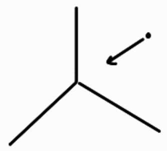
Problema di Keplero

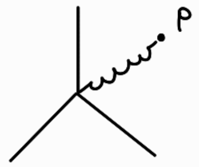
1 p.to in campo centrale $\quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

energia pot : $V(\|x\|)$

$m\ddot{x} = -V'(\|x\|)\dfrac{x}{\|x\|}$



2 casi speciali
- Kepler $\quad V(r) = -\frac{k}{r}$, $k>0$
- forza elastica $\quad V(r) = \frac{1}{2}kr^2$, $k>0$



forza centrale $\Rightarrow$ vettore M.A. $\; m x \wedge \dot{x}$ è conservato $\Rightarrow$ 3 I.P.

vale anche per M.A. = 0

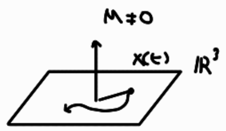
Prop ogni moto $t \mapsto x(t)$ con M.A. $\neq 0$ è piano

dim $\quad m x \wedge \dot{x} = M \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ cost

$x(t) \perp M$

$\dot{x}(t) \perp M$

$\Rightarrow x(t) \in$ piano che ha M come vettore normale



Considero solo moti con M.A. $\neq 0$

Fisso direzione del M.A. $\quad \mu = \dfrac{M}{\|M\|} \in S^2$

Considero tutti i moti con momento angolare $/\!/ \mu$, ovvero il sottoinsieme dello spazio delle fasi in cui $m x \wedge \dot{x} /\!/ \mu$ è invariante

Scelgo un sistema di coordinate $x = (x_1, x_2, x_3)$ t.c. $\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eq. moto :
$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = -\dfrac{1}{m} V'(\|x\|)\dfrac{x_i}{\|x\|} \qquad i = 1,2,3 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^3$$

$\Rightarrow x_3 = v_3 = 0$ è invariante (sono i moti di M.A. $/\!/ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)

Restrizione di eq. del moto a sottovar. invariante $x_3 = v_3 = 0$ in coord (x_1, x_2, v_1, v_2)

$\Rightarrow m\ddot{x} = -V'(\|x\|)\dfrac{x}{\|x\|}$, $\; x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

eq. di Lagrange di Lagrangiana $\quad L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \|\dot{x}\|^2 - V(\|x\|)$, $x \in \mathbb{R}^2$

ha una simmetria di rotazione $\Rightarrow$ passiamo in coord. polari

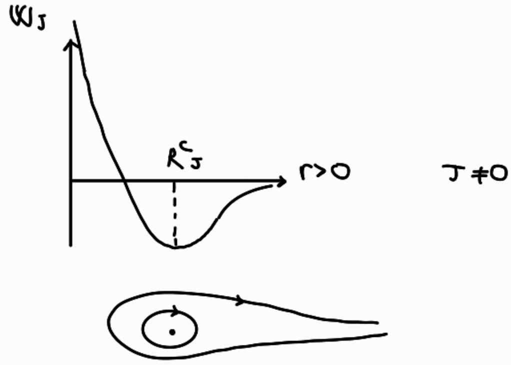
$$L(r, \cancel{\varphi}, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$$

$p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$ è I.P.

Fisso $\; mr^2\dot{\varphi} = J \neq 0 \;\Rightarrow\; \dot{\varphi} = \dfrac{J}{mr^2}$

$$L_J^R(r,\dot r) = \frac{1}{2}m\dot r^2 - \frac{1}{2}m r^2\dot\varphi^2 - V(r)\Big|_{\dot\varphi=\dots}$$

$$L_J^R(r,\dot r) = \frac{1}{2}m\dot r^2 - \underbrace{\left(V(r) + \frac{J^2}{2mr^2}\right)}_{W_J(r)}$$



Mi restringo al caso kepleriano: $V(r) = -\frac{k}{r}$

$$W_J(r) = -\frac{k}{r} + \frac{J^2}{2mr^2} \approx \frac{J^2}{2mr^2} \qquad r\to 0$$

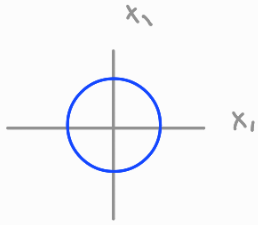
$$\approx -\frac{k}{r} \qquad r\to\infty$$

$$W'_J(r) = \frac{k}{r^2} - \frac{J^2}{mr^3} \overset{!}{=} 0 \iff r = \frac{J^2}{mk} =: R_J^c$$

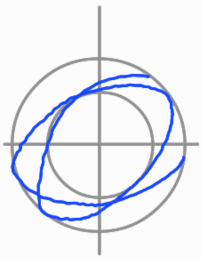
$$\dot\varphi = \frac{J}{mr^2} \quad \begin{matrix} >0 \\ <0 \end{matrix}$$

Facendo i conti si ottiene $W_J^c = -\frac{k}{2r_J^c}$

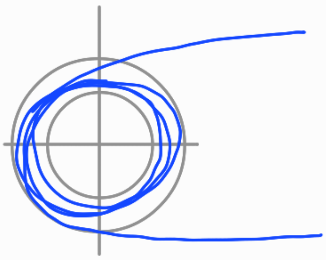
$E = W_J^c$ · eq



$W_J^c < E < 0$ moti limitati

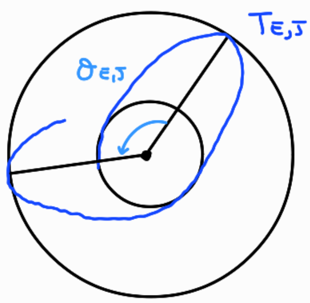


$E \geq 0$ moti illimitati



ci focalizziamo nelle orbite limitate per $W_J^c < E < 0$.

■ Vogliamo capire se sono periodiche: ripetiamo il ragionamento fatto per il pendolo sferico.



moto periodico $\iff \frac{\theta_{E,J}}{2\pi} \in \mathbb{Q}$

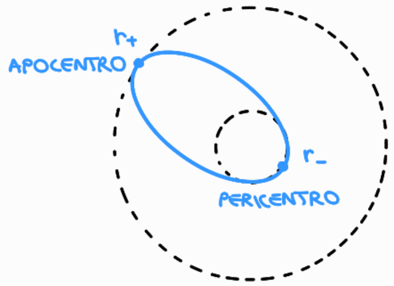
- $r_\pm$ sono soluzioni di $E = W_J(r_\pm)$ e sono: $r_\pm = \dfrac{r_J^c}{1 \mp \sqrt{1 - \frac{E}{W_J^c}}}$

- $$T_{E,J} = \sqrt{2}\int_{r_-(E,J)}^{r_+(E,J)} \frac{dr}{\sqrt{E - W_J(r)}} = \dots = \pi\sqrt{\frac{mk^2}{2|E|^3}} \sim |E|^{-3/2}$$

  ↳ non dipende dal momento angolare

- $$\Theta_{E,J} = \sqrt{2}\int_{r_-(E,J)}^{r_+(E,J)} \frac{dr}{mr^2\sqrt{E - W_J(r)}} = 2\pi$$ non dipende da nulla

$\Rightarrow$ tutte le orbite sono periodiche!

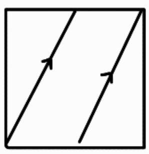


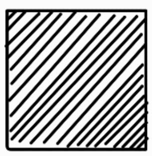
■ Come nella trattazione del pendolo si ha $\Sigma_{EJ} \simeq \mathbb{T}^2$

$$t \longmapsto (\alpha_1(0) + t\omega_1, \alpha_2(0) + t\omega_2) \pmod{2\pi}$$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 = \omega_1 \\ \dot{\alpha}_2 = \omega_2 \end{cases}, (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{T}^2$$

$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$ periodico $\qquad\qquad$ $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$ denso





Integrali primi:

1) $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m_1}{m_2}$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$

è 2π-periodica

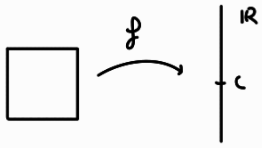
$f(\alpha_1, \alpha_2) = \sin(m_1\alpha_2 - m_2\alpha_1)$ è una "buona" funzione sul toro

$$\frac{d}{dt} f(\alpha_1, \alpha_2) = \cos(\dots)(m_1\dot{\alpha}_2 - m_2\dot{\alpha}_1) = \cos(\dots)(m_1\omega_2 - m_2\omega_1) = 0$$

$\Rightarrow f$ è integrale primo

2) $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$

Supponiamo f integrale primo $\Rightarrow$ i suoi insiemi di livello sono invarianti



$f^{-1}(c)$ contiene sottoinsieme denso di $\mathbb{T}^2$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(c)$ è denso in $\mathbb{T}^2$

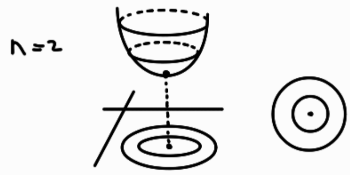
$f^{-1}(c)$ chiuso

$\left.\right\}$ $f^{-1}(c) = \mathbb{T}^2$

$\Rightarrow f$ = costante

$\Rightarrow$ non esistono I.P. non banali

■ Esiste un integrale primo nel problema di Keplero? Sì



È il vettore (costante) di Laplace-Runge-Lenz...

Nel caso $x \in \mathbb{R}^3$, $(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^6$

$$A(x,\dot{x}) = \dot{x} \wedge (m x \wedge \dot{x}) - k \frac{x}{\|x\|}$$

$$= \text{vel} \wedge \text{m.A.} - \|x\|^2 \text{ forza}$$

Verifichiamo che è costante $\Rightarrow$ dà 3 I.P.

$$\frac{d}{dt} A = \underset{\substack{\| \\ \text{forza} \\ \text{massa}}}{\ddot{x}} \wedge (m x \wedge \dot{x}) + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{derivata m.A.,} \\ \text{che è costante}}}{0} - k \frac{\dot{x}}{\|x\|} + \frac{k x}{\|x\|^2} \frac{x \cdot \dot{x}}{\|x\|}$$

$$= -\frac{1}{\cancel{m}} k \frac{x}{\|x\|^3} \wedge (\cancel{m} x \wedge \dot{x}) - k \frac{\|x\|^2 \dot{x} - x(x \cdot \dot{x})}{\|x\|^3}$$

$$= -\frac{k}{\|x\|^3} \Big(\underset{\substack{\| \\ x(x\cdot\dot{x}) - \dot{x}(x\cdot x)}}{x \wedge (x \wedge \dot{x})} + \|x\|^2 \dot{x} - (x \cdot \dot{x}) x \Big) = 0$$

Nota $ABC = BAC - CAB$

$A \wedge (B \wedge C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$

Ricapitolando abbiamo gli I.P.: $E, M_x, M_y, M_z, A_x, A_y, A_z$

$2n = 6$, dunque non sono tutti indipendenti. Se si va a controllare si trovano 5 I.P. indipendenti

Oss (moto centrale) agisce su $\mathbb{R}^3$ $\xrightarrow[\text{cotangente}]{\text{sollev.}}$ $T^*\mathbb{R}^3$

Il sistema è invariante per $\overbrace{SO(3)}$ $\xRightarrow{\text{Noether}}$ (M_x, M_y, M_z) I.P.

domanda Da dove arriva (A_x, A_y, A_z)?

Deriva da una simmetria rispetto a $SO(4)$, che agisce direttamente in $T^*\mathbb{R}^3$

Traiettorie kepleriane

Possiamo trovarle come insiemi di livello degli integrali primi E, J, A in $T\mathbb{R}^2 \ni (r,\theta,\dot r,\dot\theta)$

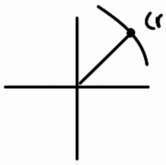
$t \longmapsto \dot\theta(t) > 0 \quad (<0)$

$\Rightarrow t \longmapsto \theta(t) \in \mathbb{R}$ monotona strett. $\Rightarrow$ è invertibile

$\theta \longmapsto t(\theta)$ inversa

Invece di parametrizzare le traiettorie con $t \longmapsto (r(t), \theta(t))$, posso parametrizzarle con

$$\theta \longmapsto (\underbrace{r(t(\theta))}_{\tilde r(\theta)}, \theta)$$



$(r(t), \theta(t)) = (r(t(\theta)), \theta)$

Cerchiamo dunque $\theta \mapsto \tilde r(\theta)$

Vediamo il modo classico

prop (formula di Binet) $J \neq 0$ $\theta \longmapsto \tilde r(\theta)$ soddisfa

$$\left(\frac{1}{\tilde r}\right)'' + \frac{1}{\tilde r} = \frac{1}{r^c_J}$$

dim • conosco $\dot r(t), \ddot r(t)$

• $r(t) = \tilde r(\theta(t))$

$$\dot r(t) = \tilde r'(\theta(t))\,\dot\theta(t) = \tilde r'(\theta(t)) \cdot \frac{J}{m\tilde r(\theta(t))^2}$$

$$= -\frac{J}{m}\left(\frac{1}{\tilde r}\right)'(\theta(t))$$

$$\ddot r(t) = -\frac{J}{m}\left(\frac{1}{\tilde r}\right)''(\theta(t)) \cdot \dot\theta(t) = -\frac{J^2}{m^2 \tilde r(\theta(t))^2}\left(\frac{1}{\tilde r}\right)''(\theta(t))$$

• $t \longmapsto r(t)$ lagrangiana ridotta : $\frac{1}{2}m\dot r^2 - W_J(r)$

$$\ddot r = -\frac{1}{m}W'_J(r) = -\frac{k}{mr^2} + \frac{J^2}{m^2 r^3}$$

• $$\Rightarrow +\frac{J^2}{\cancel{m^2}\cancel{\tilde r^2}}\left(\frac{1}{\tilde r}\right)'' = +\frac{km}{\cancel{m^2}\cancel{\tilde r^2}} - \frac{J^2}{\cancel{m^2}\tilde r^{\cancel{3}}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\tilde r}\right)'' + \frac{1}{\tilde r} = \frac{km}{J^2} = \frac{1}{r^c_J} \qquad \square$$

Possiamo integrare $\tilde r$

oss $y = \frac{1}{\tilde r}$: $y'' + y = 0 \Rightarrow$ O.A.!

$y(\theta) = A\cos(\theta - \theta_P)$, $A \geq 0$, $\theta_P \in [0, 2\pi)$

$$\frac{1}{\tilde r(\theta)} = A\cos(\theta - \theta_P) + \frac{1}{r^c_J}$$

$A := \frac{e}{r^c_J}$

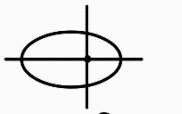
$$\Rightarrow \frac{1}{\tilde r(\vartheta)} = \frac{1}{r^c_J}\left(e\cos(\vartheta-\vartheta_p)+1\right)$$

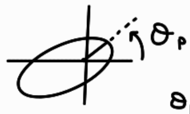
$$\Rightarrow \boxed{\tilde r(\vartheta) = \frac{r^c_J}{1+e\cos(\vartheta-\vartheta_p)} \quad , \; e \geq 0 \quad , \; \vartheta_p \in [0, 2\pi)} \quad (*)$$

equazione polare della traiettoria kepleriana di mom. angolare J

(*) sono coniche con un fuoco nell'origine e di eccentricità e (I legge di Keplero)

- $e = 0$: circonferenza
  $E = W^c_J$
- $0 < e < 1$: ellissi
  $W^c_J < E < 0$
- $e = 1$: parabola
  $E = 0$
- $e > 1$: iperbole
  $E > 0$





ϑ_p è detto "argomento" del pericentro

vogliamo capire da cosa dipendono e e ϑ_p.

prop $\quad e(E, J) = \sqrt{1 - \frac{E}{W^c_J}}$

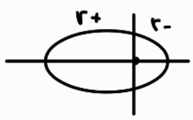
dim • basta confrontare $\tilde r$ e $r_\pm$.

• $r_-(E,J) = \frac{r^c_J}{1+e} \quad \Rightarrow \quad e = \sqrt{1-\frac{E}{W^c_J}}$

$$r_-(E,J) = \frac{r^c_J}{1+\sqrt{1-\frac{E}{W^c_J}}}$$

prop $\quad$ se $E<0$ il semiasse maggiore dell'ellisse è $a(E) = \frac{K}{2|E|}$

dim

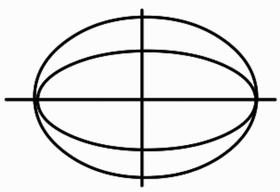


$r_+ + r_- = 2a$

$$\Rightarrow a = \frac{r_+ + r_-}{2} = \frac{r^c_J}{2}\left(\frac{1}{1-\sqrt{\dots}} + \frac{1}{1+\sqrt{\dots}}\right) = \frac{r^c_J}{2}\,\frac{2}{E/W^c_J}$$

oss $\quad a \sim \frac{1}{|E|}$

Fisso $E \Rightarrow a(E)$ e ottengo una famiglia di ellissi nella forma



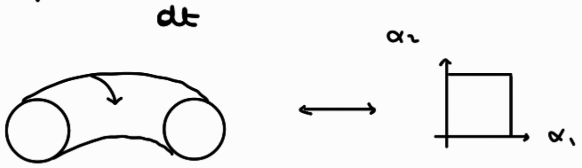
oss $\quad T_E \sim |E|^{-\frac{3}{2}}$

$a(E) \sim |E|^{-1}$

$\Rightarrow \quad T_E^2 \sim a(E)^3$ $\qquad$ (III legge di keplero)

II legge di keplero $\quad \frac{d}{dt}(A(\theta)) = \text{cost}$ $\quad$ deriva da $\quad p_\theta = J$

Σ_{EJ} :



$\frac{2\pi \text{ Area}}{\pi ab} \longrightarrow$ $\quad \alpha_1 \in [0, 2\pi)$

$\alpha_1 \in S^1$

Per studiare il problema di keplero bisogna usare delle coordinate di cui una è l'area!