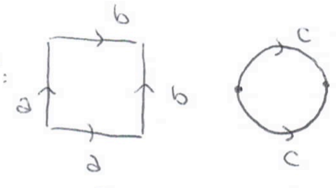
**def** Una **n-VARIETÀ TOPOLOGICA REALE** è uno sp. top. $X$ tc

1) $X$ è di Hausdorff
2) $X$ è connesso
3) $X$ ammette una base numerabile di aperti
4) Ogni $x \in X$ ammette un intorno aperto omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$

Se $n=2$ le chiameremo **SUPERFICI REALI**

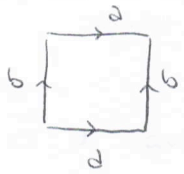
**def** Una **RAPPRESENTAZIONE POLIGONALE** di una superficie reale compatta $X$ è un poligono piano $P$ con una regola di identificazione dei lati tc $P/_{\sim} \underset{\text{omeo}}{\cong} X$

esempi
- (sfera) $S^2$:



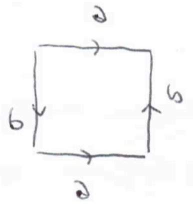

$ab\bar{b}\bar{a}$ $\quad$ $c\bar{c}$

- (toro) $\mathbb{T}$:



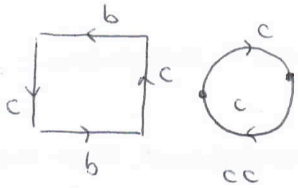

$ab\bar{a}\bar{b}$

- (otre di Klein) $\mathbb{K}$:




$ab\bar{a}b$

- (piano proiettivo) $\mathbb{P}$:




$bcbc$ $\quad$ $cc$

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \overbrace{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}^{\text{rette di } \mathbb{R}^3 \text{ per l'origine}} / \mathbb{R}^* = \overbrace{S^2 / \pm 1}^{\text{prendo un punto su } S^2 \text{ e identifico punti antipodali}}$$


Infatti $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = S^2/_{\pm 1}$, dunque è omeomorfo al disco con i punti del bordo identificati

**def** Una superficie reale compatta è **NON ORIENTABILE** se contiene un nastro di Möbius

**def** Siano $S_1, S_2$ due superfici reali compatte e siano $D_1, D_2$ due dischi rispettivamente su $S_1, S_2$ (ossia sottospazi omeomorfi a dischi chiusi di $\mathbb{R}^2$). Allora la **somma connessa** è data da

$$S_1 \# S_2 = \frac{(S_1 \setminus \mathring{D}_1) \cup (S_2 \setminus \mathring{D}_2)}{\sim}$$

$\sim$ ← omeo. tra i bordi di $D_1$ e $D_2$

**prop** Valgono le seguenti proprietà:
- $S_1 \# S_2 = S_2 \# S_1$
- $(S_1 \# S_2) \# S_3 = S_1 \# (S_2 \# S_3)$
- $S_1 \# S^2 = S_1$

oss Le rappresentazioni poligonali di superfici reali compatte sono modificabili per chirurgia

oss Se $S_1, S_2$ sono sup. reali compatte, una rappresentazione poligonale di $S_1 \# S_2$ si ottiene per INSERIMENTO, ossia giustapponendo le rappresentazioni poligonali di $S_1$ e $S_2$

prop Regole della chirurgia:

- $a\bar{a} \sim \emptyset$
- $a\alpha \sim \alpha a$ (ciclicità)
- $\alpha \sim \bar{\alpha}$
- $\alpha a \beta a \sim \alpha \bar{\beta} a a \sim \alpha a a \bar{\beta}$ (coppie concordi)
- $\alpha a \beta \beta' \bar{a} \sim \alpha a \beta' \beta \bar{a}$ (coppie discordi)

esempi
- $\mathbb{K}$ $ab\bar{a}b \underset{\text{coppie concordi}}{\sim} aabb$ $\mathbb{P}\#\mathbb{P}$
- $\mathbb{T}\#\mathbb{P}$ $ab\bar{a}\bar{b}cc \underset{\text{coppie concordi}}{\sim} ab\bar{a}cbc \underset{\text{coppie concordi}}{\sim} a\bar{c}abbc \underset{\text{coppie concordi}}{\sim} caabbc \underset{\text{ciclicità}}{\sim} aabbcc$ $\mathbb{P}\#\mathbb{P}\#\mathbb{P}$

def Un TRIANGOLO su una superficie $S$ è il dato di una appl. continua $t: \Delta \to S$ che sia omeomorfa sull'immagine ($\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$)

def Una TRIANGOLAZIONE di $S$ (reale compatta) è una famiglia finita di triangoli $t_i : \Delta \to S$ t.c. $T_i = \operatorname{Im} t_i$ ricoprono $S$ e due distinti $T_i$ o sono disgiunti o hanno un solo vertice in comune oppure hanno un solo lato in comune

TEOREMA (di Radò). Ogni superficie reale compatta è triangolabile

TEOREMA (di classificazione delle superfici reali compatte). Ogni superficie reale compatta è omeomorfa a una fra:

- somma connessa di tori $\mathbb{T}^{\#m}$, $m \geq 0$, ove $\mathbb{T}^{\#0} = \mathbb{S}$
- somma connessa di piani proiettivi $\mathbb{P}^{\#m}$, $m \geq 1$

dim La dimostrazione parte da una triangolazione di una superficie: con opportuni tagli costruisco una rappresentazione poligonale della superficie con un numero pari di lati e dove ciascuna lettera compare 2 volte oppure appare $a\bar{a}$.
Con operazioni di chirurgia mi riduco ai casi:

($\mathbb{S}$) $\emptyset = a\bar{a}$

($\mathbb{T}^{\#m}$) $m \geq 1$ $a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1 \cdots a_m b_m \bar{a}_m \bar{b}_m$

($\mathbb{P}^{\#m}$) $m \geq 1$ $a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_m a_m$

**def** Sia $S$ una superficie reale compatta. Per il teorema di Radó $S$ è triangolabile. Fissata una triangolazione su $S$, posso considerare il numero, detto **CARATTERISTICA DI EULERO-POINCARÈ**,

$$\chi = V - L + T$$

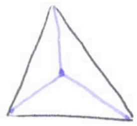
con $V = \#$ vertici nella triang.

$L = \#$ lati nella triang.

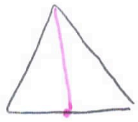
$T = \#$ triangoli nella triang.

**prop** $\chi$ non dipende dalla scelta della triangolazione

**dim** Siano $\tau, \tau'$ due triangolazioni di $S$. Allora esiste una triangolazione $\tau''$ di $S$ che è più fine di $\tau$ e $\tau'$. Infatti triangolazioni più fini sono ottenute nei seguenti modi:

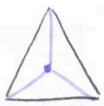
a) 

aggiungendo un vertice interno al triangolo e i corrisp. lati

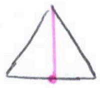
b) 

aggiungendo un vertice su un lato e il lato che lo congiunge al vertice opposto

Mi basta controllare che se $\tau'$ è triangolazione più fine di $\tau$, allora $\tau$ e $\tau'$ danno la stessa $\chi$. Mi basta dimostrarlo per a) e b).

a) 

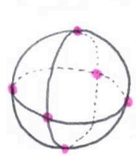
$$V' = V+1,\quad L' = L+3,\quad T' = T+2 \implies T' - L' + V' = T - L + V$$

b) 

$$V' = V+1,\quad L' = L+2,\quad T' = T+1 \implies T' - L' + V' = T - L + V$$

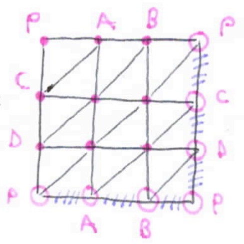
**def** Sia $S$ sup. reale compatta. Definisco il **GENERE** (topologico) di $S$ come il numero

$$g_S = \begin{cases} \dfrac{2-\chi_S}{2} & \text{se } S \text{ è orientabile} \\ 2-\chi_S & \text{se } S \text{ non è orientabile} \end{cases}$$

**esempi** $\mathbb{S}$: 

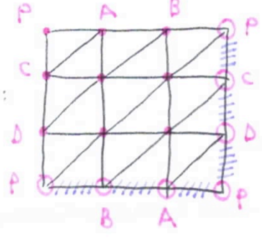
$\chi_{\mathbb{S}} = V - L + T = 6 - 12 + 8 = 2$

$g_{\mathbb{S}} = 0$

$\mathbb{T}$: 


$\chi_{\mathbb{T}} = V - L + T = 9 - 27 + 18 = 0$

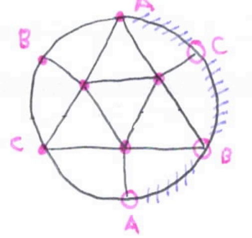
$g_{\mathbb{T}} = \dfrac{2-0}{2} = 1$

$\mathbb{K}$: 


$\chi_{\mathbb{K}} = V - L + T = 9 - 27 + 18 = 0$

$g_{\mathbb{K}} = 2 - 0 = 2$

$\mathbb{P}$ :




$$\chi_{\mathbb{P}} = V - L + T = 6 - 15 + 10 = 1$$

$$g_{\mathbb{P}} = 2 - 1 = 1$$

Dunque per le superfici reali compatte note abbiamo

| | $S$ | $\mathbb{T}$ | $\mathbb{K}$ | $\mathbb{P}$ |
|---|---|---|---|---|
| $g$ | 0 | 1 | 2 | 1 |
| $\chi$ | 2 | 0 | 0 | 1 |

<u>lemma</u> Sia $S = S_1 \# S_2$. Allora

a) $\chi_S = \chi_{S_1} + \chi_{S_2} - 2$

b) $g_S = \begin{cases} g_{S_1} + g_{S_2} & \text{se } S_1 \text{ e } S_2 \text{ entrambe orientabili / non orientabili} \\ 2g_{S_1} + g_{S_2} & \text{se } S_1 \text{ orientabile e } S_2 \text{ non orientabile} \end{cases}$

<u>dim</u> Ricordo che un disco è omeomorfo al triangolo pieno e posso assumere che il triangolo interessato dalla costruzione della # sia un triangolo della triangolazione fissata su $S_1$ ed idem su $S_2$. Ottengo così una triangolazione di $S_1 \# S_2$ a partire da quella di $S_1$ ed $S_2$.

Se chiamo $T_i, V_i, L_i$ il # triangoli/vertici/lati della triang. di $S_i$, $i = 1,2$, i corrispondenti $T, V, L$ per $S_1 \# S_2$ sono

$$T = T_1 + T_2 - 2$$

$$V = V_1 + V_2 - 3$$

$$L = L_1 + L_2 - 3$$

$$\Rightarrow \chi_{S_1 \# S_2} = V - L + T = L_1 + L_2 - V_1 - V_2 + T_1 + T_2 - 2 = \chi_{S_1} + \chi_{S_2} - 2$$

Riscrivo $2 - \chi_{S_1 \# S_2} = 2 - \chi_{S_1} + 2 - \chi_{S_2}$

$$g_{S_1 \# S_2} = \begin{cases} S_1, S_2 \text{ orientabili} \Rightarrow S_1 \# S_2 \text{ orientabile} & \dfrac{2 - \chi_{S_1 \# S_2}}{2} = \dfrac{2 - \chi_{S_1}}{2} + \dfrac{2 - \chi_{S_2}}{2} = g_{S_1} + g_{S_2} \\ S_1, S_2 \text{ non orientabili} \Rightarrow S_1 \# S_2 \text{ non orientabile} & 2 - \chi_{S_1 \# S_2} = 2 - \chi_{S_1} + 2 - \chi_{S_2} = g_{S_1} + g_{S_2} \\ S_1 \text{ orient.}, S_2 \text{ non orient.} \Rightarrow S_1 \# S_2 \text{ non orientabile} & 2 - \chi_{S_1 \# S_2} = \dfrac{2 - \chi_{S_1}}{2} \cdot 2 + 2 - \chi_{S_2} = 2g_{S_1} + g_{S_2} \end{cases}$$

<u>corollario</u> $S = \mathbb{T}^{\# m}$, $m \geq 1$, $g = m$

$S = \mathbb{P}^{\# m}$, $m \geq 1$, $g = m$

<u>oss</u>
- $g$ per superfici reali compatte orientabili misura il numero di buchi/manici
- $g$ per superfici reali compatte non orientabili misura il numero di cross-cap (piani proiettivi) contenuti.

<u>esempio</u> (solidi platonici). I solidi platonici sono solidi che hanno per facce poligoni regolari e inscrivibili in $\mathbb{S}$. In particolare, sono superfici reali compatte omeomorfe ad $\mathbb{S}$ e dunque $\chi = 2$.

Fisso un solido platonico. Indico con

$3 \leq n = \#$ lati del poligono regolare usato per costruirlo

$N = \#$ facce del solido

$3 \leq c = \#$ poligoni che si incontrano in ciascun vertice

Costruisco una triangolazione della superficie del solido aggiungendo un punto interno a ciascuna faccia e congiungendolo con i vertici della faccia.

$$T = N \cdot n$$

$$L = \frac{N \cdot n}{2} + N \cdot n$$

$$V = \frac{N \cdot n}{c} + N$$

$$\Longrightarrow 2 = \chi = V - L + T = -\frac{N \cdot n}{2} + \frac{N \cdot c}{2} + N = N\left(1 + \frac{n}{c} - \frac{n}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{c} - \frac{1}{2} > 0$$

$$\overset{c \geq 3}{\Longrightarrow} \frac{1}{n} > \frac{1}{2} - \frac{1}{c} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Longrightarrow n < 6$$

$$\overset{n \geq 3}{\Longrightarrow} \frac{1}{c} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Longrightarrow c < 6$$

| c \ n | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|
| 3 | $N=4$ tetraedro | $N=6$ cubo | $N=12$ dodecaedro |
| 4 | $N=8$ ottaedro | $\nexists$ | $\nexists$ |
| 5 | $N=20$ icosaedro | $\nexists$ | $\nexists$ |

**def** $f:[a,b]\to X$ continua, $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, $X$ sp. top. è detto **CAMMINO** da $x=f(a)$ a $x'=f(b)$

**oss** Ogni cammino può essere pensato con dominio nell'intervallo $[0,1]$ tramite la riparametrizzazione

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "\tilde{f}"'] & {[a,b]} \arrow[d, "f"] \\ & X \end{tikzcd}$$
$$t \longmapsto (b-a)t+a$$

**def** se $f:\underset{I}{[0,1]}\to X$ e $g:I\to X$ tc $f(1)=g(0)$, allora il **CAMMINO PRODOTTO** è dato da $h=f\cdot g:I\to X$ definito tramite

$$h(t)=\begin{cases} f(2t) & 0\leq t\leq 1/2 \\ g(2t-1) & \frac{1}{2}\leq t\leq 1\end{cases}$$

**lemma 1** $F:Y\to Z$ funzione insiemistica tra due spazi topologici. Suppongo che $Y=A\cup B$ con $A$ e $B$ chiusi in $Y$ e che $F|_A:A\to Z$ e $F|_B:B\to Z$ siano continue. Allora $F$ è continua.

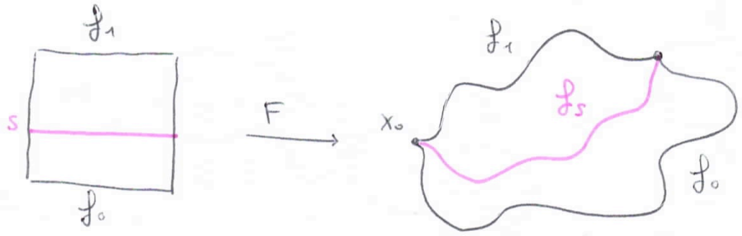
**dim** Sia $C\subseteq Z$ un chiuso.

$$F^{-1}(C)=(F^{-1}(C)\cap A)\cup(F^{-1}(C)\cap B)=\underbrace{F^{-1}|_A(C)}_{\substack{\text{chiuso in } A\\ \Rightarrow \text{chiuso in } Y}}\cup\underbrace{F^{-1}|_B(C)}_{\substack{\text{chiuso in } B\\ \Rightarrow \text{chiuso in } Y}}$$

**def** Due cammini $f_0,f_1:[0,1]\to X$ si dicono **OMOTOPI** (o **OMOTOPICAMENTE EQUIVALENTI**) se esiste un'applicazione continua $F:I\times I\to X$, detta **OMOTOPIA**, tc

$$F(t,0)=f_0 \quad \forall t\in I$$
$$F(t,1)=f_1 \quad \forall t\in I$$
$$F(0,s)=f_0(0)=f_1(0) \quad \forall s\in I$$
$$F(1,s)=f_0(1)=f_1(1) \quad \forall s\in I$$

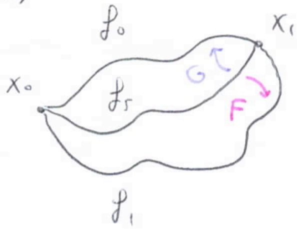
Scriveremo $f_0\sim f_1$. Possiamo definire $f_s:=F(t,s)$ cammino $I\to X$ di p.to iniziale $x_0$ e finale $x_1$




**lemma 2** La relazione di omotopia tra cammini è una relazione di equivalenza

**dim** • (riflessiva). 
$$\begin{tikzcd} F: I\times I \arrow[r] \arrow[d, "\text{proiezione}"'] & X \\ I \arrow[ur, "f"'] \end{tikzcd} \qquad (t,s)\longmapsto f(t) \qquad \Rightarrow f\sim f$$
$$t \mapsto f$$

• (simmetrica). $f \sim g$, $F: I \times I \longrightarrow X$ omotopia
$(t,s) \longmapsto F(t,s)$



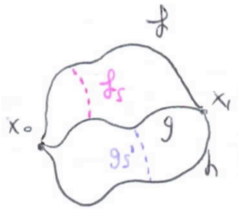

$\Rightarrow G: I \times I \longrightarrow X$

$$\begin{tikzcd}
(t,s) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "s"] & F(t,1-s) \\
(t,1-s) \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

è omotopia

$\Rightarrow g \sim f$

• (transitiva).



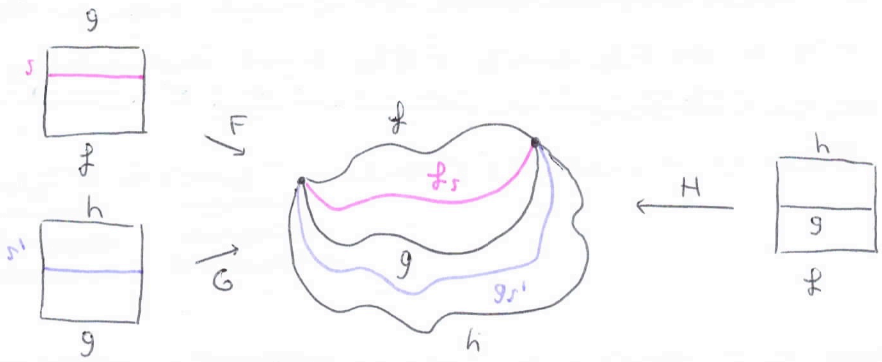

sia $F: I \times I \to X$ omotopia tra $f$ e $g$ ($f \sim g$)

sia $G: I \times I \to X$ omotopia tra $g$ e $h$ ($g \sim h$)

$\Rightarrow H: I \times I \longrightarrow X$ è omotopia

$$(t,s) \longmapsto \begin{cases} F(t,2s) & 0 \le s \le 1/2 \\ G(t,2s-1) & 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow f \sim h$



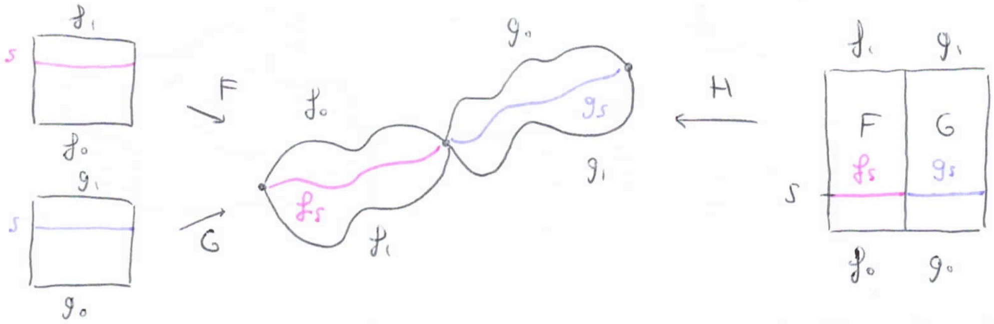

<u>lemma 3</u> $f_0 \sim f_1$, $g_0 \sim g_1$ $\Rightarrow$ $f_0 \cdot g_0 \sim f_1 \cdot g_1$

<u>dim</u> $F$ omotopia tra $f_0$ e $f_1$

$G$ omotopia tra $g_0$ e $g_1$

$\Rightarrow H: (t,s) \longmapsto \begin{cases} F(2t,s) & 0 \le t \le 1/2 \\ G(2t-1,s) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$ è omotopia

$\Rightarrow f_0 \cdot g_0 \sim f_1 \cdot g_1$




<u>def</u> sia $f: I \to X$ cammino da $x_0$ a $x_1$ in $X$. Indico con $\bar{f}: I \to X$ il cammino definito da $\bar{f}(t) = f(1-t)$ tra $x_1$ e $x_0$ in $X$ e lo chiamo CAMMINO INVERSO di $f$

**def** $\mathcal{C}(I,X) = \{ f : I \to X \text{ continua} \}$, $\sim$ relazione di omotopia, dunque $\mathcal{C}(I,X)/_\sim$ è l'insieme delle classi di omotopia. Dato $f \in \mathcal{C}(I,X)$, indico con $[f]$ la sua classe.

Dal lemma 3 posso definire il PRODOTTO DI CLASSI DI OMOTOPIA come

$$[f_0]\cdot[g_0] = [f_0 \cdot g_0]$$

**prop** valgono le seguenti proprietà:

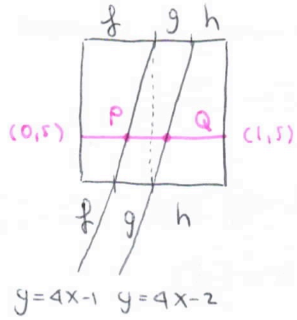
a) $([f][g])[h] = [f]([g][h])$ ovvero $(f\cdot g)\cdot h \sim f\cdot(g\cdot h)$

b) $[f][\bar{f}] = \mathcal{E}_{x_0} = [e_{x_0}]$

$[\bar{f}][f] = \mathcal{E}_{x_1} = [e_{x_1}]$

c) $[f]\cdot\mathcal{E}_{x_1} = [f] = \mathcal{E}_{x_0}\cdot[f]$

**dim** a) siano $f, g, h \in \mathcal{C}(I,X)$ t.c. $f(1) = g(0)$ e $g(1) = h(0)$




$P = \left(\frac{s+1}{4}, s\right)$

$Q = \left(\frac{s+2}{4}, s\right)$

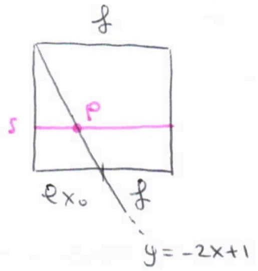
$0 \leq \frac{4t}{s+1} \leq 1$

② $\Longleftarrow$ ①

$$H : (t,s) \longmapsto \begin{cases} f\left(\frac{4t}{s+1}\right) & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ g(4t-s-1) & \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ h\left(\frac{4t-s-2}{s-2}\right) & \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è omotopia tra $(f\cdot g)h$ e $f\cdot(g\cdot h)$

b) mostro solo $e_{x_0}\cdot f \sim f$

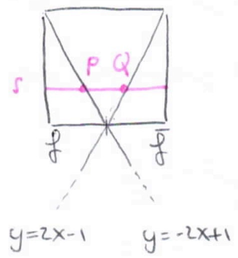



$P = \left(\frac{1-s}{2}, s\right)$

$$H : (t,s) \longmapsto \begin{cases} x_0 & 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ f\left(\frac{2t-1+s}{1+s}\right) & \frac{1-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è omotopia tra $e_{x_0}\cdot f$ e $f$

c)




$P = \left(\frac{1-s}{2}, s\right)$

$Q = \left(\frac{s+1}{2}, s\right)$

$$H : (t,s) \longmapsto \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ \underset{= \bar{f}(s)}{f(1-s)} & \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ \underset{= \bar{f}(2t-1)}{f(2-2t)} & \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

**def** Sia $x_0 \in X$ fissato. Indico con $\pi_1(X, x_0)$ l'insieme delle classi di omotopia di cappi di p.to base $x_0$. Dalle proprietà a), b), c), con $x_0 = x_1$, deduciamo che $\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo rispetto al prodotto di classi di cammini, detto **GRUPPO FONDAMENTALE** di $X$ di p.to base $x_0$.

**prop** I gruppi fondamentali di uno spazio topologico rispetto a punti base collegati da un arco sono isomorfi. In particolare, se $f: I \to X$ cammino da $x_0$ a $x_1$ e $\gamma = [f]$, allora
$$\gamma_*: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1) \quad \text{è isomorfismo di gruppi}$$
$$[g] \longmapsto [\bar{f} \cdot g \cdot f]$$

**dim** 1) $\gamma_*$ è ben definita

$h \sim h'$ tramite $H(t,s)$
$\bar{h} \sim \bar{h}'$ tramite $H(1-t, s)$

- Sia $\alpha = [g] = [g']$. Ottengo che se $h \sim h'$, allora $\overset{①}{\bar{h} \sim \bar{h}'}$ ② $k \sim k' \Rightarrow h \cdot k \sim h' \cdot k'$ (in particolare otteniamo una legge di cancellazione) e dunque
$$[\bar{f} g f] = [\bar{f}][g][f] \underset{[g]=[g']}{=} [\bar{f}][g'][f] = [\bar{f} g' f]$$
- Sia $\gamma = [f] = [f']$. Allora $[\bar{f} g f] = [\bar{f}][g][f] = [\bar{f}'][g][f'] = [\bar{f}' g f']$

2) $\gamma_*$ è om di gruppi: $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x_0)$, $\gamma = [f]$
$$\gamma_*(\alpha\beta) = \gamma^{-1}(\alpha \cdot \beta)\gamma = \gamma^{-1} \alpha\, e_{x_0} \beta \gamma \underset{e_{x_0} \sim f\bar{f}}{=} \gamma^{-1} \alpha \gamma \gamma^{-1} \beta \gamma = \gamma_*(\alpha)\, \gamma_*(\beta)$$

3) $\gamma_*$ è biettiva con inversa data da $(\gamma^{-1})_*$ con $\gamma^{-1} := [\bar{f}]$

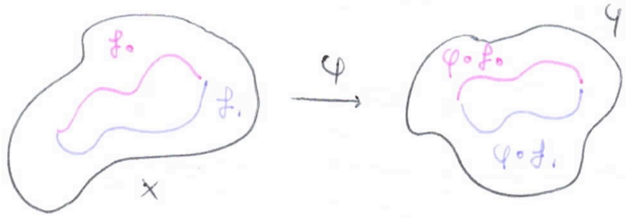
- Considero $(\gamma^{-1})_* \circ \gamma_*: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$
$$\alpha \longmapsto (\gamma^{-1})_*(\gamma^{-1} \alpha \gamma) = \gamma \gamma^{-1} \alpha \gamma \gamma^{-1} = \alpha$$
$\Rightarrow (\gamma^{-1})_* \circ \gamma_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$
- Analog. $\gamma_* \circ (\gamma^{-1})_* = id_{\pi_1(X, x_1)}$

**corollario** Se $X$ è connesso per archi, allora tutti i gruppi $\pi_1(X, x)$ sono isomorfi $\forall x \in X$

**prop** Funzioni continue tra spazi topologici preservano l'omotopia dei cammini. Ovvero, se $\varphi: X \to Y$ è applicazione continua e $f_0, f_1: I \to X$ cammini tc $f_0 \sim f_1$, allora $\varphi \circ f_0 \sim \varphi \circ f_1$

**dim** Se $H: I \times I \to X$ è omotopia tra e $f_1$, $K = \varphi \circ H$ è omotopia tra $\varphi \circ f_0$ e $\varphi \circ f_1$

$$\begin{tikzcd} I \times I \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "K"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ & Y \end{tikzcd}$$



**def** Per la proposizione appena vista, data $\varphi : X \to Y$ continua, è ben definita la mappa

$$\varphi_* : \mathcal{C}(I,X)/_\sim \longrightarrow \mathcal{C}(I,Y)/_\sim$$
$$[f] \longmapsto [\varphi \circ f]$$

**prop** Valgono le seguenti proprietà:

(1) $\varphi_*(\alpha \cdot \beta) = \varphi_*(\alpha)\,\varphi_*(\beta)$ (se ha senso il prodotto fra $\alpha$ e $\beta$)

(2) $\varphi_*(\mathcal{E}_x) = \mathcal{E}_{\varphi(x)}$

(3) $\varphi_*(\gamma^{-1}) = (\varphi_*(\gamma))^{-1}$

(4) se $\psi : Y \to Z$ continua, allora $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$

(5) $\varphi = \mathrm{id}_X \implies \varphi_* = \mathrm{id}_{\mathcal{C}(I,X)/_\sim}$

(6) se $x_0 \in X$, allora $\varphi_*$ induce un omomorfismo $\pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,\varphi(x_0))$

(7) $x_0, x_1 \in X$, $\gamma = [f]$ classe di un cammino da $x_0$ a $x_1$,
$g$ il cammino in $Y$ da $\varphi(x_0)$ a $\varphi(x_1)$ dato da $\varphi \circ f$, $\delta = [g]$.
Allora $\delta_* \circ \varphi_* = \varphi_* \circ \gamma_*$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x_0) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "\gamma_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \pi_1(Y,\varphi(x_0)) \arrow[d, "\delta_*"] \\
\pi_1(X,x_1) \arrow[r, "\varphi_*"] & \pi_1(Y,\varphi(x_1))
\end{tikzcd}$$

**dim** (1) $\alpha = [f]$, $\beta = [g]$, $\alpha\beta = [f \cdot g]$, $\varphi_*(\alpha\beta) = [\varphi \circ (f \cdot g)]$

Osservo

$$\varphi \circ (f \cdot g) : t \longmapsto \begin{cases} \varphi(f(2t)) & t \leq 1/2 \\ \varphi(g(2t-1)) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$
$$\equiv$$
$$(\varphi \circ f) \cdot (\varphi \circ g)$$

$\implies [\varphi \circ (f \cdot g)] = [(\varphi \circ f) \cdot (\varphi \circ g)] = \varphi_*(\alpha) \cdot \varphi_*(\beta)$

(3) $\gamma = [f]$, $\gamma^{-1} = [\bar f]$

- $\varphi_*(\gamma^{-1}) = [\varphi \circ \bar f]$ $\quad \bar f(t) = f(1-t)$
- $(\varphi_*(\gamma))^{-1} = [\varphi \circ f]^{-1} = [\overline{\varphi \circ f}]$

(4) $(\psi_* \circ \varphi_*)[f] = \psi_*([\varphi \circ f]) = [\psi \circ \varphi \circ f] = [(\psi \circ \varphi) \circ f] = (\psi \circ \varphi)_*[f]$

(6) segue da (1)

(7) $\alpha = [h] \in \pi_1(X,x_0)$, $\varphi_*(\alpha) = [\varphi \circ h]$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x_0) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[ddd, "\gamma_*"'] & \pi_1(Y,\varphi(x_0)) \arrow[ddd, "\delta_*"] \\
{[h]} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & {[\varphi \circ h]} \arrow[d, mapsto] \\
{[\bar f h f]} \arrow[r, mapsto] & {[\varphi \circ \bar f h f]} \\
\pi_1(X,x_1) \arrow[r, "\varphi_*"'] & \pi_1(Y,\varphi(x_1))
\end{tikzcd}$$

$\gamma_*(\alpha) = [\bar f \cdot h \cdot f]$

$\varphi_*(\gamma_*(\alpha)) = [\varphi \circ \bar f h f]$

$$\delta_*(\varphi_*(\alpha)) = \delta_*([\varphi\circ h]) = [\bar g\cdot(\varphi\circ h)\cdot g]$$
$$= [\overline{\varphi\circ f}\cdot(\varphi\circ h)\cdot \varphi\circ f]$$
$$= [(\varphi\circ \bar f)\cdot(\varphi\circ h)\cdot(\varphi\circ f)]$$
$$= [\varphi\circ \bar f h f] = \varphi_*(\gamma_*(\alpha))$$

**def** Un GRUPPO TOPOLOGICO $G$ è un gruppo $G$ dotato di una topologia tale che

1) $*: \underbrace{G\times G}_{\text{con topologia prodotto}} \longrightarrow G$, il prodotto in $G$, sia applicazione continua

2) $(\ )^{-1}: G \longrightarrow G$, $g \longmapsto g^{-1}$ sia continua

**esempi** $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$, $(S^1,\cdot)$

**prop** Sia $G$ un gruppo topologico. Allora $\pi_1(G,1_G)$ è abeliano

**dim** $\alpha=[g]$, $\beta=[h] \in \pi_1(G,1_G)$

- Dati $g,h$ cappi di p.to base $1_G$ costruisco $g*h:\ \underset{\in I}{t} \longmapsto g(t) \underset{\text{prodotto in } G}{*} h(t)$.
  Osservo che:
  1) $(g*h)(0) = g(0)*h(0) = 1_G*1_G = 1_G$
  2) $(g*h)(1) = \ldots = 1_G$
  3)
$$\begin{tikzcd} G\times G \arrow[r, "*"] & G \\ I \arrow[u, "{(g,h)}"] \arrow[ur, "g*h"'] & \end{tikzcd} \quad \Rightarrow g*h \text{ continua}$$
  è continua

  è continua perché lo sono $g$ ed $h$

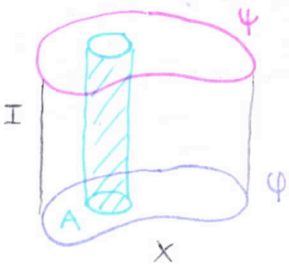
  $\Rightarrow$ $g*h$ cappio di punto base $1_G$
- Mostro che $g\cdot h \sim g*h \sim h\cdot g$ e concludo per transitività di $\sim$
  Ricordo $g\sim e_1\cdot g \sim g\cdot e_1$ e $h\sim e_1\cdot h \sim h\cdot e_1$
  Osservo $g\cdot h = (g\cdot e_1)*(e_1\cdot h)$, infatti
  $$g\cdot h: t\longmapsto \begin{cases} g(2t) & t\le 1/2 \\ h(2t-1) & \frac12\le t\end{cases}, \quad (g\cdot e_1)*(e_1\cdot h): t\longmapsto\begin{cases} g(2t)\cdot 1_G & t\le 1/2 \\ 1_G\cdot h(2t-1) & t\ge \frac12\end{cases}$$
  $\Rightarrow g\cdot h = (g\cdot e_1)*(e_1\cdot h) \sim g*h \sim (e_1\cdot g)*(h\cdot e_1) = h\cdot g$
  $\Rightarrow g\cdot h\sim h\cdot g$

**def** $\varphi,\psi: X\to Y$ continue e $A\subseteq X$ sottoinsieme. $\varphi$ e $\psi$ si dicono OMOTOPE RELATIVAMENTE ad $A$ (scrivo $\varphi \sim_A \psi$) se esiste una omotopia tra $\varphi$ e $\psi$ relativamente ad $A$, ovvero un'appl. continua $H: X\times I \longrightarrow Y$ tc

$H(x,0) = \varphi(x)$

$H(x,1) = \psi(x)$

$H(a,s) = \varphi(a) = \psi(a) \quad \forall a\in A$




$\longrightarrow Y$

$\longmapsto \varphi(a)=\psi(a)$

**TEOREMA** Siano $\varphi_0, \varphi_1 : X \to Y$ continue e $x_0 \in X$ fissato. Se $\varphi_0 \sim_{\{x_0\}} \varphi_1$ allora
$\varphi_{0*} = \varphi_{1*} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ con $y_0 = \varphi_0(x_0) = \varphi_1(x_0)$

dim Devo mostrare che se $\alpha = [f] \in \pi_1(X, x_0)$, allora $[\varphi_0 \circ f] = \varphi_{0*}\alpha = \varphi_{1*}\alpha = [\varphi_1 \circ f]$,
ovvero $\underbrace{\varphi_0 \circ f}_{:= f_0} \sim \underbrace{\varphi_1 \circ f}_{:= f_1}$ come cammini.

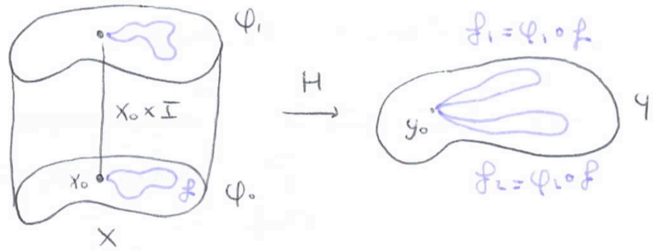
$\Rightarrow \tilde{H} : I \times I \longrightarrow Y$ è omotopia relativa ad $\{x_0\}$, in particolare è continua
$(t,s) \longmapsto H(f(t), s)$

perché

continua per hp $(\varphi_0 \sim_{\{x_0\}} \varphi_1)$

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[r, "H"] & Y \\ I \times I \arrow[u, "{(f, id)}"] \arrow[ur, "\tilde{H}"'] & \end{tikzcd}$$

continua perché $f$ continua




def Un sottoinsieme $A \subseteq X$ sp. top. si dice **RETRATTO** di $X$ se esiste un'applicazione continua $r : X \longrightarrow A$ detta **RETRAZIONE** tc $r \circ i_A = id_A$, $i_A : A \hookrightarrow X$ inclusione

def Un $A \subseteq X$ si dice **RETRATTO PER DEFORMAZIONE** di $X$ se esiste una retrazione $r : X \to A$ tc $i_A \circ r \sim_A id_X$, ovvero $\exists\, H : X \times I \longrightarrow X$ tc $H(x,0) = x$, $H(x,1) = r(x) \in X$, $H(a,s) = a \in X \quad \forall a \in A$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i_A"] \arrow[dr, "id_A"'] & X \arrow[d, "r"] \arrow[dr, "i_A \circ r"] \arrow[dr, bend left, dashed, "id_X"] & \\ & A \arrow[r, hook, "i_A"'] & X \end{tikzcd}$$

**TEOREMA** Sia $A \subseteq X$ una retrazione per deformazione. Allora $i_* : \pi_1(A, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$ è un isomorfismo $\forall a \in A$.

dim

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "id_A"'] & X \arrow[d, "r"] \arrow[dr, "i \circ r"] \arrow[dr, bend left, dashed, "id_X"] & \\ & A \arrow[r, hook, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \pi_1(A, a) \arrow[r, hook, "i_*"] \arrow[dr, bend left, "①"] & \pi_1(X, a) \arrow[d, "r_*"] \arrow[dr, bend left, "② \; id\, \pi_1(X,a)"] & \\ & \pi_1(A, a) \arrow[r, hook, "i_*"'] & \pi_1(X, a) \end{tikzcd}$$

$r_* \circ i_*$
$=$
$(r \circ i)_*$
$=$
$(id_A)_*$
$=$

① $id_{\pi_1(A,a)}$ è biettiva $\Rightarrow$ deduco che $i_*$ è iniettiva (e $r_*$ suriettiva)

$i \circ r \sim_A id_X \Rightarrow i \circ r \sim_{\{a\}} id_X \xRightarrow[\text{sopra}]{\text{teorema}} \overset{i_* \circ r_*}{\overset{=}{(i \circ r)_*}} = (id_X)_* : \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$

$=$

② $id_{\pi_1(X,a)}$ è biettiva

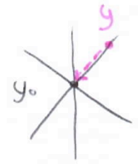
$\Rightarrow$ deduco che $i_*$ è suriettiva e dunque biettiva

**def**
- $X$ sp. top. si dice **CONTRAIBILE** ad un punto $x_0 \in X$ se $\{x_0\}$ è un retratto per deformazione di $X$
- $X$ sp. top. si dice **SEMPLICEMENTE CONNESSO** se è connesso per archi e $\pi_1(X,x)=1$
- $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **CONVESSO** se $\forall y_0, y_1 \in Y$ il segmento $ty_0+(1-t)y_1 \in Y \quad \forall t \in [0,1]$
- $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **STELLATO** rispetto a $y_0 \in Y$ se $\forall y \in Y$ il segmento $ty+(1-t)y_0 \in Y \quad \forall t \in [0,1]$

**prop** (1) $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso $\Rightarrow$ $Y$ è stellato rispetto a un suo punto qualsiasi

(2) $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ stellato rispetto a $y_0 \Rightarrow Y$ è contraibile ad $y_0$

(3) $X$ è contraibile a $x_0 \Rightarrow X$ è semplicemente connesso




**dim** (2) $H: Y \times I \longrightarrow Y$ è omotopia tra $id_Y$ ed $y \mapsto y_0$

$(y,s) \longmapsto sy_0+(1-t)y$

(3)
$$\begin{array}{ccc} \{x_0\} & \xhookrightarrow{i} & X \\ & & \downarrow r \\ & & \{x_0\} \end{array}$$
dal teorema precedente $i_*$ è isomorfismo $\pi_1(\{x_0\},x_0) \to \pi_1(X,x_0)$, ovvero $\pi_1(X,x_0) \simeq \pi_1(\{x_0\},x_0)=1$

Dimostro che è connesso per archi mostrando che $\forall x_1 \in X$ esiste un cammino da $x_1$ a $x_0$

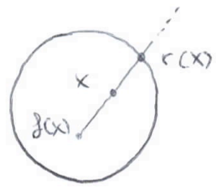
Per hp c'è omotopia $H: X \times I \longrightarrow X$ tra $id_X$ e $i \circ r: x_1 \mapsto x_0$, inoltre $H(x_0,s)=x_0 \ \forall s \in I$.

Considero $H|_{\{x_1\} \times I}: I \longrightarrow X$ continua : è cammino da $x_1$ a $x_0$

$0 \longmapsto x_1$

$1 \longmapsto x_0$

**TEOREMA** (punto fisso di Brouwer). Ogni applicazione continua $f: D \to D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ ha un punto fisso, ossia esiste un $x_0 \in D$ tc $f(x_0)=x_0$




**dim** Suppongo che esista una $f: D \to D$ continua e priva di punti fissi.

Posso costruire $r: D \longrightarrow S^1$

$x \longmapsto$ p.to d'intersezione della semiretta $[f(x), x]$ con $S^1$

La semiretta è descritta da $\underbrace{f(x)}_{w} + d(x - \underbrace{f(x)}_{w})$, $d \geq 0$. Per trovare l'intersezione con $S^1$

cerco $d \geq 0$ tc $\|w + d(x-w)\|^2 = 1$ :

$$(w+d(x-w)) \cdot (w+d(x-w)) = 1$$
$$\|w\|^2 + 2d\, w \cdot (x-w) + d^2\|x-w\|^2 = 1$$
$$\|x-w\|^2 d^2 + 2w\cdot(x-w)\, d + \|w\|^2 - 1 = 0$$
$$\frac{\Delta}{4} = (w\cdot(x-w))^2 - \|x-w\|^2(\|w\|^2-1) \geq 0$$
$$\Rightarrow d_x = \frac{-w\cdot(x-w) + \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{\|x-w\|^2} \geq 0$$

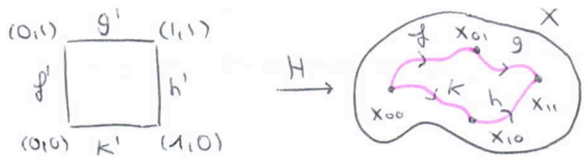
$\Rightarrow r(x) = f(x) + d_x(x-f(x))$ è continua

Osservo che per definizione di $r$, se $x \in S^1 \Rightarrow r(x) = x$, dunque $r$ è una retrazione di $D$ su $S^1$

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xhookrightarrow{i} & D \\ & \underset{id_{S^1}}{\searrow} & \downarrow r \\ & & S^1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} = \pi_1(S^1,1) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(D,1) = 1 \\ & \underset{id}{\searrow} & \downarrow \\ & & \pi_1(S^1,1) \\ & \lightning & \parallel \\ & & \mathbb{Z} \end{array}$$

$\Rightarrow$ non esiste $f$ senza punti fissi

OSS1 Sia $H: I \times I \to X$ continua




$x_{ij} = H(i,j)$

allora $f \cdot g \sim k \cdot h$ come cammini da $x_{00}$ a $x_{11}$. Infatti:

$I \times I$ semplicemente connesso $\Rightarrow f' \cdot g' \cdot \bar{h}' \cdot \bar{k}' \sim e_{(0,0)} \Rightarrow f' \cdot g' \sim k' \cdot h'$

$\Rightarrow f \cdot g \sim k \cdot h$ perché $f = H \circ f'$, $g = H \circ g'$, ... e $H$ continua

OSS2 Equivalentemente, si può dire che se $H: \overset{D(0,1) \text{ chiuso}}{\bar{D}} \to X$ continua, allora $H(S^1)$ immagine tramite $H$ del cammino $f$ che percorre la circonferenza $S^1$ una volta in senso antiorario, è cammino in $X$ omotopo al cammino costante

prop Sia $f: S^1 \to X$ continua. Allora $f$ si estende a tutto il disco $D = D(0,1)$ se e solo se il cammino $\tilde{f}: I \to X$ è omotopo al cammino costante $e_{\tilde{f}(0)}$.

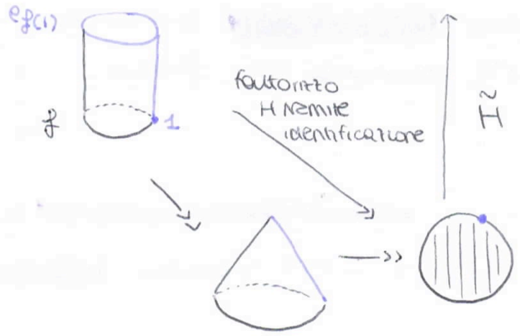
$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & X \\ S^1 \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$
$t \mapsto e^{2\pi i t}$

dim ($\Rightarrow$) osservazioni 1 e 2.

($\Leftarrow$) ① Osservo che un cammino chiuso corrisponde ad una applicazione da $S^1$ a $X$, infatti:

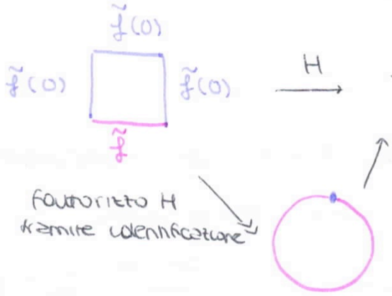
$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\text{identifica gli estremi}"'] & X \\ S^1 \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

dunque avrò un'omotopia $S^1 \times I \xrightarrow{H} X$ tra $f$ e il cammino costante $f(1)$




$\tilde{H}$ estensione di $f$ al disco ($\tilde{H}|_{S^1} = f$)

② $\exists\, H: I \times I \to X$ omotopia tra $\tilde{f}$ e $e_{\tilde{f}(0)}$




$\tilde{H}$ estensione di $f$ al disco ($\tilde{H}|_{S^1} = f$)

prop Siano $\varphi$ e $\psi: X \to Y$ funzioni continue e omotope (rispettivamente a $\varphi$). Sia $H: X \times I \to Y$ omotopia tra $\varphi$ e $\psi$ e $\gamma$ la classe del cammino $f(s) := H(x_0, s)$ da $\varphi(x_0)$ a $\psi(x_0)$, allora

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[dr, "\psi_*"'] & \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \arrow[d, "\gamma_*"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & \pi_1(Y, \psi(x_0)) \end{tikzcd}$$

dim Sia $\alpha = [g] \in \pi_1(X, x_0)$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_*(\varphi_*(\alpha)) &= [\bar{f} \cdot (\varphi \circ g) \cdot f] \\ \psi_*(\alpha) &= [\psi \circ g] \end{aligned}\right\} \text{ basta verificare } \psi \circ g \sim \bar{f} \cdot (\varphi \circ g) \cdot f \text{ come cammini}$$

Considero:

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[r, "H"] & Y \\ I \times I \arrow[u, "(g, id)"] \arrow[ur, "\tilde{H} \text{ continua}"'] & \end{tikzcd}$$

mi dà:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\psi \circ g"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\varphi \circ g"'] & \cdot \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd} \xrightarrow{\tilde{H}} Y \text{ , dato che}$$

$\tilde{H}(t, 0) = H(g(t), 0) = \varphi(g(t)) = \varphi \circ g\ (t)$

$\tilde{H}(t, 1) = \quad \dots = \psi \circ g\ (t)$

$\tilde{H}(0, s) = H(g(0), s) = H(x_0, s) = f(s)$

$\tilde{H}(1, s) = H(g(1), s) = f(s)$

Per la proposizione /oss precedente il cammino in $Y$ dato dal bordo di $I \times I$ è omotopo al cammino costante:

$$f \cdot (\psi \circ g) \cdot \bar{f} \cdot (\overline{\varphi \circ g}) \sim e_{x_0}$$

$$f \cdot (\psi \circ g) \cdot \bar{f} \sim \varphi \circ g$$

$$\Longrightarrow \quad \psi \circ g \sim \bar{f} \cdot (\varphi \circ g) \cdot f$$

def Una funzione $f: X \to Y$ continua si dice NULLOMOTOPIA se è omotopa ad un'applicazione costante, ovvero esiste $H: X \times I \to Y$ omotopia tra $f$ ed $e_{y_0}: x \longmapsto y_0$, $x \in X$, $y_0 \in Y$

def Una funzione continua $f: X \to Y$ si dice EQUIVALENZA OMOTOPICA se esiste una $g: Y \to X$ tc $f \circ g \sim id_Y$ e $g \circ f \sim id_X$. In tal caso $X$ e $Y$ si dicono OMOTOPICAMENTE EQUIVALENTI.

oss
- l'equivalenza omotopica è una relazione d'equivalenza
- ogni omeomorfismo è un'equivalenza omotopica
- ogni retrazione è un'equivalenza omotopica

prop Le equivalenze omotopiche inducono isomorfismi tra i gruppi fondamentali.

dim $\varphi: X \to Y$, $\psi: Y \to X$ eq. omotopica con $\psi \circ \varphi \sim id_X$, $\varphi \circ \psi \sim id_Y$

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_0) \arrow[r, hook, "\varphi_*"] \arrow[d, "(id_X)_*"', "\wr"] \arrow[dr, "(\psi \circ \varphi)_*"] \arrow[d, phantom, shift left=6, "①"] & \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \arrow[r, "(id_Y)_*", "\sim"'] \arrow[d, hook, "\psi_*"] \arrow[dr, phantom, "②"] & \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \arrow[d, "\wr"', "\delta_*"] \\ \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\sim", "\gamma_*"'] & \pi_1(X, \psi(\varphi(x_0))) \arrow[r, two heads, "\varphi_*"'] & \pi_1(Y, \varphi(\psi(\varphi(x_0)))) \end{tikzcd}$$

① $\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_*$ e $\psi \circ \varphi \sim id_X$, dunque dalla prop sopra trovo $\delta_*$ isomorfismo che chiude il diagramma

$\Rightarrow (\psi\circ\varphi)_*$ biiettiva

$\Rightarrow \varphi_*$ iniettiva e $\psi_*$ suriettiva

② Riapplico il ragionamento sopra a $\varphi_*\circ\psi_*$, deduco che esiste $\delta'_*$ che chiude il diagramma

$\Rightarrow (\varphi\circ\psi)_*$ biiettiva

$\Rightarrow \psi_*$ iniettiva e $\varphi_*$ suriettiva

$\Rightarrow \psi_* : \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \longrightarrow \pi_1(X, \psi(\varphi(x_0)))$ è biiettiva

$\Rightarrow \varphi_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ è biiettiva

$\Rightarrow \varphi_*$ è isomorfismo tra gruppi

def (prodotto diretto di gruppi). Siano $G_1, \dots, G_n$ gruppi, $\prod_{i=1}^{n} G_i := G_1 \times \dots \times G_n$ prodotto cartesiano con legge di gruppo componente per componente. Analoga definizione se lavoro con una famiglia infinita di indici.

$\prod_{j\in J} G_j$ ha la proprietà universale: se $H$ è un gruppo ed esiste una famiglia $\varphi_j : H \to G_j$ allora $\exists!\ \varphi : H \longrightarrow \prod_{j\in J} G_j$ tc $p_j \circ \varphi = \varphi_j$

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_j"'] & \prod_{j\in J} G_j \arrow[d, "p_j"] \\ & G_j \end{tikzcd}$$

def (prodotto debole). $\prod'_{j\in J} G_j \subseteq \prod_{j\in J} G_j$, con $\prod'_{j\in J} G_j = \{(g_j),\ g_j \in G_j$ con $g_j = 1_G$ per quasi tutti gli indici$\}$

se i $G_j$ sono gruppi abeliani scriveremo $\prod'_{j\in J} G_j = \bigoplus_{j\in J} G_j$.

$\bigoplus_{j\in J} G_j$ ha la proprietà universale: se $H$ è un gruppo abeliano e esiste una famiglia $\varphi_j : G_j \to H$ omeomorfismi, allora $\exists!\ \varphi : \bigoplus G_j \longrightarrow H$ tc $\varphi \circ f_j = \varphi_j$

$$\begin{tikzcd} \bigoplus G_j \arrow[r, "\varphi"] & H \\ G_j \arrow[u, hook, "f_j", "\text{inclusione}"'] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

def (prodotto libero di gruppi). Un gruppo $G$ si dice prodotto libero dei gruppi $G_j$, $j \in J$ se esistono omeomorfismi $f_j : G_j \longrightarrow G$ (canonici) e per ogni gruppo $H$ e ogni famiglia $\varphi_j : G_j \to H$ omeomorfismi $\exists!\ \varphi : G \to H$ omeomorfismo tc $\varphi \circ f_j = \varphi_i$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] & H \\ G_j \arrow[u, "f_j"] \arrow[ur, "\varphi_i"'] & \end{tikzcd}$$

Scriveremo $G = \prod^*_{j\in J} G_j$

OSS Il prodotto libero $\underset{j\in J}{*} G_j = \prod^{*}_{j\in J} G_j$ è dato dalle seguente $(x_1,\dots,x_r)$, $r\in\mathbb{N}$, con $x_i\in G_j$ $\exists j$
Se $x_i\in G_j$, allora $x_{i+1}\in G_k$ con $k\neq j$ e nessuno degli $x_i$ è l'elemento neutro del gruppo a cui appartiene. Si definisce una legge di gruppo su $\prod^{*}_{j\in J} G_j$ nel seguente modo:

a) la parola $\phi$ è l'elemento neutro

b) $$(x_1 x_2 \cdots x_r)\cdot(y_1 y_2\cdots y_s) = \begin{cases} x_1\cdots x_r y_1\cdots y_s & \text{se } x_r\in G_j,\ y_1\in G_i,\ i\neq j \\ x_1\cdots x_{r-1} z\, y_2\cdots y_s & \text{se } x_r, y_1\in G_j \ \&\ x_r y_1\neq e \\ (x_1\cdots x_{r-1})\cdot(y_2\cdots y_s) & \text{se } x_r, y_1\in G_j \ \&\ x_r y_1 = e \end{cases}$$

def Un GRUPPO LIBERO GENERATO DA UN INSIEME $S$ è il gruppo $\prod^{*}_{s\in S}\mathbb{Z}_s$: è dato dalle parole che posso scrivere usando come lettere $s, s^{-1}$ al variare di $s$ in $S$

def Sia $G$ un gruppo, $S$ un insieme di generatori di $G$. Costruisco l'omomorfismo

$$\varphi: \prod^{*}_{s\in S}\langle s\rangle \xrightarrow{\sim} G$$
$$\underbrace{s_1^{m_1}\cdots s_r^{m_r}}_{\text{parola}} \longmapsto \underbrace{s_1^{m_1}\cdots s_r^{m_r}}_{\text{elemento in } G}$$

Si dicono RELAZIONI tra gli elementi di $S$ le parole che danno l'elemento neutro di $G$, ossia le parole che appartengono al nucleo dell'omom. $\varphi$ definito sopra. Una relazione si dice BANALE se proviene dalle legge di gruppo di $G$

OSS Ogni gruppo $G$ può essere scritto come quoziente di un gruppo libero su un $S$ opportuno:

$$G = \prod^{*}_{s\in S}\langle s\rangle \Big/ \ker\varphi$$

def Siano $A,B,C$ gruppi e siano fissati due omomorfismi $A\xrightarrow{\varphi}B$, $A\xrightarrow{\psi}C$. Si dice PUSH-OUT del diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

un gruppo $P$ insieme ad una coppia di omomorfismi $f: B\to P$, $g: C\to P$ tc $f\circ\varphi = g\circ\psi$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "g"'] & P \end{tikzcd}$$

e che soddisfi la proprietà universale: $\forall\ P'$ gruppo e omomorfismi $f': B\to P'$, $g': C\to P'$ tc $f'\circ\varphi = g'\circ\psi$ $\exists!$ omomorfismo $\rho: P\to P'$ tc $f' = \rho\circ f$, $g' = \rho\circ g$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & B \arrow[d, "f"] \arrow[ddr, bend left, "f'"] & \\ C \arrow[r, "g"'] \arrow[drr, bend right, "g'"'] & P \arrow[dr, "\rho"] & \\ & & P' \end{tikzcd}$$

fatto $p, f, g$ esistono sempre: costruisco $B*C$ che chiude il diagramma e lo quoziento rispetto al sottogruppo normale generato dagli elementi $\varphi(a)\psi(a)^{-1}$ al variare di $a\in A$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"] & B \arrow[d] \arrow[ddr, "f"] & \\ C \arrow[r] \arrow[drr, "g"'] & B*C \arrow[dr] & \\ & & B*C/_{\langle \varphi(a)\psi(a)^{-1} \mid a\in A\rangle} \end{tikzcd}$$

prop Il gruppo fondamentale del prodotto di due spazi topologici è il prodotto diretto dei loro gruppi fondamentali. Ovvero, se $X, Y$ sp. top. $x\in X$, $y\in Y$, allora

$$\pi_1(X\times Y, (x,y)) \simeq \pi_1(X,x)\times\pi_1(Y,y)$$

dim Ricordo la proprietà universale del prodotto di spazi topologici: $\forall Z$ sp. top. e applicazioni continue $h_X: Z\to X$, $h_Y: Z\to Y$ $\exists!$ appl. cont. $h: Z\to X\times Y$ tc $pr_X\circ h = h_X$, $pr_Y\circ h = h_Y$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h_X"] \arrow[d, "h_Y"'] \arrow[dr, bend left=60, "h"] & X \\ Y & X\times Y \arrow[l, "pr_Y"] \arrow[u, "pr_X"'] \end{tikzcd}$$

Dalla proprietà universale abbiamo che la mappa seguente è biettiva

$$\Phi: \pi_1(X\times Y, (x,y)) \to \pi_1(X,x)\times\pi_1(Y,y)$$
$$[h] \mapsto ([h_X], [h_Y])$$

Rimane da vedere che è omeo. di gruppi:

$\phi([h]) = ([h_X],[h_Y])$, $\phi([k]) = ([k_X],[k_Y])$

$\phi([hk]) = ([(hk)_X],[(hk)_Y])$ $\quad (hk)_X = p_X\circ hk \sim (p_X\circ h)\cdot(p_X\circ k) = h_X\cdot k_X$

$\phi([h])\cdot\phi([k]) = ([h_X][k_X],[h_Y][k_Y]) = ([h_Xk_X],[h_Yk_Y])$

def Se $X\subseteq\mathbb{R}^n$ è un compatto (nel nostro caso $I\subseteq\mathbb{R}$ o $I\times I\subseteq\mathbb{R}^2$) e $\{U_i\}$ è un ricoprimento di $X$, allora esiste un $\delta\in\mathbb{R}_{>0}$, detto NUMERO DI LEBESGUE, tc ogni sottoinsieme di $X$ di diametro $<\delta$ è contenuto in un qualche $U_j$

prop Sia $\{U_j\}_{j\in J}$ ricoprimento di $X$ sp. top. tc

1) $\exists x_0\in\bigcap_{j\in J} U_j$

2) $U_j$ è sempl. conn. $\forall j\in J$

3) $j\neq k$, $U_j\cap U_k$ è connesso per archi

Allora $X$ è semplicemente connesso

<u>dim</u> 1) $X$ è connesso per archi

Sia $x \in X \Rightarrow \exists j$ tc $x \in U_j$ e $x_0 \in U_j$

$U_j$ è sempl. conn $\Rightarrow$ $U_j$ è connesso per archi $\Rightarrow \exists f$ cammino da $x$ a $x_0$ $\forall x$

2) $\pi_1(X, x_0) = \mathcal{E}_{x_0}$, ovvero se $f$ cappio di p.to base $x_0$, allora $f \sim e_{x_0}$.

Lo dimostro mostrando che $f$ cappio in $X$ è omotopo al prodotto di cappi di p.to base $x_0$ interamente contenuti in $U_j$ per qualche $j$.

- Sia $\{f^{-1}(U_j)\}_{j \in J}$ ricoprimento di $I$ e considero $\delta$ numero di Lebesgue di questo ricoprimento. Sia $n \in \mathbb{N}$ tc $\frac{1}{n} < \delta$, allora $I = \bigcup_{0 \le m \le n-1} \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right]$ e $f\left(\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right]\right) \subseteq U_j$ aperto in $X$ per qualche $j$

  $\Rightarrow f \sim f_0 \cdot f_1 \cdots f_{n-1}$ con $f_m : I \longrightarrow X$ riparametrizzazioni di $f|_{\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right]}$

- Sia $x_m$ il punto finale del cammino $f_m$, $m = 0, \dots, n-2$. Considero un cammino $g_{m+1}$ da $x_m$ a $x_0$ contenuto in $U_{k_m} \cap U_{k_{m+1}}$ dove $f_m(I) \subseteq U_{k_m}$ e $f_{m+1}(I) \subseteq U_{k_{m+1}}$

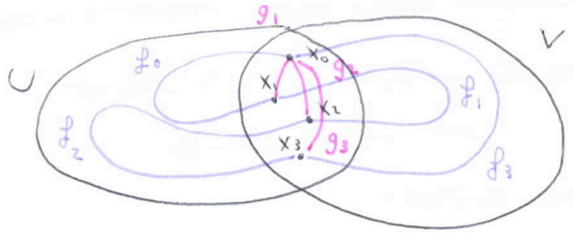
$$\Rightarrow f \sim f_0 f_1 \cdots f_{n-1}$$

$$\sim \underbrace{f_0 g_1}_{\text{cappio in } U_{k_0}} \underbrace{\bar{g}_1 f_1 g_2}_{\text{cappio in } U_{k_1}} \bar{g}_2 f_2 \cdots g_{n-1} \underbrace{\bar{g}_{n-1} f_{n-1}}_{\text{cappio in } U_{k_{n-1}}}$$

$$\sim e_{x_0} \cdots e_{x_0}$$

$$\sim e_{x_0}$$

$(n=2)$




<u>lemma</u> Sia $\{U_j\}_{j \in J}$ un ricoprimento aperto di $X$ sp. top con $U_j$ connessi per archi, $U_i \cap U_j$ connessi per archi e $x_0 \in \bigcap_{j \in J} U_j \neq \emptyset$. Allora l'applicazione seguente è suriettiva

$$\Phi : \Pi^* \pi_1(U_j, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$[f_1][f_2]\dots[f_r] \longmapsto [f_1][f_2]\dots[f_r] = [f_1 \dots f_r]$$

↪ classi di cappi di p.to base $x_0$ in qualche $U_j$ ↪ classi di cappi di p.to base $x_0$ in $X$

<u>NB</u> $\Phi$ è omomorfismo di gruppi.

<u>dim</u> Ricordo che se $x_0 \in U \overset{i}{\hookrightarrow} X$, allora $i_* : \pi_1(U, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ omomorfismo

$$[f]_U \longmapsto [f]_X$$

$\Rightarrow (i_j)_* =: \varphi_j : \pi_1(U_j, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ omomorfismi

Per la proprietà universale di $\Pi^* \pi_1(U_j, x_0)$ $\exists!$ $\varphi$ omomorfismo dato da $\Phi$

tc $\Phi \circ \psi_j = \varphi_j$

$$\begin{array}{ccc} \Pi^* \pi_1(U_j, x_0) & \xrightarrow{\Phi} & \pi_1(X, x_0) \\ \uparrow \psi_j & \nearrow \varphi_j & \\ \pi_1(U_j, x_0) & & \end{array}$$

Dunque $\Phi$ è omomorfismo.

Per mostrare che è suriettivo, prendo $[f]_X \in \pi_1(X, x_0)$, $f$ cappio in $X$ di p.to base $x_0$

e, ripetendo l'argomento del numero di Lebesgue, lo scrivo come prodotto di

$[f_1][f_2] \cdots [f_r]$ con $f_i$ cappi di p.to base $x_0$ contenuti in uno degli $U_j$.

TEOREMA (Seifert Van Kampen). Sia $X = U \cup V$, con $U, V$ aperti connessi per archi, $U \cap V \neq \emptyset$ e connesso per archi. Allora se $x_0 \in U \cap V$ si ha che $\pi_1(X, x_0)$ è il push-out di

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x_0) & \xrightarrow{\varphi_U} & \pi_1(U, x_0) \\ \downarrow \varphi_V & & \\ \pi_1(V, x_0) & & \end{array}$$

ove $\varphi_U : U \cap V \to U$ è inclusione e $\varphi_V : U \cap V \to V$ è inclusione

In particolare $\pi_1(X, x_0) \simeq \dfrac{\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)}{\langle \varphi_U(\alpha) \cdot \varphi_V(\alpha)^{-1}, \alpha \in \pi_1(U \cap V, x_0) \rangle} =: N$

dim $\Phi : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \twoheadrightarrow \pi_1(X, x_0)$ è suriettiva per il lemma precedente

$[f_1][f_2] \cdots [f_r] \mapsto [f_1 \cdots f_r]$

Rimane da vedere che $\ker \Phi = \langle \varphi_U(\alpha) \cdot \varphi_V(\alpha)^{-1}, \alpha \in \pi_1(U \cap V, x_0) \rangle$

$\supseteq$ (banale). $\alpha = [f]_{U \cap V}$, $f$ cappio di p.to base $x_0$ in $U \cap V$

$\varphi_U(\alpha) \cdot \varphi_V(\alpha)^{-1} = [f]_U [\bar{f}]_V \in \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$

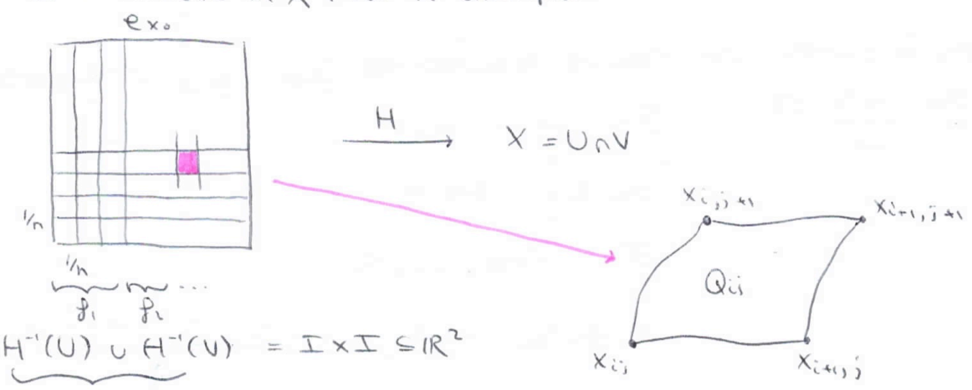
$\Phi(\varphi_U(\alpha) \cdot \varphi_V(\alpha)^{-1}) = [f]_X [\bar{f}]_X = [f \bar{f}]_X = \varepsilon_{x_0}$

$\Rightarrow N \subseteq \ker \Phi$

$\subseteq$ (tecnica). Sia $[f_1] \ldots [f_r] \in \ker \Phi$, ovvero tc $[f_1 \cdots f_r]_X = \varepsilon_{x_0}$.

Basta mostrare che $[f_1] \ldots [f_r]$ è la parola vuota modulo $N$

Siano $f_i$ cappi di p.to base $x_0$ contenuti o in $U$ o in $V$ e suppongo che $f_1 \cdots f_r$ sia omotopo al cappio costante in $X$. Sia $H$ omotopia




Considero $\underbrace{H^{-1}(U) \cup H^{-1}(V)}_{\text{ricoprimento aperto di } I \times I} = I \times I \subseteq \mathbb{R}^2$

Sia $\delta$ il numero di Lebesgue di questo ricoprimento e prendo $n$ t.c. $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$

Suddivido $I \times I$ in $n^2$ quadrati in modo tale che i punti finali degli $f_i$ siano punti del tipo $(\frac{m}{n}, 0)$, $1 \le m \le n$. In particolare,

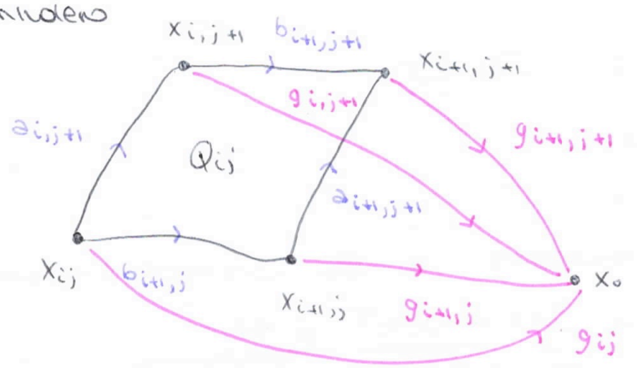
$H$ (quadrato di vertici $(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}), (\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n}), (\frac{i+1}{n}, \frac{j+1}{n}), (\frac{i}{n}, \frac{j+1}{n})$)

sarà contenuto o in $U$ o in $V$ (o in entrambi)

Scelgo cammini $g_{ij}$ da $x_{ij}$ a $x_0$ in $X$ nel modo seguente:

- se $x_{ij} = x_0$, $g_{ij} = e_{x_0}$
- se $x_{ij} \in U \setminus V$, $g_{ij}(I) \subseteq U$
- se $x_{ij} \in V \setminus U$, $g_{ij}(I) \subseteq V$
- se $x_{ij} \in U \cap V$, $g_{ij}(I) \subseteq U \cap V$

Considero



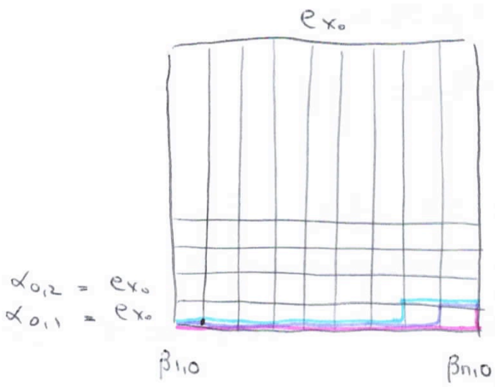

So che $\boxed{a_{i,j+1} \cdot b_{i+1,j+1} = b_{i+1,j} \cdot a_{i+1,j+1}}$ (*)

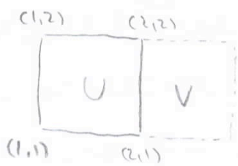
Siano $\alpha_{i+1,j+1} := [\bar{g}_{i+1,j}\ a_{i+1,j+1}\ g_{i+1,j+1}]_{U,V}$ classe di cappio di p.to base $x_0$ tutta contenuta in $U$ o in $V$

$\beta_{i+1,j+1} := [\bar{g}_{i,j+1}\ b_{i+1,j+1}\ g_{i+1,j+1}]_{U,V}$ siano nel prodotto libero di $\pi_1(U)$, $\pi_1(V)$

da (*) ottengo $\boxed{\alpha_{i,j+1}\ \beta_{i+1,j+1} = \beta_{i+1,j}\ \alpha_{i+1,j+1}}$ (*)

stiamo lavorando nel quotiente $\dfrac{\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)}{N}$ !




$(g_{21})_U (\bar{g}_{21})_V \underset{N}{\equiv} [e_{x_0}]$

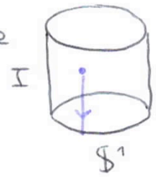
Parto dalla base inferiore e mostro che $\beta_{1,0} \cdots \beta_{n,0}$ è la parola vuota nel quotiente $\dfrac{\pi_1(U) * \pi_1(V)}{N}$:

$$\beta_{1,0}\ \beta_{2,0} \cdots \beta_{n,0}$$
$$= \beta_{10}\ \beta_{20} \cdots \beta_{n0}\ \alpha_{n1}$$
$$= \beta_{10} \cdots \beta_{n-1,0}\ \alpha_{n-1,1}\ \beta_{n1}$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{01}\ \beta_{11}\ \beta_{21} \cdots \beta_{n1} \longleftrightarrow$$
$$\vdots$$
$$\underset{\varepsilon_{x_0}}{\alpha_{01}}\ \alpha_{02} \cdots \underset{\varepsilon_{x_0}}{\alpha_{0n}}\ \underset{\varepsilon_{x_0}}{\beta_{1n}}\ \underset{\varepsilon_{x_0}}{\beta_{2n}} \cdots \underset{\varepsilon_{x_0}}{\beta_{nn}} = \varepsilon_{x_0}$$

esempi

- $X$ = cilindro $= \mathbb{S}^1 \times I$

$A = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$
retratto per deformazione
$r : X \to A$
$(x,s) \mapsto (x,0)$





$H : X \times I \to X$
$(x, s) \mapsto (y, t(1-s))$
$\overset{\shortparallel}{(y,t)}$
$\overset{\cap}{\mathbb{S}^1}\ \overset{\cap}{I}$

$\pi_1(X) = \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$

- $\mathbb{S}^2$

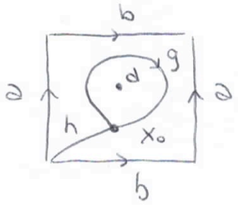
$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2,\ z > -\frac{1}{3}\}$, $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2,\ z < 1/3\}$

$A \cap B$ cilindro aperto $\Rightarrow$ conn. per archi
$A$ (o $B$) omeo al disco aperto $\Rightarrow$ sempl. conn.
$\Rightarrow \mathbb{S}^2$ è sempl. connesso : $\pi_1(\mathbb{S}^2) = 1$

- $\mathbb{T}$

$\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \Rightarrow \pi_1(\mathbb{T}) = \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Alternativamente uso SvK :




$a \neq x_0$, $a \notin$ bordo di $I \times I$

$U$ = immagine di $I \times I \setminus \{a\}$ $\to$ gruppo fond: $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ (si ritrae a $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$)
$V$ = immagine di $(0,1) \times (0,1)$ $\to$ sempl. conn.
$U \cap V$ = immagine di $(0,1) \times (0,1) \setminus \{a\}$ $\to$ gruppo fond: $\mathbb{Z}$

$$\pi_1(\mathbb{T}, x_0) = \frac{\pi_1(U, x_0) * \overbrace{\pi_1(V, x_0)}^{=1}}{\langle \varphi_U(\gamma)\varphi_V(\gamma)^{-1},\ \gamma \in \pi_1(U \cap V, x_0)\rangle}$$

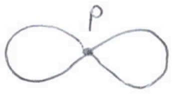
$\overset{\shortparallel}{[\gamma]_V} = [e_{x_0}]_V$ perché $V$ sempl. conn.

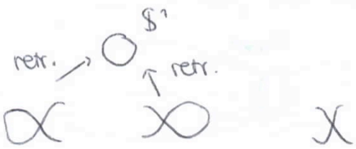
$$= \frac{\langle \alpha \rangle * \langle \beta \rangle}{\langle \varphi_U(\gamma),\ \gamma \in \pi_1(U \cap V, x_0)\rangle} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} \alpha = [\bar{h} a h] \in \pi_1(U, x_0) \\ \beta = [\bar{h} b h] \in \pi_1(U, x_0) \end{array}$$

Dato $\delta = [g]$ generatore fissato in $\pi_1(U \cap V, x_0)$, $\varphi_U(\delta) = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ perché in $U$ il cammino $g$ è omotopo ad $ab\bar{a}\bar{b}$

$$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{T}, x_0) = \frac{\langle \alpha \rangle * \langle \beta \rangle}{\langle \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle} = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

- $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$




$U \cap V$
sempl. conn.

$\Rightarrow \pi_1(X, P) = \pi_1(U, P) * \pi_1(V, P)$
$= \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

Per induzione e SvK si dimostra che il gruppo fond. del bouquet di $n$ circonferenze

$$\pi_1(\underbrace{\mathbb{S}^1 \vee \ldots \vee \mathbb{S}^1}_{n \text{ volte}}) = \mathop{*}_{j=1}^{n} \mathbb{Z}$$

- $\mathbb{P}$ : $\pi_1(\mathbb{P}, x_0) = \dfrac{\langle \delta \rangle}{\langle \delta^2 \rangle} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

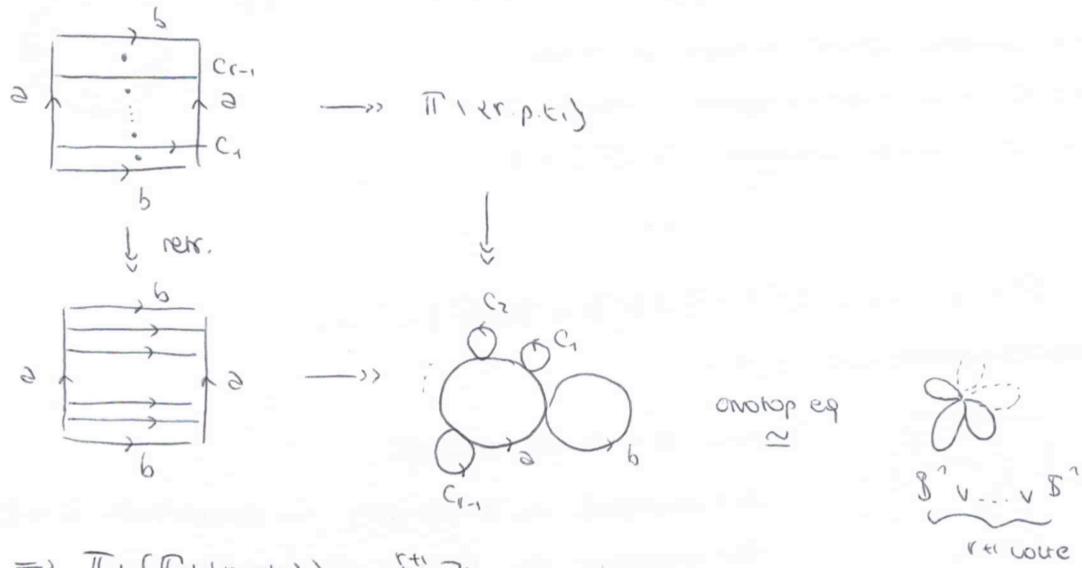
- $\mathbb{K}$ : $\pi_1(\mathbb{K}, x_0) = \dfrac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha\beta\bar{\alpha}\beta \rangle}$

- generica superficie reale compatta : $\pi_1(X, x_0) = \dfrac{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}{\langle \text{rappr. poligonale} \rangle}$ ← lettere della rappresentazione poligonale

(in modo analogo al toro)

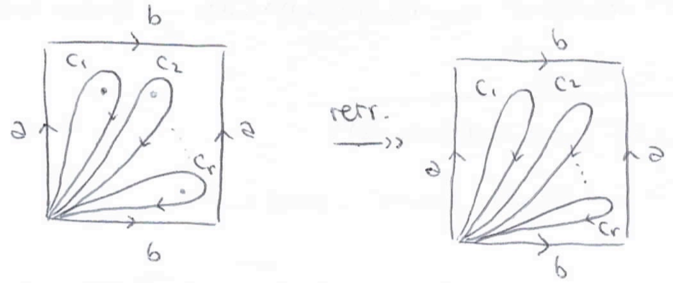
- $\mathbb{T} \setminus \{r \text{ p.ti}\}$

1)




$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{T} \setminus \{r \text{ p.ti}\}) = \mathop{*}\limits_{j=1}^{r+1} \mathbb{Z}$

2)

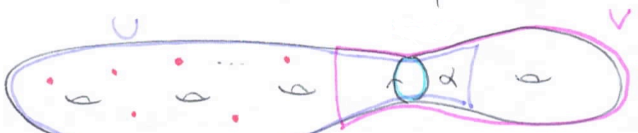



$$\pi_1(\mathbb{T} \setminus \{r \text{ p.ti}\}) \simeq \frac{\langle a, b, c_1, \dots, c_r \rangle}{\langle [a,b]\, c_1 \cdots c_r \rangle} \simeq \langle a, b, c_1, \dots, c_{r-1} \rangle$$

- $\mathbb{T}^{\#m} \setminus \{r \text{ p.ti}\}$

$$\pi_1(\mathbb{T}^{\#m} \setminus \{r \text{ p.ti}\}) \simeq \frac{\langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_m, b_m, c_1, \dots, c_r \rangle}{\langle [a_1,b_1][a_2,b_2] \cdots [a_m,b_m]\, c_1 \cdots c_r \rangle}$$

Per induzione su $m \geq 1$. Suppongo vero per $m-1$.




$= X$

Suppongo di rimuovere i punti da $\mathbb{T}^{\#(m-1)}$

$U$ omotop. eq. a $\mathbb{T}^{\#(m-1)} \setminus \{r+1 \text{ punti}\}$

$V$ omotop. eq. a $\mathbb{T} \setminus \{1 \text{ p.to}\}$

$$\pi_1(U, x_0) = \frac{\langle a_1, b_1, \dots, a_{m-1}, b_{m-1}, c_1, \dots, c_r, c_{r+1} \rangle}{\langle [a_1,b_1] \cdots [a_{m-1}, b_{m-1}]\, c_1 \cdots c_{r+1} \rangle}$$

$$\pi_1(V, x_0) = \frac{\langle a_m, b_m, d \rangle}{\langle [a_m b_m] d \rangle}$$

$\pi_1(U \cap V, x_0) = \langle \alpha \rangle$ , $\varphi_U(\alpha) = c_{r+1}$ , $\varphi_V(\alpha) = d$

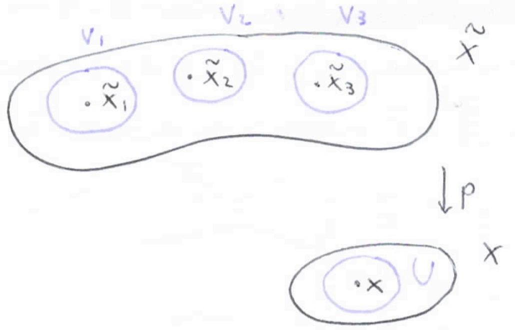
$$\Rightarrow \pi_1(X, x_0) = \frac{\langle a_1, b_1, \dots, a_{m-1}, b_{m-1}, a_m, b_m, c_1, \dots, c_r, c_{r+1}, d \rangle}{\langle [a_1,b_1] \cdots [a_{m-1}, b_{m-1}] c_1 \cdots c_r c_{r+1}, [a_m, b_m] d, c_{r+1} d^{-1} \rangle}$$

$\Rightarrow c_{r+1} = d$ , $[a_m, b_m]\, d = 1$ in $\pi_1(X, x_0)$

$\Rightarrow \pi_1(X, x_0)$ e' dato dalla relazione cercata a meno di riordinare gli indici

**def** Un **RIVESTIMENTO** di uno sp. top $X$ è un'applicazione continua $p: \tilde{X} \to X$ tc $\forall x \in X$ $\exists$ un intorno aperto $U$ di $x$ in $X$ connesso per archi tc $\emptyset \neq p^{-1}(U) = \bigsqcup_{j \in J} V_j$ con $V_j$ connesso per archi e $p|_{V_j} : V_j \to U$ omeomorfismo, ovvero ogni componente connessa per archi di $p^{-1}(U)$ viene mandata da $p$ omeomorficamente su $U$

Un tale $U$ si dice **INTORNO ELEMENTARE**




NB D'ora in poi gli spazi considerati sono connessi e loc. connessi per archi

**def** Chiameremo **RIVESTIMENTO UNIVERSALE** di $X$ un $p: \tilde{X} \to X$ con $\tilde{X}$ sempl. connesso

**prop** Se $p: \tilde{X} \to X$, $q: \tilde{Y} \to Y$ rivestimenti, allora $\tilde{X} \times \tilde{Y} \xrightarrow{t=(p,q)} X \times Y$ è rivestimento del prodotto

dim La mappa è chiaramente suriettiva.

Se $(x,y) \in X \times Y$ e $U_x$ è aperto elem. di $x$ in $X$ e $U_y$ è aperto elem. di $y$ in $Y$, allora $U_x \times U_y$ è aperto elementare di $(x,y)$ in $X \times Y$ e

$$t^{-1}(U_x \times U_y) = p^{-1}(U_x) \times q^{-1}(U_y) = \Big(\bigcup_{j\in J} V_j\Big) \times \Big(\bigcup_{j \in J'} V_j'\Big) = \bigcup (V_j \times V_j')$$

$$\downarrow \text{omeom.}$$

$$U_x \times U_y$$

**def** $f: X \to Y$ è **OMEOMORFISMO LOCALE** se $\forall x \in X$ $\exists$ $x \in U \subseteq X$ aperto tc $f(U) \subseteq Y$ aperto in $Y$ e $f|_U : U \to f(U)$ è omeomorfismo

**oss**
- ogni omeomorfismo è un rivestimento
- ogni rivestimento è omeomorfismo locale

  è sufficiente prendere come intorno di $\tilde{x} \in \tilde{X}$ la componente connessa di $p^{-1}(U)$ che contiene $\tilde{x}$ con $U$ aperto elem. di $p(\tilde{x})$
- se $C \subseteq Y$ è un chiuso, $i: C \to Y$ inclusione non è omeo. locale perché $i(C)$ non è aperto in $Y$
- se $A \subseteq Y$ è aperto, $i: A \to Y$ inclusione è omeomorfismo locale

  se $A \subsetneq Y$ non è rivestimento, dunque non è vero che ogni omeomorfismo locale è rivestimento

**prop** Se $p: X \to Y$ è omeomorfismo locale con $X, Y$ connessi, localmente connessi per archi e di Hausdorff, e inoltre $X$ è compatto, allora $p$ è un rivestimento.

**def** Dato il seguente diagramma, $\tilde{f}$ continua si dice **SOLLEVAMENTO** di $f$ continua se $p \circ \tilde{f} = f$

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

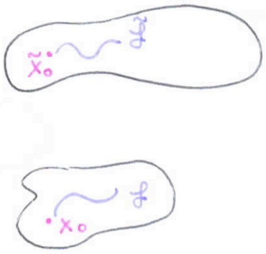
**lemma** Sia $p: \tilde{X} \to X$ un rivestimento. Siano $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ da $Y \to \tilde{X}$ due sollevamenti di una stessa $f: Y \to X$ continua. Se $Y$ è connesso, allora

$$S = \{ y \in Y \text{ tc } \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y) \} = \begin{cases} \emptyset \\ Y \end{cases}$$

ossia $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ o non coincidono in alcun punto o sono la stessa applicazione

**prop** (esistenza e unicità del sollevamento di cammini). Siano $p: \tilde{X} \to X$ un rivestimento, $f: I \to X$ cammino di p.to iniziale $x_0$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Allora esiste un unico sollevamento $\tilde{f}: I \to \tilde{X}$ di $f$ a $\tilde{X}$ avente punto iniziale $\tilde{x}_0$.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

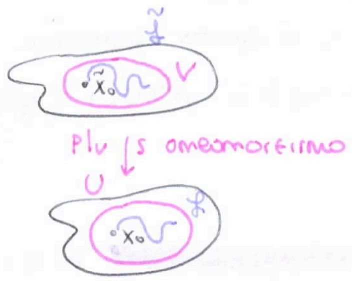



dim • (unicità). Dal lemma precedente, se $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ sollevamenti di $f$ entrambi con p.to iniziale $\tilde{x}_0 = \tilde{f}_1(0) = \tilde{f}_2(0)$, allora $0 \in S \neq 0$ e dunque $S = Y = I$. connesso

• (esistenza). Osservo che se $f(I) \subseteq$ intorno elementare di $f(0) = x_0$, detto $U$, e $V$ è la componente connessa per archi di $p^{-1}(U)$ che contiene $\tilde{x}_0$, posso definire

$\tilde{f} := (\underbrace{p|_V}_{\text{omeo. } V \to U})^{-1} \circ f$.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$




Dunque voglio scrivere $f$ come prodotto finito di cammini $f_i$ dove $f_i(I) \subseteq$ aperto elem di $X$

Sia $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in X}$ ricoprimento aperto di $X$ con $U_x$ aperti elementari.

$f^{-1}\mathcal{U}$ è ricoprimento di $I$. Scelgo $n \in \mathbb{N}$ tc $\frac{1}{n} < \delta$, con $\delta$ numero di Lebesgue per $f^{-1}\mathcal{U}$

Suddivido $I = \bigcup_{m=0}^{n-1} [\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}]$ e osservo che $f([\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}]) \subseteq$ aperto elem. in $X$ $\forall\, 0 \leq m < n$

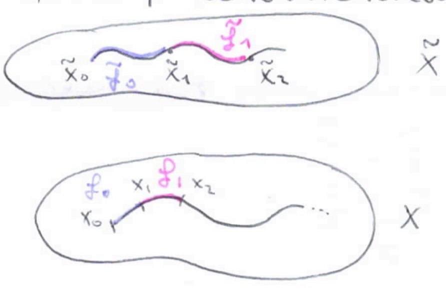
Sia $f_m = f|_{[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}]} : [\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}] \to X$.

$f_0$ si solleva in modo unico a un cammino $\tilde{f}_0$ di p.to iniziale $\tilde{x}_0$. Sia $\tilde{x}_1 = \tilde{f}_0(1)$.

$f_1$ si solleva in modo unico a $\tilde{f}_1$ di p.to iniziale $\tilde{x}_1$. Sia $\tilde{x}_2 = \tilde{f}_1(1)$

e così via.

$\tilde{f}_0 \cdots \tilde{f}_m$, $0 \leq m < n$, sarà per costruzione sollevamento di $f$.

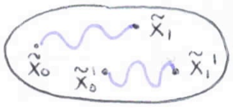


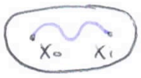

**NB** Se $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ è rivestimento, allora l'unico sollevamento di $e_{x_0}$ di p.to iniziale $\tilde{x}_0$ è $e_{\tilde{x}_0}$.

**lemma 1** Sia $p: \tilde{X} \to X$ rivestimento, siano $x_0, x_1 \in X$, allora esiste una biezione tra $p^{-1}(x_0)$ e $p^{-1}(x_1)$, ovvero le due fibre hanno la stessa cardinalità.

**dim** Costruisco $\psi: p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_1)$, $\tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_1$ nel modo seguente. Fisso $f: I \to X$ cammino da $x_0$ a $x_1$. Allora $\exists!$ sollevamento $\tilde{f}$ di punto iniziale $\tilde{x}_0$: pongo $\psi(\tilde{x}_0) = \tilde{f}(1)$ e così per tutti gli altri punti $\tilde{x}_0' \in p^{-1}(x_0)$.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$



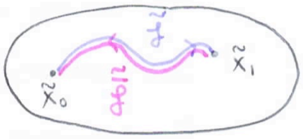

Osservo che se $\tilde{x}_0, \tilde{x}_0'$ sono distinti in $p^{-1}(x_0)$, allora $\underset{\tilde{f}(1)}{\psi(\tilde{x}_0)} \neq \underset{\tilde{f}'(1)}{\psi(\tilde{x}_0')}$: se fossero uguali avrei due sollevamenti di $f$ che coincidono in $1$ e per il lemma precedente si avrebbe $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0 = \tilde{x}_0' = \tilde{f}'(0)$ $\lightning$.

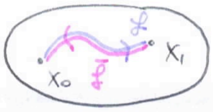
Costruisco l'inversa in modo analogo usando $\bar{f}$:

$$p^{-1}(x_0) \xrightarrow{\psi} p^{-1}(x_1) \xrightarrow{\varphi} p^{-1}(x_0)$$

$\tilde{x} \longmapsto$ p.to finale dell'unico sollevamento di $f$ di p.to iniziale $\tilde{x}$

$\tilde{y} \longmapsto$ p.to finale dell'unico sollevamento di $\bar{f}$ di p.to iniziale $\tilde{y}$




Osservo che $\tilde{\bar{f}} = \bar{\tilde{f}}$, infatti sono entrambi sollevamenti di $\bar{f}$ che coincidono in $0$

$\Rightarrow \tilde{\bar{f}}(1) = \bar{\tilde{f}}(1) = \tilde{f}(0) = \tilde{x}$

$\Rightarrow \varphi$ è inversa di $\psi$

**def** Il numero di **FOGLI** di un rivestimento $p: \tilde{X} \to X$ è dato da $\# p^{-1}(x)$, $x \in X$

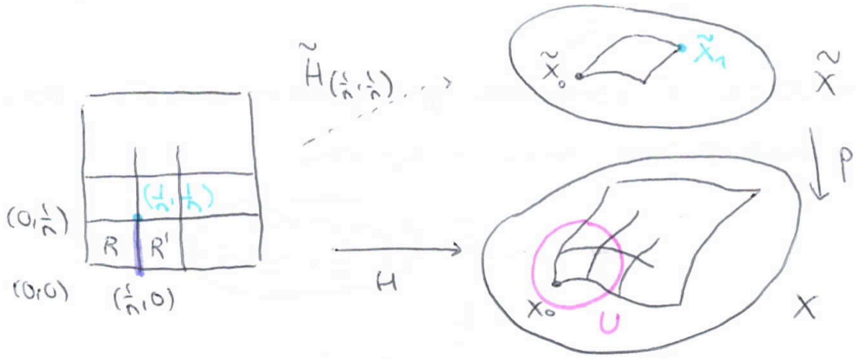
**lemma 2** Sia $H: I \times I \to X$ appl. cont. tc $H(0,0) = x_0$. Sia $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ rivestimento con $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ fissato in $p^{-1}(x_0)$. Allora $\exists!$ appl. cont. $\tilde{H}: I \times I \to \tilde{X}$ che solleva $H$ e tc $\tilde{H}(0,0) = \tilde{x}_0$.

**dim** La strategia è analoga a quella del sollevamento di cammini.

- (unicità). discende dal fatto che $I \times I$ è connesso e l'immagine di $H(0,0) = x_0$ fissata
- (esistenza). $H(0,0) = x_0$, $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Osservo che se $H(I \times I) \subseteq U$ intorno elementare di $x_0$ in $X$ e $V$ componente connessa di $p^{-1}(U)$ che contiene $x_0$, allora basta definire $\tilde{H} = p^{-1}|_V \circ H$

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ I \times I \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] \arrow[r, "H"'] & X \end{tikzcd}$$

Sia $\mathcal{U}$ ricoprimento di $X$ composto da aperti elementari. Considero $\delta$ numero di Lebesgue di $H^{-1}(\mathcal{U})$ e $n\in\mathbb{N}$ tc $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$. Divido $I\times I$ in quadrati di lato $\frac{1}{n}$ in modo tale che $H$(quadrato) sia contenuto in un intorno elementare.




$R := R_{(\frac1n,\frac1n)} \xrightarrow{H_{|R}} X$ può essere sollevata a $\tilde H_{(\frac1n,\frac1n)}$ con $\tilde H_{(\frac1n,\frac1n)}(0,0)=\tilde x_0$

Sia $\tilde x_1 := \tilde H_{(\frac1n,\frac1n)}(\frac1n,\frac1n)$

$R' := R_{(\frac2n,\frac1n)} \xrightarrow{H_{|R'}} X$ può essere sollevata a $\tilde H_{(\frac2n,\frac1n)}$ con $\tilde H_{(\frac2n,\frac1n)}(\frac1n,\frac1n)=\tilde x_1$

Per l'unicità del sollevamento di cammini $\tilde H_{(\frac1n,\frac1n)}$ e $\tilde H_{(\frac2n,\frac1n)}$ coincidono sul segmento e posso incollarli.

Proseguendo in questo modo otteniamo un sollevamento continuo su tutto $I\times I$ di $H$.

<u>lemma</u> (di monodromia). Sia $p:\tilde X\to X$ un rivestimento. Allora due cammini $\tilde f_0,\tilde f_1$ in $\tilde X$ aventi lo stesso punto iniziale $\tilde x_0$ sono omotopi se e solo se lo sono $f_0=p\circ\tilde f_0$ e $f_1=p\circ\tilde f_1$.

<u>dim</u> ($\Rightarrow$) $\tilde H$ omotopia fra $\tilde f_0,\tilde f_1 \Rightarrow H:=p\circ\tilde H$ omotopia tra $f_0,f_1$

$$\begin{tikzcd} I\times I \arrow[r, "\tilde H"] \arrow[dr, "H"'] & \tilde X \arrow[d, "p"] \\ & X \end{tikzcd}$$

($\Leftarrow$) Siano $f_0,f_1$ omotopi

$$\begin{tikzcd} & \tilde X \arrow[d, "p"] \\ I\times I \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "H"'] & X \end{tikzcd}$$

$$(0,0) \longmapsto x_0 = f_0(0)=f_1(0)$$

Per il lemma 2 $\exists!$ $\tilde H$ sollevamento di $H$ tc $\tilde H(0,0)=\tilde x_0$.
Rimane da vedere che è omotopia fra $\tilde f_0,\tilde f_1$.

- $\tilde H(0,s): I\to\tilde X$ solleva $\underbrace{H(0,s)}_{= e_{x_0}}: I\to X \Rightarrow \tilde H(0,s)=e_{\tilde x_0}$
- $\tilde H(1,s)=e_{\tilde x_1}$ con $\tilde x_1$ fissato
- $\tilde H(t,0)$ è sollevamento di $H(t,0)=f_0$ di p.to iniziale $\tilde x_0 \Rightarrow \tilde H(t,0)=\tilde f_0$
- $\tilde H(t,1)$ è sollevamento di $H(t,1)=f_1$ di p.to iniziale $\tilde x_0 \Rightarrow \tilde H(t,1)=\tilde f_1$

$\Rightarrow \tilde f_0,\tilde f_1$ hanno stesso punto finale $\tilde x_1 \Rightarrow \tilde H$ omotopia fra $\tilde f_0,\tilde f_1$

**prop** Il gruppo fondamentale di $S^1$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$

dim $\quad \mathbb{R} \qquad t \overset{p}{\longmapsto} e^{2\pi i t} \qquad S^1$

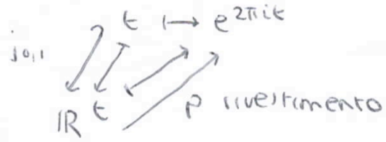

Considero $\Phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(S^1, x_0)$ $\qquad$ omomorfismo di gruppi

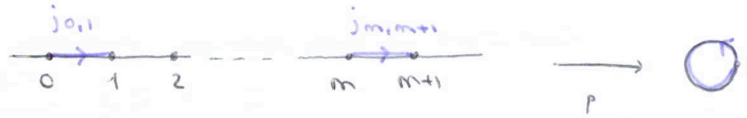
$1 \longmapsto \gamma = [g]$

$n \longmapsto \gamma^n = [\underbrace{g \cdots g}_{n \text{ volte}}]$

con $g : I \longrightarrow S^1$

$t \longmapsto e^{2\pi i t}$




Sia $j_{m,m+1} : I \hookrightarrow \mathbb{R}$ . Anche $p \circ j_{m,m+1}$ è cammino in $S^1$ e coincide con $g$,

$t \longmapsto t+m$

quindi $j_{m,m+1}$ è sollevamento di $g$ di p.to iniziale $m$.

$j_{m,n} : t \mapsto m+nt$

Osservo $\underbrace{g \cdots g}_{n \text{ volte}} = (p \circ j_{0,1}) \cdot (p \circ j_{1,2}) \cdots (p \circ j_{n-1,n})$

$= p \circ (j_{0,1} \cdot j_{1,2} \cdots j_{n-1,n})$

perché questi due sono omotopi

$\sim p \circ (j_{0,n})$ con $j_{0,n} : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto nt$

Mostro ora che $\Phi$ è isomorfismo di gruppi.

a) $\Phi$ iniettivo

$\Phi(n) = \gamma^n = [\underbrace{g \cdots g}_{n \text{ volte}}] = [p \circ (j_{0,n})] = \mathcal{E}_{x_0} \Rightarrow p \circ (j_{0,n}) \sim e_{x_0}$ cammino costante

$\overset{\text{lemma}}{\underset{\text{monodromia}}{\Longrightarrow}}$ $j_{0,n}$ omotopo al sollevamento di $e_{x_0}$ di p.to iniziale 0

$\Rightarrow j_{0,n} \sim e_0$ in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow n = 0$.

b) $\Phi$ suriettivo

$\alpha = [h]$, $h$ cappio in $S^1$ di p.to base $x_0$

Sia $\tilde{h}$ sollevamento di $h$ di p.to iniziale $0 \in \mathbb{R}$. Allora $\tilde{h}(1) = p^{-1}(\overset{1}{\overset{\shortparallel}{x_0}}) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $\tilde{h}(1) = n$ .

- $\tilde{h}$ è cammino in $\mathbb{R}$ di punto iniziale 0 e finale $n$
- $j_{0,n}$ è cammino in $\mathbb{R}$ di punto iniziale 0 e finale $n$

$\overset{\mathbb{R} \text{ sempl.}}{\underset{\text{connesso}}{\Longrightarrow}}$ $j_{0,n} \sim \tilde{h} \Rightarrow p \circ j_{0,n} \sim p \circ \tilde{h} = h \Rightarrow [h] = \gamma^n = \Phi(n)$

**TEOREMA** Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento, siano $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ e $x_0 = p(\tilde{x}_0) \in X$, allora

i) $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ è omomorfismo iniettivo

$[f] \longmapsto [p \circ f]$

e posso identificare $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ con il sottogruppo $p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ di $\pi_1(X, x_0)$

ii) Se $\tilde{x}_1$ è un altro punto della fibra di $x_0$, allora $p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ è coniugato di $p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ e tutti i coniugati di $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ sono ottenuti in questo modo

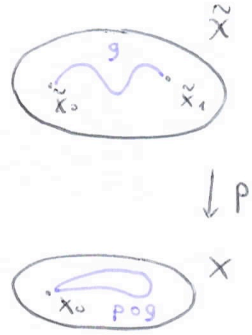
In particolare, se $\pi_1(X,x_0)$ è commutativo, allora tutti i $p_*\pi_1(\tilde X,\tilde x)$ coincidono $\forall\, \tilde x\in p^{-1}(x_0)$.

<u>dim</u> i) Ricordo che $\varphi_*$ è omom. di gruppi $\forall\, \varphi$ continua. Rimane da verificare l'iniettività

$[f],[g]\in\pi_1(\tilde X,\tilde x_0)$ con $\underset{[p\circ f]}{\underset{\|}{p_*[f]}} = \underset{[p\circ g]}{\underset{\|}{p_*[g]}} \Rightarrow p\circ f\sim p\circ g \xRightarrow[\text{monodromia}]{\text{lemma}} f\sim g \Rightarrow [f]=[g]$

ii) • $p_*\pi_1(\tilde X,\tilde x_0)$ e $p_*\pi_1(\tilde X,\tilde x_1)$ sono coniugati

Sia $g$ cammino da $\tilde x_0$ a $\tilde x_1$, $\gamma=[g]$.




Considero il diagramma e ricordo che commuta

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\tilde X,\tilde x_0) \arrow[r, "\gamma_*={[g]}_*", "\sim"'] \arrow[d, "p_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \pi_1(\tilde X,\tilde x_1) \arrow[d, "p_*"] \\
\pi_1(X,x_0) \arrow[r, "{[p\circ g]}_*"'] & \pi_1(X,x_0)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{Sia}\quad \alpha=[f] \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "p_*"] & \gamma_*(\alpha)=[\bar g f g]=\gamma^{-1}\alpha\gamma =: \beta \in\pi_1(\tilde X,\tilde x_1) \arrow[d] \\
p_*\pi_1(\tilde X,\tilde x_0)\ni [p\circ f] \arrow[r, mapsto] & {[p\circ g]^{-1}\underset{p_*(\alpha)}{\underset{\|}{[p\circ f]}}[p\circ g]} = \underset{p_*\beta}{\underset{\|}{p_*\gamma_*(\alpha)}} = [p\circ(\bar g f g)]
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow p_*\beta = [p\circ g]^{-1}\, p_*\alpha\, [p\circ g]$ con $\beta=\gamma_*(\alpha)$

Dato $\alpha\in\pi_1(\tilde X,\tilde x_0)$ prendo $\beta=\gamma_*(\alpha)$ e ottengo $[p\circ g]^{-1}p_*\pi_1(\tilde X,\tilde x_0)[p\circ g]\subseteq p_*\pi_1(\tilde X,\tilde x_1)$

Dato $\beta\in\pi_1(\tilde X,\tilde x_1)$, siccome $\gamma_*$ isomorfismo, esiste $\alpha$ t.c. $\gamma_*(\alpha)=\beta$ e ottengo $p_*\pi_1(\tilde X,\tilde x_1)\subseteq[p\circ g]^{-1}p_*\pi_1(\tilde X,\tilde x_0)[p\circ g]$.

• Sia ora $H$ coniugato di $p_*\pi_1(\tilde X,\tilde x_0)$ in $\pi_1(X,x_0)$.

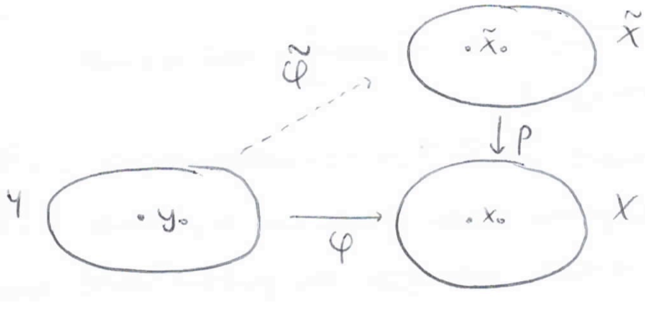
Allora $\exists\, [h]\in\pi_1(X,x_0)$ t.c. $H=[h]^{-1}p_*\pi_1(\tilde X,\tilde x_0)[h]$

Esiste $\tilde h$ sollevamento di $h$ di p.to iniziale $\tilde x_0$. Sia $\tilde x_1=h(1)$, $p(\tilde x_1)=x_0$.

Abbiamo $h=p\circ\tilde h$ e dalla costruzione al punto precedente con $g=\tilde h$ otteniamo $H=p_*\pi_1(\tilde X,\tilde x_1)$.

**TEOREMA** Sia $p:\tilde X\to X$ un rivestimento e $\varphi: Y\to X$ una appl. continua (con $Y$ conn. e loc. conn. per archi). Siano $y_0\in Y$, $x_0=\varphi(y_0)$, $\tilde x_0\in p^{-1}(x_0)$. Allora $\varphi$ si solleva ad una applicazione continua $\tilde\varphi: Y\to\tilde X$ t.c. $\tilde\varphi(y_0)=\tilde x_0$ se e solo se

$$\varphi_*\pi_1(Y,y_0)\subseteq p_*\pi_1(\tilde X,\tilde x_0)$$



**TEOREMA** $p : \tilde{X} \to X$ rivestimento, $\varphi : Y \to X$ appl. cont, $Y$ conn e loc. conn. per archi. Siano $y_0 \in Y$, $x_0 = \varphi(x_0)$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Allora $\varphi$ si solleva ad una applicazione continua $\tilde{\varphi} : Y \to \tilde{X}$ tc $\varphi(y_0) = \tilde{x}_0$ se e solo se $\varphi_* \pi_1(Y, y_0) \subseteq p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.

dim ($\Rightarrow$) Sia $\tilde{\varphi}$ continua tale che $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$ e $\tilde{\varphi}(y_0) = \tilde{x}_0$. Sia $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$, allora

$$\underset{[f]}{\alpha}$$

$$\varphi_*(\alpha) = [\varphi \circ f] = [p \circ \tilde{\varphi} \circ f] = p_*([\underbrace{\tilde{\varphi} \circ f}])$$

$$\Rightarrow \varphi_*(\alpha) \in p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$$ cappio di punto base $\tilde{x}_0$ in $\tilde{X}$

($\Leftarrow$) Suppongo valga che $\varphi_* \pi_1(Y, y_0) \subseteq p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.

Definisco il sollevamento $\tilde{\varphi} : Y \to \tilde{X}$ tc $\tilde{\varphi}(y_0) = \tilde{x}_0$ come segue.

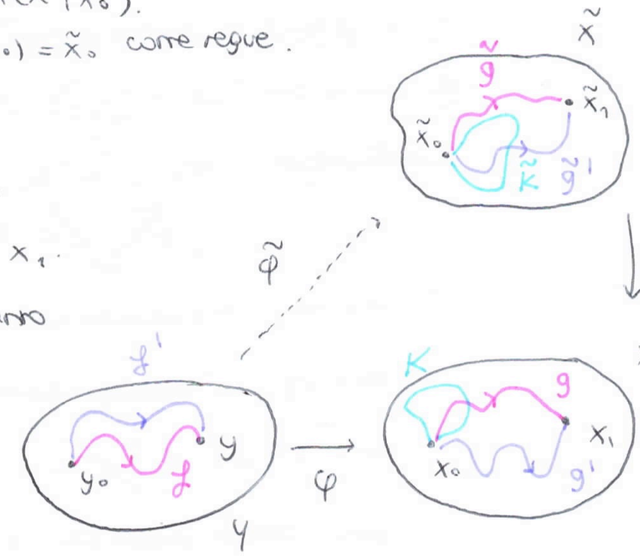
Sia $y \in Y$ p.to diverso da $y_0$.

Sia $f$ cammino da $y_0$ a $y$

Sia $g := \varphi \circ f$ cammino da $x_0$ a $\overset{g(1)}{\overset{\shortparallel}{\varphi(y)}} = x_1$.

Sia $\tilde{g}$ l'unico sollevamento di $g$ a $\tilde{X}$ di punto base $\tilde{x}_0$. Sia $\tilde{x}_1 = \tilde{g}(1)$.

Pongo $\tilde{\varphi}(y) = \tilde{x}_1$.




$\tilde{\varphi}$ è ben definita e continua.

1) $\tilde{\varphi}$ è ben definita.

Sia $f'$ un altro cammino da $y_0$ a $y$.

Sia $g' := \varphi \circ f'$ un altro cammino da $x_0$ a $x_1$.

Sia $\tilde{g}'$ l'unico sollevamento di $g'$ di p.to base $\tilde{x}_0$.

Noto che $g'\bar{g}$ è loop di p.to base $x_0$ ed è immagine di $f'\bar{f}$, loop di p.to base $y_0$

$\Rightarrow [g'\bar{g}] = \varphi_*([f'\bar{f}]) \underset{\uparrow}{=} p_*([\tilde{k}])$, $\tilde{k}$ cappio di p.to base $\tilde{x}_0$

$\varphi_* \pi_1(Y, y_0) \subseteq p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$

Sia $k := p \circ \tilde{k} \Rightarrow [g'\bar{g}] = [p \circ \tilde{k}] = [k] \Rightarrow g'\bar{g} \sim k \Rightarrow g' \sim k g$ in $X$

Ovvero che:

- $\tilde{g}'$ è sollevamento di $g'$ di p.to base $\tilde{x}_0$
- $\tilde{k}\tilde{g}$ è sollevamento di $k \cdot g$ di p.to base $\tilde{x}_0$

$\xRightarrow[\text{monodromia}]{\text{lemma di}}$ $\tilde{g}' \sim \tilde{k}\tilde{g}$ in $\tilde{X}$ $\Rightarrow$ $\tilde{g}'(1) = \tilde{k} \cdot \tilde{g}(1) = \tilde{g}(1) = \tilde{x}_1$

2) $\tilde{\varphi}$ è continua.

Siano $y \in Y$, $\tilde{x} = \tilde{\varphi}(y)$, $V$ aperto contenente $\tilde{x}$. Devo trovare $W$ aperto contenente $y$ tc $\tilde{\varphi}(W) \subseteq V$

A meno di restringere $V$ posso assumere che sia componente c.p.a. di $p^{-1}(U)$, con $U$ aperto elementare contenente $p(\tilde{x}) = x$.

$\xRightarrow{\varphi \text{ continua}}$ $\exists$ $W \subseteq Y$ aperto connesso contenente $y$ tc $\varphi(W) \subseteq U$

$\Rightarrow \tilde{\varphi}(W) \subseteq V$, altrimenti $\tilde{\varphi}(W)$ sarebbe non connesso in $\tilde{X}$ avendo punti in diverse componenti connesse di $p^{-1}(U)$.

**def** Siano $p_1: \tilde{X}_1 \to X$, $p_2: \tilde{X}_2 \to X$ rivestimenti. Un **OMOMORFISMO** tra $(\tilde{X}_1, p_1)$, $(\tilde{X}_2, p_2)$ è un'applicazione continua $\varphi: \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ tc $p_2 \circ \varphi = p_1$.

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

In particolare $\varphi$ manda $p^{-1}(\tilde{x}_1)$ in $p^{-1}(\tilde{x}_2)$

**oss**
- Se $\varphi: \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$, $\psi: \tilde{X}_2 \to \tilde{X}_3$ omomorfismi di rivestimento ($p_1 \searrow X \swarrow p_2$, $p_2 \searrow X \swarrow p_3$), allora anche $\psi \circ \varphi: \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_3$ ($p_1 \searrow X \swarrow p_3$) è omomorfismo di rivestimento
- Se $\varphi$ omomorfismo tra $(\tilde{X}_1, p_1)$ e $(\tilde{X}_2, p_2)$, allora $\varphi$ è sollevamento di $p_1$ rispetto a $p_2$. In particolare, se due morfismi di rivestimento coincidono in un punto, allora coincidono ovunque.

**def** Un omomorfismo di rivestimento $\tilde{X}_1 \xrightarrow{\varphi} \tilde{X}_2$ ($p_1 \searrow X \swarrow p_2$) si dice **ISOMORFISMO** se $\varphi$ è omeomorfismo (se $\varphi$ ammette inversa che sia morfismo di rivestimento)

**def** Un **AUTOMORFISMO** di rivestimento è un isomorfismo di un rivestimento in sé.
Indicheremo con $Aut_X(\tilde{X})$ l'insieme degli automorfismi di un rivestimento $\tilde{X} \xrightarrow[p]{} X$.
È gruppo rispetto alla composizione con l'identità come elemento neutro.

**lemma** Siano $p_1: \tilde{X}_1 \to X$, $p_2: \tilde{X}_2 \to X$ rivestimenti

a) Se $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$, $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$, $x = p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$, allora esiste un omomorfismo di rivestimento $\underset{\tilde{x}_1 \mapsto \tilde{x}_2}{\varphi: \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2}$ tc $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2 \iff p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \subseteq p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$.
In particolare, $\exists\, \varphi$ isomorfismo $\iff p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$

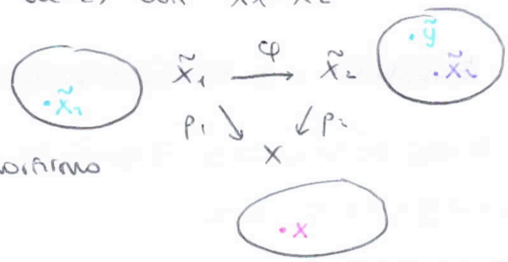
b) Siano $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1 \in \tilde{X}_1$ sopra $x$. Allora esiste un automorfismo di rivestimento $\varphi: \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_1$ con $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{y}_1 \iff p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{y}_1)$

c) $(\tilde{X}_1, p_1)$ e $(\tilde{X}_2, p_2)$ sono isomorfi se e solo se $\forall\, x \in X$, $\tilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x)$, $\tilde{x}_2 \in p_2^{-1}(x)$, i gruppi $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ e $p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ sono coniugati in $\pi_1(X, x)$.

**dim** a) Conseguenza del teorema precedente con $Y = \tilde{X}_1$ e $\tilde{X} = \tilde{X}_2$

b) Conseguenza di a) con $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_2$

c) $(\Rightarrow)$



$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$\varphi$ isomorfismo

$\tilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x)$, $\tilde{x}_2 \in p_2^{-1}(x)$
$\tilde{y} := \varphi(\tilde{x}_1)$, $\tilde{y} \in p_2^{-1}(x)$
Da a) $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, y)$
e $p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, y)$ coniugato di $p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$

$(\Leftarrow)$ $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$, $p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ coniugati
$\underset{\text{precedente}}{\overset{\text{lemma}}{\Longrightarrow}} \exists\, \tilde{y} \in p_2^{-1}(x_2)$ tc $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_2) = p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{y})$

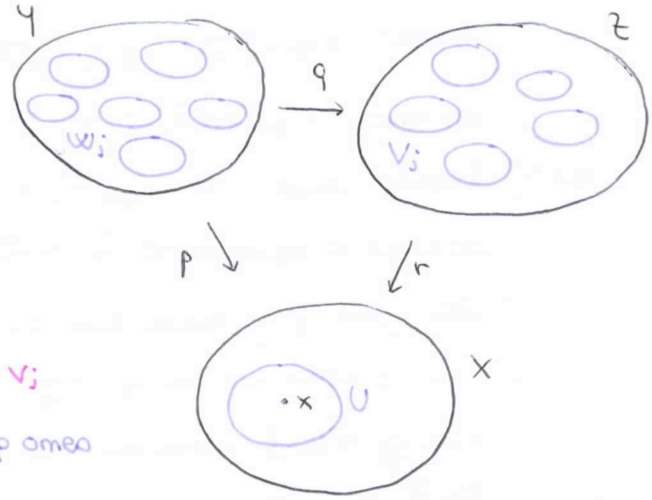
Da a) $\exists$ isomorfismo $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ che manda $\tilde{x}_1$ in $\tilde{y}$.

**prop** Siano $\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "p"'] & Z \arrow[d, "r"] \\ & X \end{tikzcd}$ applicazioni continue tali che $r \circ q = p$. Se $p$ e $q$ sono rivestimenti, allora anche $r$ lo è.

**dim** 1) $p = r \circ q$ e $p$ suriettiva $\Rightarrow$ $r$ suriettiva

2) mostro l'esistenza di intorni elementari $\forall\, x \in X$ relativi ad $r$

Sia $x \in X$, $U$ intorno elementare di $x$.




$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{j \in J} W_j$ con $W_j$ aperti in $Y$

e $p|_{W_j} : W_j \longrightarrow U$ omeomorfismo

$V_j := q(W_j)$ è aperto poiché $q$ aperta

- Mostro $r^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$

  Ovvero $\begin{tikzcd} W_j \arrow[r, twoheadrightarrow, "q"] \arrow[d, "p"', "s"] & V_j \arrow[dl, "r"] \\ U & \end{tikzcd}$ per definizione di $V_j$; poiché $r \circ q = p$ omeo

  $\Rightarrow$ $q|_{W_j}$ è continua, aperta e biiettiva, dunque è omeo.

  $\Rightarrow$ $r|_{V_j}$ è omeomorfismo

  $\Rightarrow$ $r^{-1}(U) \supseteq \bigcup_{j \in J} V_j$

  Vale anche il viceversa $r^{-1}(U) \subseteq \bigcup_{j \in J} V_j$

- Mostro che l'unione è disgiunta, ovvero che se $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, allora $V_i = V_j$.

  Suppongo $V_i \cap V_j \neq \emptyset$. Siano $z_i \in V_i$ e $z_j \in V_j$.

  Sia $f$ cammino tra $z_i$ e $z_j$ in $V_i \cup V_j$ e $h = r \circ f$.

  Sia $\tilde{f}$ soll. di $f$ a $Y$ di p.to iniziale $y_i$.

  Sia $\tilde{h}$ soll. di $h$ a $Y$ di p.to iniziale $y_i$.

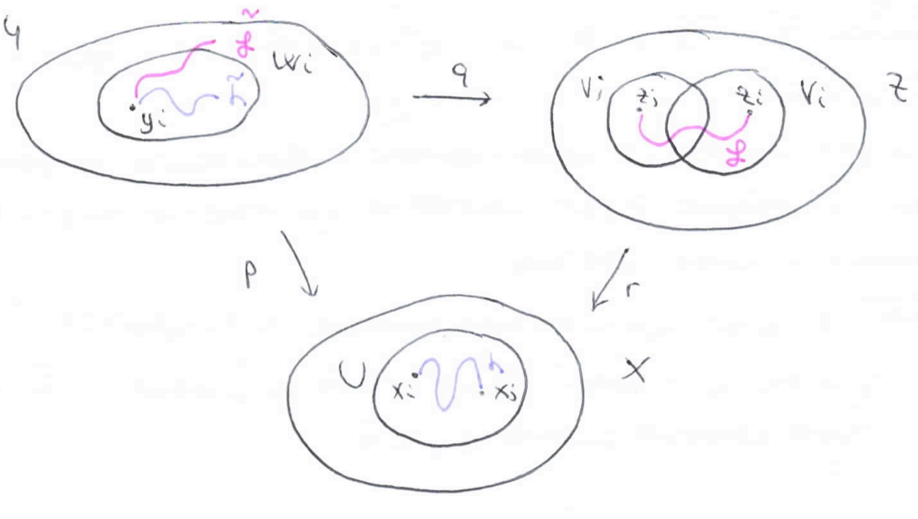
  Essendo $W_i \underset{\text{omeo}}{\cong} U$, $\tilde{h}(I) \subseteq W_i$.

  Per l'unicità del sollevamento $\tilde{f} = \tilde{h} \Rightarrow \tilde{f}(I) \subseteq W_i \Rightarrow \tilde{f}(1) \in W_i$

  $\Rightarrow z_j = q(\tilde{f}(1)) \in V_i \Rightarrow V_j \subseteq V_i$

  Scambiando il ruolo di $V_i$ con $V_j$ concludo.

  Dunque $r^{-1}(U) = \bigsqcup_{j \in J'} V_j$ con $J' \subseteq J$ tc $i \neq k$, $i,k \in J'$, allora $V_i \cap V_k = \emptyset$.



**prop** Se un rivestimento $Y \xrightarrow{p} X$ si fattorizza attraverso un'applicazione continua $Z \xrightarrow{r} X$, allora quest'ultima è un rivestimento se e solo se lo è l'applicazione continua $Y \xrightarrow{q} Z$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "p"'] \arrow[r, phantom, shift right=3, "?"] & Z \arrow[d, "r"] \\ & X \end{tikzcd} \qquad p = r \circ q$$

rivestimenti
⇓
r rivestimento

rivestimenti ⟹ q rivestimento

**oss** Se consideriamo $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ rivestimento e $\tilde{X}_1 \xrightarrow{q} X$ rivestimento universale, $\exists\, \tilde{q}$ t.c. $\tilde{q}(\tilde{x}_1) = \tilde{x}$ perché

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \ \cdot \tilde{x} \arrow[d, "p"] \\ \tilde{X}_1 \arrow[ur, dashed, "\tilde{q}"] \arrow[r, "q"'] & X \end{tikzcd} \qquad \tilde{x}_1 \cdot \qquad \cdot\, x$$

$q_* \pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = \{\varepsilon_x\} \subseteq p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$.

$\tilde{X}$ connesso $\Rightarrow$ $\tilde{q}$ è unico

(inoltre $\tilde{q}$ è rivestimento (universale))

$\Rightarrow$ il rivestimento universale "domina" su tutti gli altri.

**oss** $Y \xrightarrow{q} Z \xrightarrow{r} X$ rivestimenti. Se $X$ ammette rivestimento universale, allora $r \circ q$ è rivestimento.

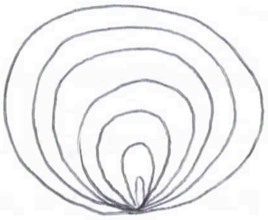
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "q"] & Z \arrow[r, "r"] & X \\ & \tilde{X} \arrow[ul, dashed, "\tilde{q}"] \arrow[u, dashed, "\tilde{p}"'] \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

① $\exists\, \tilde{p}$ sollevamento di $p$ che è rivestimento universale

② $\exists\, \tilde{q}$ sollevamento di $\tilde{p}$ che è rivestimento universale

$\Rightarrow p, \tilde{q}$ rivestimenti $\overset{\text{prop}}{\underset{\text{sopra}}{\Longrightarrow}}$ $r \circ q$ rivestimento

**esempio** Se $X$ non ammette rivestimento universale questo non è in generale vero: un esempio di ciò è l'orecchino Hawaiano



**def** Sia $G$ un gruppo e $X$ un insieme o spazio topologico. $G$ **AGISCE** a sinistra su $X$ se esiste un'applicazione insiemistica, risp. continua, tale che

$$\bullet : G \times X \longrightarrow X$$
$$(g, x) \longmapsto g \bullet x$$

i) $(gg') \bullet x = g \bullet (g' \bullet x) \quad \forall g, g' \in G, \forall x \in X$

ii) $e_G \bullet x = x \quad \forall x \in X$

Se $G$ agisce su $X$, diremo che $X$ è **G-insieme**, risp. **G-spazio topologico**.

**def**
- $G$ agisce **TRANSITIVAMENTE** su $X \neq \emptyset$ se $\forall x, x' \in X \ \exists g \in G$ t.c. $x' = g \bullet x$
- $G$ agisce **LIBERAMENTE** se $g \neq e_G \Rightarrow g \bullet x \neq x \quad \forall x$
  (analog. $g \bullet x = x \Rightarrow g = e_G$)
- $x \in X$, $O(x) = \{g \bullet x, g \in G\}$ è detta **ORBITA** di $x$
- $x \in X$, $St_x = \{g \in G : g \bullet x = x\}$ è detto **STABILIZZATORE** di $x$
- un G-insieme è detto **OMOGENEO** se l'azione è transitiva

**def** Siano $X, Y$ due $G$-insiemi. Una applicazione $\varphi: X \to Y$ si dice **G-EQUIVARIANTE** se il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r] \arrow[d, "(id, \varphi)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ G \times Y \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

**lemma** Se $X$ è $G$-insieme omogeneo e $\varphi: X \to Y$ è $G$-equivariante, allora $\varphi$ è individuata da $\varphi(x_0)$ per un qualunque $x_0 \in X$

dim $x \in X \Rightarrow \exists g$ tc $x = g \cdot x_0$ poiché l'azione è transitiva

$\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(g \cdot x_0) \underset{\text{equivarianza}}{=} g \cdot \varphi(x_0)$

**def** • $X$ sia un $G$-insieme, allora $Aut_G(X) = \{\varphi: X \to X$ biiettive e $G$-equivarianti$\}$

• $X$ sia un $G$-spazio, allora $Aut_G(X) = \{\varphi: X \to X$ omeomorfismi e $G$-equivarianti$\}$

**prop** Se $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ è rivestimento, allora $Aut_X(\tilde{X})$ agisce liberamente su $\tilde{X}$ tramite $\varphi \cdot \tilde{x} = \varphi(\tilde{x})$

oss In generale questa azione non è transitiva poiché $\varphi \in Aut_X(\tilde{X})$ permuta gli elementi di $p^{-1}(x)$

dim Ricordo $Aut_X(\tilde{X}) = \{\varphi: \tilde{X} \xrightarrow{\text{omeo}} \tilde{X}$ tc $p \circ \varphi = p\}$

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Considero $\cdot : Aut_X(\tilde{X}) \times \tilde{X} \to \tilde{X}$ e mostro che è un'azione:

$(\varphi, \tilde{x}) \mapsto \varphi \cdot \tilde{x} := \varphi(\tilde{x})$

- $(id_{\tilde{X}}, \tilde{x}) \mapsto \tilde{x}$
- $\varphi, \psi \in Aut_X(\tilde{X})$ : $(\psi \circ \varphi) \cdot \tilde{x} = (\psi \circ \varphi)(\tilde{x}) = \psi(\varphi(\tilde{x})) = \psi \cdot (\varphi \cdot \tilde{x})$

Infine, l'azione è libera. Sia $\varphi$ tc $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Ottengo che anche $id_{\tilde{X}}(\tilde{x}) = \tilde{x}$.

$\varphi$ e $id_{\tilde{X}}$ sono due automorfismi di rivestimento che coincidono in un punto, ovvero sono due sollevamenti di $p: \tilde{X} \to X$ rispetto a $p: \tilde{X} \to X$ che coincidono in un punto, dunque $\varphi = id_{\tilde{X}}$.

**def** $p: \tilde{X} \to X$ rivestimento, $G = \pi_1(X, x)$. L'**AZIONE DI MONODROMIA** su $p^{-1}(x)$ è l'azione destra

$\cdot \quad p^{-1}(x) \times G \to p^{-1}(x)$

$(\tilde{x}, \alpha) \mapsto \tilde{x} \cdot \alpha :=$ p.to finale dell'unico sollevamento di $f$ di p.to iniziale $\tilde{x}$

$\alpha = [f]$

**lemma** L'azione di monodromia è transitiva. In particolare, $p^{-1}(x)$ è un $\pi_1(X, x)$-insieme omogeneo.

dim Mostriamo che presi $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$, esiste $\alpha \in \pi_1(X, x)$ tc $\tilde{x}_1 \cdot \alpha = \tilde{x}_2$.

Sia $\tilde{f}$ cammino da $\tilde{x}_1$ a $\tilde{x}_2$ in $\tilde{X}$.

$f := p \circ \tilde{f}$ è un cappio di punto base $x$.

Pongo $\alpha = [f]$ e allora $\tilde{x}_1 \cdot \alpha = \tilde{x}_2$.

**lemma** $p:\tilde{X}\to X$ rivestimento e $\tilde{x}\in p^{-1}(x)$ fissato con $x\in X$. Allora $St\,\tilde{x}=p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})$ per l'azione di monodromia.

**dim** Ricordo $St\,\tilde{x}=\{\alpha\in\pi_1(X,x) \text{ tc } \tilde{x}\cdot\alpha=\tilde{x}\}$

Sia $\alpha=[f]$, $f$ di p.to base $x$ tc $\tilde{x}\cdot\alpha=\tilde{x}$

$\Rightarrow$ il punto finale dell'unico sollevamento $\tilde{f}$ di $f$ di p.to iniziale $\tilde{x}$ ha $\tilde{x}$ come p.to finale

$\Rightarrow$ $\tilde{f}$ cappio di p.to base $\tilde{x}$ e $f=p\circ\tilde{f}$

$$\Rightarrow \alpha=[f]=[p\circ\tilde{f}]=p_*(\underset{\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})}{\underset{\cap}{[\tilde{f}]}})$$

**prop** $G$ gruppo agisce su un insieme $Y$. $y\in Y$, allora c'è una biezione

$$\underbrace{G/St_y}_{\text{insieme delle classi laterali}}\xrightarrow{\sim} O(y)$$

**corollario** $p:\tilde{X}\to X$ rivestimento. Allora $\exists$ biezione

$$\underbrace{\frac{\pi_1(X,x)}{p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})}}_{\text{insieme delle classi laterali}}\xrightarrow{\sim} p^{-1}(x)$$

**prop** $p:\tilde{X}\to X$ rivestimento, $x\in X$ fissato. La seguente applicazione naturale è isomorfismo di gruppi

$$Aut_X(\tilde{X})\longrightarrow Aut_{\pi_1(X,x)}(p^{-1}(x))$$
$$\varphi\longmapsto\varphi|_{p^{-1}(x)}$$

**dim** 1) L'applicazione è ben definita:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} p^{-1}(x) \arrow[rr, "\varphi|_{p^{-1}(x)}"] \arrow[dr] & & p^{-1}(x) \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$\varphi$ è omeomorfismo $\Rightarrow$ $(\varphi|_{p^{-1}(x)})^{-1}=(\varphi^{-1})|_{p^{-1}(x)}$ $\Rightarrow$ $\varphi|_{p^{-1}(x)}$ è biettiva e dunque è permutazione della fibra.

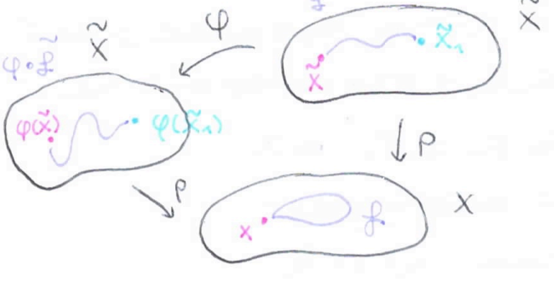
Rimane da vedere che è $\pi_1(X,x)$-equivariante.

Sia $\alpha=[f]\in\pi_1(X,x)$, $\tilde{x}\in p^{-1}(x)$.

$\varphi(\tilde{x}\cdot\alpha)=\varphi(\tilde{f}(1))=\varphi(\tilde{x}_1)$, con $\tilde{f}$ unico soll. di $f$ di p.to iniziale $\tilde{x}$

$p\circ(\varphi\circ\tilde{f})=(p\circ\varphi)\circ\tilde{f}=p\circ\tilde{f}=f$ $\Rightarrow$ $\varphi\circ\tilde{f}$ sollevamento di $f$ di p.to iniziale $\varphi(\tilde{f}(0))=\varphi(\tilde{x})$

ed ha punto finale $\varphi(\tilde{x}_1)$ $\Rightarrow$ $\varphi(\tilde{x}\cdot\alpha)=\varphi(\tilde{x})\cdot\alpha$



2) L'applicazione è omomorfismo di gruppi:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & \tilde{X} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "p"] & \tilde{X} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad (\psi \circ \varphi)|_{p^{-1}(x)} = \psi|_{p^{-1}(x)} \circ \varphi|_{p^{-1}(x)}$$

3) È omeomorfismo biettivo:

- (iniettività). Siano $\varphi, \psi \in Aut_X(\tilde{X})$ con $\varphi(\tilde{x}) = \psi(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$.
  Ovvero che sono due automorfismi di rivestimento che coincidono in un punto $\Rightarrow \varphi = \psi$
- (suriettività). Sia $\psi : p^{-1}(x) \to p^{-1}(x)$ biezione invariante per monodromia, voglio mostrare che $\psi$ è restrizione di un automorfismo di rivestimento.

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(x) & \xrightarrow{\psi} & p^{-1}(x) \\ \tilde{x} & \longmapsto & \tilde{x}_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{X} & \dashrightarrow & \tilde{X} \end{array}$$

Ricordo che la condizione necessaria e sufficiente affinché esista un automorfismo di rivestimento $\varphi : \tilde{X} \to \tilde{X}$ che manda $\tilde{x}$ in $\tilde{x}_1$ è che

$$p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$$

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

È sufficiente dimostrare $\subseteq$, perché poi scambio $\psi$ con $\psi^{-1}$.
Sia $\tilde{\alpha} \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$, $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$, allora

$$\tilde{x}_1 = \psi(\tilde{x}) = \psi(\tilde{x} \cdot \alpha) = \psi(\tilde{x}) \cdot \alpha = \tilde{x}_1 \cdot \alpha$$

$\Rightarrow \alpha$ si solleva ad una classe di cappi di p.to base $\tilde{x}_1$

$\Rightarrow \underset{\overset{\parallel}{p_* \tilde{\alpha}}}{\alpha} = p_* \beta$, $\beta \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ $\Rightarrow$ $p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \subseteq p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$

def Siano $G$ un gruppo e $H \leq G$. Il NORMALIZZANTE di $H$ in $G$ è

$$N(H) = \text{più grande sottogruppo di } G \text{ in cui } H \text{ è normale}$$
$$= \{ g \in G \mid gH = Hg \}$$

prop $G$ gruppo, $H$ sottogruppo. Suppongo $G$ agisca su $E$ e $H = St\, x_0$, $x_0 \in E$ fissato.
Allora c'è un isomorfismo di gruppi

$$Aut_G(E) \xrightarrow{\sim} \frac{N(H)}{H}$$

def $p$ si dice RIVESTIMENTO NORMALE o REGOLARE o DI GALOIS se $p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(X, x)$ $\forall \tilde{x} \in \tilde{X}$

corollario $G = \pi_1(X, x)$, $E = p^{-1}(x)$, $p : \tilde{X} \to X$ rivestimento, $H = St\, \tilde{x} = p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$, $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ fissato.
Allora

$$Aut_{\tilde{X}}(X) \simeq Aut_{\pi_1(X,x)} p^{-1}(x) \simeq \frac{N(p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))}{p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})}$$

se il rivestimento è normale, ovvero $p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \trianglelefteq \pi_1(X, x)$, allora

$$\mathrm{Aut}_{\tilde{X}}(\tilde{X}) \simeq \frac{\pi_1(X, x)}{p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})}$$

se il rivestimento è universale, allora

$$\mathrm{Aut}_X(\tilde{X}) \simeq \pi_1(X, x)$$

oss $p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \leq \pi_1(X, x)$ è normale $\iff$ coincide con $p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ $\forall \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x)$

prop $p: \tilde{X} \to X$ rivestimento è normale $\iff$ $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ agisce transitivamente sulle fibre $p^{-1}(x)$, $x \in X$

dim $(\tilde{X}, p)$ normale $\iff p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \trianglelefteq \pi_1(X, x)$ $\forall x \in X$ $\forall \tilde{x} \in p^{-1}(x)$

$\iff p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ $\forall x \in X$, $\forall \tilde{x}, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x)$

$\iff \forall x \in X$, $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$ $\exists \varphi \in \mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ tc $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}_1$

$\iff \mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ agisce transitivamente su $p^{-1}(x)$ $\forall x \in X$

lemma $Y$ sp. top, $G \leq \{$omeo di $Y\}$. Sia $Y/G$ lo sp. top. quoziente rispetto alla relazione $y \sim y' \iff \exists g \in G$ tc $g(y) = y'$. Allora l'appl. quoziente $p: Y \to Y/G$ è aperta.

dim Ricordo $U \subseteq Y/G$ aperto $\iff p^{-1}(U)$ aperto in $Y$.

Mostro che se $V \subset Y$ aperto, allora $p^{-1}(p(V))$ aperto, in particolare

$$p^{-1}(p(V)) = \underbrace{\bigcup_{g \in G} \underbrace{g(V)}_{\text{aperti in } Y}}_{\text{aperto in } Y}$$

$\supseteq$: Ottengo che $p(V) = p(g(V)) \Rightarrow g(V) \subseteq p^{-1}(p(V))$

$\subseteq$: se $y \in p^{-1}(p(V)) \Rightarrow p(y) = \bar{y} \in p(V)$

$\Rightarrow \exists y' \in V$ tc $p(y) = \bar{y} = p(y')$

$\Rightarrow y' \equiv_G y$

$\Rightarrow \exists g$ tc $g(y') = y$

$\Rightarrow y \in g(V)$

prop Sia $p: \tilde{X} \to X$ rivestimento normale. Allora $p$ induce un omeomorfismo

$$\tilde{X} / \mathrm{Aut}_X(\tilde{X}) \xrightarrow{\sim} X$$

dim Considero

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[dl, dotted] \\ Y := \tilde{X}/\mathrm{Aut}_X(\tilde{X}) & \end{tikzcd}$$

$\tilde{x} \mapsto x$, $\tilde{x} \mapsto q(\tilde{x})$

e definisco $r: X \to Y$
$x \mapsto q(\tilde{x})$

- $r$ è ben definita.

siano $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$. Siccome il rivestimento è normale, allora $\exists \varphi \in \mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ tc $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$

$\Rightarrow \tilde{x}_1 \equiv_{\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})} \tilde{x}_1 \Rightarrow q(\tilde{x}_1) = q(\tilde{x}_2)$

- $r$ è suriettiva: $r \circ p = q$ per costruzione & $q$ suriettiva $\Rightarrow$ $r$ suriettiva
- $r$ è iniettiva: $x_1, x_2 \in X$ tc $r(x_1) = r(x_2)$.

  Presi $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_1)$, $\tilde{x}_2 \in p^{-1}(x_2)$ si ha $q(\tilde{x}_1) = q(\tilde{x}_2)$

  $\Rightarrow \tilde{x}_2 = \varphi(\tilde{x}_1)$, $\varphi \in Aut_X(\tilde{X})$

  $\Rightarrow \underset{x_2}{\overset{\parallel}{p(\tilde{x}_2)}} = p(\varphi(\tilde{x}_1)) \underset{\text{automorf.}}{=} p(\tilde{x}_1) = x_1$
- continuità: $V \subseteq Y$ aperto $\Rightarrow q^{-1}(V) \subseteq \tilde{X}$ aperto $\xRightarrow{p \text{ aperta}}$ $\overset{r^{-1}(V)}{\overset{\parallel}{p(q^{-1}(V))}} \subseteq X$ aperto
- aperta: $U \subseteq X$ aperto, $r(U) = \underbrace{q(\underbrace{p^{-1}(U)}_{\text{aperto (p continua)}})}_{\text{aperto (q aperta)}}$

**def** $Y$ sp. top., $G \leq \{\text{omeo. di } Y\}$. $G$ agisce in modo PROPRIAMENTE DISCONTINUO su $Y$ se $\forall y \in Y$ $\exists$ intorno aperto $U \subseteq Y$ di $y$ tc $\varphi(U) \cap U = \emptyset$ $\forall \varphi \in G$, $\varphi \neq id_Y$

**oss** la condizione sopra è equivalente a richiedere che $\forall y \in Y$ $\exists U \subseteq Y$ aperto tc $\varphi(U) \cap \psi(U) = \emptyset$ $\forall \varphi, \psi \in G$ distinti

**prop** Il gruppo di automorfismi $Aut_X(Y) \leq \{\text{omeo di } Y\}$ di un rivestimento $p: Y \longrightarrow X$ agisce in modo propriamente discontinuo su $Y$

**dim** $\forall y \in Y$, $x = p(y)$, sia $U \ni x$ un intorno elementare di $x$ per $p$, sia $V$ la componente connessa per archi di $p^{-1}(U)$ che contiene $y$. Allora $\varphi(V) \subseteq Y$ aperto e $\varphi(V) \cap V = \emptyset$ se $\varphi = id_Y$
infatti $Aut_X(Y)$ agisce liberamente su $Y$, dunque $\varphi(y) \neq y$ $\forall \varphi \neq id_Y$, inoltre $\varphi(V)$ è componente connessa per archi di $p^{-1}(x)$, dunque deve essere disgiunta da $V$

**prop** sia $Y$ sp. top. conn. e loc. conn. per archi, $G \leq \{\text{omeo di } Y\}$ che agisce in modo propriamente discontinuo su $Y$, allora

$$p: Y \longrightarrow Y/G =: X$$

è rivestimento normale e $G = Aut_X(Y)$

**dim**
- $p: Y \to Y/G$ esiste suriettiva per costruzione. Rimane da verificare che ogni $x \in X$ ammette intorno elementare.

  sia $y \in p^{-1}(x)$, $V$ intorno aperto localmente connesso per archi e connesso che contiene $y$ e tc $\varphi V \cap V = \emptyset$ $\forall \varphi \in G$, $\varphi \neq id_Y$.

  Allora $U = p(V)$ è aperto loc. connesso per archi e connesso ($p$ aperta) e per costruzione

  $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\varphi \in G} \varphi(V)$, unione disgiunta di aperti omeo. fra loro.

  Rimane da verificare che $p|_V : V \longrightarrow U$ è omeo:
  - continua e aperta perché restrizione di $p$ continua e aperta
  - suriettiva per definizione di $U$

- $p|_V$ iniettiva: $y_1, y_2 \in V$ tc $p(y_1)=p(y_2) \iff y_1 \equiv_G y_2 \iff y_2=\varphi(y_1)$ $\exists\, \varphi\in G$

  $\iff V\cap\varphi(V)\neq\emptyset \iff \varphi = id_Y$

$\Rightarrow$ p è rivestimento.

- $G = Aut_X(Y)$

  $\subseteq$: (banale). Se $\varphi\in G \Rightarrow p(\varphi(y))=p(y)$ $\forall y\in Y$ perché $\varphi(y)\equiv_G y$

  $\supseteq$: $\psi\in Aut_X(Y)$, $y_0\in Y$ fissato, $y_1=\psi(y_0)$

  $\Rightarrow p(y_1)=p(y_0) \Rightarrow y_1\equiv_G y_0 \Rightarrow \exists\,\varphi\in G$ tc $\varphi(y_0)=y_1$

  qui uso l'inclusione $\subseteq$ $\Rightarrow$ $\varphi,\psi\in Aut_X(Y)$ che coincidono su $y_0$

  $\Rightarrow \varphi=\psi \in G$

**prop** Suppongo X ammetta rivestimento universale, allora c'è corrispondenza tra classi di isomorfismo di rivestimenti e classi di coniugio di sottogruppi del gruppo fondamentale, ovvero se $G\leq\pi_1(X,x_0)$, allora $\exists\, r: Y\longrightarrow X$ rivestimento tc $r_*\pi_1(Y,y_0)=G$ per un $y_0\in r^{-1}(x_0)$

**dim** Fissato $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ $\exists$ isomorfismo di gruppi

$$\begin{array}{ccc} Aut_X(\tilde{X}) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(X,x_0) \\ \varphi & \longmapsto & \alpha \ \text{ tc } \ \tilde{x}_0\cdot\alpha=\varphi(\tilde{x}_0) \\ \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} \\ H & \xrightarrow{\sim} & G \end{array}$$

Sia $H\leq Aut_X(\tilde{X})$ corrispondente a G rispetto all'isomorf. descritto.

H è gruppo di omeo che agisce su $\tilde{X}$ e $Aut_X(\tilde{X})$ agisce in modo propr. discontinuo su $\tilde{X}$

$\Rightarrow$ H agisce in modo propriamente discontinuo su $\tilde{X}$. Allora q è rivestimento normale e $Aut_Y(\tilde{X}) = H$ (in particolare è universale).

$$Aut_Y(\tilde{X}) \cong \pi_1(Y,y)$$

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & Y := \tilde{X}/H \arrow[dl, dotted, "r"] \\ \tilde{X}/Aut_X(\tilde{X}) = X & \end{tikzcd}$$

Ottengo che p si fattorizza attraverso q, infatti posso definire $r:\ y=q(\tilde{x})\mapsto p(\tilde{x})$, che non dipende da $\tilde{x}\in q^{-1}(y)$ ed è continua.

Dato che p e q sono rivestimenti, anche r lo è

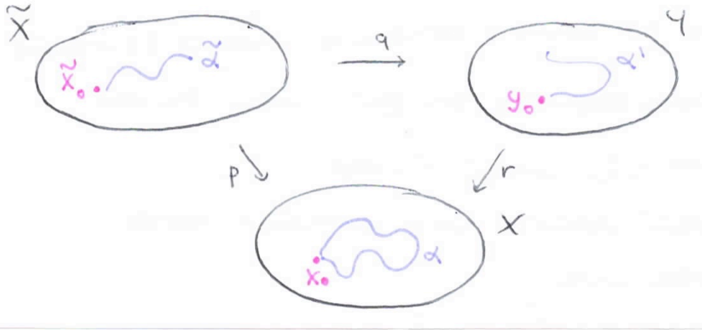
- Rimane da verificare $\underbrace{r_*\pi_1(Y,y_0)}_{St_{y_0}\text{ per l'azione di monodromia di }\pi_1(X,x_0)\text{ su }Y} = G\leq\pi_1(X,x_0)$

$\alpha\in St_{y_0} \iff y_0=y_0\cdot\alpha \ \boxed{\iff}\ q(\tilde{x}_0)=q(\tilde{x}_0)\cdot\alpha \ \boxed{\iff}\ q(\tilde{x}_0)=q(\tilde{x}_0\cdot\alpha)$

$\exists\,\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ tc $y_0=q(\tilde{x}_0)$

dovrà essere $\alpha'=q_*(\tilde{\alpha})$, $\alpha'(1)=q_*(\tilde{\alpha}(1))$

$\iff \tilde{x}_0\equiv_H\tilde{x}_0\cdot\alpha \iff \tilde{x}_0\cdot\alpha=\varphi(\tilde{x}_0)$ $\exists\,\varphi\in H$ $\iff \alpha\in G$



**TEOREMA** (Galois topologico). Sia $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ rivestimento normale. Allora esiste una biezione

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{rivestimenti intermedi} \\ \begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "r"] & \\ X & Z \arrow[l, "q"] \end{tikzcd} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{sottogruppi del} \\ \text{gruppo } Aut_X(\tilde{X}) \end{array} \right\}$$

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "r"] & \\ X & Z \arrow[l, "q"] \end{tikzcd} \longmapsto Aut_Z(\tilde{X}) \leq Aut_X(\tilde{X})$$

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "r"'] \arrow[ddr, bend right, "p"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "r"] \\ & Z \arrow[d, "q"] & \\ & X & \end{tikzcd}$$

$r \circ \varphi = r$

$\Rightarrow q \circ r \circ \varphi = q \circ r$

$\Rightarrow p \circ \varphi = p$

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "r"] & \\ X & \tilde{X}/H \arrow[l, "q"] \end{tikzcd} \longleftarrow\!\shortmid\; H \leq Aut_X(\tilde{X})$$

normale

Inoltre $q$ è normale $\Leftrightarrow H \trianglelefteq Aut_X(\tilde{X})$ e in tal caso $Aut_X(Z) = \dfrac{Aut_X(\tilde{X})}{H}$

dim • le due costruzioni sono ben definite e sono una l'inversa dell'altra.

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "r"] & \\ X & Z \arrow[l, "q"] \end{tikzcd} \longmapsto H = Aut_Z(\tilde{X}) \leq Aut_X(\tilde{X}) \longmapsto \begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "r"] \arrow[drr, bend left] & & \\ X & Z \arrow[l, "q"] & \tilde{X}/H \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

Se $r: \tilde{X} \to Z$ normale, allora $\tilde{X}/_{Aut_Z(\tilde{X})} \simeq Z$.

viceversa,

$$H \leq G = Aut_X(\tilde{X}) \longmapsto \begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[d] \arrow[dr, "r"] & \\ X & \tilde{X}/H \arrow[l] \end{tikzcd} \longmapsto Aut_{\tilde{X}/H}(\tilde{X}) \simeq H$$

• Rimane da studiare il caso normale.

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "r"] & \\ X & Z \arrow[l, "q"] \end{tikzcd}$$

Suppongo $q$ normale e mostro $Aut_Z(\tilde{X}) \trianglelefteq Aut_X(\tilde{X})$

Definisco $\Gamma: Aut_X(\tilde{X}) \longrightarrow Aut_X(Z)$

$\varphi \longmapsto \Gamma(\varphi) = \varphi_Z$

con $\varphi_Z$ tale che $r \circ \varphi = \varphi_Z \circ r$ e $q \circ \varphi_Z = q$:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "r"'] & \tilde{X} \arrow[d, "r"] \arrow[ddl, bend left=60, "p"] \\ Z \arrow[r, dashed, "\varphi_Z"] \arrow[d, "q"'] & Z \arrow[dl, "q"] \\ X = X & \end{tikzcd}$$

$\tilde{x} \longmapsto \varphi(\tilde{x})$

$z \qquad z'$

Sia $\tilde{x} \in \tilde{X}$ fissato, $z = r(\tilde{x})$, $z' = r(\varphi(\tilde{x}))$

Osservo $\quad q(z') = p(\varphi(\tilde{x})) = p(\tilde{x}) = q(z)$

$\xRightarrow{q \text{ normale}}$ $Aut_X(Z)$ agisce transitivamente sulle fibre

$\Rightarrow \exists\, \varphi_z \in Aut_X(Z)$ tc $\varphi_z(z) = z'$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "r"] \arrow[dr, bend left, "\varphi_z \circ r"] \arrow[dr, bend left=60, "r \circ \varphi"] & \\
X & Z \arrow[l, "q"]
\end{tikzcd}$$

$\varphi_z \in Aut_X(Z)$

Osservo $\quad q \circ \varphi_z \circ r = (q \circ \varphi_z) \circ r = q \circ r = p$

$\quad q \circ r \circ \varphi = (q \circ r) \circ \varphi = p \circ \varphi = p$

$\varphi \in Aut_X(\tilde{X})$

$\Rightarrow r \circ \varphi$ e $\varphi_z \circ r$ sono sollevamenti di $p$ rispetto a $q$ e coincidono in $\tilde{x}$ per costruzione

$\Rightarrow r \circ \varphi = \varphi_z \circ r$

$\Gamma$ è omeo. di gruppi e $\ker \Gamma = Aut_Z(\tilde{X})$:

$\varphi \in Aut_Z(\tilde{X}) \iff r \circ \varphi = r \iff \varphi_z \circ r = r \iff \varphi_z = id_Z \iff \varphi \in \ker \Gamma$

$\Rightarrow Aut_Z(\tilde{X}) = \ker \Gamma \trianglelefteq Aut_X(\tilde{X})$.

**TEOREMA** (Borsuk-Ulam). Non esiste una applicazione continua $f: S^n \longrightarrow S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ tc $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in S^n = \{|x| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

dim $(n=1)$ $\quad f: S^1 \to S^0 = \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ continua tc $f(-x) = -f(x)$

$f$ è suriettiva. Non può esistere tale $f$ poiché $S^1$ connesso e $S^0$ sconnesso.

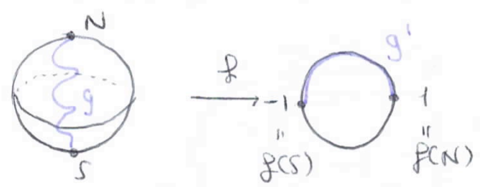
$(n=2)$ $\quad f: S^2 \longrightarrow S^1$ tc $f(-x) = -f(x)$

$$\begin{tikzcd}
S^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & S^1 \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d] \\
\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = S^2/_{\pm 1} \arrow[r, "\bar{f}"] & S^1/_{\pm} = S & \mathbb{Z}^2
\end{tikzcd}$$

$f$ induce $\bar{f}: \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \longrightarrow S$ continua

$\Rightarrow \bar{f}_*: \underbrace{\pi_1(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}, \bar{x})}_{= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \longrightarrow \underbrace{\pi_1(S^1, \bar{f}(\bar{x}))}_{= \mathbb{Z}}$ omom di gruppi

A meno di omeom. posso supporre $x = N$ e $f(x) = 1$




Sia $g$ cammino da $N$ ad $S$ in $S^2$; $\bar{g}, \bar{N}, \bar{S}$ immagini in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

$[\bar{g}] \neq \varepsilon_{\bar{N}} \in \pi_1(\mathbb{P}, \bar{N})$ poiché solo $[e_N] = \varepsilon_N$ in $S^2$ solleva $\varepsilon_{\bar{N}}$

$\Rightarrow \bar{g}$ rappresenta $1$ in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$f_*[g] = [g']$

$\bar{f}_*[\bar{g}] = [\bar{g}'] \neq \varepsilon_1$ poiché $\bar{g}'$ si solleva a $g'$ che ha p.to finale $\neq 1$
$\quad \underset{\pi_1(S^1, 1)}{\cap}$

$\Rightarrow \bar{f}_*$ non è applicazione nulla ↯

Vi sono diversi enunciati equivalenti di questo teorema:

**(BU1).** Non esiste appl. cont. $f : S^n \to S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ tc $f(-x) = -f(x) \ \forall x \in S^n$

**(BU2).** Sia $g : S^n \to \mathbb{R}^n$ continua tc $g(-x) = -g(x) \ \forall x \in S^n$, allora $\exists \ x_0 \in S^n$ tc $g(x_0) = 0$

**(BU3).** Se $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ è continua, allora $\exists \ x \in S^n$ tc $f(x) = f(-x)$

Dimostriamolo:

(BU1) $\Leftrightarrow$ (BU2) $\quad (\Rightarrow)$ $g : S^n \to \mathbb{R}^n$ con $g(-x) = -g(x)$

se $g(x) \neq 0 \ \forall x \in S^n$, $g$ viene fattorizzata:

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \mathbb{R}^n \\ & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \arrow[ur] \arrow[d, dashed] & \\ & S^{n-1} & \end{tikzcd} \qquad x \mapsto \frac{x}{|x|}$$

$f$ continua con $f(-x) = -f(x)$ ↯

$\Rightarrow \exists \ x \in S^n$ tc $g(x) = 0$

$(\Leftarrow)$ Se esistesse $f : S^n \to S^{n-1}$ con $f(x) \quad x)$, componendola con l'inclusione $S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ avrei $g : S^n \to \mathbb{R}^n$ con $g(-x) = -g(x)$ e $g(x) \neq 0 \ \forall \ x \in S^n$ ↯

(BU2) $\Leftrightarrow$ (BU3) $\quad (\Rightarrow)$ $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ continua. Definisco $g : S^n \to \mathbb{R}^n$, $g(x) := f(x) - f(-x)$ continua

Per costruzione $g(-x) = -g(x)$

$\underset{BU2}{\Rightarrow} \exists \ x_0$ tc $g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - f(-x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = f(-x_0)$

$(\Leftarrow)$ $g : S^n \to \mathbb{R}^n$ continua tc $g(-x) = -g(x) \ \forall x \in S^n$

$\underset{BU3}{\Rightarrow} \exists \ x_0 \in S^n$ tc $g(x_0) = g(-x_0) = -g(x_0) \Rightarrow 2g(x_0) = 0 \Rightarrow g(x_0) = 0$

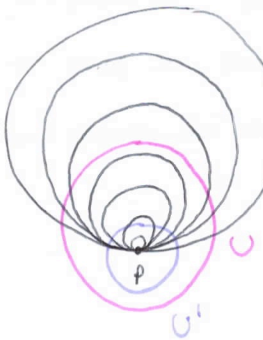
**def** Uno sp. top. è **SEMILOCALMENTE SEMPLICEMENTE CONNESSO** se $\forall x \in X$ $\exists$ $U$ intorno di $x$ aperto e connesso per archi, detto **APERTO BASILARE**, t.c. $i: U \hookrightarrow X$ inclusione dia

$$\begin{aligned} i_*: \pi_1(U,x) &\longrightarrow \pi_1(X,x) \\ \alpha &\longmapsto \varepsilon_x \end{aligned}$$

omomorfismo nullo/banale. Ovvero ogni cappio di p.to base $x \in U$ diventa omotopo al cappio costante in $X$.

**oss 1** Ogni sp. top. localmente semplic. connesso è semiloc. semp. conn.

**oss 2** L'orecchino hawaiano non è semiloc. sempl. conn.




**TEOREMA** Sia $X$ loc. conn. per archi e connesso. Allora $X$ ammette riv. univ. se e solo se $X$ è semiloc. sempl. conn.

**dim** ($\Rightarrow$) $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ rivestimento universale; sia $x \in X$, $U \ni x$ aperto elementare, $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ fissato, $V$ componente connessa di $p^{-1}(U)$ che contiene $\tilde{x}$:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[d, "p"'] & V \ni \tilde{x} \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[d, "s \text{ omeo}"] \arrow[dl, phantom, "G"] \\ X & U \ni \tilde{x} \arrow[l, hook', "i"] \end{tikzcd}$$

Il quadrato indotto nei gruppi fondamentali commuta:

$$\begin{tikzcd} \boxed{\{1\} =} \pi_1(\tilde{X},\tilde{x}) \arrow[d, "p_*"'] & \pi_1(V,\tilde{x}) \arrow[l, "j_*"'] \arrow[d, "s \,(p|_V)_*"] \\ \pi_1(X,x) & \pi_1(U,\tilde{x}) \arrow[l, "i_*"] \arrow[ul, phantom, "\substack{\text{omom. banale} \\ \alpha \mapsto \varepsilon_x}"] \end{tikzcd}$$

$i_* \circ (p|_V)_*$ è omom. banale e $(p|_V)_*$ è isomorfismo $\Longrightarrow$ $i_*$ è omom. banale

($\Leftarrow$) (1) Costruzione insiemistica di $(\tilde{X}, p)$

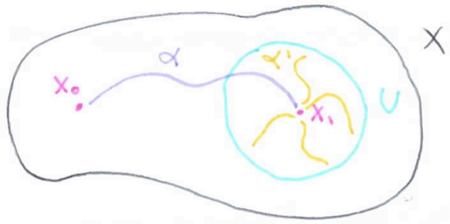
$\tilde{X} := \{$classi di equivalenza di cammini in $X$ di p.to iniziale $x_0\}$

$$\begin{aligned} p \downarrow \quad & \alpha \\ & \downarrow \\ X \quad & \alpha(1) \end{aligned}$$

(2) Definizione di una topologia su $\tilde{X}$

$\alpha \in \tilde{X}$, $U$ aperto banale che contiene $\alpha(1)$

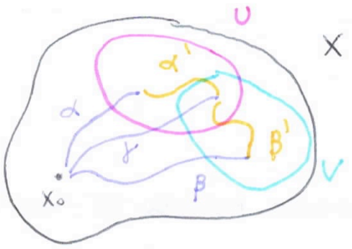
$\tilde{X} \supseteq (\alpha, U) := \{\beta \in \tilde{X} : \beta = \alpha\alpha', \alpha'$ classe di cammino contenuto in $U$, $\alpha(1) = \alpha'(0)\}$




Definisco la topologia su $\tilde{X}$ avente $(\alpha, U)$ come base al variare di $\alpha \in X$

e $U$ negli aperti banali (se $\alpha(1) \notin U$ è $\emptyset$). La famiglia $(\alpha, U)$ è base:

- $\beta \in \tilde{X}$. Pongo $\alpha = \beta$, $U$ sia intorno banale di $\beta(1) \Rightarrow \beta \in (\alpha, U)$
- $\gamma \in (\alpha, U) \cap (\beta, V)$. Pongo $\delta = \gamma$, $W$ sia un aperto banale che contiene $\gamma(1)$ ed è contenuto in $U \cap V$




(3) $p$ è continua

$p|_{(\alpha, U)} : (\alpha, U) \to U$ è biettiva

$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha_d} (\alpha_d, U)$, al variare di $\alpha_d \in \tilde{X}$ tra i cammini di punto iniziale

$x_0$ e finale $x_1 \in U$ fissato. Dunque $p^{-1}(U)$ aperto.

Gli aperti banali $U$ di $X$ formano una base per la topologia di $X$.

Ne segue la continuità di $p$.

(4) Definizione degli aperti elementari

$p|_{(\alpha, U)} : (\alpha, U) \to U$ è omeomorfismo, $U$ aperto banale

(5) $\tilde{X}$ è connesso per archi e localmente connesso per archi

$\tilde{X}$ è localmente connesso per archi perché localmente omeomorfo ad aperti

banali, che sono connessi per archi

Mostro che $\exists F : I \to \tilde{X}$ cammino da $\varepsilon_{x_0}$ ad $\alpha = [f]$

Infine concludo $p : \tilde{X} \to X$ rivestimento

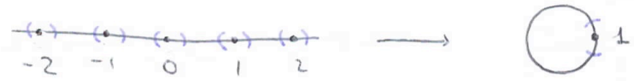
(6) $\tilde{X}$ è sempl. connesso, ovvero $\pi_1(\tilde{X}, \varepsilon_{x_0}) = 1$

Mostro che lo stabilizzatore $St_{\varepsilon_{x_0}}$ per l'azione di monodromia è banale

$$\begin{gathered} St_{\varepsilon_{x_0}} \\ \| \\ p_* \pi_1(\tilde{X}, \varepsilon_{x_0}) \end{gathered}$$

esempi • $S^1$

$$\mathbb{R} \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto e^{2\pi i t}$$



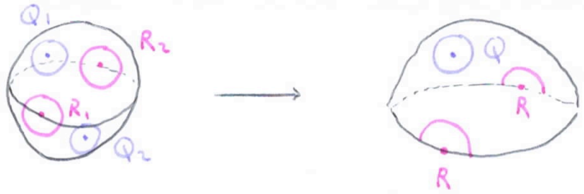
$$S^1 \longrightarrow S^1$$
$$z \longmapsto z^n$$

(n=2)

• $\mathbb{P}$

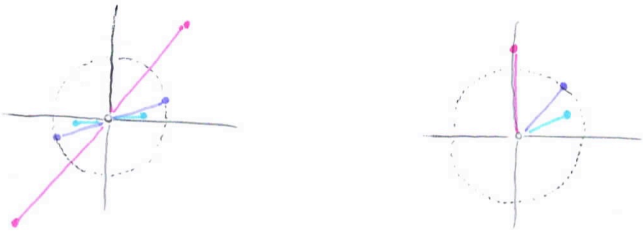
identificazione dei punti antipodali

$$S^2 \twoheadrightarrow \mathbb{P}$$




• $\mathbb{C}^*$

$$\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$
$$z \longmapsto z^2$$



• $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$

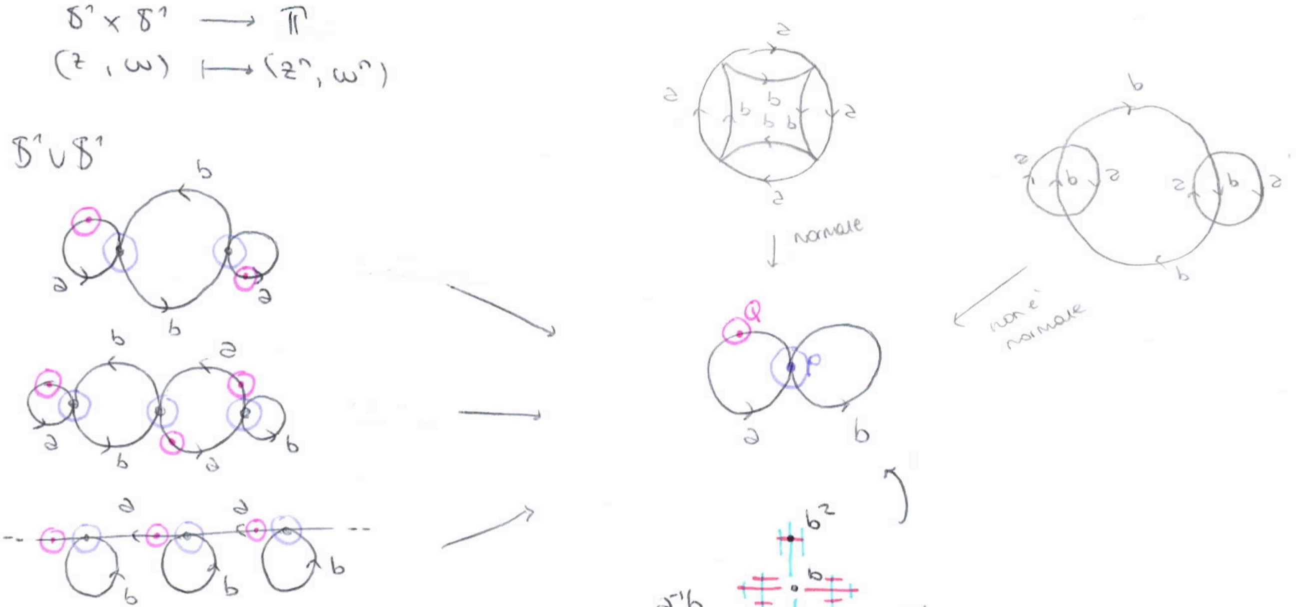
vengono da quelli della circonferenza, dato che il prodotto di rivestimenti è rivestimento del prodotto. Abbiamo ad esempio

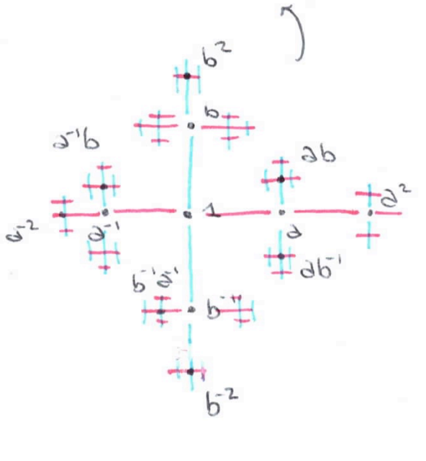
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}$$
$$(t, s) \longmapsto (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s})$$

(rivestimento universale)

$$S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathbb{T}$$
$$(z, w) \longmapsto (z^n, w^n)$$

• $S^1 \vee S^1$

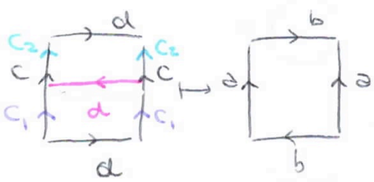



(rivestimento universale)

• $\mathbb{K}$

$\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}$




$(x,y)$ con $y \geq \frac{1}{2} \mapsto (x, 2y-1)$

$(x,y)$ con $y \leq \frac{1}{2} \mapsto (1-x, 2y)$

è rivestimento e $\left.\begin{array}{l} [c] \mapsto [a][a] = \alpha^2 \\ [d] \mapsto [b] = \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\cong\ \mathbb{Z}}{p_*\pi_1(\mathbb{T},p)} = \langle \alpha^2, \beta \rangle \leq \pi_1(\mathbb{K},p) = \dfrac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha\beta\alpha^{-1}\beta \rangle}$

in particolare, è normale.

Ovvero che siccome $\mathbb{T}$ ammette rivestimento universale $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}$, allora anche $\mathbb{K}$ ammette rivestimento universale

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}$$