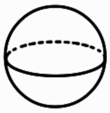
SOTTOVARIETÀ DI $\mathbb{R}^n$

INTRODUZIONE EURISTICA

Possibili definizioni:

1) equazioni locali "luogo di zeri"

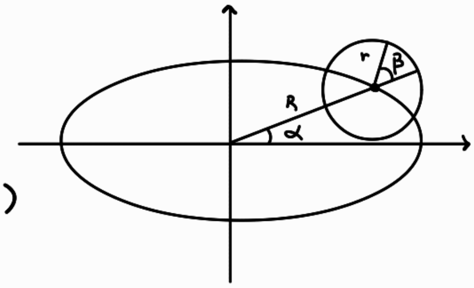
esempio $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2-1=0\}$



2) parametrizzazione

esempio $T^2 = \{\varphi(\alpha,\beta) : (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$

$\varphi(\alpha,\beta) = ((R+r\cos\beta)\cos\alpha, (R+r\cos\beta)\sin\alpha, r\sin\beta)$

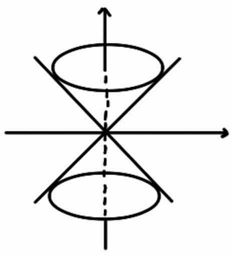


3) varietà differenziabili (astratte)

esempio 1 (luogo di zeri)

$|z| = \|(x,y)\|$

$M = \{(x,y,z) : x^2+y^2-z^2=0\}$



M è "regolare" tranne che in O

$f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$

$\nabla f = (2x, 2y, -2z)$

infatti: $\nabla f(O) = (0,0,0)$ th del Dini

$\Rightarrow$ i punti in cui il gradiente si annulla potrebbero dare problemi

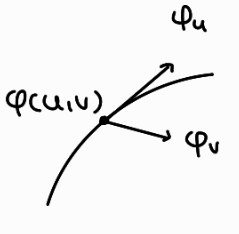
$M \setminus \{O\}$ è una sottovarietà (o superficie 2-dimensionale "liscia")

esempio 2 (parametrizzazione)

$\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $\varphi = \varphi(u,v)$

$$J\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \shortparallel & \shortparallel \\ \varphi_u & \varphi_v \end{matrix}$$



φ_u, φ_v generano lo "spazio tangente" a $M = \operatorname{Im}\varphi$

$\Rightarrow$ vorrei φ_u, φ_v linearmente indipendenti, cioè $\operatorname{rk}(J\varphi) = \max$ (in questo caso $= 2$)

($\varphi(u,v) = (u,0,0)$ parametrizza una retta $J\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non va bene)

esempio 3 $\gamma(t) = \left(\frac{3}{\pi} t + \cos t, \sin t\right)$, $t \in \mathbb{R}$

$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

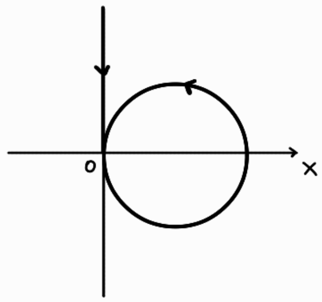
$\dot{\gamma}(t) = \left(\frac{3}{\pi} - \sin t, \cos t\right) \neq 0 \quad \forall t$

Tuttavia, la curva non è iniettiva: $\gamma\left(\frac{\pi}{3}\right) = \gamma\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow$ bisogna evitare autointersezioni (φ iniettiva)

esempio 4 $\gamma : (-\infty, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \begin{cases} (0, -t) & t < 0 \\ (1-\cos t, \sin t) & t \in [0, 2\pi) \end{cases}$$



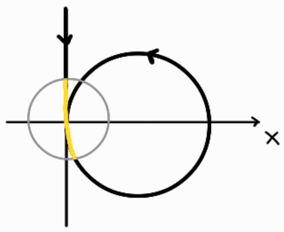
γ è C^1, è iniettiva, $\dot{\gamma} \neq 0$

c'è una "singolarità" in $(0,0)$

infatti, la funzione inversa $\gamma^{-1} : \gamma(-\infty, 2\pi) \longrightarrow (-\infty, 2\pi)$ non è continua nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$

↳ ovvero f non è aperta:

- ogni intorno aperto di $0 \in \mathbb{R}^2$ contiene l'intersezione di un disco aperto centrato in 0 con $\gamma(-\infty, 2\pi)$
- $t_0 = 0 \Rightarrow f(t_0) = (0,0)$
- $f(-\varepsilon, \varepsilon)$ non è aperto perché contiene "solo 2 dei tre rami che vanno in (0,0)"



SOTTOVARIETÀ E PARAMETRIZZAZIONI

def $M \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice SOTTOVARIETÀ DIFFERENZIABILE di classe C^k $(k \geq 1)$ di dimensione d $(1 \leq d \leq n-1)$ se $\forall \bar{x} \in M$ $\exists \delta > 0$ $\exists f \in C^k(B(\bar{x}, \delta); \mathbb{R}^{n-d})$ tc

voglio definire una sottov. diff. di dim d come luogo degli zeri

(i) $M \cap B(\bar{x}, \delta) = \{x \in B(\bar{x}, \delta) : f(x) = 0\}$

(ii) $\text{rank } Jf(x) = \overset{(max)}{n-d} \quad \forall x \in B(\bar{x}, \delta)$

Convenzione: le sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ di dimensione n sono gli aperti di $\mathbb{R}^n$

$f = 0$ si dice EQUAZIONE LOCALE

f si dice FUNZIONE DEFINENTE (LOCALE)

$n-d$ è la CODIMENSIONE di M

esempio (i) $A \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $\psi \in C^k(A, \mathbb{R}^{n-d})$

$M = gr(\psi) = \{(x, \psi(x)) \in \mathbb{R}^n, x \in A\}$ è sottovarietà di dim d e classe C^k

$= \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$

Definisco $f: A \times \mathbb{R}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$

$(x, y) \longmapsto y - \psi(x)$

è chiaro che $M = gr(\psi) = \{f = 0\}$

$Jf(x, y) = (-J\psi(x) \mid \underbrace{Id_{n-d}}_{\text{è minore di rango } n-d})$ ha rango max $(n-d)$

Dunque grafico $C^k \Rightarrow$ sottovar. C^k

oss teorema di Dini dice $\Leftarrow$

esempio (ii) $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $M = \{f = 0\}$

M è sottovarietà $\Leftarrow$ rank $Jf(x) = 1$ $\forall x \in M$

è vettore riga

$\Leftrightarrow |Df(x)| \neq 0 \quad \forall x \in M$

non c'è la doppia implicazione

IPERSUPERFICIE := sottovarietà di dim $n-1$

oss $f(x) = x_1^2$

$M = \{x_1^2 = 0\} = \{x_1 = 0\}$

$Jf(x) = (2x_1, 0, \dots, 0) = 0 \quad \forall x \in M$

ciononostante M è iperpiano: "ho scelto la f sbagliata"

$(\Rightarrow$ ipersuperficie$)$

$\tilde{f}(x) = x_1 \Rightarrow J\tilde{f}(x) = (1, 0, \dots, 0)$

oss "$Df(x) \perp T_x M$ in x"

un vettore ortogonale al piano tangente in x

oss $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-d})$

$M := \{f = 0\}$ $\Rightarrow$ $n-d$ equazioni $\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ \vdots \\ f_{n-d} = 0 \end{cases}$

$\quad = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$

Vorrei $\operatorname{rank} J_f = n-d$, cioè le righe di $J_f = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_{n-d} \end{bmatrix}$ sono lin. indip.

cioè $\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_{n-d}(x)$ lin. indip. $\forall x \in M$,

cioè $M_i := \{f_i = 0\}$ sono ipersuperfici che si intersecano "in modo trasversale"

i tangenti devono essere lin. indip.

esempio (iii) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2-1,\ x+y+z)$ $\quad M = \{f = 0\}$

$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 2 a meno che $x = y = z$,

però $\nexists\ (x,x,x) \in M$, ovvero $\begin{cases} f = 0 \\ \operatorname{rk}(J_f(x,y,z)) \leq 1 \end{cases}$ non ha sol.

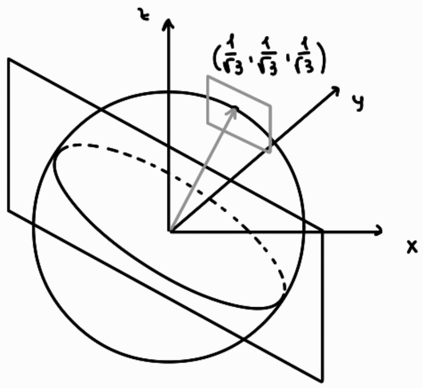
$\Rightarrow M$ è sottovar. di classe C^∞ e dim 1

$M_1 = \{f_1 = 0\} = S^2$

ortogonale al vettore $(1,1,1)$

$M_2 = \{f_2 = 0\} = \{\text{piano } x+y+z = 0\}$

$M = M_1 \cap M_2$



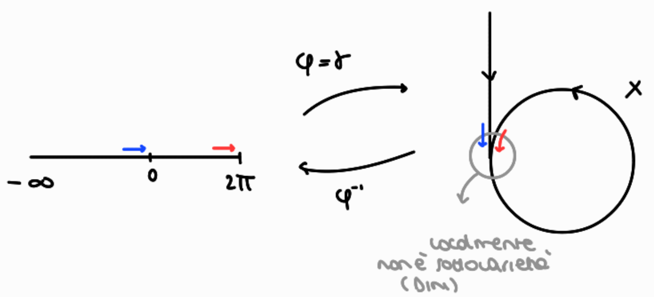
def $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dove $A \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto. φ si dice **PARAMETRIZZAZIONE REGOLARE** di X di classe C^k $(k \geq 1)$ e rango d $(1 \leq d \leq n-1)$ se

(i) $\varphi \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$

esempio 3 → (ii) $\varphi : A \longrightarrow X$ è biiettiva

esempio 2 → (iii) $\operatorname{rank} J_\varphi(\xi) = d$ (max) $\forall \xi \in A$

esempio 4 → (iv) $\varphi^{-1} : X \longrightarrow A$ è continua



γ^{-1} non è continua

TEOREMA $M \subseteq \mathbb{R}^n$ è una sottovarietà diff. di dim d e classe C^k

$\iff$ $\forall\, \bar{x} \in M \ \exists\, r>0$ tc $\exists$ parametrizzazione regolare di classe C^k

e rango d di $M \cap B(\bar{x}, \delta)$

<u>dim</u> ($\Rightarrow$) (è il Dini)

Per def: $\forall\, \bar{x} \in M \ \exists\, \bar{r}>0 \ \exists\, f \in C^k(B(\bar{x},\bar{r}); \mathbb{R}^{n-d})$ tale che $M \cap B(\bar{x},\bar{r}) = \{f=0\}$ e

(*) $\operatorname{rank} J_f(x) = n-d \quad \forall\, x \in B(\bar{x},\bar{r})$

a meno di riordinare le coordinate

Posso supporre $x = (\xi, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$, $\quad \bar{x} = (\bar{\xi}, \bar{y})$

(*) $\det \dfrac{\partial f}{\partial y}(x) \neq 0 \qquad \forall\, x \in B(\bar{x},\bar{r})$ a meno di ridurre $\bar{r}$

Dini: $\exists\, \delta, \eta > 0 \qquad \exists\, \psi \in C^k(B(\bar{\xi},\delta), B(\bar{y},\eta))$ tc

$$\{x \in B(\bar{\xi},\delta) \times B(\bar{y},\eta) : f(x)=0\} = \{(\xi, \psi(\xi)) : \xi \in B(\bar{\xi},\delta)\}$$

con $B(\bar{\xi},\delta) \times B(\bar{y},\eta) \subseteq B(\bar{x},\bar{r})$

Dico: $\varphi : B(\bar{\xi},\delta) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\quad \varphi(\xi) := (\xi, \psi(\xi))$ è param. regolare C^k di rango d.

cioè i) φ è C^k (sì, perché lo è anche ψ)

ii) φ è biettiva (un grafico è sempre biettivo)

iii) $J\varphi = (\,Id \mid J\psi\,)$ ha rango max d

iv) $\varphi^{-1}(\underbrace{\xi, y}_{(\xi,\psi(\xi)) \in M}) = \xi$ è cont. $\quad (\varphi^{-1} = \pi_{\mathbb{R}^d}|_{M \cap B(\bar{x},\bar{r})})$

<u>oss1</u> M sott. $C^k \xRightarrow{\text{localmente}} M$ grafico C^k

<u>oss2</u> Abbiamo trovato una parametrizzazione di $M \cap (B(\bar{\xi},\delta) \times B(\bar{y},\eta)) \supseteq M \cap B(\bar{x},\bar{r})$

con $r := \min\{\delta, \eta\} > 0$

($\Leftarrow$) Sia $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($A \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto) param C^k di $M \cap B(\bar{x},\bar{r})$ $\quad \bar{x} \in M, r>0$.

$\operatorname{rank} J\varphi(\xi) = d \quad \forall\, \xi \in A$ per hp.

a meno di riordinare le coordinate in $\mathbb{R}^n$

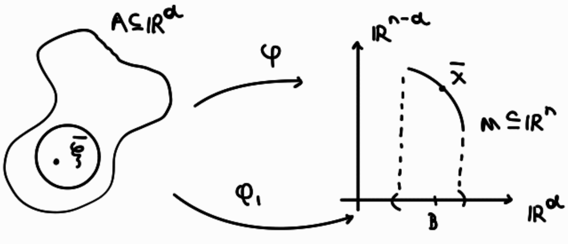
Posso supporre $\varphi(\xi) = (\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ e $\det \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} \neq 0$ su A

a meno di ridurlo

Invertibilità locale: $\exists\, \delta > 0$ tc φ_1 è diffeo di classe C^k tra

$B(\bar{\xi},\delta)$ e $\varphi_1(B(\bar{\xi},\delta)) =: B$ è aperto in $\mathbb{R}^d$

$\bar{\xi} = \varphi^{-1}(\bar{x}) \in A$



$\varphi_1 = \pi_{\mathbb{R}^d} \circ \varphi$

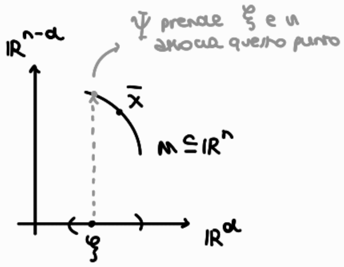
$\varphi_1^{-1} \in C^k(B, \mathbb{R}^d)$

$$\varphi(\varphi_1^{-1}(\overset{\in B}{\xi})) = (\varphi_1(\varphi_1^{-1}(\xi)), \varphi_2(\varphi_1^{-1}(\xi))) = \overbrace{(\xi, \underbrace{\varphi_2(\varphi_1^{-1}(\xi))}_{=\,\psi(\xi)})}^{\Psi(\xi)}$$

$\psi \in C^k(B)$

$\Psi(\xi) := (\xi, \psi(\xi))$

$\Rightarrow \quad \Psi \in C^k(B, \mathbb{R}^n)$



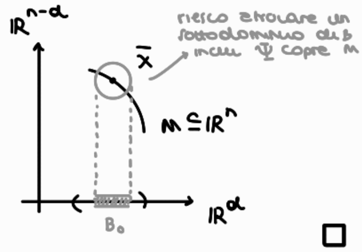
φ è aperta $\Rightarrow$ $\varphi(\underbrace{\varphi_1^{-1}(B)}_{\substack{B(\xi, \delta) \\ \text{palla aperta}}})$ è (relat.) aperto in M

$\Rightarrow \exists\, m > 0$ tc $M \cap B(\bar{x}, m) \subseteq \varphi(\varphi_1^{-1}(B)) = \Psi(B)$

$B_0 := \Psi^{-1}(M \cap B(\bar{x}, m))$ aperto $\subseteq B$

$\Rightarrow \quad M \cap B(\bar{x}, \bar{m}) = \{(\xi, \psi(\xi)) : \xi \in B_0\}$

M è loc. grafico C^k $\Rightarrow$ M è sottovarietà C^k



$\square$

<u>corollario</u> $\quad M \subseteq \mathbb{R}^n$ è una sottovarietà d-dim di classe C^k

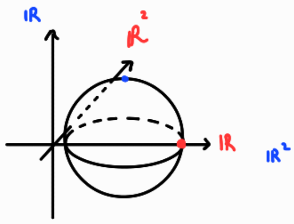
$\iff \forall\, \bar{x} \in M \quad \exists\, r > 0 \quad \exists\, A \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto $\quad \exists\, \psi \in C^k(A, \mathbb{R}^{n-d})$

andrebbe bene anche $SO_n(\mathbb{R})$

$\exists\, R \in O_n(\mathbb{R})$ tc

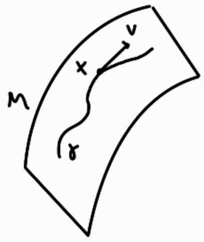
credo il verso $\Leftarrow$:
$\Leftarrow$ M è loc. grafico
(a meno di rotazioni)

$$M \cap B(\bar{x}, \bar{r}) = \underbrace{R(gr(\psi))}_{\substack{\text{a meno di applicare} \\ \text{una rotazione}}}$$



<u>oss</u> $\quad$ Gli aperti (non vuoti) di $\mathbb{R}^n$ sono sottovar di dim $d = n$

SPAZIO TANGENTE E SPAZIO NORMALE



def M sottovar. d-dim C^k, $x \in M$. Lo SPAZIO TANGENTE ad M in x è

$$T_xM := \{v \in \mathbb{R}^n : \exists\, \delta>0\ \exists\, \gamma : (-\delta,\delta) \longrightarrow M\ C^1 \text{ tc } \gamma(0)=x \text{ e } \dot\gamma(0)=v\}$$

TEOREMA M sottovar d-dim C^k di $\mathbb{R}^n$, $x \in M$. Allora

(i) se $f=0$ è eq. locale per M in un intorno di x, allora

$$T_xM = \ker df(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : df(x)\,v = 0\}$$

e ottengo che $df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-d})$ ha rango max $(=n-d)$

(ii) se $A \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ param. locale, $x = \varphi(\xi)$, $\xi \in A$, allora

$$T_xM = \operatorname{Im} d\varphi(\xi) = \{d\varphi(\xi)\,w \in \mathbb{R}^n,\ w \in \mathbb{R}^d\}$$

e ottengo che $d\varphi(\xi) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$ ha rango max $(=d)$.

In particolare, T_xM è uno sp. vettoriale di dim d

dim (i) $T_xM \subseteq \ker df(x)$ è facile: se $v \in T_xM$ e γ è come nella def, allora

$$f(\gamma(t)) \equiv 0 \Rightarrow 0 = \left(f(\gamma(t))\right)'\Big|_{t=0} = df(\underset{x}{\underset{\shortparallel}{\gamma(0)}})\,\underset{v}{\underset{\shortparallel}{\gamma'(0)}} = df(x)\,v$$

$\Rightarrow v \in \ker df(x)$

Dimostro $\supseteq$. Sia $v \in \ker df(x)$, devo trovare γ

rank $df(x) = n-d$. Posso supporre $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d_\xi \times \mathbb{R}^{n-d}_y$: $\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \neq 0$ in un intorno di $x = (\bar\xi, \bar y)$.

Dini: $\exists\ \varphi : B(\bar\xi, \delta) \longrightarrow B(\bar y, \eta)$ C^k tc

$$M \cap (B(\bar\xi,\delta) \times B(\bar y,\eta)) = \{(\xi, \varphi(\xi)) : \xi \in B(\bar\xi,\delta)\}$$

Scrivo $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$.

Definisco $\gamma(t) := (\bar\xi + tv_1,\ \varphi(\bar\xi + tv_1)) \in M$

$$\gamma(0) = (\bar\xi, \varphi(\bar\xi)) = (\bar\xi, \bar y) = x$$

$$T_xM \ni \dot\gamma(0) = \left(v_1, \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(\bar\xi)\,v_1\right) \overset{?}{=} (v_1, v_2)$$

sì

$$0 = df(x)\,v = \frac{\partial f}{\partial \xi}(x)\,v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x)\,v_2$$

$$\Rightarrow v_2 = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \xi}(x)\,v_1 \underset{\text{Dini}}{=} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\bar\xi)\,v_1$$

$\Rightarrow$ segue la tesi

oss segue che $\dim T_xM = \dim \ker df(x) = n - \overbrace{(n-d)}^{\dim \operatorname{Im} df(x)} = d$

(ii) Dim $\operatorname{Im} d\varphi(\xi) \leq T_xM$ e avrò finito per questioni dimensionali.

Sia $v \in \operatorname{Im} d\varphi(\xi)$, $v = d\varphi(\xi)\, w$ per $w \in \mathbb{R}^d$

$\gamma(t) := \varphi(\underbrace{\xi + tw}_{\in A}) \in M$ per $t \in (-\delta, \delta)$

è una curva C^k, $\gamma(0) = \varphi(\xi) = x$, $\dot\gamma(0) = d\varphi(\xi)\, w = v \Rightarrow v \in T_xM$ $\square$

oss 1 $M = \{f = 0\}$, $f \in \overbrace{C^1(\mathbb{R}^n)}^{\text{ipersuperficie}}$

$\nabla f(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in M \Rightarrow M$ var. C^1

$T_xM = \{v \in \mathbb{R}^n : \underset{\substack{\shortparallel \\ df(x)\,v}}{\langle \nabla f(x), v \rangle} = 0\} = \nabla f(x)^\perp$

$x \in M$

$N(x) := \dfrac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$ CAMPO NORMALE ad M

vettore normale all'ortogonale

a meno di un segno

in un intorno di x

oss $N(x)$ è l'unico vettore unitario $\perp T_xM$ ed è ben def localmente

def M si dice ORIENTABILE se è possibile definire N in modo continuo globalmente (su N)

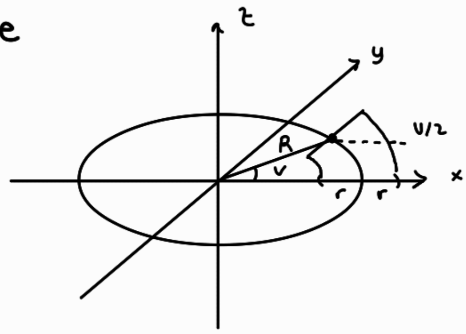
esempio Il nastro di Möbius non è orientabile

$r, R > 0$, $A := (-r, r) \times \mathbb{R}$

$\varphi(u,v) := R \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \cos v \cos v/2 \\ \sin v \cos v/2 \\ \sin v/2 \end{pmatrix}$

$M := \varphi(A)$

M è var. C^∞ di dim 2



oss 2 $M = \{f = 0\}$, $f = (f_1, \dots, f_{n-d}) \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-d})$, rank $Jf(x) = n-d \quad \forall\, x \in M$

$\Rightarrow$ M è sottovar.

$T_xM = \{v \in \mathbb{R}^n : df(x)\, v = \underline{0}\}$

$= \{v \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla f_1(x), v \rangle = \dots = \langle \nabla f_{n-d}(x), v \rangle = 0\}$

$= \bigcap_{i=1}^{n-d} \nabla f_i(x)^\perp = \bigcap_{i=1}^{n-d} T_xM_i$, dove $M_i = \{f_i = 0\}$

"spazio generato da" $\equiv \langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_{n-d}(x) \rangle$

$= (\operatorname{span}\{\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_{n-d}(x)\})^\perp$

def Lo SPAZIO NORMALE ad M in x è $\langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_{n-d}(x) \rangle$

esempio $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $h \in C^1(A)$

$M := \{(x', h(x')) : x' \in A\}$ è ipersuperficie C^1 in $\mathbb{R}^{n+1}$

$= \{f=0\}$ per $\underset{(x', x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}}{f(x)} := x_{n+1} - h(x')$

se $\bar{x} = (\bar{x}', h(\bar{x}')) \in M$, $\nabla f(\bar{x}) = (-\nabla h(\bar{x}'), 1)$

$T_{\bar{x}}M = \nabla f(\bar{x})^{\perp} = \text{span}\{\underbrace{(\underset{\mathbb{R}^n}{e_i}, \frac{\partial h(\bar{x}')}{\partial x_i})}_{v_i} : i = 1, \dots, n\}$ sì

v_i sono n, lin. indip., $\perp \nabla f(\bar{x})$

$\Rightarrow T_{\bar{x}}M = \{\sum_{i=1}^{n} y_i v_i : y \in \mathbb{R}^n\} = \{(y, \langle y, \nabla h(\bar{x}')\rangle) : y \in \mathbb{R}^n\}$

$=$ grafico di $y \longmapsto \langle y, \nabla h(\bar{x}')\rangle$

Lo SPAZIO TANGENTE AFFINE in $\bar{x}$ è il grafico di

$\mathbb{R}^n \ni y \longmapsto h(\bar{x}') + \langle \nabla h(\bar{x}'), y - \bar{x}'\rangle$

esercizio $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$

$Q = \{(x,y,z) : z = x^2+y^2\}$

$g(x,y,z) = x^2+y^2-z$ $\quad \nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, -1) \neq 0 \quad \forall (x,y,z)$

$Q = \{g=0\}$

$\Rightarrow$ ho 2 sottovar. di dim 2

a) $M := P \cap Q$. Mi chiedo se è varietà. $\quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$= \{(x,y,z) : f(x,y,z) = 0\}$ dove $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} x+y+z \\ x^2+y^2-z \end{pmatrix}$

$J_f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & -1 \end{pmatrix}$ ha rango 2 a meno che $y = -\frac{1}{2} = x$

però $f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, z) = \begin{pmatrix} z-1 \\ \frac{1}{2}-z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \forall z \in \mathbb{R}$

abbiamo studiato il sistema
$\begin{cases} \text{rank } J_f < 2 \\ f = 0 \end{cases}$
(che non ha soluzione)

$\forall (x,y,z) \in M$, rank $J_f(x,y,z) = 2$

b) $T_{(x,y,z)}M = ?$

$T_{(x,y,z)}M = (\langle \nabla f_1, \nabla f_2 \rangle)^{\perp}$

Cerco un vettore $\perp$ a $(1,1,1)$ e $\perp$ $(2x, 2y, -1)$

sono sicura che sia $\neq 0$ perché le tre componenti sono i tre minori della matrice Jacobiana (è così che si costruisce il prodotto vettoriale!)

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2x\\2y\\-1\end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix}-1-2y\\2x+1\\2y-2x\end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{su } M$$

$$T_{(x,y,z)}M = \langle \quad \rangle$$

c) $M = P \cap Q$ è var C^∞ 1-dim. Cerco una parametrizzazione

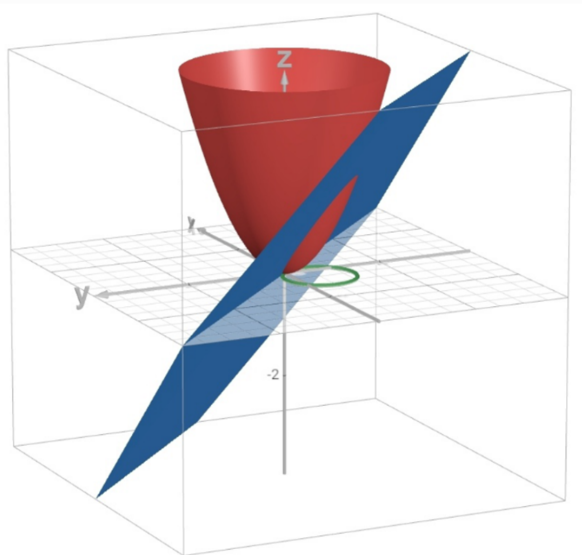
$$0 = x^2+y^2-z = x^2+y^2+x+y = \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{2}$$

se la proietto sul piano xy

$\Rightarrow$ M "vive sopra" la circonferenza di centro $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$K(t) = \Big(\underbrace{-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t}_{x(t)},\ \underbrace{-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t}_{y(t)}\Big)$$

$$z(t) = -x(t) - y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t + \sin t)$$



$\gamma(t) := (x(t), y(t), z(t))$ è param regolare di M $\Rightarrow \gamma'(t) \neq 0$

$$T_{\gamma(t)}M = \langle \gamma'(t) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t - \cos t)\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2y(t)-1 \\ 2x(t)+1 \\ 2y(t)-2x(t)\end{pmatrix}\right\rangle = \Big\langle \underbrace{\begin{pmatrix}-1-2y\\2x+1\\2y-2x\end{pmatrix}}_{\text{è tutto coerente!}} \Big\rangle$$

esercizio a) $M_1 := \{(\underbrace{x_1, y_1}_{P_1}, \underbrace{x_2, y_2}_{P_2}) \in \mathbb{R}^4 : d_{\mathbb{R}^2}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 1\}$

vedo le coppie dei punti del piano a distanza 1 come una varietà di $\mathbb{R}^4$

$$f(x_1,y_1,x_2,y_2) := (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 - 1 = 0$$

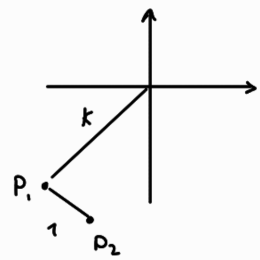
$$Df = (2(x_1-x_2),\ 2(y_1-y_2),\ -2(x_1-x_2),\ -2(y_1-y_2)) \neq 0$$

a meno che $x_1 - x_2 = y_1 - y_2 = 0$, ma allora $f = -1 \neq 0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} Df = 0 \\ f = 0 \end{cases}$ non ha soluzione

M_1 è var C^∞ di dim 3 in $\mathbb{R}^4$

b) $M_2 := \left\{(x_1,y_1,x_2,y_2) : \begin{pmatrix}(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-1 \\ x_1^2+y_1^2-k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, k>0\right\}$

Aggiungo la condizione che P_1 sia a distanza fissata dall'origine (bipendolo) e mi chiedo se è varietà.



$$Jf = \begin{pmatrix} 2(x_1-x_2) & 2(y_1-y_2) & -2(x_1-x_2) & -2(y_1-y_2) \\ 2x_1 & 2y_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ha rango 2, a meno che tutti i 6 minori di rango 2x2 abbiano det 0:

$$\begin{array}{ll} I/II & \ldots = 0 \\ I/III & x_1(x_1-x_2)=0 \\ I/IV & x_1(y_1-y_2)=0 \\ II/III & y_1(x_1-x_2)=0 \\ II/IV & y_1(y_1-y_2)=0 \\ III/IV & 0=0 \end{array}$$

$x_1(x_1-x_2)=0,\ x_1(y_1-y_2)=0 \Rightarrow x_1=0$

su M_2 o $x_1-x_2\neq 0$ o $y_1-y_2\neq 0$ (dato che $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=1$)

$y_1(x_1-x_2)=0,\ y_1(y_1-y_2)=0 \Rightarrow y_1=0$

ma $x_1^2+y_1^2=k\neq 0$ su M_2

$\nexists\ (x_1 y_1\ x_2 y_2)\in M_2$ te è verificato il sistema sopra.

$\Rightarrow M_2$ è una var. C^∞ di dim 2

$x_1^2+y_1^2=0 \Rightarrow x_1=0=y_1$
$\Rightarrow Jf(\begin{smallmatrix}\cdots\\0\,0\,0\end{smallmatrix})$

<u>oss</u> se $k=0$, Jf ha rango 1 su M_2

$M_2=\{(0,0,x_2,y_2):\ x_2^2+y_2^2=1\} = (0,0)\times S^1$

è circonferenza (var C^∞ 1-dim)

c) $M_3 := \left\{(x_1 y_1\ x_2 y_2):\ \underbrace{\begin{pmatrix}(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-1\\ x_1^2+y_1^2-k\\ y_2\end{pmatrix}}_{f:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^3}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$$Jf=\begin{pmatrix}2(x_1-x_2) & 2(y_1-y_2) & -2(x_1-x_2) & -2(y_1-y_2)\\ 2x_1 & 2y_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ha rango 3 a meno che

$$\begin{array}{ll} IV & 0=0 \\ III & y_1(x_1-x_2)-x_1(y_1-y_2)=0 \\ II & x_1(x_1-x_2)=0 \\ I & y_1(x_1-x_2)=0 \end{array}$$

se $x_1-x_2\neq 0 \Rightarrow x_1=0=y_1$ assurdo perché $k>0$

se $x_1-x_2=0 \Rightarrow x_1\underbrace{(y_1-y_2)}_{\pm 1 \text{ su } M_3}=0 \Rightarrow x_1=0=x_2$

se cerco $(x_1 y_1\ x_2 \overset{0}{\overset{\shortparallel}{y_2}})\in M_3$ te valga il sistema, necessariamente deve essere un punto della forma $(x_1 y_1\ x_2 y_2)=(0\ y_1\ 0\ 0)$

$f(0\ y_1\ 0\ 0)=\begin{pmatrix}y_1^2-1\\ y_1^2-k\\ 0\end{pmatrix}\overset{?}{=}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

se $k\neq 1$, M_3 è var C^∞ 1-dim.

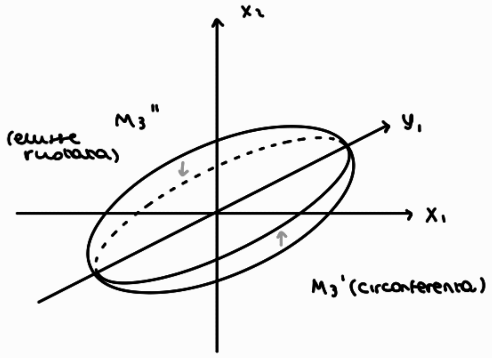
fek=1 , in $(0,\pm 1,0,0) \in M_3$ rank $J_f \leq 2$

$$M_3 := \left\{ (x_1 y_1 \; x_2 0) : \begin{array}{l} (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=1 \\ x_1^2+y_1^2=1 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ (x_1 y_1 \; x_2 0) : \begin{array}{l} x_2(x_2-2x_1)=0 \\ x_1^2+y_1^2=1 \end{array} \right\}$$

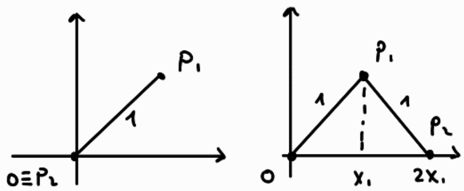
$$= \underbrace{\{(x_1 y_1 \; 0 \; 0) : x_1^2+y_1^2=1\}}_{= M_3'} \cup \underbrace{\{(x_1 \; y_1 \; 2x_1 \; 0) : x_1^2+y_1^2=1\}}_{= M_3''}$$

M_3', M_3'' sono varietà C^∞ 1-dim



M_3 non è var C^∞ 1-dim

$M_3 \setminus \{(0, \pm 1, 0, 0)\}$ è var



MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

def $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f: A \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in M \cap A$, $\bar{x}$ è un **MINIMO LOCALE** [MASSIMO] di f **RISTRETTA A (VINCOLATA A) M** se $\exists \delta > 0$ tc $B(\bar{x}, \delta) \subseteq A$ e $f(x) \geq f(\bar{x})$ ($\leq$) $\forall x \in M \cap B(\bar{x}, \delta)$.

M si dice **VINCOLO**.

TEOREMA (moltiplicatori di Lagrange). $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(A)$, $M \subseteq A$ sottovar C^1 di dim $1 \leq d \leq n-1$ con funzione definente $h \in C^1(A, \mathbb{R}^{n-d})$. Se $\bar{x} \in M \cap A$ è estremo locale di f vincolato ad M, allora $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-d} \in \mathbb{R}$ (detti **MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE**) tc $\nabla f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n-d} \lambda_j \underbrace{\nabla h_j(\bar{x})}_{\perp T_{\bar{x}}M}$. In particolare $\nabla f(\bar{x})$ è normale ad M.

dim $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d_{x'} \times \mathbb{R}^{n-d}_{x''}$ con $\det \frac{\partial h}{\partial x''}(\bar{x}) \neq 0$

teorema funz. implicita: $\exists\, \delta, \eta > 0$ e $\varphi \in C^1(B(\bar{x}', \delta); B(\bar{x}'', \eta))$

tc $\underset{\{h=0\}\text{ luogo di zeri di } h}{M} \cap (B(\bar{x}', \delta) \times B(\bar{x}'', \eta)) = \{(x', \varphi(x')) : x \in B(\bar{x}', \delta)\}$

Definisco $\underset{B(\bar{x}', \delta)}{g(x')} := f(x', \varphi(x')) \in C^1(B(\bar{x}', \delta))$

$\bar{x}'$ è estremo locale di $g \Rightarrow \nabla g(\bar{x}') = 0$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial g(\bar{x}')}{\partial x_i'} = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i'} + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x''} \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i'}(\bar{x}')}_{=\text{ Dini}} \qquad \forall i = 1, \dots, d$$

$$\Rightarrow \underset{1\times 1}{\frac{\partial f}{\partial x_i'}(\bar{x})} = - \underset{1\times(n-d)}{\frac{\partial f}{\partial x''}(\bar{x})} \left(- \underset{(n-d)\times(n-d)}{\left(\frac{\partial h}{\partial x''}(\bar{x})\right)^{-1}} \underset{(n-d)\times 1}{\frac{\partial h(\bar{x})}{\partial x_i'}} \right)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x''}(\bar{x}) \left(\frac{\partial h}{\partial x''}(\bar{x})\right)^{-1}}_{= \lambda_i} \frac{\partial h(\bar{x})}{\partial x_i'}$$

$$\Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n-d} \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) \qquad \square$$

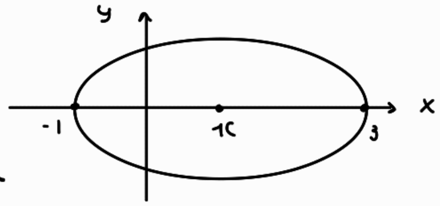
oss se $d = n-1$, allora $\nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla h(\bar{x}) \neq 0$ e $\nabla f(\bar{x}) \perp T_{\bar{x}}M$

PA $\nabla f(\bar{x}) \not\perp T_{\bar{x}}M$

$\gamma(0) = \bar{x}$

$$(f(\gamma(0)))'_{t=0} = \langle \underset{v + v_n}{\nabla f(\bar{x})}, \underset{0 \neq v = \pi_{T_{\bar{x}}M}(\nabla f(\bar{x}))}{\dot{\gamma}(0)} \rangle > 0 \Rightarrow \bar{x} \text{ non è estremo locale}$$

Esercizi



(1) $M := \{(x,y) : \overbrace{\frac{(x-1)^2}{4} + y^2 - 1}^{\substack{h(x,y) \\ !!}} = 0\}$

Trovare max/min di $f(x,y) = x^2+y^2$ ristretta a M

Innanzitutto, osservo che esistono (f cont., M compatto)

Poi verifico che M è sottovarietà C^∞ 1-dim:

$Dh(x,y) = \left(\frac{x-1}{2}, 2y\right) \overset{?}{=} (0,0) \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (0,0) \in M$

Uso Lagrange: $\nabla f = \lambda \nabla h$

$$\begin{cases} 2x = \lambda \frac{x-1}{2} \\ 2y = \lambda\, 2y \\ \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}, \ y = \pm\sqrt{\frac{5}{8}} \\ y = 0 \Rightarrow x = 3, -1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Ho 4 candidati di max/min

$f\left(-\frac{1}{3}, \pm\sqrt{\frac{5}{8}}\right) = \frac{2}{3}$ MIN

$f(3,0) = 9$ MAX

$f(-1,0) = 1$

(2) Trovare max/min di $f(x,y,z) = x+2y+3z$ su $M = \{(x,y,z) : x+y+z=0, \ x^2+y^2+z^2 = 18\}$

- M è varietà diff.?

$h(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x^2+y^2+z^2-18 \end{pmatrix} \begin{array}{l} =h_1 \\ =h_2 \end{array} \qquad Jh = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$

ha rango max ($=2$), a meno che $x=y=z \Rightarrow \begin{cases} 3x=0 \\ 3x^2-18=0 \end{cases}$ impossibile

- max/min esistono (f cont, M compatto)

- Lagrange: $Df = \lambda_1 Dh_1 + \lambda_2 Dh_2$

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 1 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 x \\ 2 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 y \\ 3 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 z \end{array}\right\} \lambda_2 \neq 0 \\ x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=18 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1-\lambda_1}{2\lambda_2} \\ y = \frac{2-\lambda_1}{2\lambda_2} \\ z = \frac{3-\lambda_1}{2\lambda_2} \\ x+y+z = \frac{6-3\lambda_1}{2\lambda_2} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x+z=0 \\ x^2+z^2=18 \end{cases}$$

$\Rightarrow \{(3,0,-3), (-3,0,3)\}$

- $f(3,0,-3) = -6$ MIN

$f(-3,0,3) = 6$ MAX

(4) Trovare max/min di $f(x,y,z) = x^2+y^2+xz$ su $M := \{(x,y,z) : x^2+y^2=1 \ , x+2z^2=1\}$

- max/min esistono: f cont, M chiuso (funt. polinomiale) e limitato ($M \subseteq [-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$)

- $M = \{h=0\}$ con $h(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-1 \\ x+2z^2-1 \end{pmatrix}$. Mi chiedo se è varietà:

$$Jh = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 4z \end{pmatrix}$$

  - se $y \neq 0$: rango 2
  - se $y=0$ e $xz \neq 0$: rango 2
  - se $y=0$ e $xz=0$ $\begin{cases} x=0 & \text{impossibile } (\underset{0}{x^2}+\underset{0}{y^2}=1) \\ z=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$

$(1,0,0) \in M$, $Jh(1,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 1

$\Rightarrow M \setminus \{(1,0,0)\}$ è sottovarietà

Ora calcoliamo i max/min con Lagrange tenendo comunque in considerazione questo punto "strano", perchè potrebbe essere un max/min che non può essere trovato con i moltiplicatori di Lagrange

- Lagrange: max/min di f su $M \setminus \{(1,0,0)\}$, $\nabla f = \lambda \nabla h_1 + \mu \nabla h_2$

$$\begin{cases} 2x+z = 2\lambda x + \mu \\ 2y = 2\lambda y \\ x = 4\mu z \\ x^2+y^2=1 \\ x+2z^2=1 \end{cases}$$

$\lambda=1 \Rightarrow z=\mu \Rightarrow \begin{cases} x=4z^2 \\ x+2z^2=1 \end{cases} \Rightarrow 6z^2=1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{3}, \pm\sqrt{\frac{1}{6}}\right)$

possono avere segni $\neq$

$y=0$

① $x=1 \Rightarrow z=0 \Rightarrow (1,0,0)$ non va bene

② $x=-1 \Rightarrow z=\pm 1 \Rightarrow (-1,0,\pm 1)$

- Ho dunque 7 candidati:

$f(1,0,0) = 1$

$f(-1,0,1) = 0$ MIN

$f\left(\frac{2}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{3}, +\sqrt{\frac{1}{6}}\right) = 1 + \frac{2}{3\sqrt{6}}$

$f(-1,0,-1) = 2$ MAX

$f\left(\frac{2}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{3}, -\sqrt{\frac{1}{6}}\right) = 1 - \frac{2}{3\sqrt{6}}$

(5) MA $\leq$ MQ : $\frac{x_1+\dots+x_n}{n} \leq \left(\frac{x_1^2+\dots+x_n^2}{n}\right)^{1/2}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

È sufficiente dim per $x \in S^{n-1}$ (se è vera per x, è vera anche per λx, $\lambda \geq 0$)

È equiv. a trovare max/min della funzione $f(x) = \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$ su

$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \overbrace{x_1^2+\dots+x_n^2-1}^{h(x)} = 0\}$

- S^{n-1} è sottovarietà

- max/min di f su $\mathbb{S}^{n-1}$ esistono
- Lagrange: $\nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla h(\bar{x}) \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = \lambda(2x_1, \dots, 2x_n) \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1 \end{cases}$$

$$(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{2\lambda n}, \dots, \frac{1}{2\lambda n}\right)$$

$$n\left(\frac{1}{2\lambda n}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2 n} = 1 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2\sqrt{n}} \Rightarrow (x_1, \dots, x_n) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \pm\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow x_1 = \dots = x_n = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ MAX

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, -\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ MIN

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall x \in \mathbb{S}^{n-1}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}\right)^{1/2} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \left(\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}\right)^{1/2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \square$$

def $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sottovar C^k di dim d, $k \geq 2$

$TM := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \in M, y \in T_x M\}$ FIBRATO TANGENTE

oss TM è sottovar C^{k-1} di dim $2d$ in $\mathbb{R}^{2n}$

Fisso $\bar{x} \in M$ e $f \in C^k(B(\bar{x},r), \mathbb{R}^{n-d})$ tc $M \cap B(\bar{x},r) = \{f=0\} \cap B(\bar{x},r)$

rango $df(x) = n-d$ $\forall x \in B(\bar{x},r)$

$\forall x \in B(\bar{x},r)$ $T_x M = \ker df(x)$

$\Rightarrow TM \cap (B(\bar{x},r) \times \mathbb{R}^n) = \{(x,y) \in B(\bar{x},r) \times \mathbb{R}^n : F(x,y) = (f(x), df(x)y) = 0\}$

$F: B(\bar{x},r) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2(n-d)}$ è C^{k-1}

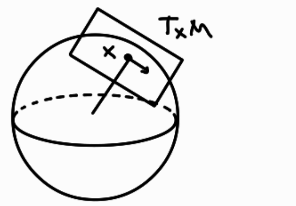
F è funzione definiente: devo verificare che la sua jacobiana ha rk max:

$$J_F(x,y) = \begin{bmatrix} J_f(x) & 0 \\ * & J_f(x) \end{bmatrix} \text{ ha rango } 2(n-d)$$

derivate seconde di f moltiplicate (non mi interessano)

esempio $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ è var. C^∞ $(n-1)$-dim

$= \{f=0\}$ con $f(x) = |x|^2 - 1$



$Df(x) = 2x \neq 0$ $\forall x \in S^{n-1}$ $\Rightarrow$ è varietà

$\Rightarrow T_x S^{n-1} = x^\perp$

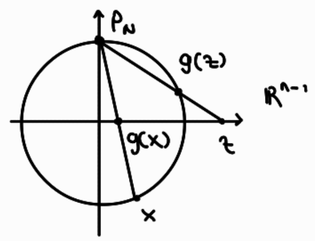
C'è una parametrizzazione "banale":

$\varphi_k^\pm (x_1, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{k-1}, \pm\sqrt{1-(x_1^2+\dots+x_n^2)}, x_{k+1}, \dots, x_n)$

Ma ce n'è un'altra, la proiezione stereografica:

$g: S^{n-1} \setminus \{P_N\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$

$$g(z) = \frac{(x_1, \dots, x_{n-1})}{1-x_n}$$



$\varphi := g^{-1}: \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow S^{n-1} \setminus \{P_N\}$

$$\varphi(y) = \frac{(2y, |y|^2 - 1)}{|y|^2 + 1}$$

$$|y|^2 = |g(x)|^2 = \left| \frac{(x_1, \dots, x_{n-1})}{1-x_n} \right|^2 = \frac{1-x_n^2}{(1-x_n)^2} = \frac{1+x_n}{1-x_n}$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1} \quad \text{e} \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) = (1-x_n)y$$

esercizio max/min di $f(x,y) := e^{-(x^2+y^2)}(x^2+2y^2)$ su $M := \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4\}$

Esistono perché f continua ed M compatto (chiuso e limitato).

Però non possiamo usare Lagrange, perché M non è una varietà

Gli estremi o sono interni (in $\mathring{M} = B(0,2)$) o sono di bordo (in $\partial M = \{x^2+y^2=4\}$)

$$\mathring{M}: \Downarrow\ \nabla f(x) = 0 \qquad\qquad \partial M \overset{\text{sottovarietà}}{\Downarrow} \text{ molt. Lagrange}$$

punti stazionari: $\begin{cases} f_x = e^{-(x^2+y^2)}(-2x(x^2+2y^2)+2x) = 0 \\ f_y = e^{-(x^2+y^2)}(-2y(x^2+2y^2)+4y) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x(1-x^2-2y^2)=0 \\ y(2-x^2-2y^2)=0 \end{cases}$$

se $x=0 \Rightarrow y = 0, 1, -1$
se $y=0 \Rightarrow x = 0, 1, -1$
$\}$ sono tutti interni

se $x \neq 0$ e $y \neq 0$ non ha soluzione

bordo: su $\{\underbrace{x^2+y^2}_{= 4} = 4\}$ ho $f = \tilde{f} = e^{-4}(x^2+2y^2)$

Lagrange: $\nabla \tilde{f} = \lambda(\underbrace{2x, 2y}_{\Delta h})$

$$\begin{cases} 2e^{-4}x = 2\lambda x \\ 2e^{-4}y = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases}$$

$2e^{-4}x = 2\lambda x$: $x=0 \Rightarrow y = \pm 2$; $\lambda = e^{-4} \Rightarrow y=0$, $x = \pm 2$

oss era più comodo ancora prendere $\tilde{\tilde{f}} = e^{-4}(4+y^2)$

mettiamo a confronto i candidati:

$f(0,0) = 0$ MIN

$f(\pm 1, 0) = \frac{1}{e}$

$f(0, \pm 1) = \frac{2}{e}$ MAX

$f(0, \pm 2) = \frac{8}{e^4}$

$f(\pm 2, 0) = \frac{4}{e^4}$

OSS (Interpretazione variazionale degli autovalori)

eventualmente con molteplicità

$A=(a_{ij})\in M_{sym}^{n\times n}$ con autovalori $\lambda_1\le\lambda_2\le\dots\le\lambda_n$

Dico che $\lambda_1=\min\limits_{|x|=1}\langle Ax,x\rangle$ e $\lambda_n=\max\limits_{|x|=1}\langle Ax,x\rangle$

Max/min di $f(x):=\langle Ax,x\rangle$ sul vincolo $h(x)=|x|^2-1=0$ esistono

Lagrange: cerco i p.ti tc $\nabla f(x)=\lambda\nabla h(x)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\right)=\sum\left(a_{ij}\delta_{ik}x_j+a_{ij}x_i\delta_{jk}\right)$$

$$=\sum_j a_{kj}x_j+\sum_i \underset{\substack{\| \\ a_{ki} \\ (A\text{ simmetrica})}}{a_{ik}}x_i=2\sum_j a_{kj}x_j=2(Ax)_k$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\nabla f(x)=2Ax=2\lambda x & \Rightarrow x \text{ è autovettore} \Rightarrow \lambda=\lambda_i \text{ per qualche } i\\ |x|^2-1=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\langle Ax,x\rangle=\langle\lambda_i x,x\rangle=\lambda_i|x|^2=\lambda_i$$

Ma allora è evidente che max è λ_n, min è λ_1

OSS gli autovett. a volte vengono detti punti stazionari, dato che $\nabla f(\bar{x})\perp M$

cioè lungo le tangenti f ha derivata 0 (il gradiente è ortogonale)

esercizio $\Gamma_1:=\{(x,y):\ y=x^2\}$

$\Gamma_2:=\{(x,y):\ y=2x^2+1\}$

Trovare $P_1\in\Gamma_1$ e $P_2\in\Gamma_2$ di minima distanza, cioè tc

$|P_1-P_2|=\inf\{|A_1-A_2|:\ A_1\in\Gamma_1,\ A_2\in\Gamma_2\}:=m$

OSS è come cercare max/min di $f(\underbrace{x,y}_{A_1},\underbrace{z,w}_{A_2}):=(x-z)^2+(y-w)^2$ sul vincolo

$M:=\{(x,y,z,w):\ y=x^2,\ w=2z^2+1\}$

L'idea è di dim che M è sottovar. e poi usare Lagrange.

M è sottovar: $h(x,y,z,w)=\begin{pmatrix}x^2-y\\ 2z^2+1-w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}$

$M=\{h=0\}$

$J_h=\begin{pmatrix}2x & \boxed{\begin{matrix}-1\\ 0\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\ 4z\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0\\ -1\end{matrix}}\end{pmatrix}$ ha rango 2

Lagrange: $\nabla f=\lambda_1\nabla h_1+\lambda_2\nabla h_2$

$$\begin{cases} 2(x-z) = 2\lambda_1 x \\ 2(y-w) = -\lambda_1 \\ -\cancel{2}(x-z) = \overset{2}{\cancel{4}}\lambda_2 z \\ +2(y-w) = +\lambda_2 \\ x^2 - y = 0 \\ 2x^2+1-w=0 \end{cases}$$

$\lambda_1 x = -2\lambda_2 z = 2\lambda_1 z \Rightarrow \lambda_1(x-2z)=0$

$\lambda_2 = -\lambda_1$

- $\lambda_1 = 0 \Rightarrow x = z$ e $y = w$, con $y = x^2$, $w = 2z^2+1 = 2x^2+1$, $x^2 \neq 2x^2+1$ $\Rightarrow$ non esistono soluzioni

dalla III

- $x = 2z \Rightarrow z = 2\lambda_1 z$

$z(2\lambda_1 - 1) = 0$

$z = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = 0,\ w = 1$

$\lambda_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{2}$

IV $\quad 2(y-w) = -\frac{1}{2}$

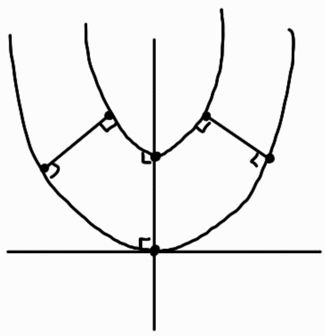
$2(x^2 - 2z^2 - 1) = 2(2z^2-1)$ $\quad (x = 2z)$

$\Rightarrow z^2 = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow \left(\underbrace{\pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}}_{x=2z}, \underbrace{\tfrac{3}{2}}_{x^2}, \pm\sqrt{\tfrac{3}{8}}, \underbrace{\tfrac{7}{4}}_{2z^2+1}\right)$ sono 2 p.ti perché z e x hanno stesso segno

candidati: $f(0,0,0,1) = 1$

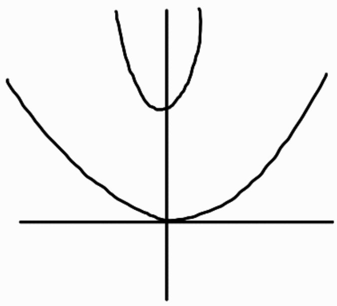
$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{8}}, \frac{7}{4}\right) = f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}, -\sqrt{\frac{3}{8}}, \frac{7}{4}\right) = \frac{7}{16} < 1$



OSS geometricamente, le coppie di punti trovate sono tali che il segmento che le congiunge è ortogonale ad entrambe le parabole

Non abbiamo verificato che max e min esistono (M non è compatto), dimostriamolo:

idea Posso ridurmi ad una palla di raggio arbitrariamente grande t.c. al di fuori di essa il raggio sia definitivamente maggiore di 1



$m \leq 1$

- se $A_1 = (a_1, a_1^2) \in \Gamma_1$, $|a_1| \geq R$, $A_2 = (a_2, a_2^2+1) \in \Gamma_2$

  1) $|a_1 - a_2| > 1 \Rightarrow |A_1 - A_2| \geq |a_1 - a_2| > 1 \geq m$

  2) $|a_1 - a_2| \leq 1$, allora

$$|A_1 - A_2| \geq |a_1^2 - (2a_2^2+1)|$$

$$\geq a_1^2 - 2\underbrace{|a_2^2 - a_1^2|}_{= |a_1+a_2||a_1-a_2|,\ |a_1-a_2| \leq 1} - 1$$

$$\geq a_1^2 - 2(2|a_1|+1) - 1 \quad \geq 10 \text{ se } |a_1| \geq R$$

- se $A_1 = (a_1, a_2^2) \in \Gamma_1$, $|a_1| \leq R$

  $\Rightarrow A_1 \in B(0, 2R^2)$

  se $A_2 \in \Gamma_2 \setminus B(0, 2R^2+1) \Rightarrow |A_1 - A_2| > 1 \geq m$

Conclusione:

$$\underbrace{\inf\{|A_1 - A_2| : A_i \in \Gamma_i\}}_{= \min} \equiv \inf\{|A_1 - A_2| : A_1 \in \Gamma_1 \cap \overline{B(0, 2R^2)},\ A_2 \in \Gamma_2 \cap \overline{B(0, 2R^2+1)}\}$$

<u>esercizio</u> Cercare max/min di $f(x,y,z) = xy^2z^3$ su $E := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

(dedurre una disuguaglianza del tipo: $xy^2z^3 \leq C|(x,y,z)|^6$ e trovare C)