STABILITÀ DEGLI EQUILIBRI

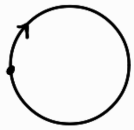
def Equilibrio $\bar z$ è

Tipo ε,δ per la continuità

- "Lyapunov-stabile" se $\forall$ intorno U di $\bar z$ $\exists$ intorno U_0 di $\bar z$ tc $\forall\ z_0 \in U_0 \Rightarrow \gamma_{z_0}(t) \in U \quad \forall t > 0$
- "Lyapunov-stabile per tutti i tempi" se la condizione sopra vale $\forall t \in \mathbb{R}$
- "Asintoticamente stabile" se è stabile e attrattivo
- "Lyapunov instabile" se non è L-stabile

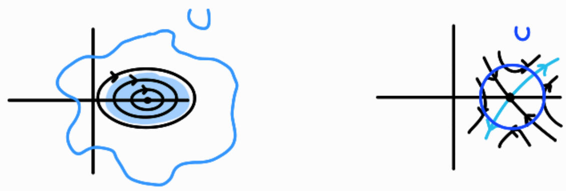
oss Perché non diamo una def di asintotica stabilità che sia solo legata all'attrattività?
Perché esistono equilibri attrattivi ma che non sono stabili, ad esempio

$\dot\theta = 1+\cos\theta \quad , \theta \in S^1$



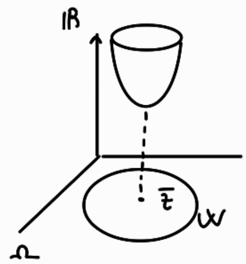
esempio (eq. Newton 1-dim)

dato U, mi basta scegliere l'interno di una qualunque orbita contenuta in U



Metodo delle funzioni di Lyapunov

prop (II teorema di Lyapunov/metodo delle funzioni di Lyapunov). $\bar z$ equilibrio.
Sia $\mathcal{W} : W \longrightarrow \mathbb{R}$ con W aperto che contiene $\bar z$ che ha un minimo stretto in $\bar z$. Allora:



1. $L_X \mathcal{W} = 0 \quad \forall z \in W \Rightarrow \bar z$ è L-st $\forall t$
2. $L_X \mathcal{W} \le 0 \quad \forall z \in W \Rightarrow \bar z$ è L-st
3. $L_X \mathcal{W} < 0 \quad \forall z \in W \setminus \{\bar z\} \Rightarrow \bar z$ è AS-st

NB
- $L_X \mathcal{W}\, \bar z = \underbrace{X(\bar z)}_{=0} \cdot \nabla \mathcal{W}(\bar z) = 0$
- $W \subseteq \Omega$ (non necessariamente $W = \Omega$)
- se una funzione con minimo stretto in $\bar z$ soddisfa una delle tre condizioni, allora è detta "funzione di Lyapunov" — 1. st $\forall t$; 2. st; 3. as-st

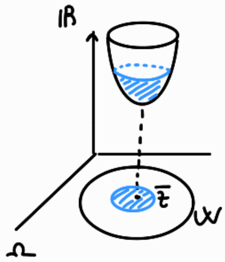
dim 1. W è I.P. $\Rightarrow$ gli insiemi di livello di W sono invarianti

$\Rightarrow$ gli insiemi di "sottolivello" di W sono invarianti e aperti

$W_{c,\bar z} :=$ componente connessa$(\{z \in W : W(z) < c\})$

se $c > W(\bar z) \Rightarrow \bar z \in W_{c,\bar z}$

$\forall c > W(\bar z)$, $W_{c,\bar z}$ è intorno invariante di $\bar z$



lemma W ha minimo stretto in $\bar z$ $\Rightarrow$ $\forall$ intorno U di $\bar z$ $\exists\, c > W(\bar z)$ tc

$\mathbb{R} \leftarrow W \subset \mathbb{R}^n$: $W_{c,\bar z} \subset U$

Ne segue la tesi.

2. $t \longmapsto z_t$ soluzione

$$\frac{d}{dt} W(z_t) = L_X W(z_t) \overset{hyp}{\leq} 0$$

$W(z) < c$

$t \longmapsto W(z_t)$ è non crescente

$\Rightarrow$ gli insiemi di "sottolivello" sono invarianti nel futuro

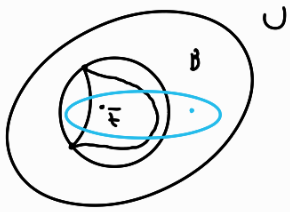
3. $L_X W$ è strettamente decrescente ed $\exists$ limite

(va dimostrato che il limite è il minimo, ma non lo facciamo) $\square$

dim (del lemma).

Prendo una palla aperta $B \ni \bar z$, $B \subset U$ tc $\bar z$ p.to di minimo assoluto di W in $\bar B$.

$$c := \min_{z \in \partial B} W(z) > W(\bar z)$$



ma allora:

- $W_{c,\bar z} \ni \bar z$
- $W_{c,\bar z} \cap \partial B = \emptyset$
- $W_{c,\bar z}$ è connesso

teorema del passaggio alla dogana

$\Rightarrow$ $W_{c,\bar z}$ non può avere un punto al di fuori della frontiera di B

con la connessione per archi è evidente, ma vale anche per la connessione

$\Rightarrow$ $W_{c,\bar z} \subset U$ $\square$

esercizio 1)
$$\begin{cases} \dot x = -x - y + x\log(1+y) \\ \dot y = x - y - xy \end{cases}, (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$(0,0)$ è equilibrio: studiamo le proprietà di L-stab. con la candidata funzione di Lyapunov $W(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

① W ha minimo stretto in $(0,0)$ ✓

② $L_x W(x,y) = x\dot{x} + y\dot{y} = -x^2 - \cancel{xy} + x^2\log(1+y) + \cancel{xy} - y^2 - xy^2$

sicuramente non è $\equiv 0$ in un intorno dell'origine

Ⓘ $L_x W = \underbrace{-(x^2+y^2)}_{\substack{\text{infinitesimo di ordine 2} \\ \hat{0} \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}} \underbrace{-xy^2 + x^2\log(1+y)}_{\substack{\wr\wr \\ x^2 y \\ \text{infinitesimo di ordine 3}}} < 0$ in un intorno sufficientemente piccolo

<u>oss</u> $f(z) = f_0(z) + f_1(z) \qquad z \in \mathbb{R}^n$

- $f_0(z) < 0 \ [>0]$ in un intorno bucato di 0

  $\forall z \in V \setminus \{\bar{z}\}$ con V intorno di 0

- $f_1(z) = o(f_0(z)) \iff \lim_{z \to 0} \dfrac{f_1(z)}{f_0(z)} = 0$

$\Rightarrow f(z) < 0 \ (>0]$ in un intorno bucato di $\bar{z}$

$\forall z \in \underset{\substack{\cap \\ V}}{V_1} \setminus \{\bar{z}\}, \ f(z) < 0$

$L_x W \sim -(x^2+y^2) - xy^2 + x^2 y = -(x^2+y^2) + \overbrace{o((x^2+y^2)^{3/2})}^{\text{infinitesimo di ordine 3}}$

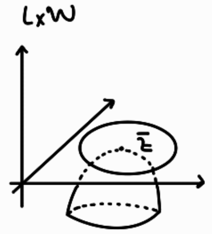
< 0 in un intorno bucato di 0

Ⓘⓘ $f = L_x W : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$L_x W(\bar{z}) = 0$

se $L_x W$ ha un max stretto in $\bar{z}$,

$L_x W < 0$ in un intorno bucato di $\bar{z}$



$$\nabla(L_x W) = \begin{pmatrix} -2x - y^2 + 2x\log(1+y) \\ -2y - 2xy + \dfrac{x^2}{1+y} \end{pmatrix}$$

$\nabla(L_x W)(0,0) = 0 \Rightarrow (0,0)$ è p.to critico

$$H(L_x W) = \begin{pmatrix} -2 + 2\log(1+y) & -2y + \dfrac{2x}{1+y} \\ -2y + \dfrac{2x}{1+y} & -2 - 2x - \dfrac{x^2}{(1+y)^2} \end{pmatrix}$$

$(L_x W)''(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (0,0)$ max stretto

2) $\begin{cases} \dot{x} = 3y - x^3 + xy^2 \\ \dot{y} = -x - \frac{y^3}{3} - x^2 y \end{cases}$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$(0,0)$ è equilibrio

$W_a(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + a y^2)$

Determinare a t.c. W_a sia funzione di Lyapunov per $(0,0)$

① W_a ha min stretto in $(0,0)$ $\Rightarrow a > 0$

② $L_X W_a = x\dot{x} + a y \dot{y} = 3xy - x^4 + x^2y^2 - axy - \frac{a}{3}y^4 - ax^2y^2$

$= (3-a)xy - (x^4 + \frac{a}{3}y^4) + (1-a)x^2y^2$

Sicuramente $L_X W \neq 0$ dato che c'è un $-x^4$

Ⓘ $L_X W_a = \underbrace{(3-a)xy}_{2} \underbrace{- (x^4 + \frac{a}{3}y^4) + (1-a)x^2y^2}_{4}$

bisogna $(3-a)xy$ non ha segno def

Poniamo allora $a = 3$:

$L_X W = -(x^4 + y^4) - 2x^2y^2 = -(x^2+y^2)^2 < 0$

in un intorno bucato dell'origine.

$\Rightarrow (0,0)$ è as-st

3) $\begin{cases} \dot{x} = 3xy - x^3 \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Proprietà di stabilità di $(0,0)$ con $W_a(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + a y^2)$

① W_a min stretto in $(0,0)$ $\Rightarrow a > 0$

conto è sbagliato, ma facciamo finta di niente

② $L_X W_a = (3-a)xy - (x^4 + a y^4)$

ora correggiamo

L'unica possibilità è per $a = 3$: $L_X W = -(x^4 + a y^4) < 0$

in un intorno bucato dell'origine

$L_X W_a = 3x^2y - axy - x^4 - ay^4 = -axy + 3x^2y - (x^4 + ay^4)$

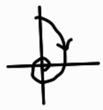
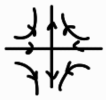
In questo caso siamo fregati perché se $a = 0$ si ha

$L_X W = \underbrace{3x^2y}_{\text{non ha segno def!}} - x^4$

oss Vogliamo indagare la stabilità dell'origine $(0,0)$ per i sistemi lineari in $\mathbb{R}^n$.

$\dot{z} = Az$, A diagonalizzabile (con avl $\neq 0$)

$z \in \mathbb{R}^2$:

- centri  st bt
- nodi e fuochi stabili   as-st
- nodi e fuochi instabili inst
- sella  inst

$z \in \mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}^n = \langle \, , \rangle \oplus \dots \oplus \langle \, \rangle = E^u \oplus E^s \oplus E^c$

① tutti gli avl. di A hanno $Re < 0$ as-st

② $\exists$ 1 avl. $Re > 0$ inst

③ tutti gli avl. di A hanno $Re \leq 0$ st

(e almeno 1 ha $Re = 0$)

Metodo spettrale

Si vuole estendere quanto visto sopra alla linearizzazione di un sistema di eq. diff. non lineare

TEOREMA (I teorema di Lyapunov / Teorema spettrale). Eq. $\bar{z}$ di $\dot{z} = X(z)$, $z \in \Omega$

1. se tutti gli autovalori di $X'(\bar{z})$ hanno $Re(\,) < 0$ $\Rightarrow$ stab. as.

no dim $\longrightarrow$ 2. se almeno un autovalore di $X'(\bar{z})$ ha $Re(\,) > 0$ $\Rightarrow$ instab

dim 1. hp: $X'(\bar{z})$ diagonalizzabile con $\text{avl} = \{\alpha_j \pm i\beta_j, \alpha_k\}$

$\Longrightarrow \exists\, P$ tc $P^{-1} X'(\bar{z}) P = \text{diag}(B_1, \dots, B_k, \alpha_{2k+1}, \dots, \alpha_n) = A$

con $B_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$

Facciamo un cambiamento di coordinate: $z \longmapsto \varphi(z) = P^{-1}(z - \bar{z}) =: y$

In questo modo calcoliamo nella base in cui il campo vett. si trasforma

$Y := \varphi_* X$

$Y(y) = (\varphi' X)(\varphi^{-1}(y))$

$= (\varphi' X)(\bar{z} + Py) =$

$= \varphi'(\bar{z} + Py)\; X(\bar{z} + Py) = P^{-1} X(\bar{z} + Py)$

0 è eq. asintoticamente stab. di $\dot{y} = \Psi(y)$. Per vederlo, verifichiamo che la funzione $W(y) = \frac{1}{2}\|y\|^2$ è di Lyapunov:

- ha min stretto in 0 (ovvio)
- $L_\Psi W < 0$ in un intorno bucato di 0

$$L_\Psi W(y) = \Psi(y) \cdot \nabla W(y)$$

$$= \Psi(y) \cdot y$$

$O_p = O(\|t\|^p)$

Taylor

$$= [\overset{0}{\Psi(0)} + \Psi'(0)\,y + O_2] \cdot y$$

$$= \underbrace{\Psi'(0)}_{P^{-1}X'(\bar{z})P}\, y \cdot y + O_3 = Ay \cdot y + O_3$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \\ & \alpha_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \alpha_{2k+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & & & \\ -\beta_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = D + Q$$

$$= y \cdot Dy + \underbrace{y \cdot Qy}_{=0 \text{ (Q antisimmetrica)}} + O_3$$

$$= \alpha_1 y_1^2 + \alpha_1 y_2^2 + \dots + \alpha_n y_n^2 + O_3$$

con tutti gli $\alpha_j < 0 \Rightarrow L_\Psi W < 0$ in un intorno bucato di 0. $\square$

condizioni sufficienti per stab. as. e instab.

OSS

- ⊙ se tutti $Re(\text{aut}) < 0 \Rightarrow$ stab. as
- ⊙ se $\exists$ $Re(\text{aut}) > 0 \Rightarrow$ instab.
- Non dice nulla se $Re(\text{aut}) \leq 0$ e almeno uno ha $Re(\text{aut}) = 0$
- ⊙ L-stab $\Rightarrow Re(\text{aut}) \leq 0$

condizione necessaria per la stabilità

OSS Questo metodo è molto più veloce delle funzioni di Lyapunov: per analisi di stabilità conviene partire dal metodo spettrale

esercizio

$$\begin{cases} \dot{x} = (y-1)(x+y) \\ \dot{y} = 2(x-1)y \end{cases}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

equilibri: $(0,0), (1,1), (1,-1)$

stabilità (tramite metodo spettrale): $X'(x,y) = \begin{pmatrix} y-1 & x+2y-1 \\ 2y & 2(x-1) \end{pmatrix}$

- $X'(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

  aut: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_\pm = -2, -1 < 0 \Rightarrow$ stab. as.

- $X'(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

  aut: $\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_\pm = \pm 2 \Rightarrow$ instab. $\longrightarrow$ qui la linearizzazione ci dice che c'è una retta

- $X'(1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

  aut: $\lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_\pm = -1 \pm \sqrt{5}$ $\begin{cases} >0 \\ <0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ instab.

Studiamo $(0,0)$ con una funzione di Lyapunov: $W_\lambda(x,y) = \frac{1}{2}(\lambda x^2 + y^2)$

- min stretto: $\lambda > 0$
- $L_X W_\lambda = \lambda x\dot{x} + y\dot{y} = \lambda x(y-1)(x+y) + 2y^2(x-1)$

$$= \lambda x(xy - x + y^2 - y) + 2y(xy - y)$$
$$= \underline{\lambda x^2 y} - \lambda x^2 + \underline{\lambda x y^2} - \lambda xy + \underline{2xy^2} - 2y^2$$
$$= -(\lambda x^2 + 2y^2 + \lambda xy) + O_3$$

OSS Non può essere $L_X W_\lambda = 0$, altrimenti W_λ sarebbe integrale primo e $(0,0)$ non potrebbe essere eq. attrattivo

L'unica opzione è che $-(\lambda x^2 + 2y^2 + \lambda xy) < 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Vogliamo dim che in $(0,0)$ ha un max stretto. Possiamo calcolare l'hessiana oppure osservare che è una forma quadratica e studiare quella.

$(L_X W_\lambda)' = (-2\lambda x - \lambda y, -4y - \lambda x) = 0$ in $(0,0)$

$$(L_X W_\lambda)'' = \underbrace{\begin{pmatrix} -2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & -4 \end{pmatrix}}_{\text{matrice associata alla forma quadratica}}$$

1° min. principale: $-2\lambda < 0$

2° min. principale: $8\lambda - \lambda^2 = \lambda(8-\lambda) \overset{?}{>} 0 \Rightarrow 8 > \lambda$

$\forall \lambda : 0 < \lambda < 8$ W_λ è funzione di Lyapunov che dà stab. as.

Confronto metodo spettrale - funzione di Lyapunov (eq. Newton 1-dim)

$\ddot{x} = -V'(x)$, $x \in \mathbb{R}$ $(m=1)$

equilibri: $(\bar{x}, 0)$ con $V'(\bar{x}) = 0$

linearizzazione: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V''(\bar{x}) & 0 \end{pmatrix}$

autovalori: $\lambda_\pm = \pm\sqrt{-V''(\bar{x})}$

- $V''(\bar{x}) > 0 \Rightarrow$ minimo stretto $\Rightarrow$ stab. 

  $\lambda_\pm = \pm i\sqrt{V''(\bar{x})}$ con $Re = 0 \Rightarrow$ il metodo spettrale non dice nulla

  <u>OSS</u> se $\exists$ un integrale primo, il metodo spettrale ci dà informazione solo sull'instabilità (non può esserci, infatti stab. as.)

- $V''(\bar{x}) < 0 \Rightarrow$ max stretto 

  $\lambda_\pm = \pm\sqrt{|V''(\bar{x})|} \Rightarrow 1$ avl. positivo $\Rightarrow$ instab

- $V''(\bar{x}) = 0$

  $\lambda_\pm = 0 \Rightarrow$ il metodo spettrale non ci dice nulla

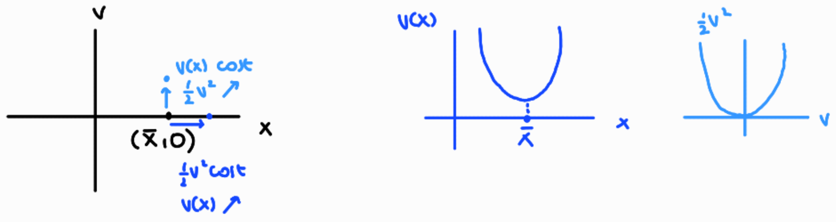
Sappiamo che $(\bar{x},0)$ è stab. $\forall t$ se $\bar{x}$ è min stretto di V.

Vediamo come riusciamo ad ottenere con le funzioni di Lyapunov.

Se c'è un integrale primo, lo si usa, in genere, come funzione di Lyapunov.

$W(x,v) = \frac{1}{2}v^2 + V(x)$ $(m=1)$ funzione energia

- $L_X W = 0$ (ovvio perché integrale primo)
- ha minimo stretto in $(\bar{x},0)$ se $\bar{x}$ min. stretto di V? Sì! $\Rightarrow$ stab. $\forall t$

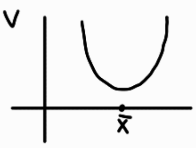
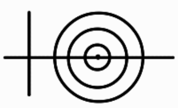


Introduciamo della dissipazione: $\ddot{x} = -V'(x) - 2h\dot{x}$, $h>0$

equilibri: $(\bar{x},0)$ t.c. $V'(\bar{x}) = 0$ (la dissipazione non cambia gli equilibri)

linearizzazione: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V''(\bar{x}) & -2h \end{pmatrix}$

autovalori: $\lambda^2 + 2h\lambda + V''(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \lambda_\pm = -h \pm \sqrt{h^2 - V''(\bar{x})}$

Sia $\bar{x}$ minimo stretto: $h=0$:  

$h>0$?

1) $V''(\bar{x}) > 0$

- $h^2 < V^2(\bar{x})$: $Re(\lambda_\pm) < 0 \Rightarrow$ stab. as. (fuoco stab.)
- $h^2 = V^2(\bar{x})$: $Re(\lambda_\pm) < 0 \Rightarrow$ stab. as.
- $h^2 > V^2(\bar{x})$: $2\lambda < 0 \Rightarrow$ stab. as. (nodo stab.)

2) $V''(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \lambda_\pm = -h \pm h = 0, -2h$ (ci aspettiamo stab. asintotica)

$\Rightarrow$ il metodo spettrale non ci dice nulla

Proviamo ad utilizzare una funzione di Lyapunov per $\ddot{x} = -V(\bar{x}) - 2h\dot{x}$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -V'(x) - 2h\dot{x} \end{cases}$$

proviamo ad utilizzare l'energia (la dissipazione la contiene)

$E(x,v) = \frac{1}{2}v^2 + V(x)$

- min stretto in $(\bar{x}, 0)$? Sí
- $L_X E = v\dot{v} + V'(x)\dot{x} = v(-\cancel{V'(x)} - 2hv) + \cancel{V'(x)}v = -2hv^2 \leq 0$
  $= 0$ se $v = 0$

$\Rightarrow$ riusciamo a dimostrare solo la stabilità nel futuro (non quella asintotica)

Per trovare la stab. asintotica abbiamo due possibilità:

- modificare la funzione di Lyapunov
- affinare il II teorema di Lyapunov

<u>esercizio</u> $\begin{cases} \dot{x} = -x^3 + xy^2 \\ \dot{y} = -3x^2y - y^b \end{cases}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $b \geq 0$

$\exists b$ tc $W(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ è funzione di Lyapunov per l'eq. $(0,0)$?

$L_X W(x,y) = -x^4 - 2x^2y^2 - y^{b+1}$

Scegliamo $b = 3$ e otteniamo

$= -(x^2+y^2)^2 < 0$ in un intorno bucato di $(0,0)$

Supponiamo di aver trovato: $L_X W(x,y) = -x^2 - 2xy - y^2 = -(x+y)^2 \leq 0$

(non è < 0 in un intorno bucato di $(0,0)$, dato che si annulla lungo tutta la retta $y = -x$). In questo caso Lyapunov mi dà solo stab. (non stab. as.)

esercizio $\begin{cases} \dot{x} = \\ \dot{y} = \\ \dot{z} = \end{cases}$ $(0,0,0)$

equilibrio: $\sin x = -x$ ha unico 0 in $(0,0)$

$W_a = \frac{1}{2}(x^2+y^2+az^4)$

- min stretto in $(0,0,0) \Rightarrow a>0$

vogliamo eliminarlo perché cambia di segno al variare di x e z

- $L_X W_a = -(x\sin x + 2az^6) + (1-2a)xz^3$

$a = \frac{1}{2}$: $L_X W = -(x\sin x + z^6)$ <0 in intorno bucato di $(0,0,0)$?

$\simeq -x^2 - z^6$

No, perché siamo in $\mathbb{R}^3$ e $L_X W = 0$ su tutto l'asse delle y !