SPAZI TOPOLOGICI

def X insieme, $X \neq \emptyset$. Una TOPOLOGIA τ su X è una famiglia non vuota di sottoinsiemi di X, detti APERTI, tali che

(1) $\emptyset, X \in \tau$

(2) unione di aperti è aperta:

se $U_i \in \tau$, $i \in I$, $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$

(3) intersezione di due elementi di τ è ancora in τ:

se $U \in \tau, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$

def Uno SPAZIO TOPOLOGICO è una coppia (X, τ) con τ topologia su X

oss (1) (X, d) SM. Gli aperti sono $\emptyset, X$ e le unioni arbitrarie delle palle $B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$. Dimostrare è topologia.

(2) Intersezione finita di aperti è aperto

esempi (1) TOPOLOGIA BANALE $\tau = \{\emptyset, X\}$

(2) TOPOLOGIA DISCRETA tutti i sottoinsiemi di X sono aperti.

In particolare $\{x\} \subseteq X$ è aperto, $\forall x \in X$ (i punti sono aperti).

(3) Dico che uno spazio topologico (X, τ) è METRIZZABILE se esiste una metrica $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ la cui topologia associata è τ (come negli SM). Esistono spazi topologici non metrizzabili.

Ad esempio, considero

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}$$

se X è metrizzabile, allora la topologia su X è discreta: basta notare che in questo caso ogni $\{x_i\}$ è aperto. Infatti, se $0 < \varepsilon_i < \min_{\substack{j=1,\dots,n \\ i \neq j}} \{d(x_i, x_j)\}$, allora $B(x_i, \varepsilon_i) = \{x_i\}$.

Segue che un insieme finito dotato di una topologia non discreta, non è metrizzabile. Ad esempio, considero

$X = \{1, 2, 3\}$ $\quad \tau = \{\emptyset, X, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2\}\}$

è una topologia. Tuttavia non è discreta perché ad esempio $\{-1\}$ non è aperto.

(4) Su $\mathbb{R}$ definisco una topologia detta di TOPOLOGIA DI ZARISKI O COFINITA in cui gli aperti sono complementari di insiemi finiti di punti (i.e. soluzione di $f(x)=0$ con $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomio).

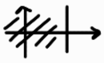
Notare che se sostituisco $\mathbb{R}$ con qualunque campo posso definire allo stesso modo una topologia su quel campo.

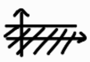
def (X, τ), (X, τ') due spazi topologici. Diremo che τ è PIÙ FINE di τ' (τ' è meno fine di τ) se $\tau' \subset \tau$, ovvero tutti gli aperti di τ' sono anche aperti di τ.

(•) se $\tau_1, \dots, \tau_n$ sono topologie su X, $\tau = \bigcap_i \tau_i$ è topologia su X che è meno fine di τ_i $\forall i$ (esercizio)

(•) se τ_1, τ_2 sono due topologie su X, $\tau_1 \cup \tau_2$ non è top. in generale

<u>esempio</u> In $\mathbb{R}^2$ considero gli insiemi (al variare di $n \in \mathbb{Z}$)

$S_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < n\}$ 

$T_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < n\}$ 

Definisco due topologie

$\tau_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, S_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$\tau_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, T_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Si dimostra facilmente che sono topologie (esercizio: notare che $S_{n_1} \cap S_{n_2} = S_{\min\{n_1, n_2\}}$ e $S_{n_1} \cup S_{n_2} = S_{\max\{n_1, n_2\}}$)

$\tau_1 \cup \tau_2$ non è una topologia: se lo fosse, anche $S_1 \cap T_1$ starebbe in $\tau_1 \cup \tau_2$, ma $S_1 \cap T_1 \notin \tau_1$ e $S_1 \cap T_1 \notin \tau_2$.

def (X, τ) spazio topologico. Una BASE di τ è una famiglia di aperti $\mathcal{B}$ di τ tale che ogni aperto $U \in \tau$ sia $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ con $B_i \in \mathcal{B}$.

prop $\mathcal{B}$ è base se e solo se vale

$\forall U \subseteq X$ aperto, $U \neq \emptyset$, $\forall x \in U$ $\exists W \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in W$ e $W \subset U$ (*)

dim (*) $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ è base. Fisso $U \in \tau$. Voglio mostrare che è unione di elementi di $\mathcal{B}$. Per ogni $x \in U$ scelgo $W_x \in \mathcal{B}$ e $W_x \subseteq U$, $x \in W_x$ (per (*)).
Allora $U = \bigcup_{x \in U} W_x$

$\mathcal{B}$ base $\Rightarrow$ (*). Fisso $U \subseteq X$ aperto, $U \neq \emptyset$. Fisso $x \in U$. So che $U = \bigcup_{i \in I} W_i$ per $W_i \in \mathcal{B}_i$, ma allora $\exists i \in I$ t.c. $x \in W_i$ ed è chiaro che $W_i \subseteq U$.

esempio
- Le palle aperte $B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$ sono una base della topologia su X associata alla distanza d
- (a,b) è una base della topologia euclidea di $\mathbb{R}$. In generale, chiamo topologia euclidea di $\mathbb{R}^n$ la topologia di $\mathbb{R}^n$ dedotta dalla metrica euclidea).

prop $X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ famiglia di sottoinsiemi di X tali che
(a) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$
(b) $\forall\, A, B \in \mathcal{B}$, $A \cap B$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Allora esiste un'unica topologia $\tau_{\mathcal{B}}$ su X di cui $\mathcal{B}$ è una base.
$\tau_{\mathcal{B}}$ è detta TOPOLOGIA GENERATA DA $\mathcal{B}$.

dim Se $\mathcal{B}$ è base di una topologia τ, allora tutti gli insiemi

$$A = \bigcup_{i \in I} B_i \,, \qquad B_i \in \mathcal{B}$$

sono aperti di τ. Per mostrare esistenza e unicità di τ, basta allora mostrare che $\emptyset$, A (t.c. A è unione di elementi di $\mathcal{B}$) è topologia.

(·) $\emptyset$ appartiene a questo insieme

(·) X appartiene a questo insieme grazie a (a)

(·) Chiusura per intersezione.

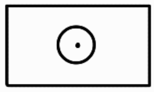
$$U = \bigcup_{i \in I} B_i \qquad W = \bigcup_{j \in J} B_j$$

con $B_i, B_j \in \mathcal{B}$. Allora

$$U \cap W = \Big(\bigcup_{i \in I} B_i\Big) \cap \Big(\bigcup_{j \in J} B_j\Big) = \bigcup_{i,j} (B_i \cap B_j)$$

ma grazie a $\mathcal{B}$ $B_i \cap B_j \in \tau$, dunque $U \cap W \in \tau$. $\square$

def (X, τ) ST, $x \in X$. Un **INTORNO** N di x è un insieme N tc $x \in N$ ed esiste $U \subseteq X$ aperto tc $U \subseteq N$, $x \in U$.



N

L'insieme $\mathcal{N}(x) = \{\text{intorni di } x\}$ è detto **SISTEMA** o **FILTRO** degli intorni di x.

prop $U \subseteq X$ aperto $\iff$ U è intorno di ogni suo punto.

dim se $U \subseteq X$ aperto e $x \in U$, allora $U \in \mathcal{N}(x)$ per definizione (basta prendere $N = U$). Devo dimostrare il viceversa: se $U \in \mathcal{N}(x)$ $\forall x \in U$, allora U è aperto. Per ogni $x \in U$ sia W_x un aperto con $x \in W_x$ e $W_x \subseteq U$ (esiste per def di intorno) allora $U = \bigcup_{x \in U} W_x$ è aperto perché unione di aperti. $\square$

def Un **SISTEMA FONDAMENTALE DI INTORNI** di x è una famiglia

$$\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{N}(x)$$

di intorni di x tale che $\forall N \in \mathcal{N}(x)$ $\exists A \in \mathcal{B}(x)$ tc $A \subseteq N$.

$\mathcal{B}(x)$ è anche detta **BASE DI INTORNI** di x

Esempi

(1) $X = \mathbb{R}$. $\mathcal{B}(x) = \{(x-r, x+r) \mid r > 0\}$ è un sistema fond. di intorni di x

Notare che ogni aperto in $\mathbb{R}$ è unione di insiemi del tipo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ al variare di $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$; se $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ per qualche a, ε, allora $\exists r$ tc $(x-r, x+r) \subseteq (a+\varepsilon, a-\varepsilon)$, ad esempio considero

$$r < \min\left(\frac{d(a-\varepsilon, x)}{2}, \frac{d(a+\varepsilon, x)}{2}\right)$$

(2) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(x) = \{[x-r, x+r] \mid r > 0\}$ è un sistema fond. di intorni di x.

se $N \in \mathcal{N}(x)$, allora $\exists \varepsilon > 0$ tc $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq N$. ma allora

$$[x - \tfrac{\varepsilon}{2}, x + \tfrac{\varepsilon}{2}] \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq N \quad \text{inoltre} \quad \underbrace{(x - \tfrac{\varepsilon}{4}, x + \tfrac{\varepsilon}{4})}_{\text{aperto che contiene } x} \subseteq [x - \tfrac{\varepsilon}{2}, x + \tfrac{\varepsilon}{2}]$$

(3) (X, d) metrico. Allora $\{B(x,r) \mid r>0\}$ è un sistema fond. di intorni di X. (esercizio)

(4) $\mathcal{B} = \{(a,b] \mid a<b\} \subseteq \mathbb{R}$ è una base di topologia su $\mathbb{R}$ strettamente più fine di quella euclidea.

Mostro che è una base.

(a) $\bigcup_{a,b} (a,b] = \mathbb{R}$, ad esempio $\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n>0}} (-n,n] \in \mathbb{R}$

(b) $(a_1,b_1] \cap (a_2,b_2] \in \mathcal{B}$

$$(a_1,b_1] \cap (a_2,b] = \begin{cases} (a_2,b_2] & a_1 \leq a_2,\ b_2 \leq b_1 \\ (a_1,b_1] & a_2 \leq a_1,\ b_2 \geq b_1 \\ (a_1,b_2] & a_2 \leq a_1,\ b_2 \leq b_1 \\ (a_2,b_1] & a_1 \leq a_2,\ b_2 \geq b_1 \end{cases}$$

che sono ancora elementi di $\mathcal{B}$

Per confrontarla con la top. euclidea, per prima cosa noto che tutti gli aperti della topologia euclidea sono anche aperti di questa topologia, basta notare che

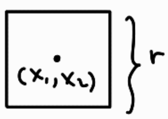
$$(a,b) = \bigcup_{n\geq 1} (a, b-\tfrac{1}{n}]$$

Quindi ho una topologia più fine di quella euclidea, che però non coincide con quella euclidea: ad esempio $(a,b]$ non è aperto nella topologia euclidea (esercizio).

(5) $\mathcal{B} = \{(-\infty,b) \mid b\in\mathbb{R}\}$ è una base per una topologia su $\mathbb{R}$ strettamente meno fine di quella euclidea (esercizio).

(strettamente perché (a,b), $a,b\in\mathbb{R}$ è aperto in quella euclidea, ma non in questa).

(6) I rettangoli aperti sono una base per la topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$, cioè $\mathcal{B} = \{Q(x,r),\ x\in\mathbb{R}^2, r>0\}$, dove se $x=(x_1,x_2)$, allora $Q(x,r) = \{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 \mid |y_1-x_1|<\frac{r}{2},\ |y_2-x_2|<\frac{r}{2}\}$



Basta far vedere che se τ_B = top. la cui base è $\mathcal{B}$ ed $\mathcal{E}$ = top. euclidea si ha $\mathcal{E} \subset \tau_B$ e $\tau_B \subset \mathcal{E}$ (far vedere che i quadrati si costruiscono con i cerchi e viceversa).

Se voglio far vedere che $\mathcal{E} \subset \tau_B$ basta far vedere che ogni aperto di base di $\mathcal{E}$ è ancora di aperti di base di τ_B (perché allora ogni aperto di $\mathcal{E}$ è anche un aperto di τ_B).

Se $B(x,r)$ è un aperto di base di $\mathcal{E}$, ho

$$B(x,r) = \bigcup_{y \in B(x,r)} Q(y, \varepsilon(y)) \quad , \quad \varepsilon(y) = \sup\left\{ \frac{r}{2} |y_1 - x_1|, \frac{r}{2} |y_2 - x_2| \right\}$$

Analogamente per $\tau_B \subseteq \mathcal{E}$. (esercizio)

(7) $\mathcal{F} = \{[a,b) \mid a<b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$ non è base per una topologia su $\mathbb{R}$, perché $[a,b) \cap [b,c) = \{b\} \notin \mathcal{F}$

(8) Sia $\mathcal{F}$ famiglia di sottoinsiemi di X. La TOPOLOGIA GENERATA da $\mathcal{F}$ $\tau(\mathcal{F})$ è la meno fine di tutte le topologie che contengono $\mathcal{F}$. Mostrare che la notazione è ben posta e

$$\tau(\mathcal{F}) = \bigcap_{\mathcal{F} \subseteq \tau} \tau$$

(esercizio).

Sottoinsiemi notevoli di uno ST

(X, τ) ST, $S \subseteq X$ sottoinsieme

def (1) $x \in X$ è detto **INTERNO** di S se $\exists N \in \mathcal{N}(x)$ tc $N \subseteq S$

$$\text{Int}(S) = \{\text{p.ti interni di } S\}$$

(2) $x \in X$ è detto **ESTERNO** di S se $\exists N \in \mathcal{N}(x)$ tc $N \cap S = \emptyset$,

equivalentemente $x \in \text{Int}(X \setminus S)$

$$\text{Est}(S) = \{\text{p.ti esterni di } S\}$$

(3) $x \in X$ è detto **DI FRONTIERA** per S se non è né interno né esterno, cioè $\forall N \in \mathcal{N}(x)$

$$N \cap S \neq \emptyset \quad e \quad N \cap (X \setminus S) \neq \emptyset$$

$$\text{Fr}(S) = \{\text{p.ti di frontiera}\}$$

esempio

$\text{Fr}([a,b]) = \{a, b\}$

$\text{Int}([a,b]) = (a,b)$

$\text{Est}([a,b]) = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$

oss $X = \text{Int}(S) \,\dot\cup\, \text{Est}(S) \,\dot\cup\, \text{Fr}(S)$ (verifica).

prop $\text{Int}(S)$ = unione di tutti gli aperti contenuti in S

= il più grande (rispetto all'inclusione) aperto contenuto in S

dim Per prima cosa mostro che $\text{Int}(S) \supseteq \bigcup$ aperti contenuti in S.

$x \in A \subseteq S$ aperto. Poiché $A \in \mathcal{N}(x)$ e $A \subseteq S \Rightarrow x \in \text{Int}(S)$ $\forall x \in A$

$A \subseteq S \Rightarrow A \subseteq \text{Int}(S)$.

Mostro ora che $\text{Int}(S)$ è aperto e dunque coincide con l'unione di tutti gli aperti contenuti in S. Fisso $x \in \text{Int}(S)$.

Allora per def $\exists N \in \mathcal{N}(x)$ tc $N \subseteq \text{Int}(S)$ e poiché $N \in \mathcal{N}(x)$, esiste un aperto U con $x \in U$ e $U \subseteq N$. Dunque

$$x \in U \subseteq N \subseteq \text{Int}(S)$$

perciò $\forall x \in \text{Int}(S)$ $\exists U \subseteq \text{Int}(S)$ aperto con $x \in U$.

$\text{Int}(S) \subseteq \bigcup$ aperti contenuti in S. $\square$

__corollario__ (1) S aperto $\iff S = \mathrm{Int}(S)$

(2) S aperto $\iff S \cap Fr(S) = \emptyset$

__dim__ (1) chiaro dalla prop. precedente

$$S = \mathrm{Int}(S) \iff S = \bigcup_{\substack{A \subseteq S \\ A \text{ aperto}}} A \iff S \text{ aperto}$$

(2) Noto che $S \cap Est(S) = \emptyset$ perché $Est(S) = \mathrm{Int}(X \setminus S) \subseteq X \setminus S$.

Poi ricordo che $X = \mathrm{Int}(S) \mathring{\cup} Est(S) \mathring{\cup} Fr(S)$, perciò intersecando con S ottengo

$$S = \underbrace{(\mathrm{Int}(S) \cap S)}_{\overset{\shortparallel}{\mathrm{Int}(S)} \ (*)} \cup (Fr(S) \cap S)$$

Da (1), S aperto $\iff S = \mathrm{Int}(S)$ e questo è vero se e solo se $Fr(S) \cap S = \emptyset$

__def__ $C \subseteq X$ si dice CHIUSO se $X \setminus C$ è aperto.

__oss__ $\mathrm{Int}(S) \subseteq S$ per def, così come $Est(S) \subseteq X \setminus S$. (*)

__oss__ Posso def una topologia anche a partire dai suoi chiusi.

Data $\mathcal{C}$ famiglia di sottoinsiemi di X, tale che

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{C}$

(2) $\cap$ arbitraria di elementi di $\mathcal{C}$ è ancora in $\mathcal{C}$

(3) unione finita di elementi di $\mathcal{C}$ è ancora in $\mathcal{C}$

esiste un'unica topologia i cui chiusi sono gli elementi di $\mathcal{C}$.

(Basta notare che $X \setminus C$, $C \in \mathcal{C}$, sono aperti e soddisfano le proprietà per la topologia).

__esempio__ La topologia di Zariski su $\mathbb{R}$ è quella i cui chiusi sono

$$C_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$$

al variare dei polinomi $f \in \mathbb{R}[x]$.

__def__ $S \subseteq X$. La CHIUSURA $\bar{S}$ di S in X è il più piccolo chiuso dell'inclusione) chiuso che contiene S, cioè

$$\overline{S} = \bigcap_{\substack{C \text{ chiuso} \\ S \subseteq C}} C$$

<u>oss</u> (1) $S = \overline{S} \iff S$ chiuso (esercizio).

(2) $S \subseteq \overline{S}$

(3) $\overline{S} = X \setminus Est(S)$

<u>dim</u> • $\overline{S} \subseteq X \setminus Est(S)$, infatti:

$Est(S) = Int(X \setminus S)$ aperto, dunque $X \setminus Est(S)$ chiuso

e $S \cap Est(S) = \emptyset$, dunque $S \subseteq X \setminus Est(S) \Rightarrow \overline{S} \subseteq X \setminus Est(S)$

• $X \setminus Est(S) \subseteq \overline{S}$, infatti:

basta mostrare che se C è chiuso e $S \subseteq C$ allora $X \setminus Est(S) \subseteq C$.

Fisso quindi $C \supseteq S$, chiuso: allora $X \setminus C$ aperto e $X \setminus C \subseteq X \setminus S$.

Poiché $X \setminus C$ aperto $\Rightarrow X \setminus C \subseteq Int(X \setminus S)$.

Perciò $X \setminus Est(S) = X \setminus Int(X \setminus S) \subseteq X \setminus (X \setminus C) \subseteq C$ $\square$

(4) $\overline{S} = S \cup Fr(S) = Int(S) \,\dot{\cup}\, Fr(S)$

<u>dim</u> $\overline{S} = \overline{S} \cap X = \overline{S} \cap (Int(S) \cup Est(S) \cup Fr(S))$

$= (\overline{S} \cap Int(S)) \cup (\overline{S} \cap Fr(S)) \cup (Est(S) \cap \overline{S})$

ma $\overline{S} \cap Est(S) = \emptyset$ perché abbiamo già notato che $X \setminus Est(S) \supseteq \overline{S}$.

Inoltre $Fr(S) \cap Est(S) = \emptyset$, dunque $Fr(S) \subseteq X \setminus Est(S) \subseteq \overline{S}$

$\Rightarrow \overline{S} \cap Fr(S) = Fr(S)$

$\Rightarrow \overline{S} = Int(S) \,\dot{\cup}\, Fr(S) = S \cup Fr(S)$ $\square$

(5) $\overline{S} = S \cup Fr(X \setminus S)$ perché $Fr(X \setminus S) = Fr(S)$ per def

(6) $S \subseteq T \Rightarrow \overline{S} \subseteq \overline{T}$ (esercizio)

<u>esempio</u> $\overline{[a,b)} = [a,b] = (a,b) \cup \{a,b\}$

$\overline{[a,b)} = \overline{S}$, $(a,b) = Int(S)$, $\{a,b\} = Fr(S)$

<u>def</u> $x \in X$ è **PUNTO DI ACCUMULAZIONE** (o **PUNTO LIMITE**) per S se

$\forall N \in \mathcal{N}(x)$ $\exists$ $s \in S$, $s \neq x$, con $s \in N$.

cioè, $\forall N \in \mathcal{N}(x)$ $N \cap (S \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

$D(S) = \partial(S) = \{$p.ti di accumulazione di $S\}$ detto **DERIVATO** di S.

prop $\bar{S} = S \cup D(S)$

dim Mostro le due inclusioni:

- $D(S) \cup S \subseteq \bar{S}$

  Basta mostrare $D(S) \subseteq \bar{S}$. Fisso $x \in D(S)$, allora

  $x \in D(S) \Rightarrow \forall N \in \mathcal{N}(x) \quad N \cap (S \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

  $x \in Est(S) \Rightarrow \exists N \in \mathcal{N}(x) : S \cap N = \emptyset$

  $\Rightarrow D(S) \cap Est(S) = \emptyset \underset{\bar{S} \subseteq X \setminus Est(S)}{\Rightarrow} D(S) \subseteq \bar{S}$

- $\bar{S} \subseteq D(S) \cup S$

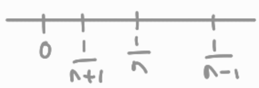
  Fisso $x \in \bar{S}$. Se $x \in S$, ok. Suppongo $x \notin S \Rightarrow x \in Fr(S)$ perché $\bar{S} = S \cup Fr(S)$. Dunque $\forall N \in \mathcal{N}(x)$, $N \cap S \neq \emptyset$. Notare che $N \cap S$ contiene un punto diverso da x perché $x \notin S$ per hp). Dunque, $x \in D(S)$ per definizione. □

esempio $S = \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$ dotato della topologia euclidea

Allora $\bar{S} = S \cup \{0\}$, $D(S) = \{0\}$, $Fr(S) = \bar{S}$, $Int(S) = \emptyset$.

- Mostro $0 \in D(S)$, infatti $\forall N \in \mathcal{N}(0)$, N contiene un intervallo $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq N$ $\exists \varepsilon > 0$. Se n soddisfa $\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} \in N$, $\frac{1}{n} \neq 0$.
- $Int(S) = \emptyset$. Se $\frac{1}{n} \in S$ allora ogni intorno $N \in \mathcal{N}(\frac{1}{n})$ contiene un aperto del tipo $(\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Se
  $\varepsilon' < \min\{\varepsilon, \frac{1}{n+1}\}$ ho che $\frac{1}{n} + \varepsilon' \notin S$, dunque $\frac{1}{n+1} \notin (\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon)$
  dunque nessun intorno di $\frac{1}{n}$ è completamente contenuto in S.
  Quindi $Int(S) = \emptyset$
- $\bar{S} = Int(S) \cup Fr(S) = Fr(S)$
- $0 \in D(S)$ poi da $\bar{S} = S \cup D(S)$ so che $S \cup \{0\} \subseteq \bar{S}$.

  Mostro ora $S \cup \{0\}$ è chiuso, dunque $S \cup \{0\} = \bar{S}$ (perché $S \cup \{0\}$ è allora il più piccolo chiuso che contiene S). Mostro che il complementare è aperto:



- $x < 0$ $\exists (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (S \cup \{0\}) = \emptyset$
- $x > 1$ $\exists (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (S \cup \{0\}) = \emptyset$

- $0<x<1$ allora $x \in \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right)$ $\exists n$, ma allora $\varepsilon < \frac{1}{2(n+1)} \Rightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (S \cup \{0\}) = \emptyset$

Quindi: $Int(S) = \emptyset$, $D(S) = 0$, $\bar{S} = S \cup \{0\}$, $Fr(S) = \bar{S}$

Notare che 0 è sia nel derivato che nella frontiera, ma $\frac{1}{n}$ è solo nella frontiera.

def $S \subseteq X$ è DENSO in X se $\bar{S} = X$

prop S denso in X se e solo se $\forall$ aperto $\overset{\emptyset}{\underset{\neq}{}}U \subseteq X$, si ha $U \cap S \neq \emptyset$.

dim Suppongo S non denso in X e fisso un aperto $\overset{\emptyset}{\underset{\neq}{}}U \subseteq X$.

Se $S \cap U = \emptyset$, allora $U \subseteq X \setminus S$ dunque $X \setminus U$ è un insieme chiuso che contiene S, dunque $\bar{S} \subseteq X \setminus U \neq X$.

Suppongo ora $\forall \overset{\emptyset}{\underset{\neq}{}}U \subseteq X$ aperto, $U \cap S \neq \emptyset$. Fisso $x \in X$. Se $x \in S$ allora $x \in \bar{S}$ certamente. Basta quindi mostrare che se $x \notin S$ allora $x \in \bar{S}$. So che $\bar{S} = S \cup D(S)$, dunque basta mostrare che $x \in D(S)$. Fisso $N \in \mathcal{N}(x)$ e scelgo $U \subseteq S$ tc $x \in U$ aperto. Considero $U \cap S$ e so per hp $U \cap S \neq \emptyset$, ma $x \notin S$, dunque $U \cap S$ contiene un punto diverso da $x \Rightarrow N \cap S$ contiene un punto diverso da x $\forall N$. $\Rightarrow x \in D(S)$. □

esempi (1) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. In questo caso $Int(\mathbb{Q}) = \emptyset$, $Est(\mathbb{Q}) = \emptyset$, $Fr(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, cioè $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

Se $x \in Int(\mathbb{Q})$ allora $\exists \varepsilon > 0$ tc $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \mathbb{Q}$, ma ogni intervallo reale contiene infiniti punti non razionali $\Rightarrow Int(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

Se $x \in Est(\mathbb{Q}) \Rightarrow x \in Int(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ dunque $\exists \varepsilon > 0$ tc $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ma ogni intervallo reale contiene infiniti punti razionali $\Rightarrow Est(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

$\Rightarrow \mathbb{R} = Est(\mathbb{Q}) \cup Int(\mathbb{Q}) \cup Fr(\mathbb{Q}) = Fr(\mathbb{Q})$

Poiché $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup Fr(\mathbb{Q}) \Rightarrow \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

(2) In uno spazio metrico i punti sono chiusi.

Infatti, $X \setminus \{x\}$ è aperto: se $y \neq x$, $d =$ distanza(x, y)

$B(y, \frac{d}{2}) \subseteq X \setminus \{x\} \Rightarrow X \setminus \{x\}$ aperto

(3) Abbiamo visto che rispetto alla top. euclidea $S = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}$ è tc $\overline{S} = S \cup \{0\}$. Vediamo cosa succede se $\mathbb{R}$ è dotato della top. di Zariski. Mostro che $\overline{S} = \mathbb{R}$. Basta mostrare che $\forall$ aperto di Zariski U (= aperto nella top. di Zariski su $\mathbb{R}$) si ha $S \cap U \neq \emptyset$.

Ora $U = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, ma $\# S = |S| = \infty \Rightarrow S \cap U \neq \emptyset$.

Esercizi (1) • Verificare che $Fr(A \cup B) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B)$

Trovare un controesempio per $\subsetneq$

• $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$

• $Int(A \cup B) \supseteq Int(A) \cup Int(B)$

Trovare controesempio per $\supsetneq$

• $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

• $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

Trovare controesempio per $\subsetneq$

(2) $S \subseteq X$ denso, $U \subseteq X$ aperto $\Rightarrow \overline{S \cap U} \supset U$

(3) $X = \{a, b, c, d, e\}$

$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$

Mostrare che τ è topologia e calcolare $D(S), Fr(S), Int(S)$ se

$S = \{a\}, \{d, e\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, d, e\}$

CONTINUITÀ

def X, Y sp. top. $f: X \to Y$ è detta CONTINUA in $x \in X$ se $\forall N \in \mathcal{N}(f(x))$ esiste $M \in \mathcal{N}(x)$ tc $f(M) \subseteq N$. f è detta continua in X se lo è $\forall x \in X$.

prop f continua se e solo se vale una delle seguenti condizioni tra loro equivalenti:

(1) $\forall A \subseteq Y$ aperto, $f^{-1}(A) \subseteq X$ aperto (preimmagine (controimmagine insiemistica))

(2) $\forall C \subseteq Y$ chiuso, $f^{-1}(C) \subseteq X$ chiuso

dim
- Mostro f continua $\Rightarrow$ vale (1).

  Fisso $A \subseteq Y$ aperto e $x \in f^{-1}(A)$. Sia $y = f(x)$. Poiché A è aperto, allora $A \in \mathcal{N}(y)$, dunque $\exists M \in \mathcal{N}(x)$ con $f(M) \subseteq A$. Perciò $M \subseteq f^{-1}(A)$. Ma $M \in \mathcal{N}(x)$, dunque $f^{-1}(A) \in \mathcal{N}(x)$ $\forall x \in f^{-1}(A) \Rightarrow f^{-1}(A)$ aperto.

- Mostro vale (1) $\Rightarrow$ f continua.

  Fisso $x \in X$ e $N \in \mathcal{N}(f(x))$. Scelgo $U \subseteq N$, $f(x) \in U$ aperto.
  $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ $f^{-1}(U)$ è aperto e contiene $x \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x)$.
  Posto $M = f^{-1}(U)$ ho che $f(M) = f(f^{-1}(U)) \subseteq U \subseteq N$
  $\Rightarrow f$ continua

- (1) $\Leftrightarrow$ (2)

  Chiaro: $\forall S \subseteq Y$ sottoinsieme
  $$f^{-1}(Y \setminus S) = X \setminus f^{-1}(S)$$
  dunque C chiuso $\Leftrightarrow$ $Y \setminus C$ aperto
  $$\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C) \text{ aperto} \Leftrightarrow f^{-1}(C) \text{ chiuso.}$$
  Analog. A aperto ... $\square$

corollario $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ continue, allora $g \circ f: X \to Z$ è continua

dim $g \circ f$ è continua $\Leftrightarrow$ $\forall A$ aperto $A \subseteq Z$, $(g \circ f)^{-1}(A)$ aperto.

Ma $(g \circ f)^{-1}(A) = \underbrace{f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(A)}_{\text{aperto perché } g \text{ continua}})}_{\text{aperto perché } f \text{ continua}}$. $\square$

esempi (1) $Id: X \to X$ continua
$x \mapsto x$

(2) Per $y_0 \in Y$ fissato $\varepsilon_{y_0}: X \to Y$ continua
$x \mapsto y_0$

(se A aperto, allora se $y_0 \in A$, $f^{-1}(A) = X$ aperto;
se $y_0 \notin A$, $f^{-1}(A) = \emptyset$ aperto)

(3) $(X, \text{discreta}) \to Y$ è continua $\forall Y$.
Ogni $f^{-1}(S)$ è aperto, $\forall$ sottoinsieme $S \subseteq Y$.

(4) $X \to (Y, \text{banale})$ è continua $\forall X$.
$f^{-1}(Y) = X$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

(5) $(X, \tau) \xrightarrow{id} (X, \tau')$ è continua $\iff \tau' \subseteq \tau$ (cioè τ è più fine di τ')
Infatti f è continua $\iff$ $\forall$ aperto $U \in \tau'$, $f^{-1}(U) = U \in \tau$.

(6) $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione lineare è continua nella top euclidea (esercizio).

prop $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ continua se e solo se tutte le proiezioni lo sono,
cioè tutte le $p_i \circ f = f_i: X \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{p_i} \mathbb{R}$ sono continue, con
$p_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_i$

dim Se f continua, allora tutte le f_i sono continue (banale).
Mostro il viceversa.
Sia $N \subseteq \mathbb{R}^n$ un intorno di $f(x) = (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))$.
Scelgo $r > 0$ tc $Q(f(x), \frac{r}{2}) \subseteq N$. Poiché le f_i sono continue,
$\exists M_1, \dots, M_n$ intorni di x tc $f_i(M_i) \subseteq (f_i(x) - \frac{r}{2}, f_i(x) + \frac{r}{2})$.
Posto $M = \bigcap_j M_j$ ho che M è intorno di x e
$f(M) \subseteq Q(f(x), \frac{r}{2}) \subseteq N \implies f$ continua $\square$

def $f: X \to Y$ continua è detta **APERTA** se $\forall A \subseteq X$ aperto $f(A) \subseteq Y$ è aperto; f è detta **CHIUSA** se $\forall C \subseteq X$ chiuso, $f(C)$ è chiuso.

def $f: X \to Y$ è detta **OMEOMORFISMO** se f è continua, biettiva e f^{-1} è continua

Esempi

(1) $id_X : X \longrightarrow X$ è omeomorfismo

(2) $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ isomorfismo è omeomorfismo

(3) $f: X \longrightarrow Y$ continua e biettiva. f è omeomorfismo $\iff$ f è aperta

$\iff$ f è chiusa

(4) $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è continua $\iff$ "def con ε e δ"

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione

τ topologia euclidea $\quad$ τ' topologia con base generata $(a, +\infty)$

(5) f continua $\iff$ f semicontinua inferiormente

(6) $p_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua. $n \geq 2$

$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_j$

p_j è aperta ma non è chiusa.

Esempio in cui p non è chiusa, $n=2$:

$p: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto x$

$C = \{(x,y) \mid xy = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ è chiuso

$p(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$ è aperto e non è chiuso.

(7) $\varphi: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ $\quad m > n$ $\quad$ è continua e chiusa.

$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$

Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ chiuso $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus C$ è aperto.

Mostriamo che $\mathbb{R}^m \setminus \varphi(C)$ è aperto: dato

$$y = (y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m \setminus \varphi(C)$$

mostriamo che esiste $\Delta = \Delta(y, \delta) \subset \mathbb{R}^m \setminus \varphi(C)$.

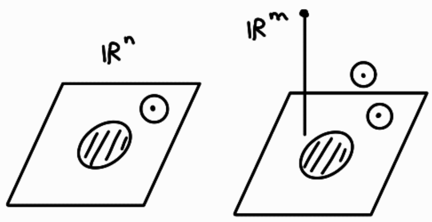
- se y tc $y_j \neq 0$ per qualche $j > n$.

  Consideriamo $\delta = |y_j|$ e allora $\Delta(y, \delta) \subset \mathbb{R}^m \setminus \varphi(C)$

- $y_{n+1} = \dots = y_m = 0$. In questo caso $y = (y_1, \dots, y_n, 0, \dots, 0) \in \varphi(\mathbb{R}^n) \setminus \varphi(C)$

  $\Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0$ tc $\Delta((y_1, \dots, y_n), \delta) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus C$

  ma allora anche $\Delta(y, \delta) \subseteq \mathbb{R}^m \setminus \varphi(C)$



φ non è aperta : $\varphi(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$ è chiuso, non aperto

(8) Le affinità di $\mathbb{R}^n$ sono continue, biiettive e sono aperte.

def Data $f: X \to Y$ funzione di insiemi, con Y s.t., se τ_Y è una topologia su Y, allora chiamo TOPOLOGIA INDOTTA su X da f e τ_Y la meno fine delle topologie su X che rendono f continua.

Gli aperti sono tutti gli insiemi $f^{-1}(A)$ dove $A \in \tau_Y$. (esercizio)

def Data $f: X \to Y$ funzione di insiemi, con Y s.t., se τ_X è top su X, allora chiamo TOPOLOGIA INDOTTA su Y da f e τ_X la più fine delle topologie su Y che rendono f continua.

Gli aperti sono tutti i sottoinsiemi $A \subset Y$ tc $f^{-1}(A) \in \tau_X$. (esercizio)

esercizio $M_{n\times n}(\mathbb{R}) \xrightarrow[\varphi]{\cong} \mathbb{R}^{n^2}$ otteniamo la topologia sullo spazio delle matrici.

$A \subset M_{n\times n}(\mathbb{R})$ aperto $\iff \varphi(A) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ aperto.

Allora $\det(A) : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua.

Se $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$

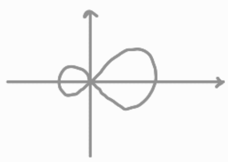
$\Rightarrow \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)$ è continua

$\Rightarrow GL_n(\mathbb{R}) \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{R})$ aperto

prop $f: X \to Y$ biettiva, X, Y s.t. f omeomorfismo se e solo se

$A \subseteq X$ aperto $\iff f(A) \subseteq Y$ è aperto

esempio $I \subseteq \mathbb{R}$ $\quad \varphi: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$



$t \longmapsto (\cos t, \sin(2t))$

$\varphi(I) = \{$immagine di $f\}$ non è omeomorfismo :

$\varphi(\frac{3}{2}\pi) = (0,0)$ $\quad \varphi(\frac{3}{2}\pi - \varepsilon, \frac{3}{2}\pi + \varepsilon) \subseteq \varphi(I)$ non è aperto