FASCI DI CONICHE

Intersezioni di rette e iperpiani

Sia $\mathcal{F}$ ipersuperficie di $\mathbb{P}^n_K$ di equazione $\mathcal{F}: F(\underline{x})=0$

con $F \in K[x_0,\dots,x_n]_d$ pol. omogeneo di grado d, $\underline{x}=(x_0,\dots,x_n)$

Sia $r \subseteq \mathbb{P}^n_K$ retta proiettiva; se $R,Q \in r$ ho $r = \lambda R + \mu Q$

Studio $\mathcal{F} \cap r$. Se $R=[p_0:\dots:p_n]$ e $Q=[q_0:\dots:q_n]$, il supp$(\mathcal{F}\cap r)$ è

$$G(\lambda,\mu) = F(\lambda R+\mu Q) = F(\lambda p_0+\mu q_0,\dots,\lambda p_n+\mu q_n) = 0$$

Se $G(\lambda,\mu) \equiv 0$, allora $r \subseteq \mathcal{F}$. Altrimenti $G(\lambda,\mu)=0$ è un pol. omogeneo che ammette al più d radici contate con la loro molteplicità

def Se $P_0 \notin$ supp$(\mathcal{F}\cap r)$, pongo $I(\mathcal{F},r,P_0)=0$

Se $r \subseteq$ supp$(\mathcal{F}\cap r)$, pongo $I(\mathcal{F},r,P_0)=\infty$

Altrimenti pongo $I(\mathcal{F},r,P_0)=m$ se $P_0=\lambda_0 Q+\mu_0 R$ e $(\lambda_0:\mu_0)$ ha molteplicità m in $\mathcal{F}\cap r$.

esempio $\mathcal{C}: yz - x^2=0$

$P_0 = [0:0:1]$

La retta per P_0 e un punto generico $[\lambda:\mu:0]$, $\lambda\mu\neq 0$ sarà di equazioni parametriche

$$r_{\lambda,\mu}: [\lambda t_0 : \mu t_0 : t_1]$$

cioè di eq. cartesiana

$$r_{\lambda,\mu}: \mu x - \lambda y = 0$$

Se $\mu\neq 0$, allora $\mathcal{C}\cap r_{\lambda,\mu}$ (porto $\mu=1$ e $\ell=\frac{\lambda}{\mu}$) ha equazione

$$\begin{cases} x = \ell y \\ \ell^2 y^2 - yz = 0 \end{cases} \Rightarrow y(\ell^2 y - z) = 0$$

due soluzioni distinte $[0:0:1]$, $[\ell,1,\ell^2]$

$\Rightarrow I(\mathcal{C}, r_{\lambda,\mu}, P_0) = 1$

Se $\mu=0$, porto $\lambda=1$, allora $\mathcal{C}\cap r_{\lambda,0}$ ha equazione

$$\begin{cases} y=0 \\ x^2=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 t_0^2 = 0 \Rightarrow t_0^2=0$$

$\Rightarrow I(\mathcal{C}, r_{\lambda,\mu}, P_0) = 2$

def Dico che r è **TANGENTE** a $\mathcal{Y}$ in P_0 se $I(\mathcal{Y}, r, P_0) \geq 2$.

def Un punto $P_0 \in \mathcal{C}$ è SEMPLICE se $m_p(\mathcal{C}) = \min_r I(\mathcal{Y}, r, P_0) = 1$

dove r varia tra tutte le rette passanti per P_0

Un punto si dice SINGOLARE se non è semplice.

oss Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2_K$ una curva affine di eq. $F(x,y) = 0$.

Sia $P_0 = (a,b) \in \mathcal{C}$. Una retta per P_0 ha equazione

$$x = a + Lt$$

$$y = b + Mt$$

con $(L,M) \neq (0,0)$. Il punto P_0 corrisponde alla radice $t=0$ del polinomio

$$\alpha(t) = F(a+Lt, b+Mt)$$

e $I(\mathcal{C}, r, P_0)$ è la molteplicità di tale radice.

Dunque, $t=0$ è una radice multipla se e solo se $\alpha'(0) = 0$, cioè se e solo se

$$\frac{\partial}{\partial x}(a,b)L + \frac{\partial}{\partial y}(a,b)M = 0$$

Segue (a,b) è singolare se e solo se

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} F(a,b) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} F(a,b) = 0 \end{cases}$$

Fasci di coniche

def L'insieme di tutte le ipersuperfici di $\mathbb{P}^n_K$ di grado d forma uno spazio proiettivo, detto sistema lineare delle ipersuperfici di grado d in $\mathbb{P}^n_K$: se $K[x_0,\dots,x_n]_d$ è lo spazio vettoriale su K dei polinomi omogenei di grado d, tale sistema lineare è

$$\mathcal{P} = \mathbb{P}(K[x_0,\dots,x_n]_d)$$

che ha dimensione $\binom{n+d}{n}$. Una sua base è

$$\{x_0^{i_0}\cdots x_n^{i_n} \mid i_0+\dots+i_n = d\}$$

Date due ipersuperfici distinte $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$

$$\mathcal{C} : F(x_0,\dots,x_n)=0$$

$$\mathcal{D} : G(x_0,\dots,x_n)=0$$

consideriamo $[F]$ e $[G]$ in $\mathcal{P}$, allora la retta

$$L([F],[G]) \subseteq \mathbb{P}(K[x_0,\dots,x_n]_d)$$

è la famiglia di tutte le ipersuperfici della forma

$$H_{\lambda,\mu}(x_0,\dots,x_n) = \lambda F(x_0,\dots,x_n) + \mu G(x_0,\dots,x_n) = 0$$

con $[\lambda:\mu] \in \mathbb{P}^1_K$.

Una tale famiglia è detta FASCIO DI IPERSUPERFICI

Noi studieremo il caso dei fasci di coniche $(d=2)$.

prop Se $K=\mathbb{R}$ o $K=\mathbb{C}$ ogni fascio di coniche contiene almeno una conica degenere

dim Siano $\mathcal{C}=[F]$ $\mathcal{D}=[G]$. Il fascio è allora

$$\mathcal{F}_{\lambda,\mu} : \lambda F + \mu G = 0 \qquad (\lambda,\mu)\neq(0,0)$$

se $F(\underline{x}) = {}^t\underline{x}A\underline{x}$, $G(\underline{x}) = {}^t\underline{x}B\underline{x}$ allora

$$\mathcal{F}_{\lambda,\mu} : {}^t\underline{x}(\lambda A+\mu B)\underline{x} = 0$$

Dunque $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ è degenere se e solo se $D(\lambda,\mu) = \det(\lambda A+\mu B) = 0$

Se $D(\lambda,\mu)=0$, ogni conica del fascio è degenere

Se $D(\lambda,\mu)\neq 0$, allora $D(\lambda,\mu)$ è un pol. omogeneo non nullo di grado 3 in (λ,μ). Dunque, ammette almeno una radice omogenea $[\lambda_0:\mu_0]$ (e 3, contate con molteplicità, se $K=\mathbb{C}$). $\square$

esercizio Siano P_1, P_2, P_3 punti non allineati di $\mathbb{P}^2_K$.

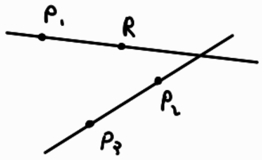
$r \subseteq \mathbb{P}^2_K$ retta, $P_1 \in r$, $P_2 \notin r$, $P_3 \notin r$.

Consideriamo

$$\mathcal{F} = \{ \mathcal{C} = [F] \in \mathbb{P}(K[x_0, x_1, x_2]_d) \mid P_1, P_2, P_3 \in Supp(\mathcal{C}), I(\mathcal{C}, r, P_1) \geq 2 \}$$

Allora $\mathcal{F}$ è un fascio di coniche

Scelgo R in modo tale che P_1, P_2, P_3, R siano in posizione generale con $R \in r$ ($R \notin r \cap L(P_2, P_3)$). Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione



$$\mathcal{C}: Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 = 0$$

rispetto al SDR

$$P_1 = [1:0:0] \quad P_2 = [0:1:0] \quad P_3 = [0:0:1] \quad R = [1:1:1]$$

Poiché $P_1 \in r$, $R \in r$, ho che

$$r : y - z = 0$$

Poiché $P_1 \in \mathcal{C}$, $P_2 \in \mathcal{C}$, $P_3 \in \mathcal{C}$ ho

$$A = 0, \quad D = 0, \quad F = 0$$

Dunque $\mathcal{C}$ è della forma

$$Bxy + Cxz + Eyz = 0$$

Calcolo $\mathcal{C} \cap r$ e ottengo l'equazione

$$Bxy + Cxy + Ey^2 = 0 \implies y((B+C)x + Ey) = 0$$

Dunque, $I(\mathcal{C}, r, P_1) \geq 2$ se e solo se $[1:0:0]$ è soluzione dell'eq.

$$(B+C)x + y = 0$$

dunque se e solo se

$$B + C = 0$$

Dunque:

$$\mathcal{C}: \quad Bxy - Bxz + Eyz = 0$$

Segue

$$\mathcal{F} = \{ \mathcal{C} : Bxy + (-B)xz + Eyz = 0 \quad , \quad [B:E] \in \mathbb{P}^1_K \}$$

è un fascio di coniche; in altra forma

$$\mathcal{F} : \ B(xy - xz) + Eyz = 0$$

$[B:E] \in \mathbb{P}^1_K$

oss Le coniche degeneri del fascio $\mathcal{F}$ dell'esercizio precedente sono date dalla condizione

$$\det\begin{pmatrix} 0 & B & -B \\ B & 0 & E \\ -B & E & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$-B\det\begin{pmatrix} B & -B \\ 0 & E \end{pmatrix} - B\det\begin{pmatrix} B & -B \\ 0 & E \end{pmatrix} = 0$$

$$-B^2E - B^2E = 0 \implies B^2E = 0$$

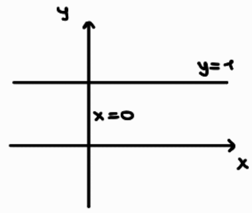
dunque sono quelle che si ottengono per

$B=0$: $yz=0 \implies$ matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

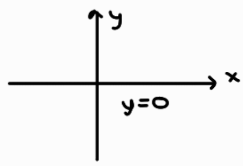
$E=0$: $xy = xz \implies$ matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

In coordinate affini $z=1$

$xy=xz \implies x(y-z)=0 \rightsquigarrow x(y-1)=0$



$yz=0 \rightsquigarrow y=0$



prop Siano P_1, P_2, P_3, P_4 quattro punti distinti non allineati a 3 a 3. Allora le coniche per P_1, P_2, P_3, P_4 formano un fascio.

dim Poiché P_1, P_2, P_3, P_4 fisso un sdr in $\mathbb{P}^2_K$ in modo tale che

$P_1 = [1:0:0]$ $P_2 = [0:1:0]$ $P_3 = [0:0:1]$.

Allora una conica $\mathcal{C}$ che passa per P_1, P_2, P_3 è

$$\mathcal{C}: Axy + Byz + Cyz = 0$$ ↪ i termini $x^2, y^2, z^2 = 0$

con $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.

Imponendo il passaggio per P_4 ottengo una relazione (lineare) tra A, B, C della forma

$$(*) \qquad \alpha A + \beta B + \gamma C = 0$$

Risolvendo $(*)$ ottengo che le coniche considerate sono tutte della forma

$$\lambda F + \mu G = 0$$

con $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, quindi formano un fascio.

P_4 non è allineato a nessuna coppia tra P_1, P_2, P_3.

Questo dice che $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$: se così fosse, avremo che, posto $P_4 = [x:y:z]$

$$xy = yz = xz = 0$$

quindi almeno due tra i numeri x, y, z sarebbero nulli, quindi P_4 coinciderebbe con uno di questi.

Almeno uno fra α, β, γ è non nullo, perciò suppongo $\alpha \neq 0$ si ha

$$A = -\frac{\beta B}{\alpha} - \frac{\gamma C}{\alpha}$$

e sostituendo in

$$Axy + Byz + Cxz = 0$$

ottengo $\left(-\frac{\beta B}{\alpha} - \frac{\gamma C}{\alpha}\right) xy + Byz + Cxz = 0$

$$B\left(-\frac{\beta}{\alpha} xy + yz\right) + C\left(-\frac{\gamma}{\alpha} xy + xz\right) = 0$$

dove $B = \lambda$, $C = \mu$, $-\frac{\beta}{\alpha} xy + yz = F$, $-\frac{\gamma}{\alpha} xy + xz = G$

OSS Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}(K[x_0, x_1, x_2]_2)$ un fascio di coniche. Per ogni scelta di coniche $\mathcal{D}, \mathcal{C}$ in $\mathcal{F}$ con $\mathcal{C} \neq \mathcal{D}$ di equazioni

$$\mathcal{C}: F(\underline{x}) = 0$$
$$\mathcal{D}: G(\underline{x}) = 0$$

ho che $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}: \lambda F + \mu G = 0$.

In particolare se $\mathcal{F}$ è il fascio di coniche per i quattro punti P_1, P_2, P_3, P_4 non allineati, le seguenti coniche appartengono al fascio

$$\mathcal{C}_1: L(P_1, P_2) + L(P_3, P_4)$$
$$\mathcal{C}_2: L(P_1, P_3) + L(P_2, P_4)$$

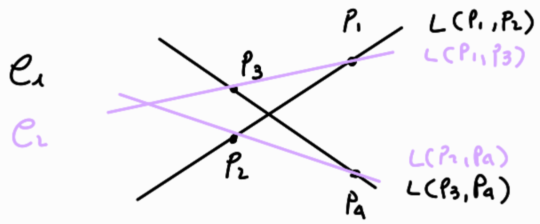
Qui, dati due punti P, Q, indico con $L(P,Q)$ la retta per P e Q e se r_1 e r_2 sono due rette di eq.

$$r_1: \ell_1(\underline{x}) = 0$$
$$r_2: \ell_2(\underline{x}) = 0$$

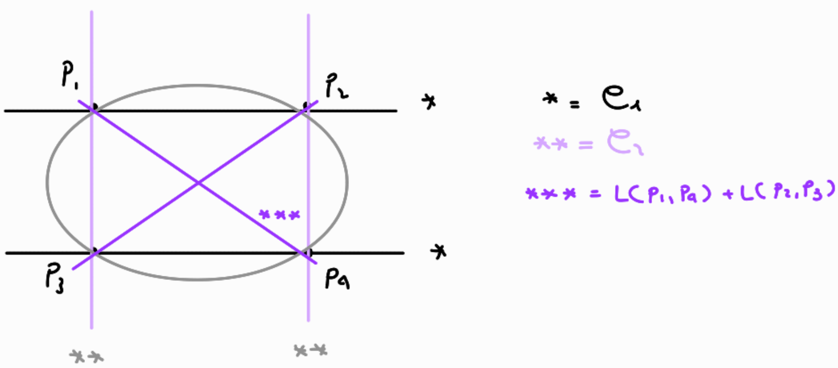
indico con $r_1 + r_2$ la conica degenere

$$\ell_1(\underline{x}) \cdot \ell_2(\underline{x}) = 0 .$$

Allora $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ appartengono al fascio $\mathcal{F}$, sono entrambe degeneri e $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\lambda,\mu}: \lambda \mathcal{C}_1 + \mu \mathcal{C}_2 = 0$



Quindi il fascio si rappresenta così:



*** è una terza conica degenere! le coniche degeneri sono zeri di polinomi di grado 3, dunque se ha due zeri nel campo, deve avere anche il terzo

esempio $\mathcal{F} = \{ \mathcal{C}$ conica: $[1:0:0] \in \mathcal{C}, [0:1:0] \in \mathcal{C}, [0:0:1] \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ tangente alla retta $r: x+4y+z=0 \}$

Imponendo che $\mathcal{C}$ passi per P_1, P_2, P_3 ottengo

$$Axy + Bxz + Cyz = 0$$

Impongo la tangenza:

$$\begin{cases} Axy + Bxz + Cyz = 0 \\ x + 4y + z = 0 \quad \Rightarrow z = -x-4y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad Axy + Bx(-x-4y) + Cy(-x-4y) = 0$$

$$\Rightarrow \quad Axy - Bx^2 - 4Bxy - Cxy - 4Cy^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -Bx^2 + xy(A-4B-C) - 4Cy^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad Bx^2 - xy(A-4B-C) + 4Cy^2 = 0$$

la posso riscrivere come $(x \ y) \begin{pmatrix} B & \frac{A-4B-C}{2} \\ \frac{A-4B-C}{2} & 4C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$
affinché abbia due soluzioni coincidenti, il rk della matrice deve essere $1 \Rightarrow \det = 0$

Questa equazione deve avere due soluzioni coincidenti (tangenza) dunque

$$\Delta = (A-4B-C)^2 - 4B(4C) = 0$$

$$16B^2 + A^2 + C^2 - 8AB - 8BC - 2AC = 0$$

che non è una condizione lineare. Infatti, questo non è un fascio

$\mathcal{C}_1: \quad xy + xz + yz = 0 \quad \in \mathcal{F} \qquad (A=B=C=1$ soddisfa $\Delta)$

$\mathcal{C}_2: \quad xy + xz = 0 \quad \in \mathcal{F} \qquad (A=B=1, C=0$ soddisfa $\Delta)$

$\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2: \quad yz = 0 \qquad (A=B=0, C=1$ non soddisfa $\Delta)$

ma $\Delta = 16 \neq 0$

$\Rightarrow \mathcal{C}_3$ non è tangente, malgrado $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ lo siano

$\Rightarrow \mathcal{F}$ non è un fascio

Possiamo dire che $\mathcal{F}$ è una conica nel piano di equazione

$$Axy + Bxz + Cyz = 0$$

contenuto in $\mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_2)$ di equazione

$$(4B + C - A)^2 - 16BC = 0$$

Descrizione del fascio

Abbiamo notato che se $K=\mathbb{R}$ o $K=\mathbb{C}$ ogni fascio ammette almeno una conica degenere (eq. di 3° grado ha sempre almeno una soluzione).

Supponiamo dunque di avere un fascio $\mathcal{F}$ con una conica degenere $\mathcal{C}_1$

$$\mathcal{C}_1 = r_1 + r_2 : \ l_1 l_2 = 0$$

Se $\mathcal{C}_2$ è un'altra conica di $\mathcal{F}$, allora ci sono due casi:

1) $\mathcal{C}_2 \supseteq r_1$ o $\mathcal{C}_2 \supseteq r_2 \Rightarrow \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \supseteq r_1$ o $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \supseteq r_2$

2) $\mathcal{C}_2$ non contiene né r_1, né $r_2 \Rightarrow \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A, B, C, D\}$

(contati con molteplicità)
(potrebbero essere non distinti)

oss Se $\mathcal{F} = \lambda \mathcal{C}_1 + \mu \mathcal{C}_2$, se $I(\mathcal{C}_1, r, P) \geq k$
$I(\mathcal{C}_2, r, P) \geq k$

allora $\forall \mathcal{C} \in \mathcal{F}$, $I(\mathcal{C}, r, P) \geq k$ $\forall$ retta r_1, $\forall$ punto P.

Inoltre se $\mathcal{C}_1$ è degenere e $\mathcal{C}_2$ è non degenere tc $\mathcal{C}_1 = r_1 + r_2$, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A, B, C, D\}$ (contati con molteplicità), allora $\forall \mathcal{C} \in \mathcal{F}$ $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}_2$ abbiamo $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C} = \{A, B, C, D\}$.

(Si vede usando nell'oss $r = r_1, r_2$ e $A, B = \mathcal{C}_2 \cap r_1$ e $C, D = \mathcal{C}_2 \cap r_2$)

def Chiamo $\{A, B, C, D\}$ il LUOGO BASE del fascio.

(1) $\mathcal{C}_2 \supseteq r_1$ (oppure $\mathcal{C}_2 \supseteq r_2$). Anche $\mathcal{C}_2$ è degenere, e abbiamo

$$\mathcal{C}_2 : \ r_1 + r_3, \quad r_3 \neq r_2$$ altrimenti viene meno la def di fascio

(oppure $\mathcal{C}_2 : r_2 + r_3$, $r_1 \neq r_3$).

A meno di rinominare r_1 e r_2, il fascio è

$$\mathcal{F} : \ \underbrace{\lambda(r_1 + r_2) + \mu(r_1 + r_3)}_{= r_1 + r} = 0$$

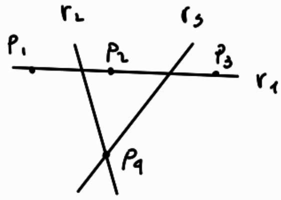
dove r è una retta del fascio di rette per $r_2 \cap r_3$, cioè $r : \lambda r_2 + \mu r_3$.

Infatti, se $r_1 : l_1 = 0$, $r_2 : l_2 = 0$, $r_3 : l_3 = 0$ il fascio è

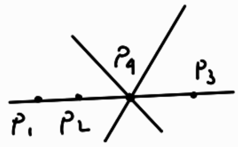
$$\lambda(l_1 l_2) + \mu(l_1 l_3) = 0$$

$$\underbrace{l_1}_{r_1}(\underbrace{\lambda l_2 + \mu l_3}_{r}) = 0$$

Si tratta quindi del fascio di coniche per P_1, P_2, P_3, P_4 con



- $P_1, P_2, P_3 \in r_1$, $P_4 = r_3 \cap r_2$ se $P_4 \notin r_1$



- $P_1, P_2, P_3 \in r_1$, $I(\mathcal{C}, r_3, P_4) \geq 2$ se $P_4 \in r_1$

Tutte le coniche di $\mathcal{F}$ sono del tipo $r_1 + r$, dunque sono tutte degeneri

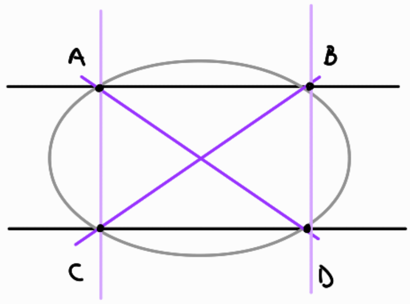
(2) $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ non contiene rette

$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = (\mathcal{C}_2 \cap r_1) \cup (\mathcal{C}_2 \cap r_2) = \{A, B\} \cup \{C, D\} = \{A, B, C, D\}$ luogo base

(a) 4 p.ti distinti

I 4 punti sono in posizione generale (se tre di questi fossero allineati, diciamo A, B, C, allora $C \in \mathcal{C}_2 \cap r_1$. Infatti $C \in \mathcal{C}_2 \cap r_2$ quindi $C \in \mathcal{C}_2$, ma se C è allineato con A, B allora $C \in r_1 \Rightarrow \mathcal{C}_2 \cap r_1 = \{A, B, C\}$, che non è vero)).

Il fascio è quello per i 4 punti A, B, C, D



Ci sono 3 coniche degeneri: $L(A,B) + L(C,D)$, $L(A,C) + L(B,D)$, $L(B,C) + L(A,D)$.

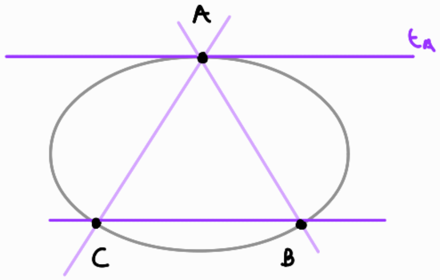
(b) $\{A, B, C, D\} = \{A, B, C, A\}$ cioè A è doppio.

I punti A, B, C non sono allineati (stesso argomento del caso (a)).

Indico con t_A la retta tangente a $\mathcal{C}_2$ in A. Noto che la molteplicità di intersezione tra t_A e $\mathcal{C}_1 = L(A,B) + L(C,D)$ è 2 ed è 2 anche la molteplicità di intersezione tra t_A e $\mathcal{C}_2$. Quindi, tutte le coniche del fascio hanno molteplicità di intersezione ≥ 2 = se non degeneri

Abbiamo due coniche degeneri

$$t_A + L(B,C) \quad e \quad L(A,B) + L(C,A) = \mathcal{C}_1$$



È il fascio di coniche per A,B,C tangenti a t_A in A.

<u>OSS</u> Nel controesempio delle coniche per $[1:0:0],[0:1:0],$ $[0:0:1]$ tangenti a $r: \ x+4y+z=0$ notare che: $P_i \in r$ (a differenza di adesso).

(c) $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A,B,A,B\}$

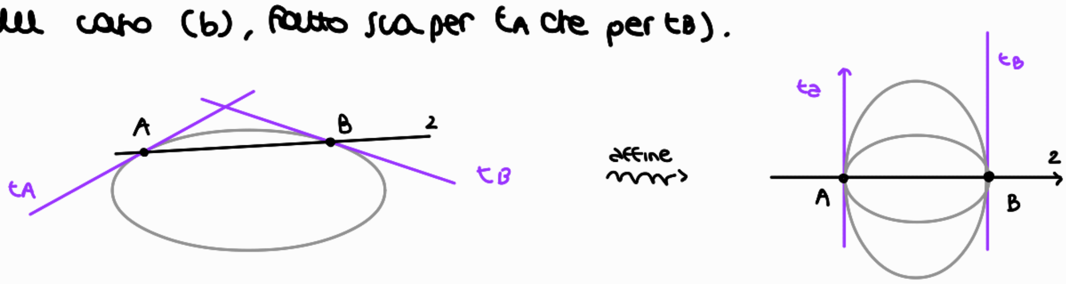
In questo caso, siano

t_A = retta tangente a $\mathcal{C}_1$ in A

t_B = retta tangente a $\mathcal{C}_2$ in B

Noto che $A \notin t_B$ e $B \notin t_A$.

Tutte le coniche del fascio intersecano sia A che B in punti doppi, dunque sono tutte tangenti a t_A in A e a t_B in B (stesso argomento del caso (b), fatto sia per t_A che per t_B).



Si tratta del fascio di coniche tangenti in A a t_A e in B a t_B.

Le coniche degeneri sono $t_A + t_B$ e $2L(A,B)$

se $L(A,B): \ell(x)=0$
$\Rightarrow 2L(A,B): \ell^2(x)=0$

(d) $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A,A,A,B\}$

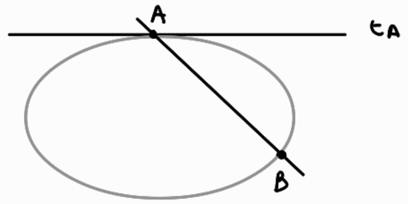
In questo caso, ci sono due rette t_A per A e t_B per B tali che $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ verificano:

$$A,B \in \mathcal{C}_1 \qquad\qquad A,B \in \mathcal{C}_2$$

$I(\mathcal{C}_1, t_A, A) \geq 2 \qquad I(\mathcal{C}_2, t_A, A) \geq 2$

$supp(\mathcal{C}_2) \cap L(A,B) = supp(\mathcal{C}_1) \cap L(A,B) = \{A,B\}$

C'è una sola conica degenere $t_A + L(A,B)$



Si tratta del fascio di coniche $\mathcal{C}$ per le quali:

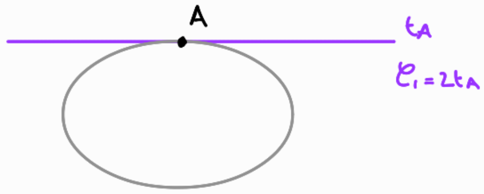
$A, B \in \mathcal{C}$

$I(\mathcal{C}, t_A, A) \geq 2$

$supp(\mathcal{C}) \cap L(A,B) = \{A,B\}$

(e) $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A, A, A, A\}$

$\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ si intersecano solo in A, con molteplicità 4. $\mathcal{C}_1$ è dopp. degenere, dunque unica conica degenere del fascio, che è l'insieme di tutte le coniche a t_A in A



esercizio 1) Sia $\mathcal{C}_2 : x^2+y^2-2xz=0$. Trovare i fasci $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2) : \lambda\mathcal{C}_1+\mu\mathcal{C}_2=0$ nei casi

(i) $\mathcal{C}_1 : \quad x(x-2z)=0$

(ii) $\mathcal{C}_1 : \quad xy=0$

(iii) $\mathcal{C}_1 : \quad x^2=0$

Descrivere le coniche degeneri e il luogo base.

(i) $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}: \mu(x^2+y^2+2xz)+\lambda x(x-2z)=0$

Riscrivo

$$(\mu+\lambda)x^2+\mu y^2-2(\lambda+\mu)xz=0$$

$$A_{\lambda,\mu}=\begin{pmatrix} \mu+\lambda & 0 & -2(\lambda+\mu) \\ 0 & \mu & 0 \\ -2(\lambda+\mu) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ il modo migliore per trovare le coniche degeneri è porre il determinante $=0$.

Calcolo

$$\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2 : \begin{cases} x^2+y^2-2xz=0 \\ x^2-2xz=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2=0 \\ x(x-2z)=0 \end{cases} \quad (*)$$

↳ attenzione!

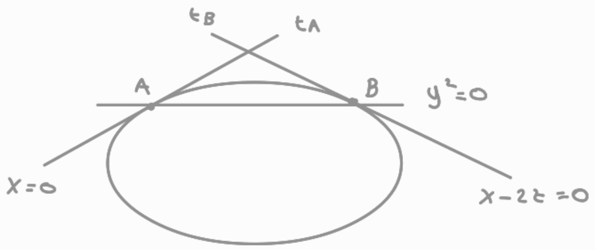
$$\Rightarrow [0:0:1],\ [2:0:1]$$

O il luogo base è $\{A,A,B,B\}$ oppure $\{A,A,A,B\}$. Se fosse il secondo caso, dovremmo avere una molteplicità 3 in $(*)$, ma non l'abbiamo! Dobbiamo essere nel secondo caso.

Cerchiamo le coniche degeneri ponendo il det $=0$:

$$\det(A_{\lambda,\mu}) = -\mu(\lambda+\mu)^2 = \begin{cases} \mu=0 \Rightarrow \mathcal{C}_1: x(x-2z)=0 \\ \mu=-\lambda \Rightarrow \mathcal{C}_3 : y^2=0 \\ \qquad\qquad = 2L(A,B) \end{cases}$$

Siamo nel caso (c):



(ii) $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}: \mu xy+\lambda(x^2+y^2-2xz)=0$

$$\lambda x^2+\lambda y^2+\mu xy-2\lambda xz=0$$

Lo riscrivo sostituendo $\mu \rightsquigarrow \frac{\mu}{2}$

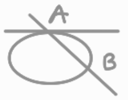
$$\lambda x^2 + \lambda y^2 + 2\mu\, xy - 2\lambda\, xz = 0$$

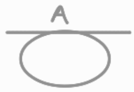
$$A_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} \lambda & 2\mu & -2\lambda \\ 2\mu & \lambda & 0 \\ -2\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A_{\lambda,\mu}) = -\lambda^3 = 0 \iff \lambda = 0$

c'è una sola conica degenere, $\mathcal{C}_1 : xy = 0$.

casi possibili per il luogo base sono

(a) $\{A, A, A, B\}$ 

(e) $\{A, A, A, A\}$ 

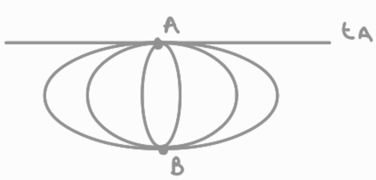
Calcolo il luogo base:

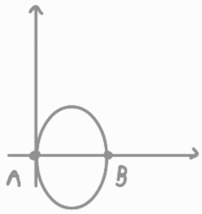
$$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 - 2xz = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$

$xy = 0$:
- $x = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow [0:0:1]$
- $y = 0 \Rightarrow x(x - 2z) = 0$:
  - $x = 0 \quad [0:0:1]$
  - $x = 2z \quad [2:0:1]$

Siamo nel caso (a) perchè $[0:0:1] \neq [2:0:1]$. Inoltre noto che $[0:0:1]$ è soluzione doppia di $y^2 = 0$ e semplice di $x(x-2z) = 0$, dunque 3 soluzioni in tutto.

Disegno affine: controllo che A sia $[0:0:1]$ anche con le eq. affini





Disomogenizzo: $x = \frac{X}{Z} \quad y = \frac{Y}{Z}$

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 - 2X = 0 \\ XY = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow [0:0:1]$ è p.to doppio perchè $X = 0 \Rightarrow Y^2 = 0$

$\Rightarrow A = [0:0:1]$

(iii) $\mathcal{C}_{\lambda,\mu} : \lambda(x^2 + y^2 - 2xz) + \mu x^2 = 0$

$$(\lambda + \mu)x^2 + \lambda y^2 - 2\lambda xz = 0$$

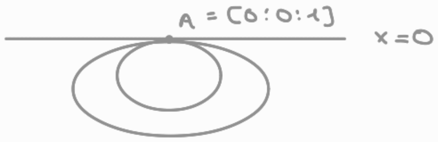
$$A_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} \lambda+\mu & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A_{\lambda,\mu}) = -\lambda^3 \Rightarrow$ una sola conica per $\lambda = 0$

$\mathcal{C}_1 : x^2 = 0$

$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2+y^2-2xz = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ un solo punto $[0:0:1]$

Siamo nel caso (e), luogo base $\{A, A, A, A\}$.



2) Trovare, se esiste, una conica $\mathcal{C}$ che soddisfi :

(i) $\mathcal{C}$ non degenere

(ii) $\mathcal{C}$ tangente alla retta $r_1 : x+z=0$ nel p.to $A = [1:1:-1]$

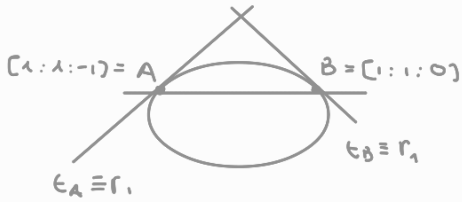
(iii) $\mathcal{C}$ tangente alla retta $r_2 : x-y-z=0$ nel p.to $A = [1:1:0]$

(iv) $\mathcal{C}$ tangente alla retta $r_3 : y=0$

Da (ii) e (iii) so che se $\mathcal{C}$ esiste, e' una conica del fascio generato dalle due coniche degeneri

$\mathcal{C}_1 = r_1 + r_2 \quad : \quad (x+z)(x-y-z) = 0$

$\mathcal{C}_2 = 2\mathcal{L}(A,B) \quad : \quad (x-y)^2 = 0$



Quindi, se esiste, $\mathcal{C}$ e' della forma

$\mathcal{F}_{\lambda,\mu} : \lambda(x+z)(x-y-z) + \mu(x-y)^2 = 0$

raccogliendo, ottengo

$$(\lambda+\mu)x^2 + \mu y^2 - \lambda z^2 - (\lambda+2\mu)xy - \lambda yz = 0$$

Vado con la condizione (iv) di tangenza a $y=0$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \mathcal{F}_{\lambda,\mu} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ (\lambda+\mu)x^2 - \lambda z^2 = 0 \end{cases}$$

$\Delta = \lambda(\lambda+\mu) = 0$

- $\lambda = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{0,\mu} : (x-y)^2 = 0$ degenere, non va bene per (i)
- $\lambda = -\mu \Rightarrow \mathcal{C}_{\lambda,-\lambda} : y^2+z^2-xy+yz = 0$

Cerco la matrice di $\mathcal{C}_{\lambda,-\lambda}$:

$$A_{1,-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A_{1,-1}) = -\frac{1}{4} \neq 0$ non degenere

$\Rightarrow$ La soluzione esiste ed è unica: $\mathcal{C}_{\lambda,-\lambda}$

3) In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ consideriamo

$\mathcal{C}_1: 4xy - z^2 - 4y^2 = 0$

$\mathcal{C}_2: xy + z^2 + 4x^2 - 5yz = 0$

(i) Coniche degeneri del fascio per $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$

(ii) $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ luogo base

(iii) Trovare la proiettività $f: \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ tc

$$f([1:1:0]) = [1:1:0]$$

$$f_*(\mathcal{C}) := f(\mathcal{C})$$

per ogni conica $\mathcal{C}$ del fascio

(i) $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}: \quad \lambda(4xy - z^2 - 4y^2) + \mu(xy + z^2 + 4y^2 - 5yz) = 0$

$$4(\mu-\lambda)y^2 + (\mu-\lambda)z^2 + (4\lambda+\mu)xy - 5\lambda yz = 0$$

$$A_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda + \mu/2 & 0 \\ 2\lambda + \mu/2 & 4(\mu-\lambda) & -\frac{5}{2}\lambda \\ 0 & -\frac{5}{2}\lambda & \mu-\lambda \end{pmatrix}$$

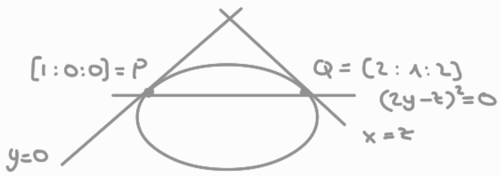
$\det(A_{\lambda,\mu}) = (\mu-\lambda)(2\lambda + \mu/2)^2$

Coniche degeneri si hanno quando

- $\mu = -4\lambda \Rightarrow \dots \Rightarrow (2y-z)^2 = 0$
- $\mu = \lambda \Rightarrow \dots \Rightarrow y(x-z) = 0$

(ii) luogo base: $\begin{cases} (2y-z)^2 = 0 \\ y(x-z) = 0 \end{cases}$ $\quad y(x-z)=0$: $y = 0 \Rightarrow [1:0:0]$; $x = z \Rightarrow [2:1:2]$

Quindi abbiamo



Dunque il luogo base è $\{A, A, B, B\} = \{P, P, Q, Q\}$

(iii) $f: \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, $\quad f(\mathcal{C}) = f(\mathcal{C})$ e $f([1:1:0]) = [1:1:0]$

Una proiettività trasforma rette in rette, quindi manda coniche degeneri in coniche degeneri e coniche non degeneri in coniche non degeneri. In particolare

$$f((2y-z)^2) = (2y-z)^2$$

$$f(y(x-z)) = y(x-z)$$

segue: posto $R = \begin{cases} y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$

si ha $f(R)=R$

Inoltre, noto che

$$f(y(x-z) \cap (2y-z)^2) = y(x-z) \cap (2y-z)^2 = \{P, Q\}$$

cioè $f(\{P,Q\}) = \{P,Q\}$, perciò $f(P)=P$ e $f(Q)=Q$

oppure $f(P)=Q$ e $f(Q)=P$

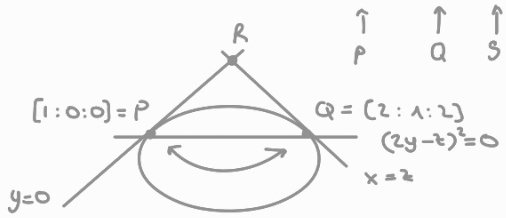
Quindi ho due possibili proiettività

$$(a) \begin{cases} f(R)=R \\ f([1:1:0]) = [1:1:0] \\ f(P)=P \\ f(Q)=Q \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} f(R)=R \\ f([1:1:0]) = [1:1:0] \\ f(P)=Q \\ f(Q)=P \end{cases}$$

dove $R = (1:0:1)$, $P = [1:0:0)$, $Q = [2:1:2]$,

$S = [1:1:0]$. Questi quattro punti sono in posizione generale, quindi (a) e (b) definiscono 2 proiettività di matrici

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad (b) \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ P & Q & S \end{matrix} \end{array}$$



In particolare, nel caso (b) si ha

$$M\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \delta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \implies M\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-M\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta-2\mu\\ \delta-\mu\\ -2\mu\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \implies M\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha-2\mu\\ -\mu\\ \alpha-2\mu\end{pmatrix}$$

Perciò la matrice è $M=\begin{pmatrix}2\mu & \delta-2\mu & \alpha-2\mu\\ \mu & \delta-\mu & -\mu\\ 2\mu & -2\mu & \alpha-2\mu\end{pmatrix}$, a cui devo imporre l'ultima condizione, cioè $f(Q)=P$, che mi dà

$$\begin{pmatrix}2\mu & \delta-2\mu & \alpha-2\mu\\ \mu & \delta-\mu & -\mu\\ 2\mu & -2\mu & \alpha-2\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\cancel{4\mu}+\delta-2\mu+2\alpha-\cancel{4\mu}=a\\ \cancel{2\mu}+\delta-\mu-\cancel{2\mu}=0 \implies \delta=\mu\\ \cancel{4\mu}-2\mu+2\alpha-\cancel{4\mu}=0 \implies \alpha=\mu\end{cases}$$

$\mu-2\mu+2\mu=a \implies \mu=a$

Per $\mu=1$ ottengo la matrice $M=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$