GEOMETRIA INTRINSECA

Abbiamo visto $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq S$ param. regolare $T_pS = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \subset \mathbb{R}^3$,

I_p forma quadratica (bilineare simm) definita positiva ha matrice $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ in base φ_u, φ_v

$E = \varphi_u \cdot \varphi_u$, $F = \varphi_u \cdot \varphi_v$, $G = \varphi_v \cdot \varphi_v$

$N = \dfrac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$ versore normale $U \xrightarrow{\varphi} S \xrightarrow{N} S^2 \subset \mathbb{R}^3$

$d_pN : T_pS \longrightarrow T_pS$ in base φ_u, φ_v ha matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. In generale, A non è simmetrica (perché non è detto che φ_u, φ_v sia base ortonormale).

$(d_pN)(\varphi_u) = N_u = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v$

$(d_pN)(\varphi_v) = N_v = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v$

$II_p(w) = II_p(d\varphi_u + \mu\varphi_v) = (-d_pN)(w) \cdot w =$

$= ed^2 + 2f d\mu + g\mu^2$

cioè II_p ha matrice $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ in base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ con

$$\begin{cases} e = (-d_pN)(\varphi_u) \cdot \varphi_u = -N_u \cdot \varphi_u \overset{\substack{N\cdot\varphi_u = 0 \\ \text{derivo rispetto a } u \\ \downarrow}}{=} N \cdot \varphi_{uu} \\ f = (-d_pN)(\varphi_u) \cdot \varphi_v = -N_u \cdot \varphi_v = N \cdot \varphi_{uv} = N \cdot \varphi_{vu} = -N_v \cdot \varphi_u \\ g = (-d_pN)(\varphi_v) \cdot \varphi_v = -N_v \cdot \varphi_v = N \cdot \varphi_{vv} \end{cases}$$

Dunque possiamo calcolare a_{ij}:

$$\begin{cases} -e = N_u \cdot \varphi_u = (a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v) \cdot \varphi_u = a_{11}E + a_{21}F \\ -g = N_v \cdot \varphi_v = (a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v) \cdot \varphi_v = a_{12}F + a_{22}G \\ -f = N_u \cdot \varphi_v = (a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v) \cdot \varphi_v = a_{11}F + a_{21}G \\ \quad = N_v \cdot \varphi_u = (a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v) \cdot \varphi_u = a_{12}E + a_{22}F \end{cases}$$

cioè $\boxed{-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}$

Se $\mathbb{E} = (\varphi_u, \varphi_v)$ si ha

$II_p(w,w) = II_p\left(\mathbb{E}\begin{pmatrix} d \\ \mu \end{pmatrix}, \mathbb{E}\begin{pmatrix} d \\ \mu \end{pmatrix}\right) = I_p\left(-d_pN\left(\mathbb{E}\begin{pmatrix} d \\ \mu \end{pmatrix}\right), \mathbb{E}\begin{pmatrix} d \\ \mu \end{pmatrix}\right)$

$= I_p\left(-\mathbb{E}A\begin{pmatrix} d \\ \mu \end{pmatrix}, \mathbb{E}\begin{pmatrix} d \\ \mu \end{pmatrix}\right) = -{}^t\left(A\begin{pmatrix} d \\ \mu \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ \mu \end{pmatrix} =$

$= (d \ \ \mu)(-{}^tA)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ \mu \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = -{}^tA\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}_{\substack{\text{invertibile sicuramente} \\ \text{(è prodotto scalare def pos} \Rightarrow \det \neq 0)}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

Otteniamo
$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG-F^2} \qquad a_{12} = \frac{gF - fg}{EG-F^2}$$

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG-F^2} \qquad a_{22} = \frac{eF - gE}{EG-F^2}$$

e anche
$$\boxed{\begin{aligned} K &= \det(A) = \dots = \frac{(eg-f^2)(EG-F^2)}{(EG-F^2)^2} = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} \\ H &= \frac{-a_1 - a_{22}}{2} = \dots = \frac{1}{2}\,\frac{eG+gE-2fF}{EG-F^2} \end{aligned}}$$

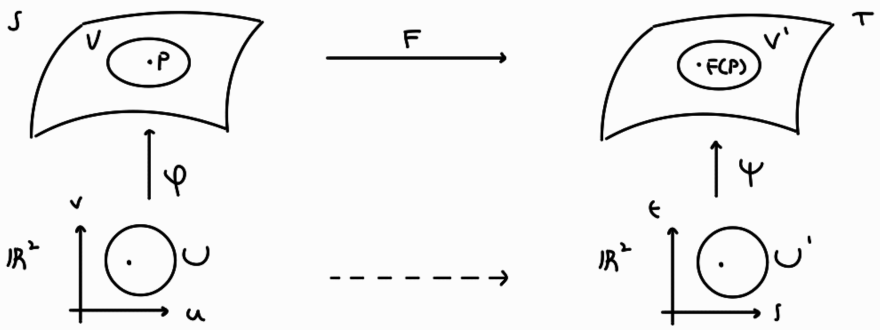
OSS $\quad I_p$ f. quadratica su T_pS è intrinseca (per definizione)

II_p non è intrinseca. Ad esempio sul piano II_p è nulla, nel cilindro II_p non è nulla, ma cilindro e piano sono isometrici (se prendiamo porzioni opportune)

Abbiamo espresso $K(p) = \dfrac{eg-f^2}{EG-F^2}$ localmente tramite una param. regolare $\varphi: U \longrightarrow V \subseteq S$, $(u,v) \in U$. Allora per $p = \varphi(u,v)$: $E(u,v) = \varphi_u(u,v)\cdot\varphi_u(u,v)$, $F(u,v) = \dots$ e

$$K_S = \frac{e(u,v)g(u,v) - f(u,v)^2}{E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2}$$

OSS $\quad$ Un'isometria di superfici preserva la I forma fondamentale se e solo se preserva E, F, G funzioni se e solo se si scelgono parametrizzazioni opportune



$$T_pS = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \longrightarrow T_{F(p)}T = \langle \psi_s, \psi_t \rangle$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_u\cdot\varphi_u & \varphi_u\cdot\varphi_v \\ \varphi_u\cdot\varphi_v & \varphi_v\cdot\varphi_v \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \psi_s\cdot\psi_s & \psi_s\cdot\psi_t \\ \psi_s\cdot\psi_t & \psi_t\cdot\psi_t \end{pmatrix}$$

Allora:

i) se F isometria, allora $\psi = F \circ \varphi$ è parametrizzazione regolare

ii) date φ e ψ parametrizzazioni t.c. $\psi = F\circ\varphi$, F è isometria di superficie $\iff \begin{cases} G_S = G_T \\ F_S = F_T \\ E_S = E_T \end{cases}$

perchè in effetti

$$\begin{cases} \psi_s = (d_pF)\varphi_u \\ \psi_t = (d_pF)\varphi_v \end{cases}$$

per $p = \varphi(u,v)$, dunque F è isometria se e solo se $\psi_s \cdot \psi_s = \varphi_u \cdot \varphi_u$, $\psi_s \cdot \psi_t = \dots, \dots$

TEOREMA EGREGIUM (Gauss) La curvatura gaussiana è intrinseca.

dim Consideriamo le espressioni in base $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$ di $\mathbb{R}^3$:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_{uu} = \Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v + L_1 N \\ \varphi_{uv} = \Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + L_2 N \\ \varphi_{vu} = \Gamma^1_{21}\varphi_u + \Gamma^2_{21}\varphi_v + \bar{L}_2 N \\ \varphi_{vv} = \Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v + L_3 N \\ N_u = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v \\ N_v = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v \end{array}\right\}$$

(*)

Γ^i_{jk} simboli di Christoffel

$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21}$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21}$ $\Leftarrow \varphi_{uv} = \varphi_{vu}$

$L_1 = e$, $L_2 = f = \bar{L}_2$, $L_3 = g$ $\Leftarrow$ faccio il prodotto scalare delle prime 4 espressioni e N

I) i simboli di Christoffel sono intrinsechi $\rightarrow$ intrinsechi nel senso discusso sopra per E, F, G

Infatti, consideriamo i seguenti sistemi lineari (ottenuti facendo il prodotto scalare delle prime 4 relazioni (*) con φ_u e φ_v

$$① \begin{cases} \Gamma^1_{11} E + \Gamma^2_{11} F = \varphi_{uu}\cdot\varphi_u = \frac{1}{2}E_u \\ \Gamma^1_{11} F + \Gamma^2_{11} G = \varphi_{uu}\cdot\varphi_v = F_u - \frac{1}{2}E_v \end{cases}$$

$$② \begin{cases} \Gamma^1_{12} E + \Gamma^2_{12} F = \varphi_{uv}\cdot\varphi_u = \frac{1}{2}E_v \\ \Gamma^1_{12} F + \Gamma^2_{12} G = \varphi_{uv}\cdot\varphi_v = \frac{1}{2}G_u \end{cases}$$

$$③ \begin{cases} \Gamma^1_{22} E + \Gamma^2_{22} F = \varphi_{vv}\cdot\varphi_u = F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \Gamma^1_{22} F + \Gamma^2_{22} G = \varphi_{vu}\cdot\varphi_v = \frac{1}{2}G_v \end{cases}$$

I tre determinanti dei 3 sistemi lineari sono $EG - F^2 \neq 0$

Poichè sono 3 sistemi lineari con det $\neq 0$ e due equazioni in 2 incognite, hanno ciascuno un'unica soluzione che dipende solo da E, F, G e le loro derivate

$\Rightarrow$ I simboli Γ^i_{jk} sono intrinsechi nel senso detto sopra

II) Descrivere la curvatura gaussiana utilizzando E, F, G e i simboli Γ^i_{jk}.

oss $\quad (\varphi_{uu})_v - ((\varphi_{uv})_u = 0$

(*)
$$\Rightarrow \quad \Gamma^1_{11}\varphi_{uv} + \Gamma^2_{11}\varphi_{vv} + eN_v + (\Gamma^1_{11})_v\varphi_u + (\Gamma^2_{11})_v\varphi_v + e_vN =$$
$$= \Gamma^1_{12}\varphi_{uu} + \Gamma^2_{12}\varphi_{vu} + fN_u + (\Gamma^1_{12})_u\varphi_u + (\Gamma^2_{12})_u\varphi_v + f_uN$$

Usiamo nuovamente (*) e eguagliamo i coefficienti di φ_v.

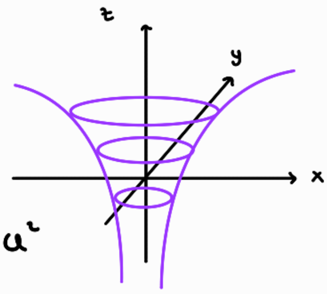
$$\Gamma^1_{11}\cdot\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} + ea_{22} + (\Gamma^2_{11})_v = \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} + fa_{21} + (\Gamma^2_{12})_u$$
$$(\Gamma^2_{12})_u - (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^2_{11}(\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22}) + \Gamma^2_{12}(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) =$$
$$= e\,a_{22} - f a_{21} = \frac{1}{EG-F^2}\left((\cancel{f}F - gE)e - f(\cancel{e}F - fE)\right) =$$
$$= \frac{1}{EG-F^2}(-E)(eg-f^2) = -E\,\frac{eg-f^2}{EG-F^2}$$

Da cui $-EK$ è intrinseca $\Rightarrow K$ è intrinseca $\square$

oss
- K è intrinseca : se $F: S \longrightarrow T$ isometria, allora $K_S(p) = K_T(F(p))$
- per avere $K_S(p) = K_T(F(p))$ basta che F sia isometria intorno a p.

oss Possono esistere superfici non-isometriche con la stessa curvatura

esempio $\quad S = \varphi(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ con $\varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \log u)$



$\varphi_u = (\cos v, \sin v, \frac{1}{u}) \qquad \varphi_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$

$E = \varphi_u\cdot\varphi_v = 1 + \frac{1}{u^2} = \frac{1+u^2}{u^2} \qquad F = \varphi_u\cdot\varphi_v = 0 \qquad G = \varphi_v\cdot\varphi_v = u^2$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v & e_1 \\ \sin v & u\cos v & e_2 \\ 1/u & 0 & e_3 \end{vmatrix} = (-\cos v, -\sin v, u)$$

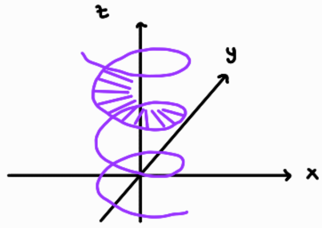
$$N(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(-\cos v, -\sin v, u)$$

$\varphi_{uu} = (0, 0, -\frac{1}{u^2}) \qquad \varphi_{uv} = \varphi_{vu} = (-\sin v, \cos v, 0) \qquad \varphi_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$

$e = N\cdot\varphi_{uu} = -\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}} \qquad f = N\cdot\varphi_{uv} = 0 \qquad g = N\cdot\varphi_{vv} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$

$eg - f^2 = -\frac{1}{1+u^2}$

$K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\dfrac{1}{(1+u^2)^2} < 0 \Rightarrow$ tutti punti iperbolici (S non è compatta)



Consideriamo ora $\psi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(u,v) \longmapsto (u\cos v, u\sin v, v)$

$\psi_u = (\cos v, \sin v, 0)$ $\qquad \psi_v = (-u\sin v, u\cos v, 1)$

$\psi_{uu} = (0,0,0)$ $\qquad \psi_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$ $\qquad \psi_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$

$E = \psi_u \cdot \psi_v = 1$ $\qquad F = \psi_u \cdot \psi_v = 0$ $\qquad G = \psi_v \cdot \psi_u = u^2 + 1$

$$N = \frac{\psi_u \wedge \psi_v}{\|\psi_u \wedge \psi_v\|} \qquad \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v & e_1 \\ \sin v & u\cos v & e_2 \\ 0 & 1 & e_3 \end{vmatrix} = (\sin v, -\cos v, u)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} (\sin v, -\cos v, u)$$

$e = -N_u = N \cdot \psi_{uu} = 0$ $\qquad f = N \cdot \psi_{uv} = -\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ $\qquad g = N \cdot \psi_{vv} = 0$

la seconda forma fondamentale nella base ψ_u, ψ_v ha matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{1+u^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

e allora $K = \dfrac{-1}{1+u^2} \dfrac{1}{EG - F^2} = -\dfrac{1}{(1+u^2)^2} < 0$: è uguale a K_φ

in aperti abbastanza piccoli in cui ψ^{-1} è biettiva, questa è composizione di diffeo

attenzione $\quad \varphi \circ \psi^{-1} : T \longrightarrow S$ è un diffeomorfismo locale, ma non è un'isometria locale.

Per S : $\quad E = \dfrac{1+u^2}{u^2} \qquad F = 0 \qquad G = u^2$

Per T : $\quad E = 1 \qquad F = 0 \qquad G = u^2 + 1$

la prima forma fondamentale ha E, F, G diversi, dunque non ci può essere un'isometria.

TEOREMA DI BONNET Date $E, F, G, e, f, g : \underset{\mathbb{R}^3}{\overset{\cup\!|}{U}} \longrightarrow \mathbb{R}$ tc $E, G, EG - F^2 > 0$ + ipotesi di compatibilità (*), allora

1) $\forall p \in U \; \exists V_p \subseteq U$ e $\varphi : V_p \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzazione regolare tc la superficie parametrica $\varphi(V_p) \subseteq \mathbb{R}^3$ ha E, F, G, e, f, g come coefficienti della I e II forma fondamentale in $q = \varphi(u,v)$ nella base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$.

se fissiamo i coeff. della I e II forma fondamentale, esiste una superficie che li ha come forme fondamentali

2) due tali superfici si ottengono l'una dall'altra tramite un movimento rigido

(*) condizioni di compatibilità

① $-E \cdot \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = (\Gamma^2_{12})_u - (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^2_{11}(\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22}) + \Gamma^1_{12}(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})$ GAUSS

② $\left.\begin{aligned} e_v - f_u &= e\Gamma^1_{12} + f(\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{11}) - g\Gamma^2_{11} \\ f_v - g_u &= e\Gamma^1_{22} + f(\Gamma^2_{22} + \Gamma^1_{12}) - g\Gamma^2_{12} \end{aligned}\right\}$ MAINARDI - CODAZZI

i simboli di Christoffel sono fondamentali non solo nella geometria diff. ma anche nella fisica matematica

oss sono condizioni che coinvolgono E, F, G, e, f, g + i simboli di Christoffel, che però sono soluzioni di sistemi lineari con coeff. E, F, G. Perciò, fissati questi e $E, G, EG-F^2>0$ abbiamo delle uniche funzioni Γ^i_{jk}

esercizio Sia $\varphi: U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzazione regolare; siano E, F, G, e, f, g i coefficienti della I e II forma fondamentale. Determinare la curvatura gaussiana e la curvatura media in ogni punto $p \in S = \varphi(U)$

esercizio Considerare la superficie di rotazione S ottenuta ruotando la curva $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $t \longmapsto (x(t), 0, z(t))$ con $x(t) > 0 \ \forall t$ intorno all'asse delle z

1) Determinare una o più parametrizzazioni regolari per S
2) Determinare curvatura gaussiana e media per $p \in S$.
3) Determinare i simboli di Christoffel Γ^i_{jk} rispetto alle parametrizzazioni scelte
4) Verificare le condizioni di compatibilità

Considero $\Phi: I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u,v) \longmapsto (x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u))$$

i) $\forall\, U = I \times (v_0 - \pi, v_0 + \pi)$ $\varphi = \Phi|_U : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione regolare per S dell'aperto $\varphi(U) \subseteq S = \Phi(I \times \mathbb{R})$

$\left.\begin{aligned} \varphi_u &= (x'(u)\cos v, x'(u)\sin v, z'(u)) \\ \varphi_v &= (-x(u)\sin v, x(u)\cos v, 0) \end{aligned}\right\}$ lin. indip.

ii) $\varphi_{uu} = (x''\cos v, x''\sin v, z'')$ $\varphi_{uv} = (-x'\sin v, x'\cos v, 0) = \varphi_{vu}$

$\varphi_{vv} = (-x\cos v, -x\sin v, 0)$

Supponiamo $\|\alpha'(u)\|^2 = 1 \quad \forall u \in I$

$E = \varphi_u \cdot \varphi_u = x'(u)^2 + z'(u)^2 = \|\alpha'(u)\|^2 \qquad F = 0 \qquad G = \|\varphi_v\|^2 = x(u)^2$

$EG - F^2 = x(u)^2$

$\varphi_u \wedge \varphi_v = \dots = (-xz'\cos v, -xz'\sin v, xx')$

$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \sqrt{x^2 z'^2 + x^2 x'^2} = \sqrt{x^2((x')^2 + (z')^2)} = \sqrt{EG - F^2} = x$

$N = (-z'\cos v, -z'\sin v, x')$

$e = N \cdot \varphi_{uu} = -z'x'' + x'z'' = x'z'' - x''z' \qquad f: N \cdot \varphi_{uv} = 0 \qquad g = N \cdot \varphi_{vv} = xz'$

$$\Rightarrow K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{z'}{x}(x'z'' - x''z')$$

$$H = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)} = \frac{x^2(x'z'' - x''z')}{2x} = x\,\frac{x'z'' - x''z'}{2}$$

iii) φ_{uu} è dato dai simboli di pedice 1,1 : $\varphi_{uu} = \Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v + L_1 N$

$$\begin{cases} \Gamma^1_{11} E + \Gamma^2_{11} F = \varphi_{uu} \cdot \varphi_u = x'x'' + z'z'' \\ \Gamma^1_{11} F + \Gamma^2_{11} G = \varphi_{uu} \cdot \varphi_v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma^1_{11} = x'x'' + z'z'' \\ \Gamma^2_{11} = 0 \end{cases}$$

φ_{uv} è dato dai simboli di pedice 1,2: $\varphi_{uv} = \Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + L_2 N$

$$\begin{cases} \varphi_{uv} \cdot \varphi_u = \Gamma^1_{12} E + \Gamma^2_{12} F = 0 \\ \varphi_{uv} \cdot \varphi_v = \Gamma^1_{12} F + \Gamma^2_{12} G = \varphi_{uv} \cdot \varphi_v = xx' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma^1_{12} = 0 \\ \Gamma^2_{12} = \frac{x'}{x} \end{cases}$$

φ_{vv} è dato dai simboli di pedice 2,2: $\varphi_{vv} = \Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v + L_3 N$

$$\begin{cases} \Gamma^1_{22} E + \Gamma^2_{22} F = \varphi_{vv} \cdot \varphi_u = -xx' \\ \Gamma^1_{22} F + \Gamma^2_{22} G = \varphi_{vv} \cdot \varphi_v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma^1_{22} = -xx' \\ \Gamma^2_{22} = 0 \end{cases}$$

<u>nota</u> $\quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21}$

Dunque si ottiene : $\quad \Gamma^1_{11} = xx' + z'z'' \qquad \Gamma^2_{11} = 0$

$\Gamma^1_{12} = 0 \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{x'}{x}$

$\Gamma^1_{22} = -xx' \qquad \Gamma^2_{22} = 0$

iv) <u>Gauss</u> $\quad E = 1, \quad K = \frac{z'}{x}(x'z'' - x''z')$

$$(\Gamma^2_{12})_u - (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^2_{11}(\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22}) + \Gamma^1_{12}(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) \overset{?}{=} -\overset{=1}{E}K$$

$$\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \cancel{\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}}^{\,0} + \cancel{(\Gamma^2_{11})_v}^{\,0} - \cancel{\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}}^{\,0} - \cancel{\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12}}^{\,0} - (\Gamma^2_{12})_u =$$

$$= (x'x'' + z'z'')\frac{x'}{x} - \frac{d}{du}\left(\frac{x'(u)}{x(u)}\right) = \frac{x'}{x}(x'x'' + z'z'') - \frac{x''x - x'x'}{x^2} = \dots$$

<u>esercizio</u>

T toro con param. ottenuta da $\varphi(u,v) = ((2+\cos u)\cos v,\ (2+\cos u)\sin v,\ \sin u)$

$T = \varphi(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$

i) determinare la curvatura gaussiana in ogni punto

ii) Calcolare i simboli di Christoffel Γ^i_{jk} rispetto a φ

iii) Verificare l'eq. di Gauss

i) $\varphi_u = (-\sin u \cos v,\ -\sin u \sin v,\ \cos u)$

$\varphi_v = (-(2+\cos u)\sin v,\ (2+\cos u)\cos v,\ 0)$

$E = \varphi_u\cdot\varphi_u = 1 \qquad F = \varphi_u\cdot\varphi_v = 0 \qquad G = \varphi_v\cdot\varphi_v = (2+\cos u)^2$

$\varphi_{uu} = (-\cos u\cos v,\ -\cos u \sin v,\ -\sin u)$

$\varphi_{uv} = (\sin u \sin v,\ -\sin u\cos v,\ 0)\ /\!/\ \varphi_v$

$\varphi_{vv} = (-(2+\cos u)\cos v,\ -(2+\cos u)\sin v,\ 0)$

$$e = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(\varphi_u\wedge\varphi_v)\cdot\varphi_{uu} = \frac{1}{\sqrt{(2+\cos u)^2}}\begin{vmatrix} -\sin u\cos v & (2+\cos u)\sin v & -\cos u\cos v \\ -\sin u \sin v & (2+\cos u)\cos v & -\cos u \sin v \\ \cos u & 0 & -\sin u \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2+\cos u}\left((2+\cos u)\cos^2 u + (2+\cos u)\sin^2 u\right) = 1$$

$$f = \frac{1}{2+\cos u}\begin{array}{ccc} & & \varphi_{uv} \\ \left|\begin{matrix} " \\ " \\ " \end{matrix}\right. & \begin{matrix} " \\ " \\ " \end{matrix} & \left.\begin{matrix} \sin u\sin v \\ -\sin u \cos v \\ 0 \end{matrix}\right| \end{array} = 0$$

$$g = \frac{1}{2+\cos u}\begin{array}{ccc} & & \varphi_{vv} \\ \left|\begin{matrix} " \\ " \\ " \end{matrix}\right. & \begin{matrix} " \\ " \\ " \end{matrix} & \left.\begin{matrix} -(2+\cos u)\cos v \\ -(2+\cos u)\sin v \\ 0 \end{matrix}\right| \end{array} = (\cos u)(2+\cos u)$$

Ricapitolando: $E = 1 \qquad F=0 \qquad G = (2+\cos u)^2$

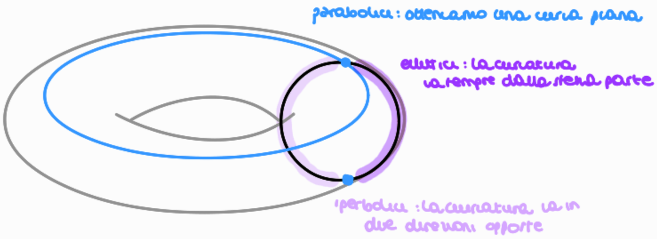
$e = 1 \qquad f = 0 \qquad g = \cos u(2+\cos u)$

$$K(\varphi(u,v)) = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{\cos u\,\cancel{(2+\cos u)}}{(2+\cos u)^{\cancel{2}}} = \frac{\cos u}{2+\cos u}$$

Classifichiamo i punti:

$$K = \begin{cases} >0 & u\in(0,\pi/2)\cup(3/2\,\pi, 2\pi) & \Rightarrow \text{ellittici} \\ =0 & u = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi & \Rightarrow \text{parabolici} \\ <0 & u\in(\pi/2, 3/2\,\pi) & \Rightarrow \text{iperbolici} \end{cases}$$

Per $K=0$: se $p = \varphi(\frac{\pi}{2}, v)$ oppure $p = \varphi(\frac{3}{2}\pi, v)$, se fossero punti planari avremmo $d_pN = 0$ e quindi $\mathrm{II}_p = 0$ e questo non avviene in nessun punto



ii) simboli di Christoffel :

sistema lin. con matrice invertibile $= \underline{0}$

$$\begin{cases} \varphi_{uu} \cdot \varphi_u = \Gamma^1_{11} E + \Gamma^2_{11} F = 0 \\ \varphi_{uu} \cdot \varphi_v = \Gamma^1_{11} F + \Gamma^2_{11} G = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma^1_{11} = 0 \\ \Gamma^2_{11} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_{uv} \cdot \varphi_u = \Gamma^1_{12} E + \cancel{\Gamma^2_{12} F}^{\,0} = 0 \\ \varphi_{uv} \cdot \varphi_v = \cancel{\Gamma^1_{12} F}^{\,0} + \Gamma^2_{12} \underset{(2+\cos u)^2}{\underset{\parallel}{G}} = -(2+\cos u)\sin u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma^1_{12} = 0 \\ \Gamma^2_{12} = \dfrac{-\sin u}{2+\cos u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_{vv} \cdot \varphi_u = \Gamma^1_{22} \overset{1}{\overset{\parallel}{E}} + \cancel{\Gamma^2_{22} F} = (2+\cos u)\sin u \\ \varphi_{vv} \cdot \varphi_v = \cancel{\Gamma^1_{22} F} + \Gamma^2_{22} G = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma^1_{22} = (2+\cos u)\sin u \\ \Gamma^2_{22} = 0 \end{cases}$$

iii) $EK = \cancel{\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}} + \cancel{\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}} + (\cancel{\Gamma^2_{11}})_v - \cancel{\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - (\Gamma^2_{12})_u$

$$= -\left(\frac{\sin u}{2+\cos u}\right)^2 - \frac{(-\cos u)(2+\cos u) + \sin u(-\sin u)}{(2+\cos u)^2} = \frac{\cos u}{2+\cos u} \qquad \text{ok!}$$

<u>esercizio</u> Mostriamo che il cilindro e il piano sono localmente isometrici.

Il cilindro è sup. di rotazione data da $\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$, $(u,v) \longmapsto (\cos u, \sin u, v)$

$e_1 \longmapsto \varphi_u$
$e_2 \longmapsto \varphi_v$

$$\begin{cases} \varphi_u = (-\sin u, \cos u, 0) \\ \varphi_v = (0, 0, 1) \end{cases}$$

è base ortonormale $\Rightarrow E = 1 = G$, $F = 0$

$\Rightarrow \varphi$ è isometria locale

$\varphi_{uv} = \underline{0} = \varphi_{vu}$, $\varphi_{uu} = (-\cos u, -\sin u, 0)$

$N = \varphi_u \wedge \varphi_v = (\cos u, \sin u, 0) \Rightarrow e = -1$, $f = g = 0$

Calcoliamo anche i simboli di Christoffel :

- $\varphi_{uu} \cdot \varphi_u = 0 = \varphi_{uu} \cdot \varphi_v \Rightarrow \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = 0$
- $\varphi_{uv} = 0 \Rightarrow \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{12} = 0$
- $\varphi_{vv} = 0 \Rightarrow \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{22} = 0$

E' giusto, devono essere uguali a quelli del piano.

<u>oss</u> In generale se $F: S \longrightarrow T$ è un diffeo locale e se $\varphi: U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq S$ è una param regolare, allora $F \circ \varphi : U \longrightarrow F(\varphi(U)) \subseteq T$ è una param regolare di T

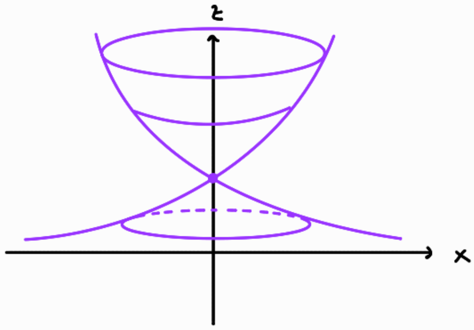
e F è isometria locale se e solo se $E_S = E_T$, $F_S = F_T$, $G_S = G_T$ per quelle due param. regolari.

<u>esercizio</u> Sia $\alpha(t) = (t, 0, e^t)$ $t \in \mathbb{R}$ curva diff. regolare $\varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, e^u)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

i) mostrare che $\varphi(\mathbb{R}^2) = S \subseteq \mathbb{R}^3$ non è una sup. diff in $\mathbb{R}^3$

ii) mostrare che $\exists$ $P_0 \in S$ tale che $S \setminus P_0$ è una sup. diff (inoltre mostrare che $S \setminus P_0$ non è connessa)

iii) calcolare la curvatura Gaussiana in ogni punto $P \neq P_0$ in S



i) Osserviamo che se $u=0$, $v \in \mathbb{R}$: $\varphi(0,v) = (0,0,1) = P_0$.

Inoltre, se $u>0$: $\varphi(u,v) \in \{(x,y,z) : z>1\}$ $\forall v \in \mathbb{R}$

$u<0$: $\varphi(u,v) \in \{(x,y,z) : z<1\}$ $\forall v \in \mathbb{R}$

Allora $P_0 \in S = \varphi(\mathbb{R}^2)$ ha un sistema fondamentale di intorni $U_n \subseteq S$ aperti in S tali che $U_n \setminus P_0$ non è connesso. Questo non sarebbe possibile se S fosse sup. diff. (*)

$U_n \setminus P_0$ diffeo a un aperto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{$un punto$\}$, che è sempre connesso !

ii) Però $S \setminus P_0$ ha due componenti connesse ciascuna delle quali è una superficie di rotazione: $S_1 = \varphi(\mathbb{R}^{>0} \cdot \mathbb{R})$, $S_2 = \varphi(\mathbb{R}^{<0} \cdot \mathbb{R})$

iii) $\varphi_u = (\cos v, \sin v, e^u)$, $\varphi_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$

$E = 1 + e^{2u}$, $F = 0$, $G = u^2$

<u>oss</u> $G \neq 0$ $\forall u \neq 0$

$EG - F^2 = u^2(1+e^{2u})$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v & e_1 \\ \sin v & u\cos v & e_2 \\ e^u & 0 & e_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -ue^u\cos v \\ -ue^u\sin v \\ u \end{pmatrix}$$

$\varphi_{uu} = (0,0,e^u)$, $\varphi_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$, $\varphi_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$

$$e = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(\varphi_u \wedge \varphi_v) \cdot \varphi_{uu} = \frac{ue^u}{|u|\sqrt{1+e^{2u}}} \quad , f = 0,$$

$$g = \frac{1}{|u|\sqrt{1+e^{2u}}}\, u^2 e^u = \frac{u}{|u|} \cdot u e^u \cdot \frac{1}{\sqrt{1+e^{2u}}}$$

$$eg - f^2 = \frac{u e^{2u}}{1+e^{2u}} \quad \Rightarrow K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{\cancel{u} e^{2u}}{1+e^{2u}} \cdot \frac{1}{u^2(1+e^{2u})} = \frac{e^{2u}}{u(1+e^{2u})^2}$$

$$\begin{cases} K>0 & \text{se } u>0 \quad \text{ellittico} \\ K<0 & \text{se } u<0 \quad \text{iperbolico} \end{cases}$$

(*) Qualsiasi sistema fondamentale di intorni di P_0 ha almeno due componenti connesse, dunque non è connesso.

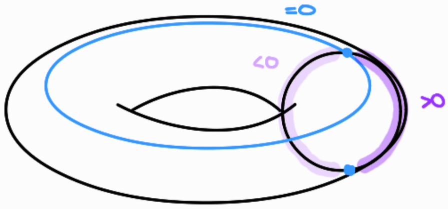
Questo non può essere possibile per una superficie, dato che una superficie è localmente diffeomorfa ad un disco connesso di $\mathbb{R}^2$ che, se gli si toglie un punto, è sempre connesso

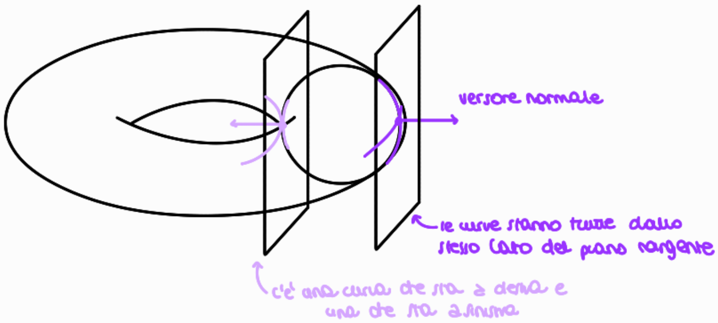
CURVE PARTICOLARI SU SUPERFICI

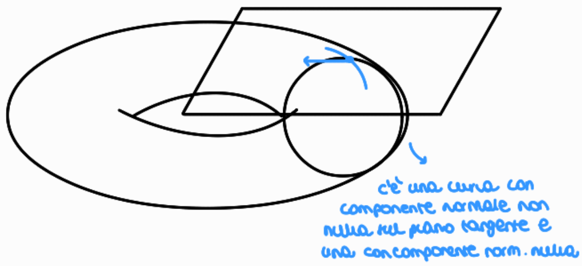
1) **LINEE DI CURVATURA** → le linee di curvatura assumono le curvature estremali

$\alpha : I \longrightarrow S$ curve regolari tc $\forall t$ $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}S$ è una direzione principale,

cioè se $\forall t$ $\frac{d}{dt} N(\alpha(t)) = \lambda(t)\, \alpha'(t)$ per una funzione $\lambda \in C^\infty(I)$







2) **DIREZIONI ASINTOTICHE**

i) Una direzione asintotica è una direzione $v \in T_pS$ tc $II_p(v) = 0$

ii) Indicatrice di Dupin è l'insieme dei vettori $v \in T_pS$ tc $II_p(v) = \pm 1$

oss Scegliamo $\{e_1, e_2\}$ base ortonormale dello sp. tangente T_pS

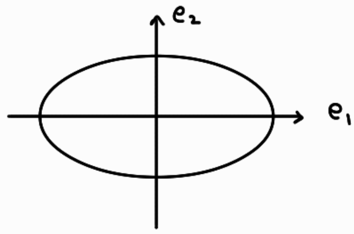
tc $-d_pN = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. $\forall v = \rho(\cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2) \in T_pS$, dunque

$II_p(v) = \rho^2(\lambda_1 \cos^2\theta + \lambda_2 \sin^2\theta) = \lambda_1(\rho\cos\theta)^2 + \lambda_2(\rho\sin\theta)^2$

$II_p(v) = II_p(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2) = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2$

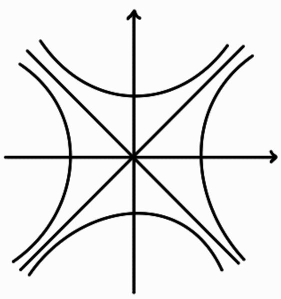
Dupin (ξ_1, ξ_2) tale che $\dfrac{\xi_1^2}{\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)} + \dfrac{\xi_2^2}{\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)} = \pm 1$

punto ellittico



$\dfrac{\xi_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2} + \dfrac{\xi_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2} = \pm 1$

punto iperbolico



3) GEODETICHE

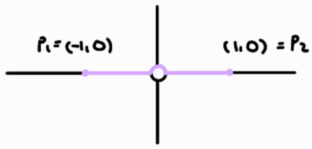
La distanza intrinseca tra $p_1, p_2 \in S$ è

$$d(p_1,p_2) = \inf \{ L(\gamma,[a,b]) \mid \gamma : I \longrightarrow S \text{ curva diff }, \gamma(a)=p_1, \gamma(b)=p_2 \}$$

Ci chiediamo:

- L'inf è un minimo?
- se sì, quali curve lo realizzano?

In generale, in $\mathbb{R}^3$ non è detto che ci esista il minimo, ad esempio consideriamo $\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$



$d(p_1,p_2)=2$, ma non è minimo

def Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una sup. diff. orientata. Sia $\alpha : I \longrightarrow S$ curva parametrica regolare. Consideriamo $\{\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}\}$ triedro di Frenet di α. In particolare $\forall s \in I$ $\underline{t}(s)$ è un versore in $T_{\alpha(s)}S$ e $\underline{n}(s)$ è il versore normale alla curva ed è ortogonale a $\underline{t}$. Se N è il campo di versori normali di S, allora α è GEODETICA se $\forall s \in I$ $\underline{n}(s) \,//\, N(\alpha(s))$

oss Se α ha velocità unitaria, allora $\underline{t}(s) = \alpha'(s)$ e $\underline{t}'(s) = \alpha''(s) = k_\alpha(s)\,\underline{n}(s)$ (curvatura gaussiana)

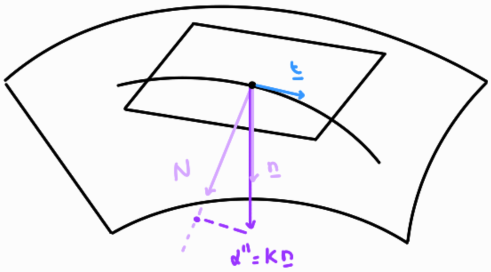
Allora α è geodetica se e solo se $\forall s \in I$

$$k_\alpha(s) = |\mathrm{II}_{\alpha(s)}(\alpha'(s))| = |k_{n,\alpha,s}(\alpha(s))|$$

visto nella def di settore normale

idea (geometrica) del perché è vero.

$$\mathrm{II}_{p=\alpha(s)}(\underbrace{\alpha'(s)}_{=\underline{t}(s)}) = k\underline{n} \cdot N$$



Quindi se $N // n$, allora $\underline{n} \cdot N = \pm 1$

$$\Longrightarrow \underbrace{k(s)}_{\geq 0 \text{ sempre}} = |\mathrm{II}_{\alpha(s)}(\alpha'(s))| = |k_{n,\alpha,s}(\alpha(s))|$$

curvatura normale della curva α nella superficie S nel punto $\alpha(s)$

oss Le direzioni in cui si muove la curva dipende solo dal versore normale alla superficie

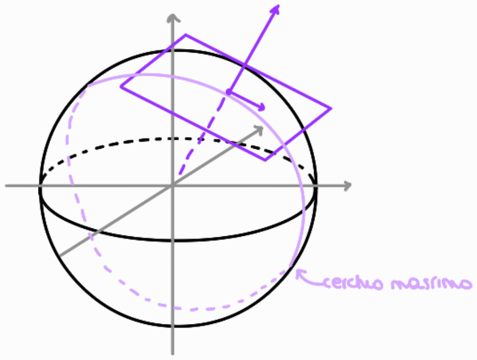
attenzione Una curva sezione normale nel punto $p \in S$, $C = S \cap \Pi$ con piano Π per p normale a T_pS verifica $\underline{n}(p) \,//\, N(p)$ nel punto $p \in S$, ma questo non è necessariamente vero per gli altri punti $q \in C$.

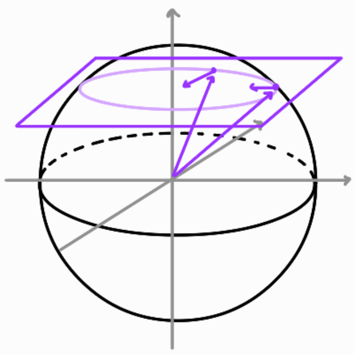
estendiamo la def di geodetica: $\alpha''(s)$ multiplo di $n(s)$
(così includiamo anche le rette, che non hanno triedro di Frenet ben def)

<u>esempi</u>

1) Sul piano tutte le geodetiche sono segmenti di retta

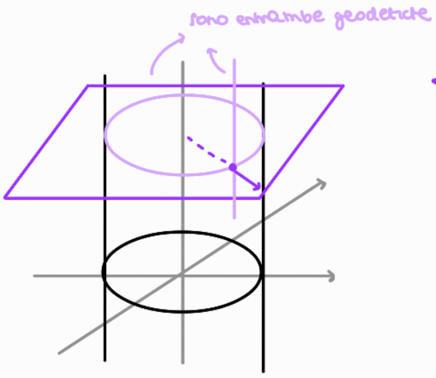
2) $S = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$: tutti i cerchi massimi nella sfera sono curve geodetiche e viceversa

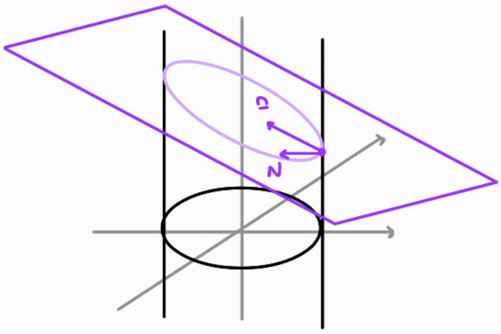


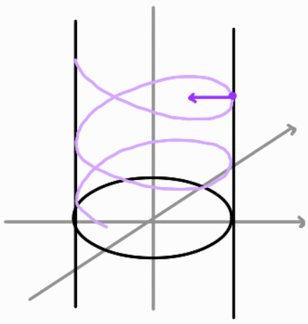


In generale, data una superficie e una direzione, riusciamo a trovare una geodetica in quella direzione

3) (cilindro)



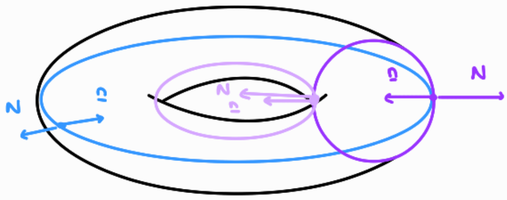




- ogni cerchio intersezione del cilindro con un piano orizzontale è una geodetica (ed è versore normale in ogni punto)
- ogni retta verticale è geodetica
- le ellissi ottenute come intersezioni con altri piani non sono geodetiche
- sono geodetiche tutte le curve elicoidali contenute nel cilindro

<u>esercizio</u> mostrare che per ogni direzione sul cilindro esiste una geodetica

4) (toro)



<u>esercizio</u> (2 - 15/09/23)

nota

- $\alpha : I \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ se α ammette triedro di Frenet $\forall t$ $\{\underline{t}(t), \underline{n}(t), \underline{b}(t)\}$

  allora α è geodetica se $\underline{n}(t) \parallel N(\alpha(t))$

- $\alpha : I \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ curva regolare con $\|\alpha'(t)\| = 1$ $\forall t$

def α geodetica $\iff$ $\alpha''(t) \parallel N(\alpha(t))$ $\forall t$

esempio $\ell \subset S$ retta

esercizio

- se $\alpha : I \longrightarrow S$ è curva regolare tc $\|\alpha'(t)\| = c$ costante, α è geodetica

  $\iff$ $\alpha''(t) \parallel N(\alpha(t))$

- consideriamo $\alpha : I \longrightarrow S$ curva regolare $\underline{t}(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$,

  α è geodetica $\iff$ $\underline{t}'(t) \parallel N(\alpha(t))$ $\forall t$

- Verificare che se α è param. da lunghezza d'arco e se $\theta(t) = s$ è una

  riparam, scrivere $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(\theta(t))$. Chi è $\tilde{\alpha}''(t)$??