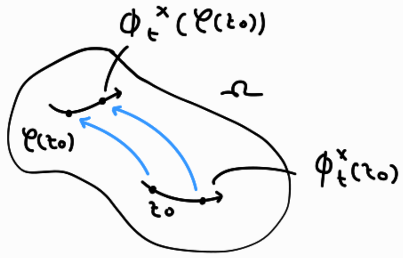
Simmetrie

X su Ω

def $\varphi:\Omega\longrightarrow\Omega$ diffeo è una (trasformazione di) "simmetria" se $\varphi_* X = X$

si dice che X è "invariante sotto φ"

oss se γ è curva integrale di X, allora anche $\varphi\circ\gamma$ è curva integrale di X



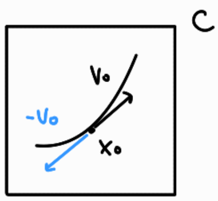
esempio $\Omega=\mathbb{R}^n$ $\quad \varphi(z)=Sz,\ S\in GL(n)$

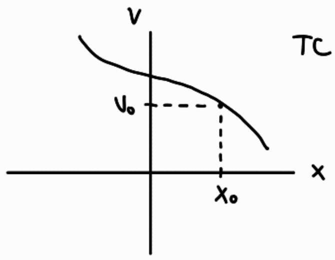
$$\underbrace{\varphi_* X}_{X}(\underbrace{\varphi(z)}_{Sz}) = \varphi'(z)\, X(z) = S\,X(z) \implies X(Sz) = S\,X(z)$$

(caso particolare: $\Omega=\mathbb{R}^2$ $\quad S=R_\alpha$)

oss $\ddot{x}=\psi(x)$, $x\in C\subseteq\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases}\dot{x}=v\\ \dot{v}=\psi(x)\end{cases}$$





se $t\longmapsto x(t)\in C$ è soluzione di II , allora anche $t\longmapsto x(-t)\in C$ è soluzione di II

verifica: $\gamma(t)=x(t)$

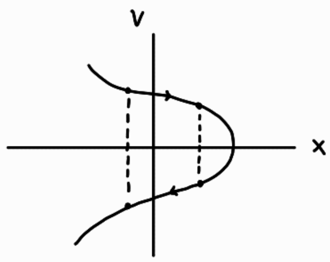
Considero la curva $\eta(t):=\gamma(-t)$

$\eta'(t) = -\gamma'(-t)$

$\eta''(t) = \gamma''(-t) = \psi(\gamma(-t)) = \psi(\eta(t)) \implies \eta(t)$ è soluzione

$\implies \eta(t)$ è soluzione e $\eta(0)=\gamma(0)$, $\eta'(0)=-\gamma'(0)$

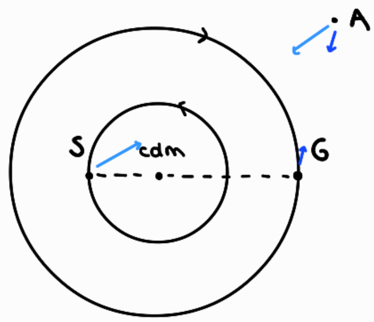
In fisica si parla di "time reversal" (se inverto il tempo, percorro la stessa traiettoria al contrario).



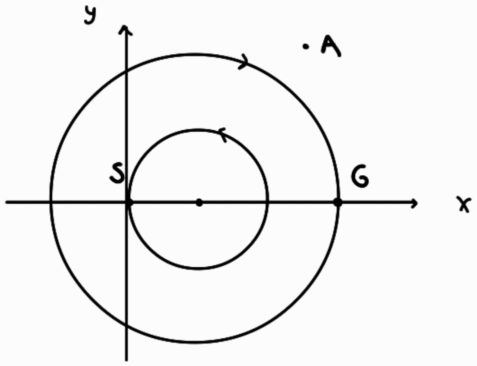
esercizio $\ddot{x}=\psi(x,\dot{x})$ con dipendenza quadratica, allora $\psi(x,v)=\psi(x,-v)$

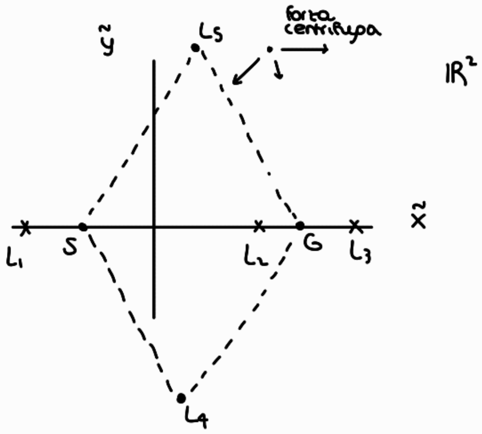
Problema ristretto dei 3 corpi (piano)

$$F(x) = -\frac{k}{\|x\|^2}\,\frac{x}{\|x\|}$$



L'effetto dell'asteroide su Sole e Giove è trascurabile, perché la differenza fra le masse è enorme. Possiamo però considerare il moto dell'asteroide sotto l'effetto di Sole e Giove

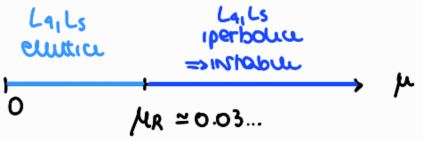




Sull'asse che congiunge Sole e Giove ci sono tre equilibri (uno a sinistra del Sole uno a destra di Giove e uno in mezzo), ma poi ce ne sono altri due: si chiamano "punti Lagrangiani".

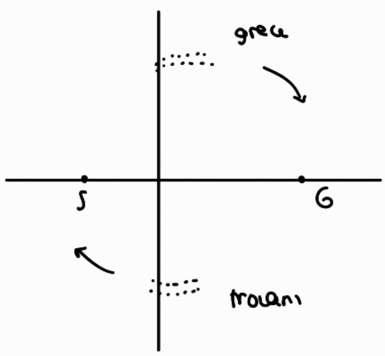
L_1, L_2, L_3 sono instabili. Vogliamo studiare la stabilità di L_4 e L_5.

Il problema dipende dal parametro $\mu = \frac{m_G}{m_G + m_S} > 0$ (massa di Giove; massa del Sole)

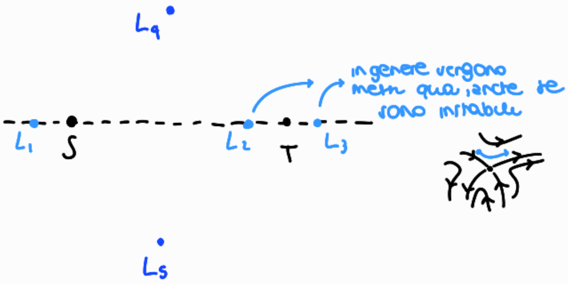


Si dimostra che nel caso piano L_4 e L_5 sono stabili per quasi tutti i valori di μ (nel caso spaziale, invece, non si riesce a determinarlo).

Nelle posizioni vicine ad L_4 e L_5 si trovano molti asteroidi, perché? Non si sa.



Supponiamo di voler mettere in orbita un satellite per osservare il sole



L'instabilità permette di controllare meglio la posizione del satellite: mi sforzo di volta in volta portare verso la varietà stabile. Inoltre, prima di "scappare" dalla varietà stabile, ci vuole molto tempo, dato che la varietà stabile tende asintoticamente all'equilibrio e, per continuità, se sono vicino all'equilibrio, rimango lì vicino per molto tempo!

Esercizi

1. $X(x,y,z) = \begin{pmatrix} A\,yz \\ xz \\ -(x^2+y^2+2z^2)\,xy \end{pmatrix}$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

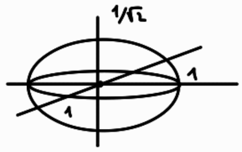
Determinare A t.c. $\psi^{-1}(0)$ con $\psi(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2-1$ sia invariante

- $\psi^{-1}(0)$ è sottovarietà

  Dobbiamo verificare che $\nabla\psi \neq 0$ in tutti i punti di $\psi^{-1}(0)$:

  $$\nabla\psi = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 4z \end{pmatrix} = 0 \quad \text{solo in } (0,0,0) \notin \psi^{-1}(0) \text{ dato che } \psi(0,0,0) = -1$$

- X è tangente a $\psi^{-1}(0)$



  $$\psi' X|_{\psi^{-1}(0)} \overset{?}{=} 0$$

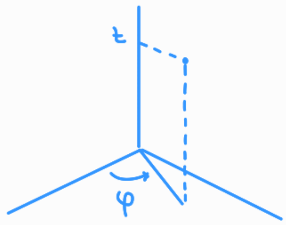
  $$\nabla\psi \cdot X(\underset{\psi^{-1}(0)}{\underset{\cap}{x,y,z}}) = \begin{pmatrix} Ayz \\ xz \\ -xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 4z \end{pmatrix} = 2\,(Axyz + xyz - 2xyz)$$

  $$= 2(A-1)\,xyz = 0 \quad \forall\, (x,y,z) \in \psi^{-1}(0)$$

  $\Rightarrow A = 1$

- $\psi^{-1}(0)$ è chiusa

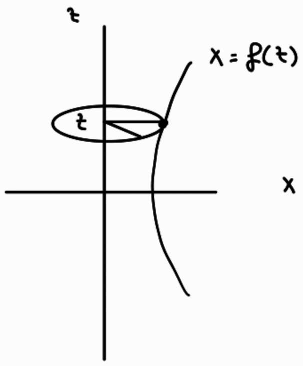
$\Rightarrow$ $\psi^{-1}(0)$ è invariante



Scrivere $X|_{\psi^{-1}(0)}$ nella parametrizzazione

$\mathbb{R}\times S^1 \ni (z,\varphi) \longmapsto \left(\sqrt{1-2z^2}\cos\varphi,\ \sqrt{1-2z^2}\sin\varphi,\ z\right)$

Oss   Superficie di rivoluzione



$x^2+y^2 = f(z^2)$

$$(z,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} f(z)\cos\varphi \\ f(z)\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

- Le coordinate cilindriche sono definite dovunque tranne che sull'asse z.

  Ai poli l'ellissoide interseca l'asse z. Propriamente: $(z,\varphi) \in \left(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right) \times S^1$

  Ma non ci sono problemi perché i poli sono equilibri!

  ↳ l'asse z è interamente fatto di equilibri

- $$\begin{cases} \dot x = yz \\ \dot y = xz \\ \dot z = -\underbrace{(x^2+y^2+2z^2)}_{=1}\,xy \end{cases}$$

  $\dot z = -xy = -(1-2z^2)\cos\varphi\sin\varphi$

$\dot{\varphi} = ?$

$x = \sqrt{1-2z^2}\cos\varphi$

$$\dot{x} = -\frac{2z\dot{z}}{\sqrt{1-2z^2}}\cos\varphi - \dot{\varphi}\sqrt{1-2z^2}\sin\varphi$$

$! \parallel$

$z\sqrt{1-2z^2}\sin\varphi$

$$\Rightarrow \quad 2z\cancel{\sqrt{1-2z^2}}\cos^2\varphi\sin\varphi - \dot{\varphi}\cancel{\sqrt{1-2z^2}}\sin\varphi = z\cancel{\sqrt{1-2z^2}}\sin\varphi$$

$\sin\varphi(\dots) = 0 \quad \forall\ z, \varphi$ $\Rightarrow$ posso ignorare $\sin\varphi$ e ottengo

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = z(2\cos^2\varphi - 1) \\ \dot{z} = -(1-2z^2)\cos\varphi\sin\varphi \end{cases}$$

<u>esercizio</u> Trovare gli equilibri.