_0 \in A$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto. Allora:

i) f è continua in x_0.

ii) f ha in x_0 derivata direzionale in ogni direzione $v \in \mathbb{R}^n$ e inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0)(v). \tag{6.4.18}$$

In particolare, la differenziabilità implica la derivabilità.

DIM. i) Usiamo la caratterizzazione B) della differenziabilità nel teorema precedente, la continuità di T e le proprietà di E_{x_0}:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \big(f(x_0) + T(x - x_0) + E_{x_0}(x)\big) = f(x_0).$$

ii) Usiamo di nuovo la caratterizzazione B):

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{df(x_0)(tv) + E_{x_0}(x_0 + tv)}{t} \\ &= df(x_0)(v) + \lim_{t\to 0} \frac{E_{x_0}(x_0 + tv)}{t} = df(x_0)(v).\end{aligned}$$

□

Osservazione 6.4.6 (Significato geometrico del gradiente). Quando $m = 1$ si ha $df(x_0)(v) = \langle \nabla f(x_0), v\rangle$ e quindi si ottiene la seguente formula di rappresentazione per la derivata direzionale

$$f_v(x_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v\rangle.$$

Se $|v| = 1$ allora $|f_v(x_0)| = |\langle \nabla f(x_0), v\rangle| \leq |\nabla f(x_0)|$. Deduciamo che

$$\max_{|v|=1} f_v(x_0) = |\nabla f(x_0)|$$

e il massimo è raggiunto con la scelta $v = \nabla f(x)/|\nabla f(x)|$.

Osservazione 6.4.7 (Test della differenziabilità). Quando $m = 1$, la formula (6.4.16) che definisce la differenziabilità si può riscrivere nel seguente modo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x - x_0\rangle}{|x - x_0|} = 0. \tag{6.4.19}$$

Dunque, per controllare la differenziabilità di f in x_0 si controlla prima l'esistenza delle derivate parziali in x_0, e poi si verifica che il limite in (6.4.19) sia zero.

Osservazione 6.4.8 (Identificazione di $df(x_0)$ e $Jf(x_0)$). Sia ora f a valori in $\mathbb{R}^m$ con $m \geq 1$ e sia $(T_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ la matrice associata al differenziale $T = df(x_0)$. Allora avremo

$$T_{ij} = \langle T\mathrm{e}_j, \mathrm{e}_i\rangle = \langle df(x_0)(\mathrm{e}_j), \mathrm{e}_i\rangle = \langle f_{x_j}(x_0), \mathrm{e}_i\rangle = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0).$$

Dunque, possiamo identificare $df(x_0)$ con la matrice Jacobiana $Jf(x_0)$

$$df(x_0) = Jf(x_0).$$

Questa identificazione dipende dalla scelta delle basi canoniche.

Definizione 6.4.9 (Piano tangente ad un grafico). Sia $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in un punto $x_0 \in A$. Sappiamo allora che si ha lo sviluppo

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0\rangle + E_{x_0}(x),$$

dove $E_{x_0}(x) = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$. Consideriamo la parte lineare dello sviluppo

$$\varphi(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

La funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è affine, verifica $\varphi(x_0) = f(x_0)$ e $|f(x) - \varphi(x)| = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$. Il suo grafico

$$\mathrm{gr}(\varphi) = \big\{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n\big\}$$

è un piano affine n-dimensionale che si dice *piano tangente (affine) al grafico di f* nel punto $(x_0, f(x_0)) \in \mathrm{gr}(f)$.

Esempio 6.4.10. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \sqrt{1 + |x|^2}$ e consideriamo la superficie n-dimensionale

$$M = \mathrm{gr}(f) = \big\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n\big\}.$$

M è la falda superiore di un iperboloide di rotazione n-dimensionale. Calcoliamo il piano tangente ad M nel punto $(x_0, f(x_0)) \in \mathrm{gr}(f)$. Il gradiente di f in x_0 è

$$\nabla f(x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{1+|x_0|^2}}.$$

Il piano tangente (affine) è il grafico della funzione

$$\varphi(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle = \sqrt{1+|x_0|^2} + \frac{\langle x_0, x - x_0\rangle}{\sqrt{1+|x_0|^2}} = \frac{1+\langle x_0, x\rangle}{\sqrt{1+|x_0|^2}},$$

e precisamente

$$\mathrm{gr}(\varphi) = \Big\{ (x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = \frac{1+\langle x_0, x\rangle}{\sqrt{1+|x_0|^2}} \Big\}.$$

5. Differenziale della funzione composta

In questa sezione proviamo la formula per il differenziale della funzione composta. Nel caso di somma e prodotto di funzioni si hanno i seguenti fatti.

1. Differenziale della somma. Se $f, g : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, sono differenziabili in un punto $x_0 \in A$ allora anche la funzione somma $f+g$ è differenziabile in x_0 e inoltre

$$d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0).$$

La verifica è elementare.

2. Differenziale del prodotto. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, funzioni differenziabili in un punto $x_0 \in A$. Allora anche la funzione prodotto $f \cdot g$ è differenziabile in x_0 e inoltre

$$d(f \cdot g)(x_0) = f(x_0)dg(x_0) + g(x_0)df(x_0).$$

La verifica è elementare e si ottiene moltiplicando gli sviluppi

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + F_{x_0}(x)$$
$$g(x) = g(x_0) + dg(x_0)(x - x_0) + G_{x_0}(x),$$

con $F_{x_0}(x) = o(|x - x_0|)$ e $G_{x_0}(x) = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$.

Teorema 6.5.1 (Differenziale della funzione composta). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile nel punto $x_0 \in A$. Sia poi $B \subset \mathbb{R}^m$ un insieme aperto tale che $f(A) \subset B$ e sia $g : B \to \mathbb{R}^k$ una funzione differenziabile nel punto $f(x_0) \in B$. Allora la funzione composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}^k$ è differenziabile nel punto x_0 e inoltre

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0). \tag{6.5.20}$$

Equivalentemente, le matrici Jacobiane verificano

$$\underbrace{J_{g\circ f}(x_0)}_{k\times n} = \underbrace{J_g(f(x_0))}_{k\times m}\,\underbrace{J_f(x_0)}_{m\times n}, \tag{6.5.21}$$

con la notazione di prodotto fra matrici righe$\times$colonne.

DIM. Per il Teorema 6.4.4, avremo

$$f(x) = f(x_0) + T(x - x_0) + F_{x_0}(x), \quad x \in A,$$

con $T = df(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ed $F_{x_0} : A \to \mathbb{R}^m$ tale che $F_{x_0}(x) = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$. Inoltre, posto $y_0 = f(x_0)$, avremo

$$g(y) = g(y_0) + S(y - y_0) + G_{y_0}(y), \quad y \in B,$$

con $S = dg(y_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ ed $G_{y_0} : B \to \mathbb{R}^k$ tale che $G_{y_0}(y) = o(|y - y_0|)$ per $y \to y_0$.

Componendo f con g si trova

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(x_0)) + S(f(x) - f(x_0)) + G_{f(x_0)}(f(x)) \\ &= g(f(x_0)) + S(T(x - x_0) + F_{x_0}(x)) + G_{f(x_0)}(f(x)) \\ &= g(f(x_0)) + S(T(x - x_0)) + S(F_{x_0}(x)) + G_{f(x_0)}(f(x)). \end{aligned}$$

Abbiamo usato la linearità di S.

Chiaramente si ha $S \circ T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k)$. Consideriamo la funzione $H_{x_0} : A \to \mathbb{R}^k$

$$H_{x_0}(x) = S(F_{x_0}(x)) + G_{f(x_0)}(f(x)).$$

Da un lato avremo, per $x \to x_0$,

$$S(F_{x_0}(x)) = o(|x - x_0|),$$

e dall'altro, siccome $x \to x_0$ implica $f(x) \to f(x_0)$ (la differenziabilità implica la continuità), per $f(x) \neq f(x_0)$ avremo

$$\frac{G_{f(x_0)}(f(x))}{|x - x_0|} = \frac{|T(x - x_0) + E_{x_0}(x)|}{|x - x_0|} \frac{G_{f(x_0)}(f(x))}{|f(x) - f(x_0)|} = o(|x - x_0|), \quad x \to x_0.$$

Quando $f(x) = f(x_0)$, è semplicemente $G_{f(x_0)}(f(x)) = 0$.

In conclusione, $H_{x_0}(x) = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$. Per il Teorema 6.4.4, $g \circ f$ è differenziabile in x_0 con differenziale $d(g \circ f)(x_0) = S \circ T = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$.

□

ESEMPIO 6.5.2 (Derivata di una funzione lungo una curva). Sia $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ una curva derivabile (equivalentemente, differenziabile) in tutti i punti. Coerentemente con la convenzione fissata in (6.3.15), pensiamo γ come un vettore colonna

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Sia poi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile (in tutti i punti lungo la curva). Allora avremo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = J_{f \circ \gamma}(t) = J_f(\gamma(t)) J_\gamma(t) &= \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)) \Big) \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(t) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t). \end{aligned}$$

Con una notazione più compatta possiamo anche scrivere

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle, \quad t \in [0,1]. \tag{6.5.22}$$

ESEMPIO 6.5.3. Esplicitiamo la formula (6.5.21) del Teorema 6.5.1. Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ due funzioni differenziabili. La composizione $G = g \circ f$ ha k componenti $G = (G_1, \ldots, G_k)$, da pensare come vettore colonna. La formula (6.5.21), ovvero $JG(x) = Jg(f(x))\, Jf(x)$, si legge nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

dove le derivate parziali di g vanno calcolate nel punto $f(x)$, quelle di f e G nel punto x. Alla riga $i \in \{1, \ldots, k\}$ e colonna $j \in \{1, \ldots, n\}$ della matrice $JG(x)$ si trova l'entrata

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_\ell}(f(x)) \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(x).$$

6. Teoremi del valor medio

In questa sezione estendiamo il Teorema di Lagrange al caso multidimensionale.

TEOREMA 6.6.1. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, e siano $x, y \in A$ punti tali che $[x,y] := \big\{tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1]\big\} \subset A$. Allora esiste un punto $z \in [x,y]$ tale che

$$f(x) - f(y) = \langle \nabla f(z), x - y\rangle. \tag{6.6.23}$$

DIM. Sia $\gamma : [0,1] \to A$, $\gamma(t) = tx + (1-t)y$ una parametrizzazione del segmento, e definiamo la funzione composta $\varphi = f \circ \gamma$, ovvero

$$\varphi(t) = f(tx + (1-t)y) = f(\gamma(t)), \quad t \in [0,1].$$

Per il Teorema 6.5.1, φ è differenziabile su $[0,1]$, e quindi per il Teorema di Lagrange esiste un punto $t^* \in [0,1]$ tale che $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t^*)$. Per la formula (6.5.22),

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle, \quad t \in [0,1].$$

e dunque, posto $z = \gamma(t^*)$, si ottiene la tesi. $\square$

Nel caso di funzioni a valori vettoriali la formulazione del Teorema del valor medio deve essere precisata.

TEOREMA 6.6.2. Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, e siano $x, y \in A$ punti tali che $[x,y] := \big\{tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1]\big\} \subset A$. Allora per ogni $v \in \mathbb{R}^m$ esiste un punto $z \in [x,y]$ tale che

$$\langle f(x) - f(y), v\rangle = \langle df(z)(x-y), v\rangle. \tag{6.6.24}$$

$$Th = \langle \nabla f(x_0), h \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i$$

Devo verificare che:

$$\frac{f(x) - f(x_0) - T(x-x_0)}{|x-x_0|} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \iff \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Th}{|h|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Nella base canonica:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f\left(x_0 + \sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right) - f(x_0)$$

somma telescopica

$$= \sum_{j=1}^{n} f\left(x_0 + \sum_{i=1}^{j} h_i e_i\right) - f\left(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i e_i\right)$$

è funzione a valori h_j ed è derivabile.

incremento tra i 2 elementi della sottrazione $\left(x_0+\sum_{i=1}^{j} h_i e_i\right) - \left(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i e_i\right)$

Per Lagrange $\forall j = 1, \dots, n \quad \exists h_j^* \in [0, h_j]$ tale che

$$f\left(x_0 + \sum_{i=1}^{j} h_i e_i\right) - f\left(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i e_i\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i e_i + h_j^* e_j\right) \cdot h_j$$

Da cui deduciamo

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Th}{|h|} = \frac{f\left(x_0 + \sum^{n} h_i e_i\right) - f(x_0) - Th}{|h|}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{h_j}{|h|}}_{\text{limitato}} \left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i e_i + h_j^* e_j\right) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) h_j\right]$$

$\xrightarrow[h \to 0]{} 0$ essendo $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(A)$ $\square$

riassunto $\quad f \in C^1(A) \implies f$ è diff in $A \implies f$ è continua ed ha tutte le derivate direzionali

esercizio $\quad$ Sia $\alpha > 0$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} |y|^\alpha \sin\left(\frac{x}{y}\right) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che:

1) f sia diff su $\mathbb{R}^2$

2) le derivate parziali di f esistano e siano continue in $0 \in \mathbb{R}^2$

3) f sia di classe $C^1(\mathbb{R})$

se $y \neq 0$ f è certamente C^1 $\Rightarrow$ f qui è differenziabile

poiché è composizione, quoziente e prodotto di funzioni C^1.

1) Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ ($\to (x_0, 0)$), qui devono esistere le derivate parziali

$$f_x(x_0, 0) = 0 \quad \text{OK}$$

$$f_y(x_0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x_0, y) - \overset{\overset{0}{\parallel}}{f(x_0, 0)}}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{|y|^\alpha}{y} \sin\left(\frac{x_0}{y}\right) = 0 \iff \alpha > 1$$

per i casi $\alpha \leq 1$ non è differenziabile!

Studio la differenziabilità in $(x_0, 0)$ per $\alpha > 1$

$$\frac{f(x,y) - \overbrace{f(x_0,0)}^{0} - 0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}} \xrightarrow[(x,y) \to (x_0,0)]{?} 0$$

Stimo: $$\left| \frac{|y|^\alpha \sin\left(\frac{x_0}{y}\right)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}} \right| \leq \frac{|y|^\alpha}{|y|} = |y|^{\alpha - 1} \xrightarrow[y \to 0]{} 0 \quad \text{se } \alpha > 1 \quad \text{OK}$$

$\Rightarrow$ f diff in $\mathbb{R}^2$ per $\alpha > 1$.

2) Derivate parziali per $y \neq 0$

$$f_x = |y|^\alpha \sin\left(\frac{x}{y}\right) \frac{1}{y} \xrightarrow[(x,y) \to (0,0)]{} 0$$

$$f_y = \alpha |y|^{\alpha-1} \frac{y}{|y|} \sin\left(\frac{x}{y}\right) + \underbrace{|y|^\alpha \cos\left(\frac{x}{y}\right) \frac{-x}{y^2}}_{?}$$

Controllo ? stimandolo:

$$\left| |y|^\alpha \cos\left(\frac{x}{y}\right) \frac{x}{y^2} \right| \leq |y|^{\alpha-2} |x| \xrightarrow[y \to 0]{} 0 \quad \text{se } \alpha > 2$$

vale anche per $\alpha = 2$ perché $|x| \to 0$ in quel punto

vedo che se $\alpha \geq 2$ f_x e f_y sono cont. in O.

vedo cosa succede per $0 < \alpha < 2$

Sia $x = |y|^\varepsilon$ $\varepsilon > 0$ e guardo $|y|^{\alpha-2} |x|$.

$|y|^{\alpha-2} |y|^\varepsilon = |y|^{\alpha - 2 + \varepsilon}$ per contraddire impongo

$$\alpha - 2 + \varepsilon < 0 \Rightarrow 0 < \varepsilon < 2 - \alpha$$

$\Rightarrow$ se $\alpha < 2$ f_y non è continua in O, mentre lo è per $\alpha \geq 2$.

Teoremi del valor medio

TEOREMA Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $f: A \to \mathbb{R}$ differenziabile in A.
Siano poi $x, y \in A$ tc

$$[x,y] = \{tx + (1-t)y \in \mathbb{R} : t \in [0,1]\} \subset A$$

Allora $\exists\, z \in [x,y]$ tc

$$f(x) - f(y) = \langle \nabla f(z), x-y \rangle .$$

dim Sia $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = f(tx + (1-t)y)$$

sarà: φ è derivabile su $[0,1]$.

Lagrange $\Rightarrow \exists\ t^* \in [0,1]$ tc

$$\varphi(1) - \varphi(0) = f'(t^*)$$

dove $\varphi(1) = f(x)$, $\varphi(0) = f(y)$.

Per il teorema sul differenziale della funzione composta

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(tx + (1-t)y), x-y \rangle$$

con $z := t^* x + (1-t^*)y \in [x,y]$ trovo la formula. $\square$

TEOREMA Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $f: A \to \mathbb{R}^m$ differenziabile in A.
Siano poi $x, y \in A$ tc

$$[x,y] = \{tx + (1-t)y \in \mathbb{R} : t \in [0,1]\} \subset A$$

Allora $\forall\, v \in \mathbb{R}^m\ \exists\, z \in [x,y]$ tc

$$\langle f(x) - f(y), v \rangle = \langle df(z)(x-y), v \rangle .$$

dim Sia $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = \langle f(tx + (1-t)y), v \rangle$$

sarà f derivabile in $[0,1]$

Lagrange $\Rightarrow \exists\ t^* \in [0,1]$ tc

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t^*)$$

dove $\varphi(1) = \langle f(x), v \rangle$, $\varphi(0) = \langle f(y), v \rangle$.

Per il teorema sul diff. della composta

$$\varphi'(t) = \langle df(tx + (1-t)y), v \rangle$$

Per $z = t^* x + (1-t^*)y$ trovo la formula. $\square$

Funzioni Lipschitziane in $\mathbb{R}^n$

<u>def</u> $A \subset \mathbb{R}^m$, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è **LIPSCHITZIANA** se

$$\mathrm{Lip}(f) = \sup_{\substack{x,y \in A^m \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} < \infty$$

norma standard in $\mathbb{R}^n$

<u>prop</u> Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso ($\forall x,y \in A$ si ha $[x,y] \subset A$) e sia $f: A \to \mathbb{R}^m$ differenziabile in tutti i punti di A.

Sono equivalenti:

1) $\mathrm{Lip}(f) < \infty$

2) $\overset{S}{\overset{\shortparallel}{\sup_{x \in A}}} \| df(x) \| < \infty$

In questo caso $\mathrm{Lip}(f) = \sup_{x \in A} \| df(x) \|$.

<u>dim</u> 1) $\Rightarrow$ 2). Fisso $x \in A$.

$$\| df(x) \| := \sup_{|v| \leq 1} | df(x)\, v |$$

$$\overset{\exists |v|=1}{=} | df(x) v |$$

$$= \left| \frac{\partial f(x)}{\partial v} \right|$$

$$= \left| \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \right|$$

$$\leq \lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{Lip}(f)\, \cancel{|t|}\, \overset{=1}{|v|}}{\cancel{|t|}} = \mathrm{Lip}(f) < \infty .$$

2) $\Rightarrow$ 1). Dal teorema del valor medio : $\forall v \in \mathbb{R}^n$ $\exists z \in [x,y]$ tc

$$\langle f(x) - f(y), v \rangle = \langle df(z)(x-y), v \rangle$$

Scelgo $v = f(x) - f(y)$

$$|f(x) - f(y)|^2 = \langle df(z)(x-y), f(x) - f(y) \rangle .$$
$$\overset{CS}{\leq} |df(z)(x-y)| \cdot |f(x) - f(y)|$$

WLOG $f(x) \neq f(y)$:

$$|f(x) - f(y)| \leq |df(z)(x-y)| \leq \|df(z)\| \, |x-y| \leq S\, |x-y|$$

$$\Rightarrow \mathrm{Lip}(f) \leq S < \infty .$$

Inoltre $\mathrm{Lip}(f) = S$. $\square$

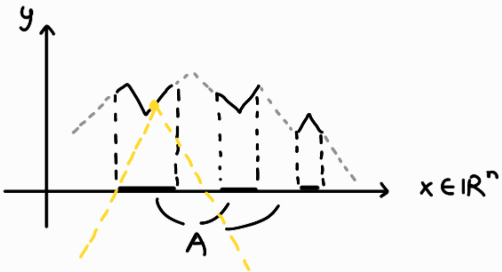
TEOREMA (di estensione). Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ con $\mathrm{Lip}(f) = L < \infty$.

Allora $\exists\, \hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che

1) $\hat{f} = f$ su A

2) $\underset{\text{su } \mathbb{R}^n}{\mathrm{Lip}} (\hat{f}) = \underset{\text{su } A}{\mathrm{Lip}} (f) < \infty$.

dim



Definiamo $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\hat{f}(x) = \sup_{x \in A} \{ f(y) - L|x-y| \}, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Osservo che

- $x \in A \Rightarrow \hat{f}(x) \geq f(x)$
- $x, y \in A$: $f(y) - f(x) \leq |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$

$$f(x) \geq f(y) - L|x-y| \qquad \forall y \in A$$

$$\Rightarrow f(x) \geq \sup_{y \in A} \{ f(y) - L|x-y| \} = \hat{f}(x)$$

Ma allora $\hat{f}(x) = f(x) \quad \forall\, x \in A$.

Siano $x, x' \in \mathbb{R}^n$. Voglio stimare $\hat{f}(x) - \hat{f}(x')$:

$$\hat{f}(x') \geq f(y) - L|x'-y|$$

$$\hat{f}(x) - \hat{f}(x') \leq \hat{f}(x) - f(y) + L|x'-y|$$

$$\hat{f}(x) = \sup_{y \in A} f(y) - L|x-y|$$

per def di sup, dato ε $\exists\, y \in A$ tc

$$\leq \varepsilon + \cancel{f(y)} - L|x-y| - \cancel{f(y)} + L|x'-y| \qquad \exists\, y$$

$$\leq \varepsilon + L(|x'-y| - |x-y|)$$

$$\leq \varepsilon + L|x'-x| \qquad |x'-x|$$

$$\Rightarrow |\hat{f}(x) - \hat{f}(x')| \leq \varepsilon + L|x-x'|$$

Con $\varepsilon \to 0^+$ trovo $\mathrm{Lip}(\hat{f}) \leq L = \mathrm{Lip}(f)$

Siccome $\hat{f} = f$ su A, non può valere il minore stretto. $\square$

def $Q : [a_1,b_1] \times \dots \times [a_n,b_n]$ è detto PLURI-RETTANGOLO di volume

$$|Q| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

def Diciamo che $E \subset \mathbb{R}^n$ ha misura nulla se $\forall \varepsilon > 0$ esistono pluri-rettangoli $Q_k : k \in \mathbb{N}$ tali che

1) $E \subset \bigcup_k Q_k$
2) $\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| < \varepsilon$

esercizio $n = 1$ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ha misura nulla

TEOREMA (Lebesgue). Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ monotona. Allora $\exists\, E \subset [0,1]$ di misura nulla tale che $f'(x) \in \mathbb{R}$ esiste $\forall x \in [0,1] \setminus E$

TEOREMA Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è Lipschitziana allora $\exists\, \varphi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ monotone e Lipschitziane tali che

$$f = \varphi - \psi$$

corollario $f \in Lip[0,1] \Rightarrow \exists\, E \in [0,1]$ di misura nulla tc

$$\exists\, f'(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [0,1] \setminus E$$

TEOREMA (Rademacher). Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $Lip(f) < \infty$. Allora $\exists\, E \subset \mathbb{R}^n$ di misura nulla tale che f è Frechet-diff. in tutti i punti $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

esercizio Sia $\emptyset \neq K \subsetneq \mathbb{R}^n$ un chiuso.

$f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$f(x) = dist(x; K) = \inf_{y \in K} |x - y|$

1) Provare che $\forall x \in \mathbb{R}^n$ l'inf è un min, ovvero $\exists\, y \in K$ tc $f(x) = |x - y|$ "proiezione metrica" di x su K
2) Provare che f è Lipschitziana e $Lip(f) = 1$.

Con una notazione più compatta possiamo anche scrivere

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle, \quad t \in [0,1]. \tag{6.5.22}$$

ESEMPIO 6.5.3. Esplicitiamo la formula (6.5.21) del Teorema 6.5.1. Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ due funzioni differenziabili. La composizione $G = g \circ f$ ha k componenti $G = (G_1, \dots, G_k)$, da pensare come vettore colonna. La formula (6.5.21), ovvero $JG(x) = Jg(f(x))\, Jf(x)$, si legge nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial G_k}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial G_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial g_k}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

dove le derivate parziali di g vanno calcolate nel punto $f(x)$, quelle di f e G nel punto x. Alla riga $i \in \{1, \dots, k\}$ e colonna $j \in \{1, \dots, n\}$ della matrice $JG(x)$ si trova l'entrata

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_\ell}(f(x)) \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(x).$$

6. Teoremi del valor medio

In questa sezione estendiamo il Teorema di Lagrange al caso multidimensionale.

TEOREMA 6.6.1. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, e siano $x, y \in A$ punti tali che $[x,y] := \big\{tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1]\big\} \subset A$. Allora esiste un punto $z \in [x,y]$ tale che

$$f(x) - f(y) = \langle \nabla f(z), x - y\rangle. \tag{6.6.23}$$

DIM. Sia $\gamma : [0,1] \to A$, $\gamma(t) = tx + (1-t)y$ una parametrizzazione del segmento, e definiamo la funzione composta $\varphi = f \circ \gamma$, ovvero

$$\varphi(t) = f(tx + (1-t)y) = f(\gamma(t)), \quad t \in [0,1].$$

Per il Teorema 6.5.1, φ è differenziabile su $[0,1]$, e quindi per il Teorema di Lagrange esiste un punto $t^* \in [0,1]$ tale che $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t^*)$. Per la formula (6.5.22),

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle, \quad t \in [0,1].$$

e dunque, posto $z = \gamma(t^*)$, si ottiene la tesi. □

Nel caso di funzioni a valori vettoriali la formulazione del Teorema del valor medio deve essere precisata.

TEOREMA 6.6.2. Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, e siano $x, y \in A$ punti tali che $[x,y] := \big\{tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1]\big\} \subset A$. Allora per ogni $v \in \mathbb{R}^m$ esiste un punto $z \in [x,y]$ tale che

$$\langle f(x) - f(y), v\rangle = \langle df(z)(x-y), v\rangle. \tag{6.6.24}$$

Dim. Sia $\gamma : [0,1] \to A$, $\gamma(t) = tx + (1-t)y$ una parametrizzazione del segmento, e definiamo la funzione composta $\varphi = \langle f \circ \gamma, v \rangle$ ovvero

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(tx + (1-t)y), v_i\rangle, \quad t \in [0,1].$$

Per la linearità del prodotto scalare possiamo portare la derivata in t dentro il prodotto scalare, e dunque, per il Teorema 6.5.1,

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{d}{dt} f_i(\gamma(t)) v_i = \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla f_i(\gamma(t)), x - y \rangle v_i = \langle df(\gamma(t))(x-y), v \rangle.$$

Abbiamo omesso i conti che provano l'ultima identità.

Per il Teorema 6.5.1, φ è differenziabile su $[0,1]$, e quindi per il Teorema di Lagrange esiste un punto $t^* \in [0,1]$ tale che $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t^*)$. Dunque, posto $z = \gamma(t^*)$, si ottiene la tesi. $\square$

Corollario 6.6.3. Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, e siano $x, y \in A$ punti tali che $[x,y] := \big\{ tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1] \big\} \subset A$. Allora esiste un punto $z \in [x,y]$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq \|df(z)\| |x - y|, \tag{6.6.25}$$

dove $\|df(z)\|$ è la norma di $df(z) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Dim. Per ogni $v \in \mathbb{R}^m$ esiste $z \in [x,y]$ che rende vera l'identità (6.6.24). Scegliamo $v = f(x) - f(y)$ e, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e la (2.4.1), otteniamo

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)|^2 &= \langle df(z)(x-y), f(x) - f(y) \rangle \\ &\leq |df(z)(x-y)| |f(x) - f(y)| \\ &\leq \|df(z)\| |x-y| |f(x) - f(y)|. \end{aligned}$$

Se $|f(x) - f(y)| = 0$ la tesi è banalmente verificata. Possiamo dunque dividere per $|f(x) - f(y)| \neq 0$ e ottenere la tesi. $\square$

Corollario 6.6.4. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso e sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile in A. Allora f è Lipschitziana in A se e solo se $\sup_{x \in A} \|df(x)\| < \infty$; si ha inoltre l'uguaglianza

$$\mathrm{Lip}(f) = \sup_{x \in A} \|df(x)\|$$

Dim. Supponiamo che f sia Lipschitziana; dato $x \in A$ esiste $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $\|v\| = 1$ e

$$\|df(x)\| = \|df(x)(v)\| = \left\| \frac{\partial f}{\partial v}(x) \right\| = \lim_{t \to 0} \frac{\|f(x+tv) - f(x)\|}{|t|} \leq \mathrm{Lip}(f),$$

da cui $\sup_{x \in A} \|df(x)\| \leq \mathrm{Lip}(f)$.

Viceversa, se $\sup_{x \in A} \|df(x)\| < \infty$, allora il Corollario 6.6.4 implica immediatamente che $\mathrm{Lip}(f) \leq \sup_{x \in A} \|df(x)\|$. $\square$

7. Funzioni di classe C^1

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto ed $f : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, una funzione con coordinate $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Definizione 6.7.1. Definiamo $C^1(A; \mathbb{R}^m)$ come l'insieme di tutte le funzioni $f : A \to \mathbb{R}^m$ tali che esistano e siano continue in A tutte le derivate parziali

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \in C(A), \quad i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, m.$$

Scriveremo anche $C^1(A) = C^1(A; \mathbb{R})$.

Il seguente risultato viene talvolta chiamato *Teorema del differenziale totale.*

Teorema 6.7.2. *Se $f \in C^1(A; \mathbb{R}^m)$ allora f è differenziabile in ogni punto $x_0 \in A$.*

Dim. È sufficiente provare il teorema nel caso $m = 1$. Fissato $x_0 \in A$ consideriamo la trasformazione lineare $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$

$$Th = \langle \nabla f(x_0), h \rangle = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0).$$

Dobbiamo provare che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Th}{|h|} = 0. \tag{6.7.26}$$

Partiamo dalla seguente espansione telescopica:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^n h_i \mathrm{e}_i\Big) - f(x_0) \\ &= \sum_{j=1}^n f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^j h_i \mathrm{e}_i\Big) - f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i\Big). \end{aligned}$$

Dal Teorema del valor medio segue che per ogni $j = 1, \dots, n$ esiste $h_j^* \in \mathbb{R}$ tale che $|h_j^*| \leq |h_j| \leq |h|$ e si ha

$$f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^j h_i \mathrm{e}_i\Big) - f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i\Big) = h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i + h_j^* \mathrm{e}_j\Big).$$

Deduciamo che

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Th}{|h|} = \sum_{j=1}^n \frac{h_j}{|h|} \Big[\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i + h_j^* \mathrm{e}_j\Big) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\Big],$$

dove le quantità $h_j/|h|$ rimangono limitate, mentre per la continuità delle derivate parziali si ha per ogni $j = 1, \dots, n$:

$$\lim_{h \to 0} \Big[\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i + h_j^* \mathrm{e}_j\Big) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\Big] = 0,$$

e la tesi (6.7.26) segue. □

Osservazione 6.7.3. Riassumiamo la situazione:

$$f \in C^1(A) \quad \Rightarrow \quad f \text{ differenziabile in } A \quad \Rightarrow \quad f \text{ derivabile e continua in } A.$$

Tuttavia, f può essere differenziabile in ogni punto di A senza che sia $f \in C^1(A)$. Questo fatto è già vero in dimensione $n = 1$.

8. Teoremi di McShane e di Rademacher

In questa sezione accenniamo ad alcuni teoremi più avanzati sulle funzioni Lipschitziane.

Teorema 6.8.1 (Teorema di estensione di McShane). Siano (X, d) uno spazio metrico e $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione Lipschitziana su un sottinsieme non vuoto $A \subset X$. Allora esiste $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}^m$ Lipschitziana e tale che $\tilde{f}_{|A} = f$.

Dim. Ragionando componente per componente non è restrittivo supporre che $m = 1$. Scriviamo $L := \mathrm{Lip}(f)$ e definiamo

$$\tilde{f}(x) := \sup_{y \in A}\{f(y) - Ld(x, y)\}.$$

Verifichiamo che $\tilde{f}$ è ben definita, ovvero che per ogni $x \in X$ il sup nella definizione di $\tilde{f}(x)$ è finito. Sia $x_0 \in A$ fissato, allora per ogni $y \in A$

$$f(y) - Ld(x, y) \le f(x_0) + Ld(x_0, y) - Ld(x, y) \le f(x_0) + Ld(x, x_0),$$

dove abbiamo usato la Lipschitzianità di f su A e la disuguaglianza triangolare. Questo dimostra che $\tilde{f}(x) \le f(x_0) + Ld(x, x_0)$.

Dimostriamo ora che $\tilde{f} = f$ su A. Per ogni $x \in A$ vale certamente $\tilde{f}(x) \ge f(x)$ (basta prendere $y = x$ nella definizione di $\tilde{f}(x)$); la disuguaglianza opposta segue osservando che, per ogni $y \in A$, si ha per Lipschitzianità

$$f(y) - Ld(x, y) \le f(x)$$

da cui, passando al sup su $y \in A$, $\tilde{f}(x) \le f(x)$.

Dimostriamo che $\tilde{f}$ è Lipschitziana su X: dati $x, y, \in X$ e $\varepsilon > 0$, si fissi $\bar{y} \in A$ tale che

$$\tilde{f}(x) < f(\bar{y}) - Ld(x, \bar{y}) + \varepsilon.$$

Usando la disuguaglianza $\tilde{f}(y) \ge f(\bar{y}) - Ld(y, \bar{y})$ si ottiene

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) < -Ld(x, \bar{y}) + Ld(y, \bar{y}) + \varepsilon \le Ld(x, y) + \varepsilon$$

e dunque $\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) \le Ld(x, y)$ per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$. Un ragionamento simmetrico restituisce la disuguaglianza $\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x) \le Ld(x, y)$, da cui segue la Lipschitzianità $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \le Ld(x, y)$. $\square$

Osservazione 6.8.2. In modo analogo è possibile dimostrare che, nel caso, $m = 1$ anche la funzione $\bar{f}(x) := \inf_{y \in A}\{f(y) + Ld(x, y)\}$ estende f in maniera Lipschitziana. Si può dimostrare che $\tilde{f}$ e $\bar{f}$ sono, rispettivamente, la più piccola e più grande tra le possibili estensioni Lipschitziane di f a tutto X con costante di Lipschitz al più L.

Osserviamo inoltre che, nel caso $m = 1$, la costruzione utilizzata nel Teorema 6.8.1 fornisce un'estensione $\tilde{f}$ tale che $\mathrm{Lip}(\tilde{f}) = \mathrm{Lip}(f)$. Pertanto, nel caso $m \geq 2$ si può trovare un'estensione $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}^m$ tale che $\mathrm{Lip}(\tilde{f}) \leq \sqrt{m}\,\mathrm{Lip}(f)$; nel caso $X = \mathbb{R}^n$ si può tuttavia fare di meglio.

Teorema 6.8.3 (Teorema di estensione di Kirszbraun). Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione Lipschitziana su un sottinsieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}^n$. Allora esiste $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tale che $\tilde{f}_{|A} = f$ e $\mathrm{Lip}(\tilde{f}) = \mathrm{Lip}(f)$.

Per una dimostrazione del teorema di Kirszbraun si può consultare il libro *Geometric Measure Theory* di H. Federer, pag. 201.

Enunciamo ora la nozione di insieme di misura nulla in $\mathbb{R}^n$.

Un plurirettangolo di $\mathbb{R}^n$ è un insieme della forma

$$Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n,$$

con $-\infty < a_i \leq b_i < \infty$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. La *misura* (o volume) del plurirettangolo Q è il numero reale

$$|Q| = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

Definizione 6.8.4 (Insieme di misura nulla). Diremo che un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, ha *misura nulla* in $\mathbb{R}^n$ e scriveremo $|A| = 0$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione Q_k, $k \in \mathbb{N}$, di plurirettangoli di $\mathbb{R}^n$ tali che

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k, \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| \leq \varepsilon.$$

La definizione può essere equivalentemente data usando ricoprimenti di soli cubi oppure di palle.

Esempio 6.8.5. Mostriamo che $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ ha misura nulla. Essendo l'insieme numerabile, si ha

$$\mathbb{Q}^n = \big\{q_k \in \mathbb{Q}^n : k \in \mathbb{N}\big\}.$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$, sia Q_k il cubo con facce parallele agli iperpiani coordinati, centrato in q_k e di lato $\varepsilon/2^{k/n}$. Chiaramente

$$\mathbb{Q}^n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k, \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Osserviamo, tuttavia, che esistono insiemi di misura nulla con la cardinalità del continuo.

Teorema 6.8.6 (Lebesgue). Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora esiste un insieme $A \subset [0, 1]$ di misura nulla in $\mathbb{R}$, $|A| = 0$, tale che f è derivabile in tutti i punti di $[0, 1] \setminus A$.

La dimostrazione del Teorema di Lebesgue è impegnativa ed è il punto di partenza di vari risultati di Analisi Reale e Teoria della Misura. Si veda ad esempio Kolmogorov-Fomin, *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*, Mir 1980, p.319. Per le funzioni Lipschitziane (e più in generale per le funzioni a variazione limitata) vale il teorema di Jordan.

TEOREMA 6.8.7. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana (più in generale: una funzione a variazione limitata). Allora esistono due funzioni $\varphi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ monotone tali che $f = \varphi - \psi$.

Siccome l'unione di due insiemi di misura nulla ha ancora misura nulla, dal Teorema di Lebesgue segue che le funzioni Lipschitziane sono derivabili al di fuori di un insieme di misura nulla. L'estensione di questo teorema al caso di funzioni di più variabili è nota come Teorema di Rademacher.

TEOREMA 6.8.8 (Rademacher). Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n, m \geq 1$, una funzione Lipschitziana. Allora esiste un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ di misura nulla, $|A| = 0$, tale che f è differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^n \setminus A$.

La dimostrazione si basa sul risultato unidimensionale $n = 1$. Si veda Evans-Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, p.81 (ed anche p.235, per una dimostrazione basata sulla teoria degli Spazi di Sobolev).

ESEMPIO 6.8.9. Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un chiuso. La funzione distanza $f(x) = \mathrm{dist}(x, K)$ è 1-Lipschitziana. Dunque, è differenziabile al di fuori di un insieme di misura nulla.

9. Derivate di ordine superiore. Teorema di Schwarz

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, ovvero con tutte le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Possiamo allora definire, se esistono, le derivate parziali di ordine 2

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = D_j D_i f = f_{x_i x_j}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Nel caso di indici uguali, scriveremo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

In generale, l'ordine in cui sono calcolate le derivate parziali è rilevante.

ESEMPIO 6.9.1. Calcoliamo le derivate parziali seconde miste in 0 della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Se $x^2 + y^2 \neq 0$, la derivata parziale di f in x è

$$f_x(x,y) = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2},$$

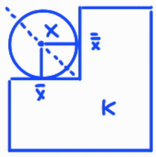
mentre $f_x(0,0) = 0$. Di conseguenza,

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y} = -1.$$

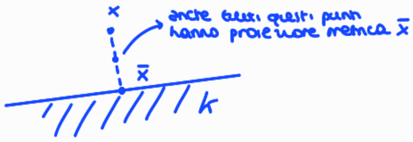
Esercizio

Sia $\emptyset \neq K \subsetneq \mathbb{R}^n$ chiuso. Sia $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ tale che $f = dist(\cdot\,; K)$ sia differenziabile in x. Provare che x ha proiezione metrica su K unica.

Disegno in cui non accade:



Sia $\bar{x} \in K$ una proiezione metrica di x su K



$$f(x) = dist(x, K) = |x - \bar{x}|$$

Per $t \in [0,1]$

$$x + t(\bar{x} - x) \quad \text{hanno proiezione } \bar{x}$$

$$\Rightarrow \quad f(x + t(\bar{x}-x)) = |x + t(\bar{x}-x) - \bar{x}|$$
$$= |x - \bar{x} + t(\bar{x} - x)|$$
$$= |(1-t)(x-\bar{x})| = (1-t)|x - \bar{x}|$$

Sia $v = x - \bar{x} \neq 0$. Calcolo

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t\to 0^-} \frac{f(\overset{\overset{x+t(x-\bar{x}) = x - t(\bar{x}-x)}{\shortparallel}}{x+tv}) - f(x)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^-} \frac{(1+t)|x-\bar{x}| - |x-\bar{x}|}{t} = |x - \bar{x}|$$

Ora sappiamo

$$|x-\bar{x}| = \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \nabla f(x), \overset{\overset{|x-\bar{x}|}{\shortparallel}}{v} \rangle \overset{CS}{\leq} |\nabla f(x)|\,|x - \bar{x}| \quad (*)$$

$\Rightarrow 1 \leq |\nabla f(x)|$. Voglio vedere se è $=$.

$$\forall v: \quad \langle \nabla f(x), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t\to 0^+} \overbrace{\frac{f(x+tv) - f(x)}{v}}^{\overset{1 \cdot t|v|}{\vee|} \quad \text{è Lipschitziana}} \leq |v|$$

Con $v = \nabla f(x)$

$$|\nabla f(x)|^2 \leq |\nabla f(x)| \quad \Rightarrow \quad |\nabla f(x)| \leq 1$$

Insieme trovo che $|\nabla f(x)| = 1$. Riscrivo $(*)$

$$|x - \bar{x}| = \langle \nabla f(x), x - \bar{x} \rangle \leq \underbrace{|\nabla f(x)|}_{\overset{\shortparallel}{1}}\,|x - \bar{x}| \quad \Rightarrow \quad |x-\bar{x}| \leq |x - \bar{x}|$$

$\Rightarrow$ deve essere $=$

$\Rightarrow$ $\nabla f(x)$, $\dfrac{x-\bar{x}}{x-\bar{x}}$ sono paralleli e di norma 1 il segno è +, non −

$$\Rightarrow \nabla f(x) = \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|}$$

(il gradiente deve puntare nella direzione $\bar{x} \longrightarrow x$)

Supponiamo ci sia $\bar{\bar{x}} \neq \bar{x}$: si avrebbe che il gradiente $\nabla f(x)$ punta in una direzione diversa da quella precedente ↯