

CONTINUITÀ: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

DERIVATA: $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ se è finito

$$\Leftrightarrow f(z) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(h)$$

def $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è **olomorfa** in Ω se è derivabile e $\forall z \in \Omega$ condizione continua in senso complesso.

OSS dal teorema di Goursat è sufficiente f derivabile $\forall z \in \Omega$

def f è **integrale** se è olomorfa in Ω

TEOREMA (condizioni di Cauchy-Riemann). $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$, $u, v: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $z = x + iy$. f è derivabile in $z_0 = x_0 + iy_0$ se e solo se u, v sono differenziabili in (x_0, y_0) e valgono le condizioni

$$(CR) \quad \begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases} \quad (*)$$

dum (\Rightarrow) f derivabile in $z_0 = x_0 + iy_0$, $h = h_1 + ih_2$, $f'(z_0) := \alpha + i\beta$. Osserviamo $o(h) = o(|h|)$.
 $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(h)$.

$$u(x, y) + i v(x, y) = u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0) + (\alpha + i\beta)(h_1 + ih_2) + o(h)$$

$$u(x_1, y) + i v(x_1, y) = u(x_0, y_0) + \alpha h_1 - \beta h_2 + i(v(x_0, y_0) + \alpha h_2 + \beta h_1) + o(h)$$

Pertanto reali ed immaginarie:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x_0, y_0) + \alpha h_1 - \beta h_2 + o(h) \\ &= u(x_0, y_0) + \langle \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \rangle + o(|h|) \\ &= u(x_0, y_0) + \langle \nabla u(x_0, y_0), \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \rangle + o(|h|) \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} v(x, y) &= v(x_0, y_0) + \alpha h_2 + \beta h_1 + o(|h|) \\ &= v(x_0, y_0) + \langle \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \rangle + o(|h|) \\ &= v(x_0, y_0) + \langle \nabla v(x_0, y_0), \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \rangle + o(|h|) \end{aligned}$$

Ma allora u e v sono differenziabili e vale $u_x = \alpha$, $u_y = -\beta$, $v_x = \beta$, $v_y = \alpha$. Dunque valgono le condizioni di Cauchy-Riemann. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \alpha + i\beta = u_x + i v_x = \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= v_y - i u_y = -i(u_y + i v_y) = -i \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

\Leftarrow Valgono le condizioni di Cauchy-Riemann.

Voglio mostrare $f(z) - f(z_0) = f'(z_0)h + o(h)$

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= u(x, y) + i v(x, y) - u(x_0, y_0) - i v(x_0, y_0) \\ &= u(x, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y) - v(x_0, y_0)) \\ &= \langle \nabla u(x_0, y_0), \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \rangle + i \langle \nabla v(x_0, y_0), \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \rangle + o(|h|) \\ &= u_x(x_0, y_0)h_1 + u_y(x_0, y_0)h_2 + i v_x(x_0, y_0)h_1 + i v_y(x_0, y_0)h_2 + o(|h|) \\ &= (u_x + i v_x)h_1 + (v_y - i u_y)h_2 + o(|h|) \\ &\stackrel{u_x \quad i v_x}{=} (u_x + i v_x)(h_1 + ih_2) + o(h) =: f'(z_0)h + o(h) \quad \square \end{aligned}$$

Controesempio di funzione per cui valgono le cond. di CR, ma che non è olomorfa:

$$f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-z^2}} & z \neq 0 \\ 0 & z=0 \end{cases}$$

non è continua in $z=0$.

$$*) \text{ Inoltre } f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$

prop (condizione di C-R in coord. polari). $\exists i \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial \theta}$

$$\text{dim } f(z) = f(pe^{i\theta}) =: g(p, \theta)$$

$$\frac{\partial g}{\partial p} = f'(pe^{i\theta}) \cdot e^{i\theta} \Rightarrow f'(z) = \frac{\partial g}{\partial p} e^{i\theta} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \frac{\partial g}{\partial p} \cdot p_i = \frac{\partial g}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = f'(pe^{i\theta}) \cdot p_i e^{i\theta} \Rightarrow f'(z) = \frac{\partial g}{\partial \theta} \cdot \frac{e^{-i\theta}}{p} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \frac{\partial g}{\partial p} \cdot p_i = \frac{\partial g}{\partial \theta}$$

$$\text{Con un piccolo abuso di notazioneabbiamo } \frac{\partial f}{\partial p} \cdot p_i = \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad \square$$

prop $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa in Ω e $f'(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$, allora f è conforme.

dim Siano γ_1, γ_2 curve regolari tc $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = z_0$ e

$$\theta = \arg(\gamma_1'(t_0)) - \arg(\gamma_2'(t_0)). \text{ Sia } w_i(t) = f(\gamma_i(t)).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1'(t) = f'(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) \neq 0 \\ w_2'(t) = f'(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg(w_1'(t_0)) - \arg(w_2'(t_0)) = \arg(f'(\gamma_1(t_0)) \gamma_1'(t_0)) - \arg(f'(\gamma_2(t_0)) \gamma_2'(t_0)) \\ &= \arg(f'(\gamma_1(t_0))) + \arg(\gamma_1'(t_0)) - \arg(f'(\gamma_2(t_0))) - \arg(\gamma_2'(t_0)) = \theta \quad \square \end{aligned}$$

def $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è **analitica** in Ω se $\forall z_0 \in \Omega \exists \varepsilon > 0$ tc f coincide con la serie di potenze in $B_\varepsilon(z_0)$, cioè $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \forall z \in B_\varepsilon(z_0)$

- f analitica $\Rightarrow f$ olomorfa (in Ω)
- f analitica $\Rightarrow f \in C^\infty$

INTEGRALE IN LINEA: $\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$ produzione in \mathbb{C}

interpretazione di linea di $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: $\int_\gamma f(x) dx = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$

interpretazione di linea di 1-forma $w: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$: $\int_\gamma w = \int_a^b w(t(t)) \cdot \gamma'(t) dt$ prodotto scalare

prop $|\int_\gamma f(z) dz| \leq \max_{t \in \gamma} |f(z)| \underbrace{e(t)}_{\text{lunghezza della curva}}$

prop Se $f = u + iv$, $\int_\gamma f(z) dz = \int_\gamma u dx - v dy + i \int_\gamma v dx + u dy$. Se f è olomorfa, allora $(u, -v), (v, u)$ sono 1-forme chiuse

dim • $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i \gamma_2(t)$, $\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + i \gamma_2'(t)$, $z = x + iy$

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) + i v(\gamma_1(t), \gamma_2(t)))(\gamma_1'(t) + i \gamma_2'(t)) dt \\ &= \int_a^b u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_1'(t) - v(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_2'(t) dt + i \int_a^b v(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_1'(t) + u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_2'(t) dt \\ &= \int_\gamma (u, -v) + i \int_\gamma (v, u) \end{aligned}$$

• f olomorfa implica $\frac{\partial(-v)}{\partial x} = -v_x \stackrel{CR}{=} u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ & $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x = v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ \square

def F è una primitiva di $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua se F è olomorfa in Ω e $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in \Omega$

prop (Gauss-Green). $F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, $F = (F_1, F_2)$, allora

$$\int_{\partial\Omega} F \frac{d\ell^1}{ds} = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

dum teorema della divergenza: $\int_A \operatorname{div}(F) d\mathcal{L}^n = \int_{\partial A} F \cdot \vec{n} d\ell^{n-1}$, $F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$

$F := F_1 dx + F_2 dy$ 1-forma

$Q := F_2 dx - F_1 dy$ campo vettoriale

$r(t) = (r_1(t), r_2(t))$, $t = \partial\Omega$

$t'(t) = (r_1'(t), r_2'(t))$, $\vec{n}(t) = \frac{(r_2'(t), -r_1'(t))}{|r'(t)|}$

$$\int_{\partial\Omega} F = \int_a^b F_1 r_1'(t) + F_2 r_2'(t) dt$$

$$= \int_a^b \langle Q, \frac{(r_2'(t), -r_1'(t))}{|r'(t)|} \rangle |r'(t)| dt$$

$$= \int_a^b \langle Q, \vec{n}(t) \rangle |r'(t)| dt$$

$$= \int_{\partial\Omega} \langle Q, \vec{n} \rangle d\ell^1$$

$$= \int_A \operatorname{div}(Q) d\mathcal{L}^2 = \int_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy \quad \square$$

TEOREMA (dei integrali nello sfero di Cauchy). $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ aperto, olomorfa in Ω , Γ circuito chiuso e semplice

sepolare \geq tratti tc int $\Gamma =: D \subseteq \Omega$. Allora

(caso $f \in C^1$) $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.

dum Ricordo $\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} (u, -v) ds + i \int_{\Gamma} (v, u) ds$.

Uso il teorema di Gauss-Green:

$$\int_{\Gamma} (u, -v) ds \stackrel{\text{GG}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (-v_x - u_y) dx dy = 0.$$

$$\int_{\partial D} (v, u) ds \stackrel{\text{GG}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (u_x - v_y) dx dy = 0. \quad \square$$

prop f olomorfa in $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ semplicemente connesso, allora le due forme $udx - vdy$ e $vdx + udy$ sono estese in Ω , dunque \exists una primitiva F di f in Ω .

TEOREMA (dei circuiti omotopi di Cauchy). $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa in Ω , γ_1, γ_2 circuiti semplici, sepolari \geq tratti tc $D_1 := \operatorname{int} \gamma_1 \subseteq \operatorname{int} \gamma_2 =: D_2$ e $D_2 \setminus D_1 \subset \Omega$. Allora percorri nella stessa ferro

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

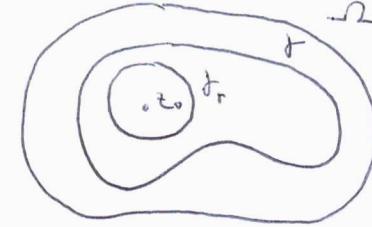
TEOREMA (prima formula integrale di Cauchy). $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa in Ω , Γ circuito semplice, sepolare \geq tratti tc int $\Gamma =: D \subset \Omega$. Allora $\forall z_0 \in D$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$r > 0$ tc $B_r(z_0) \subset D$

- dum • $\forall z_0 \in D$, esiste $r > 0$ t.c. $B_r(z_0) \subset D$. Poi $r = \partial B_r(z_0)$. Dal teorema dei cammini omotopi si ha

$$\int_{r_r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{r_r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$



- Inoltre otterro

$$\int_{r_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz = f(z_0) \int_{r_r} \frac{1}{z-z_0} dz = f(z_0) \cdot 2\pi i$$

$\int_{r_r(z_0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$

- Considero

$$\left| \int_{r_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz \right| \leq \max_{z \in r_r} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} \right| \cdot \operatorname{ec}(r_r)$$

$$= \max_{z \in r_r} |f(z) - f(z_0)| \cdot 2\pi r$$

f è olomorfa in Ω , dunque è continua in Ω , ovvero $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c. $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Sceglio $r < \delta$ e ottengo

$$\left| \int_{r_r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \int_{r_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz \right| \leq 2\pi \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 0$$

(per l'arbitrarietà di ε)

$$\Rightarrow \int_{r_r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{r_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz = \int_{r_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz = f(z_0) \cdot 2\pi i \quad \square$$

def $w: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è **armonica** se $w \in C^2(A)$ e $\Delta w = w_{xx} + w_{yy} = 0$.

prop f olomorfa in Ω , $f = u + iv$, allora u e v sono armoniche.

TEOREMA $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, f olomorfa in Ω , allora è analitica in Ω , cioè $\forall z_0 \in \Omega$ $\exists r > 0$ t.c. $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ $\forall z \in B_r(z_0)$, con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw =: \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

formula integrale di Cauchy per derivate

dum $z_0 \in \Omega$ ed r t.c. $B_r(z_0) \subset \Omega$.

Dal teorema dei cammini omotopi e dalla prima formula integrale di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Osservo $|w - z_0| = r > |z - z_0| \Rightarrow \left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| < 1$.



$$\text{Dunque } \frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{(w - z_0)(1 - \frac{z - z_0}{w - z_0})} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n dw$$

Noto che ricorre $\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| = q < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n$ converge totalmente e dunque uniformemente su $r_r(z_0)$ permettendomi di ricambiare \sum con \int e ottenerlo:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (z - z_0)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{r_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw}_{:= a_n} \quad \square$$

prop (stima di Cauchy). $|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \|f\|_{B_r(z_0)}$

dum $f^{(n)}(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n! = \frac{n!}{r^n} \int_{B_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &\leq \frac{n!}{r^n} \max_{w \in B_r(z_0)} \left| \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \right| \cdot 2\pi r \\ &= n! \cdot \max_{w \in B_r(z_0)} \frac{\|f(w)\|}{r^{n+1}} \cdot \cancel{r} \\ &= \frac{n!}{r^n} \|f\|_{B_r(z_0)} \quad \square \end{aligned}$$

TEOREMA (di Liouville). f intesa è univocata, cioè $|f(z)| \leq K \quad \forall z \in \mathbb{C}$, allora f costante.

dum f intesa: $z_0 = 0$, $\forall r > 0 \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \forall z \in B_r(0)$

$$|a_n| = \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq \frac{\|f\|_{B_r(0)}}{r^n} \leq \frac{K}{r^n}$$

stima di Cauchy f univocata

Preto $n \geq 1$ ha $|a_n| \leq \frac{K}{r^n} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow f(z) = a_0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ \square

def $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. z_0 è uno zero di f se $f(z_0) = 0$.

TEOREMA (fondamentale dell'algebra). Se $p_n(t)$ un polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi. Allora p_n ha almeno uno zero.

dum PA $p_n(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) := \frac{1}{p_n(z)}$ è intesa

Ottieno che $|p_n(z)| \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} \infty$, dunque $|f(z)| \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} 0$, ovvero $f(z)$ è univocata in \mathbb{C}

Ma allora dal teorema di Liouville $f(z) = \frac{1}{p_n(z)}$ è costante $\quad \square$

TEOREMA (teo di una funzione analitica). $f: \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa in \mathbb{C} . Se $z_0 \in \mathbb{C}$ $f(z_0) = 0$, ovvero z_0 è uno zero di f . Allora $f \equiv 0$ in \mathbb{C} oppure $\exists r > 0$ tc $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, ovvero z_0 è uno zero isolato.

dum f olomorfa in \mathbb{C} , dunque analitica, ovvero $\exists r > 0$ tc $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B_r(z_0)$.
 $f(z_0) = a_0 = 0$. Abbiamo due possibilità:

1) $a_n = 0 \quad \forall n \geq 0 \Rightarrow f \equiv 0 \text{ in } B_r(z_0)$

2) $\exists a_n \neq 0$. Se N il più piccolo n tc $a_n \neq 0$.

$$f(z) = \sum_{n=N}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^N \underbrace{\sum_{n=N}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n-N}}_{:= g(z)} = (z - z_0)^N \sum_{k=0}^{+\infty} a_{N+k} (z - z_0)^k$$

Ottieno che $g(z)$ è olomorfa in $B_r(z_0)$ e $|g(z_0)| = |a_N| \neq 0$.

Siccome $|g(z)|$ è continua, dalla permanenza del segno $\exists r' > r > 0$ tc $|g(z)| > 0 \quad \forall z \in B_{r'}(z_0)$.

Ma allora $f(z) = (z - z_0)^N g(z) \neq 0 \quad \forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$

ovvero z_0 è zero (isolato).

Molto ora che se $f \equiv 0$ in $B_r(z_0)$, allora per connessione di Ω $f \equiv 0$ in Ω .

MA $\exists t_1 \in \Omega$ tc $f(t_1) \neq 0$. Sia $t \in (0, 1) \rightarrow \Omega$ cammino continuo tale che

$f(0) = z_0$ e $f(1) = z_1$. Ovvero $f(f(t))$ continua tc $f(f(0)) = 0$ e $f(f(1)) = 1$.

Sia $t' := \inf\{t \in (0, 1) : f(f(t)) \neq 0\}$. NOTA:

- $t' \neq 0$, dato che $f \equiv 0$ in $B_r(z_0)$

- $t' \neq 1$, dato che $|f(f(1))| = 1 > 0$ e per la permanenza del segno esiste un intorno di t' tc $|f(f(t))| > 0$.

Inoltre $\forall t < t'$, $f(f(t)) = 0$, da cui $\lim_{t \rightarrow t'} f(f(t)) = 0$.

Sia $z' = f(t')$: $f(z') = 0$. z' non è zero isolato perché $f(t)$ con $t < t'$ sono rei, dunque \exists un intorno di z' in cui f si annulla.

□

def z_0 zero di f olomorfa in Ω . La molteplicità di f in z_0 è il valore in tc esiste finito $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^n} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Equivalentemente, in \exists un intorno Ω $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

TEOREMA (principio di identità di Riemann analitiche). $f, g: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfe in Ω . Se $C := \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ contiene una successione di punti convergente in Ω , allora $f \equiv g$ in Ω .

dum Sia $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow z \in \Omega$. $f(z_n) = g(z_n)$

per continuità: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) = f(z)$

$$f(z) = g(z) \Rightarrow z \in C$$

$\Rightarrow z$ è zero di $f-g$, ma non è isolato

$\Rightarrow f-g \equiv 0$ in $\Omega \Rightarrow f \equiv g$ in Ω

□

CORONA CIRCOLARE: $C_{R_1, R_2}(z) = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq R_1 < |z - z_0| < R_2 \leq +\infty\}$

def La serie di Laurent di centro $z_0 \in \mathbb{C}$ è

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} \frac{1}{(z-z_0)^k}}_{\text{PARTE SINGOLARE}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\text{PARTÉ REGOLARE con l'oppo di conv. R}}$$

Se $\sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} (w-z)^k$ con
 $w-z = \frac{1}{z-z_0}$ ha raggio di conv. r , allora la parte singolare converge se $\frac{1}{|z-z_0|} < r \Leftrightarrow |z-z_0| > \frac{1}{r}$

TEOREMA (sviluppo in serie di Laurent in una corona). f olomorfa in $C_{R_1, R_2}(z)$, $0 < R_1 < R_2 < \infty$, è fissata. Allora f si può sviluppare in serie di Laurent

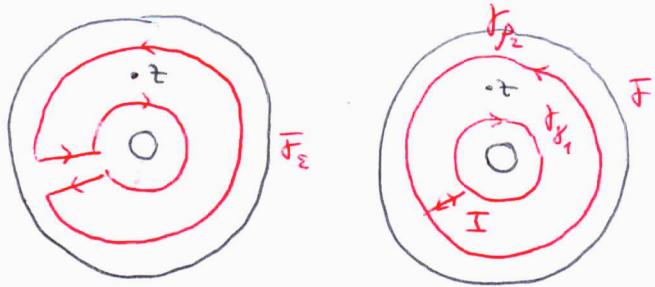
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \quad \forall z \in C_{R_1, R_2}(z)$$

con

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \quad \text{con } R_1 < r < R_2$$

dim Fissato $z \in C_{R_1, R_2}(z)$, p_1, p_2 tc $R_1 < p_1 < |z-z_0| < p_2 < R_2$.

$\bar{F}_\varepsilon \rightarrow \bar{F}$ e per le proprietà di approssimazione degli integrali $\int_{\bar{F}_\varepsilon} (\cdot) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{F}_\varepsilon} (\cdot)$



Dans formule intégrale de Cauchy $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{\gamma}_\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw$ et

$$f(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{\gamma}_\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_F \frac{f(w)}{w-z} dw$$

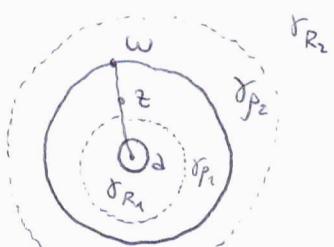
$$\Rightarrow f(z) = \left[\int_{r_{p_2}} () dw + \int_I () dw - \int_I () dw - \int_{r_{p_1}} () dw \right] \frac{1}{2\pi i}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{r_{p_2}} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{r_{p_1}} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

$$1) |w-a| = p_2 > |z-a| \Rightarrow \left| \frac{z-a}{w-a} \right| < 1$$

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a-(z-a)} = \frac{1}{(w-a)\left(1 - \frac{z-a}{w-a}\right)} = \frac{1}{w-a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{r_{p_2}} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_{p_2}} \frac{f(w)}{w-a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n dw \stackrel{\text{remarque}}{\downarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} (z-a)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial p_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw}_{:= C_n, n>0}$$



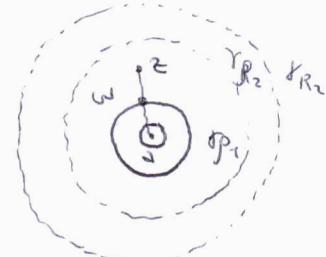
$$2) |w-a| = p_1 < |z-a| \Rightarrow \left| \frac{w-a}{z-a} \right| < 1$$

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a+z-a} = -\frac{1}{(z-a)\left(1 - \frac{w-a}{z-a}\right)} = -\frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{r_{p_1}} \frac{f(w)}{w-z} dw = -\frac{1}{2\pi i} \int_{r_{p_1}} \frac{f(w)}{w-a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(w-a)^{n-1}}{(z-a)^n} dw$$

$$\stackrel{\text{remarque}}{\downarrow} = -\sum_{n=1}^{+\infty} (z-a)^{-n} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial p_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw}_{:= C_k, k<0}$$

$$= -\sum_{k=-1}^{\infty} (z-a)^k \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial p_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} dw}_{:= C_k, k<0}$$



$$\Rightarrow f(z) = (z-a)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial p_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw + \sum_{k=-1}^{-\infty} (z-a)^k \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial p_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} dw$$

$$\stackrel{\text{classement}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (z-a)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial p_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw}_{:= C_n, n \in \mathbb{Z}} \quad \text{car } p_1 < p < p_2$$

□

def f ha una singolarità isolata in $a \in \mathbb{C}$ se e solo se f è olomorfa in $B_r(a) \setminus \{a\}$.

def Sia a singolarità isolata per f . Si dice che a è:

- 1) eliminabile se è finito $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$
- 2) polo di ordine n se è finito $\neq 0$ $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^n f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- 3) estenuabile se non è né 1) né 2)

TEOREMA (Carorau-Wierstrass). Una singolarità estenuabile per f , allora $\forall \epsilon \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$\exists z_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a \text{ tc } f(z_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \epsilon$$

TEOREMA Sia a singolarità isolata per f e $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ per $z \in B_r(a) \setminus \{a\}$

Serie di Laurent centrata in $a=z$ con raggio minimo piccolo. Allora se:

- 1) sing. eliminabile $\Leftrightarrow c_n = 0 \quad \forall n < 0$
- 2) polo di ordine $m \Leftrightarrow c_{-m} \neq 0 \text{ e } c_n = 0 \quad \forall n < -m$
- 3) sing. estenuabile $\Leftrightarrow \exists c_n \neq 0 \quad \text{per infiniti } n < 0$

dim 1) \Rightarrow singolarità eliminabile: $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0 \Rightarrow f$ è limitata in un intorno di a : $|f(z)| < K \quad \forall z \in B_p(a)$ per f abbastanza piccolo.

$$\begin{aligned} |c_n| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{B_p(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \max_{w \in B_p(a)} |f(w)| \cdot 2\pi p \leq \frac{K}{p^n} \end{aligned}$$

↓
p abbastanza piccolo

Preto $n < 0$ si ha $|c_n| \leq \frac{K}{p^n} \xrightarrow[p \rightarrow 0]{} 0 \Rightarrow c_n = 0 \quad \forall n < 0$

$$(\Leftarrow) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n \quad \text{in } B_r(a) \setminus \{a\}, \text{ ma allora}$$

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow a$$
 sing. eliminabile

2) \Rightarrow polo di ordine m : $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m f(z) = c_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

(notare $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = c_0 \Rightarrow a$ è sing. eliminabile per $g(z)$)

Dà 1) $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^{n-m} = \sum_{k=-m}^{+\infty} c_{k+m} (z-a)^k$$

$$\Rightarrow c_n = 0 \quad \forall n < -m$$

$$\begin{aligned} (\Leftarrow) \quad f(z) &= \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z-a)^n \Rightarrow \lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \lim_{z \rightarrow a} \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z-a)^{n+m} \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k-m} (z-a)^k \\ &= c_{-m} \neq 0 \end{aligned}$$

3) Per escludere.

□

TEOREMA $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa in Ω . Se z_0 è un polo di f allora c_{-1}

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$$

Sviluppo di Laurent di f in z_0 . Allora $f \in C(0,r)$ si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_p(z)} f(z) dz = c_{-1}$$

dunque

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_p(z)} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_p(z)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n dz$$

(datene che Laurent conv. tot. e quindi uniformemente $\forall p > 0$)

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{\gamma_p(z)} (z-z_0)^n dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot (c_{-1} \cdot 2\pi i) = c_{-1}$$

$$\int_{\gamma_p(z)} z^n dz = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

□

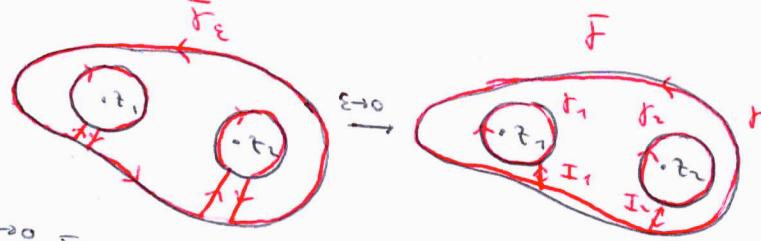
def c_{-1} chiamato residuo del sviluppo di Laurent di f in z_0 e si chiama

RESIDUO di f in z_0 e si scrive $\text{Res}(f, z_0)$

TEOREMA (dei residui). $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ aperto olomorfa in Ω , γ curva chiusa semplice percorsa in senso antiorario, $f \in \Omega$ e $D = \text{int } \gamma$. Se in D ci sono un numero finito di singolarità isolate z_1, \dots, z_k e $D \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \subset \Omega$, allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, z_j)$$

dunque ($k=2$).



$\Rightarrow r_1$ ed r_2 t.c. f è olomorfa in $B_{r_1}(z_1) \setminus \{z_1\}$ e $B_{r_2}(z_2) \setminus \{z_2\}$.

Stesso $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{I_1} f(z) dz + \int_{I_2} f(z) dz + \int_{-I_1} f(z) dz + \int_{-I_2} f(z) dz$

Se f è olomorfa in $D \setminus (B_{r_1}(z_1) \cup B_{r_2}(z_2))$ abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= 0 \\ &= \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma_{r_1}} f(z) dz - \int_{\gamma_{r_2}} f(z) dz \\ &= \int_{\gamma} f(z) dz - 2\pi i \text{Res}(f, z_1) - 2\pi i \text{Res}(f, z_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f, z_1) + \text{Res}(f, z_2)).$$

□

prop a singolarità eliminabile $\Rightarrow \text{Res}(f, z) = 0$

dunque f ha sviluppo di Laurent con sola parte regolare

prop a polo semplice $\Rightarrow \text{Res}(f, z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z)$

dunque $f(z) = \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + g(z) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} c_{-1} + \underbrace{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)(z-z_0)}_{\rightarrow 0} = c_{-1}$

□

prop 3 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ tc $Q(z) = 0$ e $Q'(z) \neq 0$, ovvero z zero di multiplicità 1 per Q
e $P(z) \neq 0$, allora $\text{Res}(f, z) = \frac{P(z)}{Q'(z)}$.

dum z è polo di ordine 1, dunque da (prop 2) si ha

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z) &= \lim_{z \rightarrow z} (z-z) f(z) = \lim_{z \rightarrow z} \frac{(z-z) P(z)}{Q(z)} \stackrel{(H)}{=} \lim_{z \rightarrow z} \frac{P(z) + (z-z) P'(z)}{Q'(z)} \\ &= \frac{P(z)}{Q'(z)} \end{aligned} \quad \square$$

prop 4 z polo di ordine n per $f \Rightarrow \text{Res}(f, z) = \frac{1}{(n-1)!} \left. \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}} [(z-z)^n f(z)] \right|_{z=z}$

dum $f(z) = \frac{C_{-n}}{(z-z)^n} + \frac{C_{-n+1}}{(z-z)^{n-1}} + \dots + \frac{C_{-1}}{(z-z)} + g(z)$
parte regolare

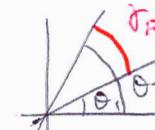
$$(z-z)^n f(z) = C_{-n} + C_{-n+1}(z-z) + \dots + C_{-1}(z-z)^{n-1} + g(z)(z-z)^n$$

$$\Rightarrow C_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \left. \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}} [(z-z)^n f(z)] \right|_{z=z} =$$

$$= C_{-1} + \underbrace{\frac{1}{(n-1)!} \left[\left. \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}} g(z)(z-z)^n \right|_{z=z} \right]}_{=0} \quad \square$$

lemma (del grande cerchio). f definita e continua in $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$ e per $|z|$ abbastanza grande. se $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} z f(z) = 0$, allora

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$$



dum $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{R} > 0$ tc $|z| > \bar{R} \Rightarrow |f(z)| < \varepsilon \Rightarrow |f(z)| < \frac{\varepsilon}{|z|} < \frac{\varepsilon}{R}$

Sceglio $R > \bar{R}$ e calcolo

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \gamma_R} |f(z)| (\theta_2 - \theta_1) R < \frac{\varepsilon (\theta_2 - \theta_1) R}{R} = \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 0 \quad \square$$

lemma (del piccolo cerchio). f definita e continua in $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$ e per $|z|$ abbastanza piccolo. se $\lim_{|z| \rightarrow 0} z f(z) = 0$, allora

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0$$

lemma (del piccolo cerchio di Jordan). f olomorfa in $B_r(0) \setminus \{0\}$ e in $z=0$ f ha un polo semplice. Allora

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = -(\theta_2 - \theta_1) \text{Res}(f, 0)$$

dum $f(z) = \frac{C_{-1}}{z} + g(z) \rightarrow g(z)$ è analitica in $B_r(0)$
parte regolare

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz = \int_{\gamma_r} \frac{C_{-1}}{z} + \int_{\gamma_r} g(z) dz$$

$\xrightarrow[r \rightarrow 0]{\downarrow}$ per il lemma
0 del piccolo cerchio

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{c_{-1}}{z} dz \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{c_{-1}}{r e^{i\theta}} \cdot r e^{i\theta} d\theta \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} c_{-1} \cdot i \cdot (\theta_2 - \theta_1) = i(c_{-1}(\theta_2 - \theta_1)) c_{-1}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Lemma (del grande cerchio di Jordan). f def e continua in

$$S = \{0 \leq \theta \leq \arg z \leq \theta_2 \leq \pi\} \quad (\{Im z \geq 0, y \geq 0\}). \text{ Se } \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0, \text{ allora}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{iz} dz = 0$$

dove $M(R) := \sup_{R \rightarrow \infty} \{ |f(z)| : z \in \gamma_R \}$

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{iz} dz \right| &= \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(R e^{i\theta}) \cdot e^{iR e^{i\theta}} R e^{i\theta} d\theta \right| \\
 &\leq M(R) R \int_{\theta_1}^{\theta_2} |e^{R \cos \theta - R \sin \theta}| d\theta \\
 &= M(R) R \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-R \sin \theta} d\theta \\
 &\stackrel{\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta}{\leq} M(R) R \int_0^{\pi} e^{-R \sin \theta} d\theta \\
 &\stackrel{\downarrow}{\leq} 2 M(R) R \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta \\
 &\leq 2 M(R) R \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}} d\theta \\
 &= 2 M(R) R \left(-\frac{\pi}{2R} \right) \left[e^{-\frac{2R\theta}{\pi}} \right]_0^{\pi/2} \\
 &= 2 M(R) R \left(-\frac{\pi}{2R} \right) (e^{-R} - 1) \\
 &= \underbrace{2M(R)}_{\downarrow 0} \underbrace{R}_{\downarrow 0} \underbrace{\frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R})}_{\downarrow 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

Prop • $\int_{\gamma_R} f(z) e^{-iz} dz \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{=} 0$ con $\gamma_R \subseteq \{Im z \leq 0\}$

• $\int_{\gamma_R} f(z) e^{-z} dz \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{=} 0$ con $\gamma_R \subseteq \{Re z \geq 0\}$

• $\int_{\gamma_R} f(z) e^z dz \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{=} 0$ con $\gamma_R \subseteq \{Re z \leq 0\}$

TEOREMA (di convergenza monotona). Se $\{f_n\}$ misurabile, $f_n \geq 0$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, allora $\int f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx$

TEOREMA (di convergenza dominata). Se $\{f_n\}$ misurabile, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$, $\exists g \geq 0$ integrabile tc $\forall n$ $|f_n(x)| \leq g(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n(x) - f(x)| dx = 0$$

TEOREMA (diseguaglianza di Young). Siano $A, B \geq 0$, $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$. Allora

$$AB \leq \frac{1}{p} A^p t^p + \frac{1}{p'} B^{p'} t^{-p'} \quad \forall t > 0$$

dum Definisco $F(t) := \frac{1}{p} A^p t^p + \frac{1}{p'} B^{p'} t^{-p'}$.

$$0 = F'(t) = (A^p t^p - B^{p'} t^{-p'}) \frac{1}{t} \Rightarrow t^{p+p'} = B^{p'} A^{-p} \Rightarrow t_0 = A^{\frac{p}{p-p'}} B^{\frac{p'}{p-p'}} = A^{\frac{1}{p'}} B^{\frac{1}{p}}$$

$$F''(t) = (p-1) A^p t^{p-2} + (p'+1) B^{p'} t^{-p'-2} > 0 \Rightarrow F \text{ è convexa}$$

$$F(t_0) = \frac{1}{p} A^p B A^{-\frac{p}{p'}} + \frac{1}{p'} B^{p'} B^{-\frac{p'}{p}} A = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right) AB = AB$$

Siccome $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = +\infty$ e $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = +\infty$, $F(t_0)$ è minimo (assoluto) di

F e abbiamo la diseguaglianza desiderata.

def $p' := \frac{p}{p-1}$ è detto **ESPOLENTE DI HÖLDER CONIUGATO** a p

TEOREMA (Hölder's inequality). Siano $p, q \in (1, \infty)$ tc $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ovvero $q = p'$. Allora per ogni f, g funzioni misurabili vale

$$\int |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

dum Posso scrivere $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_q$. Sostituisco $f \rightarrow \frac{f}{\|f\|_p}$, $g \rightarrow \frac{g}{\|g\|_q}$ con che

$$\|f\|_p = 1 = \|g\|_q \text{ e rimane da mostrare } \int |f(x)g(x)| dx \leq 1.$$

Pongo $A = |f(x)|$, $B = |g(x)|$, $t = 1$ e applico la diseguaglianza di Young:

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p} |f(x)|^p + \frac{1}{q} |g(x)|^q$$

$$\Rightarrow \int |f(x)g(x)| \leq \underbrace{\frac{1}{p} \int |f(x)|^p}_{=1} + \underbrace{\frac{1}{q} \int |g(x)|^q}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

prop In \mathbb{R}^d , la diseguaglianza $\int |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int |g(x)|^q dx\right)^{1/q}$, con $p, q \in (1, \infty)$ implica $q = p'$.

dum Posso supporre $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_q$.

Sia $t > 0$, $f_t(x) := f(tx)$, $g_t(x) = g(tx)$

$$\forall t > 0 : \int |f_t(x)g_t(x)| dx \leq \|f_t\|_p \|g_t\|_q$$

$$\bullet \int |f_t(x)g_t(x)| dx = \int |f(tx)g(tx)| dx \stackrel{\substack{y=tx \\ x=\frac{1}{t}y \\ dy}}{=} \frac{1}{t} \int |f(y)g(y)| dy$$

$$\bullet (\int |f_t(x)|^p dx)^{1/p} = (\int |f(tx)|^p dx)^{1/p} \stackrel{y=tx}{=} \left(\frac{1}{t} \int |f(y)|^p dy \right)^{1/p} = t^{-\frac{1}{p}} (\int |f(y)|^p dy)^{1/p}$$

$$\bullet (\int |g_t(x)|^q dx)^{1/q} = t^{-\frac{1}{q}} (\int |g(y)|^q dy)^{1/q}$$

$$\Rightarrow t^{-\alpha} \int |f(y)g(y)| dy = \int |f_t(x)g_t(x)| dx \leq \|f_t\|_p \|g_t\|_q = t^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_p \|g\|_q$$

$$\Rightarrow t^{\alpha(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1)} \int |f(y)g(y)| dy \leq \|f\|_p \|g\|_q \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Inoltre, se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1)} = +\infty$

prop (disuguaglianza di Minkowski). Per $1 \leq p \leq \infty$ vale la diseguaglianza triangolare $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

dum Posso escludere $f \neq 0 \neq g$

$$\begin{aligned} & \bullet |f(x)+g(x)|^p = (f(x)+g(x)) (f(x)+g(x))^{p-1} \leq (|f(x)|+|g(x)|) |f(x)+g(x)|^{p-1} \\ & \bullet \int |f(x)+g(x)|^p dx \leq \int |f(x)| |f(x)+g(x)|^{p-1} dx + \int |g(x)| |f(x)+g(x)|^{p-1} dx \\ & \bullet \text{Applico la diseguaglianza di Hölder su } |f(x)|, |f(x)+g(x)|^{p-1} \text{ con } p, p' = \frac{p}{p-1} \\ & \quad \int |f(x)| |f(x)+g(x)|^{p-1} dx \leq \|f\|_p \left(\int |f(x)+g(x)|^{p-1} \cdot \frac{p}{p-1} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ & \quad = \|f\|_p \|f+g\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|f+g\|_p^p & \leq \|f\|_p \|f+g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{p-1} \\ & = (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f+g\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

TEOREMA Per $1 \leq p \leq \infty$, L^p è completo, ovvero se $\{f_n\} \subset L^p$ e $\|f_n - f_m\|_p \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0$ allora $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \in L^p$.

dum (cenno). Vediamo il caso $p < \infty$.

• Supponiamo $\|f_n - f_m\|_p \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0$, dunque $\exists \{f_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ ec $\|f_{n(k+1)} - f_{n(k)}\|_p < \frac{1}{2^k}$.

Inoltre $f_{n(k)} = f_k$ e scrivo $f_k(x) = f_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (f_{k+1}(x) - f_k(x))$.

• Se $g_n(x) := |f_1(x)| + \sum_{k=1}^{n-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$. Ovvio $g_n(x) \geq 0$, $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ e per q.o. $x \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x) \in [0, +\infty]$.

converg. $\int g(x)^p dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n(x)^p dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_p^p$

diseguagli. $\|g_n\|_p \leq \|f_1\|_p + \sum_{k=1}^{n-1} \|f_{k+1} - f_k\|_p \leq \|f_1\|_p + 1 \quad \forall n$

$\frac{1}{2^k}$

$$\Rightarrow \|g\|_p^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_p^p \leq (\|f\|_p + 1)^p < \infty \Rightarrow g \in L^p \Rightarrow |g(x)| < \infty \text{ per q.o. } x$$

$\Rightarrow f(x) := f_n(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{k+1}(x) - f_k(x))$ è assolutamente convergente per q.o. x

$$|f(x)|^p \leq g(x)^p \in L^1 \Rightarrow |f(x)|^p \in L^1 \Rightarrow f \in L^p$$

- Inoltre otteniamo $|f_n(x) - f(x)|^p \leq (|f(x)| + |f_n(x)|)^p \leq 2^p \max\{|f(x)|, |f_n(x)|\}^p \leq 2^p g(x)^p$

convergenza dominata $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n(x) - f(x)|^p dx$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ per q.o. } x$$

OSS In generale non è vero che se $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ per q.o. x

↳ conv. in norma non implica conv. puntuale, ma nella dim. sopra abbiamo costruito una $\{f_n\}_n$ che converge in norma (\Rightarrow completezza) e anche puntualmente

def f è **LOCALMENTE INTEGRABILE**, e scriveremo $f \in L^1_{loc}$, se $\int_K |f| < \infty \forall K$ compatto.

def Data $f \in L^1_{loc}$, definiamo l'**OPERATORE MASSIMALE** e la **FUNZIONE MASSIMALE** di HARDY-LITTLEWOOD

$$Mf(x) = f^*(x) := \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy$$

Lemma 1 f^* è misurabile.

dimo Norma dire $\forall d > 0 \quad \{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > d\}$ è aperto

Sia $\alpha < f^*(x)$, allora \exists una palla aperta $B \ni x$ tc $\frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy > \alpha$

$$\forall y \in B \quad \text{si ha } \alpha < \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy \leq \sup_{\tilde{B} \ni y} \int_{\tilde{B}} |f(y)| dy = f^*(y)$$

$\Rightarrow B$ è intorno aperto di x

Lemma 2 Se vale $\|Mf\|_1 \leq C \|f\|_1$, allora $f = 0$ q.o.

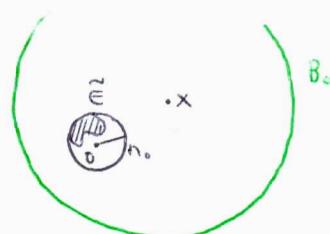
dimo PA esista $f \in L^1$ con $|f(x)| \geq \varepsilon > 0 \quad \forall x \in E, |E| > 0$.

$\mathbb{R}^d = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(0, n) \Rightarrow \exists n_0 \text{ tc } |E \cap B(0, n_0)| > 0$. Pongo $\tilde{E} := E \cap B(0, n_0)$ e vale ancora $\tilde{E} \subset \mathbb{R}^d$, $|f(x)| \geq \varepsilon \quad \forall x \in \tilde{E}$. Ovvvero $|f(x)| \geq \varepsilon \quad \forall x \in \tilde{E}$

Sia $|x| > n_0$ e $B_0 = B(x, 5|x|) \supseteq \tilde{E}$.

Allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B_0|} \int_{B_0} |f| &= \frac{1}{|B_0|} \int_{\tilde{E}} |f| \\ &\geq \frac{\varepsilon}{|B_0|} \int_{\tilde{E}} 1 \\ &= \frac{\varepsilon |\tilde{E}|}{|B(0, 1)| S^d |x|^d} \approx \frac{1}{|x|^d} \left(= \frac{\varepsilon}{|x|^d} \right) \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} |Mf| \geq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|x|^d} dx = +\infty$$

Lemma 3 (coincidimento di Vitali). Da una famiglia finita di pelli $\{B_1, \dots, B_m\}$ possiamo estrarre un sottoinsieme $\{\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_n\}$ tc

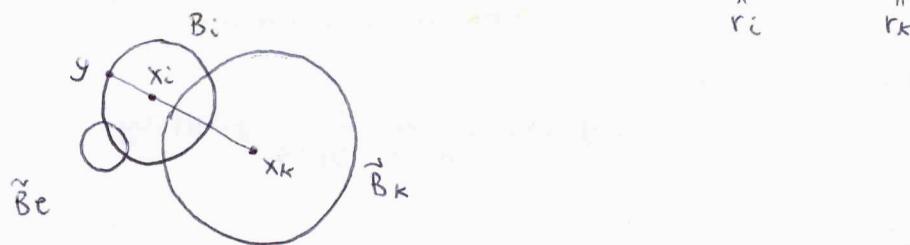
1) se $j \neq k \Rightarrow \tilde{B}_j \cap \tilde{B}_k = \emptyset$ (disgiunte a due a due)

$$2) |\bigcup_{i=1}^m B_i| \leq 3^d \sum_{k=1}^n |\tilde{B}_k| = 3^d |\bigcup_{k=1}^n \tilde{B}_k|$$

dum 1) Sia \tilde{B}_i una pella di regalo massimale e scartiamo le pelli che intersecano \tilde{B}_i . Tra le pelli rimaste chiamiamo \tilde{B}_j una pella di regalo massimale e scartiamo le pelli che la intersecano. Ripetiamo questo procedimento finché esauriamo le pelli date. Le pelli selezionate sono disgiunte a due a due.

2) Dimostriamo che se B_i è una pella che non è stata selezionata, allora $\exists \tilde{B}_k$ tc $B_i \subset \tilde{B}_k$ con $3\tilde{B}_k$ che indica una pella di raggio \tilde{B}_k e raggio 3 volte quello di \tilde{B}_k .

Se B_i è stata scartata, significa che $\exists \tilde{B}_e$ tc $\tilde{B}_e \cap B_i \neq \emptyset$. Sia k il più piccolo indice in $\{1, \dots, m\}$ tc $B_i \cap \tilde{B}_k \neq \emptyset \Rightarrow \text{raggio}(B_i) \leq \text{raggio}(\tilde{B}_k)$



$$\forall y \in B_i \quad |y - x_k| \leq |y - x_i| + |x_i - x_k| \leq r_k + 2r_i \leq 3r_k$$

$$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad B_i \subset \bigcup_{j=1}^n 3\tilde{B}_j;$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^m B_i \subset \bigcup_{j=1}^n 3\tilde{B}_j;$$

$$\Rightarrow \left| \bigcup_{i=1}^m B_i \right| \leq \left| \bigcup_{j=1}^n 3\tilde{B}_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |\tilde{B}_j| = 3^d \sum_{j=1}^n |\tilde{B}_j| = 3^d \left| \bigcup_{j=1}^n \tilde{B}_j \right|.$$

TEOREMA (Hardy-Littlewood).

1) Esiste $C = C_d$ che dipende solo dalla dimensione d tc $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $\forall \alpha > 0$

$$|\{x : f^*(x) > \alpha\}| \leq \frac{C_d}{\alpha} \|f\|_1$$

2) se $p > 1$, esiste $C = C_{d,p}$ tc

$$\|f^*\|_p \leq C_{d,p} \|f\|_p$$

dum 1) Fisso $\alpha > 0$. La x tc $\alpha < f^*(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f| \Rightarrow \exists B_x \ni x$ tc $\frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} |f(y)| dy > \alpha$. (*)

$$E_\alpha := \{x : f^*(x) > \alpha\} \subseteq \bigcup_{x \in E_\alpha} B_x.$$

Per la regolarità della misura di Lebesgue $|E_\alpha| = \sup \{|K| : K \text{ compatto}, K \subseteq E_\alpha\}$, dunque per dimostrare il risultato è sufficiente dimostrare che $\forall K \subseteq E_\alpha$ compatto si ha $|K| \leq \frac{C_d}{\alpha} \|f\|_1$.

Fisso K compatto, $K \subseteq E_\alpha \subseteq \bigcup_{x \in E_\alpha} B_x$ pelli aperte $\xrightarrow{K \text{ compatto}} \exists \{B_{x_1}, \dots, B_{x_m}\}$ tc $E_\alpha \subseteq \bigcup_{j=1}^m B_{x_j}$

Proprietà
di misura
 $\exists \{\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_n\}$ disgiunte a 2 a 2 e tale che $|\bigcup_{j=1}^n B_j| \leq 3^d \sum_{k=1}^n \tilde{B}_k$

$$\Rightarrow |K| \leq |\bigcup_{j=1}^n B_j| \leq 3^d \sum_{k=1}^n |\tilde{B}_k| \stackrel{(*)}{\leq} 3^d \cdot \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^n \int_{\tilde{B}_k} |f(y)| dy$$

$\because \tilde{B}_j = B_j \cap \tilde{B}_j = \emptyset \leq \frac{3^d}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f|$
 $= \frac{3^d}{\alpha} \|f\|_1$

2) Da quanto visto sopra sappiamo che $\exists \{B_j\}_{j=1}^n$ con

(1) B_j disgiunte fra loro

$$(2) \quad \forall x : |f^*(x) - \alpha| \leq 3^d \sum_{j=1}^n |B_j| = 3^d |\bigcup_{j=1}^n B_j|$$

$$(3) \quad \alpha < \frac{1}{|B_j|} \int_{B_j} |f(y)| dy \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Lemma 4 $| \{x : f^*(x) > \alpha\} | \leq \frac{2 \cdot 3^d}{\alpha} \int_{\{x : |f(x)| > \frac{\alpha}{2}\}} |f| \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\{x : |f(x)| > \frac{\alpha}{2}\}} |f|$

dimo • $\alpha |B_j| < \int_{B_j} |f(y)| dy$

opp stima forte \Rightarrow stima debole

$$\|Tf\|_q \leq C \|f\|_p$$

$$|\{x : |Tf(x)| > \alpha\}| = |\{x : |\frac{Tf(x)}{\alpha}| > 1\}|$$

$$= \int_{\{x : |\frac{Tf(x)}{\alpha}| > 1\}} dx$$

$$\leq \int_{\{x : |\frac{Tf(x)}{\alpha}| > 1\}} \left(\frac{|Tf(x)|}{\alpha} \right)^q dx$$

$$\leq \frac{1}{\alpha^q} \int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^q dx$$

$$\leq \frac{\|Tf\|_q^q}{\alpha^q}$$

$$\leq \frac{C^q}{\alpha^q} \|f\|_p^q$$

$$P=q=2 \Rightarrow |\{x : |Tf(x)| > \alpha\}| \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_1$$

$$= \int_{B_j \cap \{y : |f(y)| \leq \frac{\alpha}{2}\}} |f(y)| dy + \int_{B_j \cap \{y : |f(y)| > \frac{\alpha}{2}\}} |f(y)| dy$$

$$B_j \cap \{y : |f(y)| \leq \frac{\alpha}{2}\} \quad B_j \cap \{y : |f(y)| > \frac{\alpha}{2}\}$$

$$\int_{B_j} \frac{\alpha}{2}$$

$$B_j \cap \{y : |f(y)| > \frac{\alpha}{2}\}$$

$$\int_{B_j} \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} |B_j|$$

$$\leq \frac{\alpha}{2} |B_j| + \int_{B_j \cap \{y : |f(y)| > \frac{\alpha}{2}\}} |f(y)| dy$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} |B_j| \leq \int_{B_j \cap \{y : |f(y)| > \frac{\alpha}{2}\}} |f(y)| dy$$

• $|\{x : f^*(x) > \alpha\}| \leq 3^d \sum_{j=1}^n |B_j|$

$$\leq 3^d \cdot \frac{2}{\alpha} \sum_{j=1}^n \int_{B_j \cap \{y : |f(y)| > \frac{\alpha}{2}\}} |f(y)| dy$$

$\stackrel{(1)}{\leq} \frac{2 \cdot 3^d}{\alpha} \int_{\{y : |f(y)| > \frac{\alpha}{2}\}} |f(y)| dy$

$$T_\alpha := \{x : \alpha \leq f^*(x) < 2\alpha\}, E_\alpha := \{x : f^*(x) > \alpha\}$$

$$\|f^*\|_p^p = \int |f^*(y)|^p dy \leq 2^p \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{kp} |\mathcal{T}_{2^k}| \leq 2^p \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{kp} |\mathcal{E}_{2^k}|$$

Per il lemma 4 $|\{x : f^*(x) > 2^k y\}| \leq \frac{1}{2^k} \int_{\mathcal{E}_{2^k}} |f(y)| dy$, dunque

$$\Rightarrow \|f^*\|_p^p \lesssim \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{kp} \int_{\{y : |f(y)| > 2^{k-1} y\}} |f(y)| dy$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{kp} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \mathbf{1}_{\{y : |f(y)| > 2^{k-1} y\}} dy$$

$$\text{carattere geometrico} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(p-1)} \mathbb{1}_{\{y : |f(y)| > 2^{k-1} y\}} dy$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(p-1)} \text{ è } \downarrow \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| |f(y)|^{p-1} dy = \|f\|_p^p$$

controllata dal
termine più grande

Lemma 5 $g \in C_{\text{com}}(\mathbb{R}^d)$, allora $\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \lim_{\substack{|B| \rightarrow 0 \\ B \ni x}} \int_B g(y) dy = g(x)$

dimo $\varepsilon > 0$. $g \in C_{\text{com}}$, in particolare g è continua: $\exists r > 0$ tc $|x-y| < r \Rightarrow |g(x)-g(y)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \frac{1}{|B|} \int_B |g(y) - g(x)| dy < \varepsilon \text{ se diam}(B) < r$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{|B| \rightarrow 0 \\ B \ni x}} \frac{1}{|B|} \int_B |g(y) - g(x)| dy = 0$$

Lemma 6 le funzioni continue a supporto compatto sono dense in L^p , $p < \infty$, ovvero $\forall f \in L^p$
 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists g \in C_{\text{com}} \text{ tc } \|f-g\|_p < \varepsilon$.

TEOREMA (di differentiazione dell'integrale di Lebesgue). $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, allora

$$\lim_{\substack{|B| \rightarrow 0 \\ B \ni x}} \frac{1}{|B|} \int_B f(y) dy = f(x) \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}^d$$

dimo Dimostriamo che $\limsup_{\substack{|B| \rightarrow 0 \\ B \ni x}} \left| \frac{1}{|B|} \int_B f(y) dy - f(x) \right| = 0 \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}^d$

è sufficiente mostrare che $\forall \alpha > 0$ l'insieme $E_\alpha := \{x : \limsup_{\substack{|B| \rightarrow 0 \\ B \ni x}} \left| \frac{1}{|B|} \int_B f(y) dy - f(x) \right| > \alpha\}$

ha misura nulla. Infatti, l'insieme delle x tc $(*)$
non vale è contenuto in $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{1/n} =: C$, dunque se $|E_\alpha| = 0 \forall \alpha$ ottieniamo
 $|C| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |E_{1/n}| = 0$ (subadditività).

Dato $\varepsilon > 0 \quad \exists g \in C_{\text{com}} \text{ tc } \|g-f\|_1 < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{|B|} \int_B f(y) dy - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{|B|} \int_B (f(y) - g(y)) dy + \frac{1}{|B|} \int_B g(y) dy - g(x) + g(x) - f(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - g(y)| dy + \left| \frac{1}{|B|} \int_B g(y) dy - g(x) \right| + |g(x) - f(x)| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \limsup_{\substack{|B| \rightarrow 0 \\ B \ni x}} \left| \frac{1}{|B|} \int_B f(y) dy - f(x) \right| \leq \limsup_{\substack{|B| \rightarrow 0 \\ B \ni x}} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - g(y)| dy + \underbrace{\limsup_{\substack{|B| \rightarrow 0 \\ B \ni x}} \left| \frac{1}{|B|} \int_B g(y) dy - g(x) \right| + |g(x) - f(x)|}_{\stackrel{\circ}{\circ} (\text{Lemma 5})}$$

$$\begin{aligned} &\leq \limsup_{\substack{|B| \rightarrow 0 \\ B \ni x}} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - g(y)| dy + |f(x) - g(x)| \\ &\leq \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - g(y)| dy + |f(x) - g(x)| \\ &\leq (f-g)^*(x) + |f(x) - g(x)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Supponiamo } x \in E_\alpha \Rightarrow \alpha < (f-g)^*(x) + (f(x) - g(x)) \Rightarrow (f-g)^*(x) > \frac{\alpha}{2} \vee |f(x) - g(x)| > \frac{\alpha}{2} \\
 & \Rightarrow E_\alpha \subset \{x : (f-g)^*(x) > \frac{\alpha}{2}\} \cup \{x : |f(x) - g(x)| > \frac{\alpha}{2}\} \\
 & \Rightarrow |E_\alpha| \leq |\{x : (f-g)^*(x) > \frac{\alpha}{2}\}| + |\{x : |f(x) - g(x)| > \frac{\alpha}{2}\}| \\
 & \quad \text{in (Hardy-Littlewood 1)} \\
 & \quad \exists^d \frac{2}{\alpha} \|f-g\|_1 \\
 & \quad \int_{\{x : |f(x) - g(x)| > \frac{\alpha}{2}\}}^n x dx \\
 & \quad \int_{\{x : |f(x) - g(x)| > \frac{\alpha}{2}\}}^n \frac{2}{\alpha} |f(x) - g(x)| dx \\
 & \quad \{x : |f(x) - g(x)| > \frac{\alpha}{2}\} \subseteq \mathbb{R}^d \\
 & \quad \frac{2}{\alpha} \|f-g\|_1
 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{3^d}{\alpha} \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} \right) \|f-g\|_1 \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow |E_\alpha| = 0.$$

corollario $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, allora $\lim_{\substack{B \ni x \\ |B| \rightarrow 0}} \frac{1}{|B|} \int_B f(y) dy = f(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$

dimo $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(0, n)$. $f_n := f \chi_{B(0, n)} \in L^1$, dunque $\exists E_n$ con $|E_n| = 0$ t.c. $x \notin E_n$

$$\text{allora } \lim_{\substack{|B| \rightarrow 0 \\ B \ni x}} \frac{1}{|B|} \int_B f_n(y) dy = f_n(x) \quad (\text{teo. diff. int. Leb.})$$

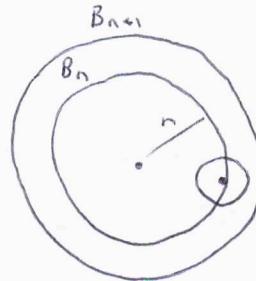
$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow |E| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |E_n| = 0.$$

Per $x \in E^c$, $\exists n$ t.c. $x \in B(0, n)$. Allora

$$\lim_{\substack{B \ni x \\ |B| \rightarrow 0}} \frac{1}{|B|} \int_B f_{n+1}(y) dy = f_{n+1}(x) = f(x)$$

$$\lim_{\substack{B \ni x \\ |B| \rightarrow 0}} \frac{1}{|B|} \int_B f_{n+1}(y) dy = f(x)$$

raggr(B) < $\frac{1}{100}$



def $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$ è PUNTO DI LEBESGUE se valgono (1) $f(x) \in \mathbb{C}$,

$$(2) \lim_{\substack{|B| \rightarrow 0 \\ B \ni x}} \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f(y)| dy = 0$$

prop $f \in L^1_{loc}$, allora q.o. $x \in \mathbb{R}^d$ è punto di lebesgue di f

dimo $\forall \varepsilon \in \mathbb{C}$ $f(x) \in \mathbb{C}$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$, infatti se f non è definita in $E \subset \mathbb{R}^d$, $|E| = 0$,

$$\text{considero } \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Ricordo che \mathbb{C} è separabile, ovvero $\exists \{t_n\} \subset \mathbb{C}$ denso in \mathbb{C}

Considero $x \mapsto |f(x) - z_n| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

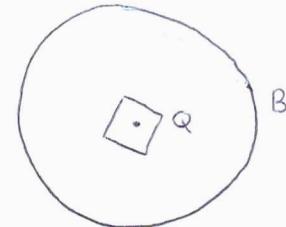
concluro $\exists E \subset \mathbb{R}^d$, $|E| = 0$ t.c. $\forall x \notin E$ $\lim_{\substack{|B| \rightarrow 0 \\ B \ni x}} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - z_n| dy = |f(x) - z_n|$

$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow |E| = 0$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Se } x \in E^c, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists z_n \in E \quad |f(x) - z_n| < \varepsilon \\
 & (\Leftrightarrow x \in E^c) \\
 & \Rightarrow \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f(y)| dy \leq \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - z_n| dy + \frac{1}{|B|} \int_B \underbrace{|f(x) - z_n|}_{< \varepsilon} dy \\
 & \leq \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - z_n| dy + \varepsilon \\
 & \Rightarrow \lim_{\substack{|B| \rightarrow 0 \\ B \ni x}} \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f(y)| dy \leq \lim_{\substack{|B| \rightarrow 0 \\ B \ni x}} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - z_n| dy + \varepsilon \\
 & = |f(x) - z_n| + \varepsilon < 2\varepsilon.
 \end{aligned}$$

prop Sia Q un cubo, x p.t.o di Lebesgue di f , $f \in L^1_{loc}$, allora

$$\lim_{\substack{Q \ni x \\ |Q| \rightarrow 0}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy = f(x)$$



dum Dimostriamo che $\lim_{\substack{Q \ni x \\ |Q| \rightarrow 0}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f(y)| dy = 0$

$x \in Q \subset B$, $|B| < C d(Q)$, infatti se ℓ = lato di Q , allora $\text{reg}(Q) = \ell d \ell$ e ponendo B centrale in x di reggno $10\ell d \ell$, otteniamo $|B| = |B(0,1)| (10\ell d \ell)^d = C_0 \ell^d = C_0 d(Q)$. Allora

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f(y)| dy & \leq \frac{1}{|Q|} \int_B |f(x) - f(y)| dy \\
 & \leq \frac{C_0}{|B|} \int_B |f(x) - f(y)| dy \xrightarrow[\substack{Q \ni x \\ |Q| \rightarrow 0}]{} 0
 \end{aligned}$$

dato che $0 \leq |B| < C d(Q) \xrightarrow[\substack{Q \ni x \\ |Q| \rightarrow 0}]{} 0$ e dunque anche $|B| \rightarrow 0$.

def Date $f, g \in C(\mathbb{R}^d)$ la loro **CONVOLUTORE** è data dall'integrale

$$f * g(x) = \int f(x-y) g(y) dy = \int f(y) g(x-y) dy = g * f(x)$$

pr $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, allora $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$, ovvero $(L^1, *)$ è un'algebra
dum segue dal teorema di Tonelli.

TEOREMA (Tonelli). $h(x,y)$, $x, y \in \mathbb{R}^d$. Supponiamo che $(x,y) \mapsto h(x,y)$ sia misurabile e $h(x,y) \geq 0$, allora $\int_{\mathbb{R}^{2d}} h(x,y) dx \otimes dy = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} h(x,y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} h(x,y) dy \right) dx$

TEOREMA (disegualanza di Young). Siano $f \in L^p$, $g \in L^q$ e $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, allora $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

prop Se $f, g \in C(\mathbb{R}^d)$ e $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$, allora $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

dum $t > 0$, $f_t(x) := f(tx)$, $g_t(x) := g(tx)$

$$\forall t > 0 : \|f_t * g_t\|_r \leq \|f_t\|_p \|g_t\|_q$$

$$\bullet \|f_t\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(tx)|^p dx \right)^{1/p} \stackrel{\substack{x=y/t \\ dx=t^{-d}dy}}{=} t^{-\frac{d}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} = t^{-\frac{d}{p}} \|f\|_p$$

$$\bullet \|g_t\|_q = t^{-\frac{d}{q}} \|g\|_q$$

$$\begin{aligned}
 (f_t * g_t)(x) &= \int f(t(x-y)) g(ty) dy \\
 &\stackrel{t=ty}{=} t^{-d} \int f(tx-t) g(tz) dz \\
 &= t^{-d} (f * g)(tx) \\
 &= t^{-d} (f * g)_t(x)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|f_t * g_t\|_r = t^{-d} \|(f * g)_t\|_r = t^{-d} t^{-\frac{d}{r}} \|f * g\|_r$$

$$\forall t > 0 \quad \|f_t * g_t\|_r \leq \|f_t\|_p \|g_t\|_q$$

$$\forall t > 0 \quad t^{-d-\frac{d}{r}} \|f * g\|_r \leq t^{-\frac{d}{p}} t^{-\frac{d}{q}} \|f\|_p \|g\|_q$$

$$\forall t > 0 \quad t^{d(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r})} \|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

def Una famiglia di funzioni $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ si dice distribuita, se $\int K_\delta(x) dx = 1$ e' una APPROXIMAZIONE DELL'UNITA' se $\exists A > 0$ tc

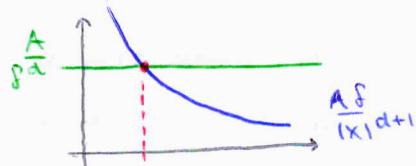
$$(1) |K_\delta(x)| \leq \frac{A}{\delta^d}$$

$$(2) |K_\delta(x)| < \frac{A\delta}{|x|^{d+1}} \text{ se } x \neq 0$$

oss Per definizione K_δ e' integrale per $f > 0$

prop Se $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ e' un'approssimazione dell'unita', allora $\exists c > 0$ tc $\|K_\delta\|_1 \leq c$ $\forall \delta > 0$, ovvero le funzioni K_δ sono uniformemente integrabili.

dum Osserviamo $|K_\delta(x)| \leq \min\left(\frac{A}{\delta^d}, \frac{A\delta}{|x|^{d+1}}\right)$



$$\frac{A}{\delta^d} = \frac{A\delta}{|x|^{d+1}} \Leftrightarrow \delta = |x|$$

$$\|K_\delta\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |K_\delta(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \min\left(\frac{A}{\delta^d}, \frac{A\delta}{|x|^{d+1}}\right) dx$$

$$\leq \int_{|x| \leq \delta} \frac{A}{\delta^d} dx + \int_{|x| > \delta} \frac{A\delta}{|x|^{d+1}} dx$$

$$\frac{A}{\delta^d} |B(0,1)| \delta^d$$

$$\int_{\delta}^{\infty} \int_{S^{d-1}} \frac{A\delta}{r^{d+1}} \cdot r^{d-1} dr d\sigma$$

$$A\delta \int_{\delta}^{\infty} |S^{d-1}| \frac{1}{r^2} dr$$

$$|S^{d-1}| A\delta \cdot \frac{1}{\delta}$$

$$\leq A(|B(0,1)| + |S^{d-1}|) \leq A \quad \forall \delta > 0$$

coarea:

$$= \int_{\delta}^{\infty} \int_{S_r^{d-1}} \frac{A\delta}{r^{d+1}} d\sigma dr$$

$$= \int_{\delta}^{\infty} \frac{A\delta}{r^{d+1}} A(S_r^{d-1}) dr$$

$$= \int_{\delta}^{\infty} \frac{A\delta}{r^{d+1}} r^{d-1} A(S^{d-1}) dr$$

$$= A\delta \int_{\delta}^{\infty} A(S^{d-1}) \frac{1}{r^2} dr$$

dum considero $\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) K_\delta(y) dy - f(x) \right| \stackrel{\int K_\delta = 1}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x)) |K_\delta(y)| dy \right)$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy$$

Dato rso, sia $\bar{\Phi}(r) := \frac{1}{r^d} \int_{|y| < r} |f(x-y) - f(x)| dy$

Lemma (1) $\lim_{r \rightarrow 0} \bar{\Phi}(r) = 0$

(2) $\exists M > 0$ tc $|\bar{\Phi}(r)| < M$ $\forall r > 0$

dum (1) Ricordo che x è p.t.o di Lebesgue di f , dunque

consiglio
del teorema di
differenziazione
dell'integrale
di Lebesgue

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} |f(x-y) - f(x)| dy \\ &= \frac{1}{|B(0,1)|} \cdot \frac{1}{r^d} \int_{|y| < r} |f(x-y) - f(x)| dy = \frac{1}{|B(0,1)|} \bar{\Phi}(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad r \geq 1 \quad |\bar{\Phi}(r)| &\leq \frac{1}{r^d} \int_{|y| < r} |f(x-y)| dy + \frac{1}{r^d} \int_{|y| < r} |f(x)| dy \\ &\leq \frac{1}{r^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| dy + |f(x)| \cdot \frac{1}{r^d} \int_{|y| < r} dy \\ &\leq \frac{1}{r^d} \|f\|_1 + |f(x)| \cdot \frac{1}{r^d} \cdot |B(0,1)| \\ &= \|f\|_1 + |f(x)| |B(0,1)| \end{aligned}$$

0 < r ≤ 1 Dimostra che $\bar{\Phi}(r)$ è continua in $(0,1]$.

Dimostra che $\psi(r) = \int_{|y| < r} |f(x-y) - f(x)| dy$ è continua in $(0,1)$

per $r \in (0,1]$:

$$\begin{aligned} |\psi(s) - \psi(r)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| (\mathbf{1}_{\{|y| < s\}}(y) - \mathbf{1}_{\{|y| < r\}}(y)) dy \right| \\ &\stackrel{\text{per lo stesso } \delta < 2}{\leq} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| |\mathbf{1}_{\{|y| < s\}}(y) - \mathbf{1}_{\{|y| < r\}}(y)| dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| (\mathbf{1}_{\{|y| < s\}}(y) - \mathbf{1}_{\{|y| < r\}}(y)) \underbrace{\mathbf{1}_{\{|y| < 2\}}(y)}_{(*)} dy \\ \text{Ottieno } &|f(x-y) - f(x)| \underbrace{(\mathbf{1}_{\{|y| < s\}}(y) - \mathbf{1}_{\{|y| < r\}}(y))}_{(*)} \underbrace{\mathbf{1}_{\{|y| < 2\}}(y)}_{\mathbb{R}^2} \\ &\leq 2 |f(x-y) - f(x)| \mathbf{1}_{\{|y| < 2\}}(y) \in L^1(dy) \end{aligned}$$

Dunque per il teorema di conv. dominata posso ricombinare
l'integrale e l'integrale ed ottenere

$$\lim_{s \rightarrow r} |\psi(s) - \psi(r)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{s \rightarrow r} (*) dy = 0$$

Ora $\lim_{r \rightarrow 0} \bar{\Phi}(r) = 0$ e $\bar{\Phi}(r)$ è continua per $r \in (0,1]$. Possiamo

estenderla a $\tilde{\Phi}(r) = \begin{cases} \bar{\Phi}(r) & 0 < r \leq 1 \\ 0 & r = 0 \end{cases}$ continua su $[0,1]$

osservazione $\tilde{\Phi}$ è univoca. \Rightarrow unico con il calcolo $r \geq 1$ otengo $\tilde{\Phi}$ è univoca

Riprendo:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| |K_f(y)| dy \leq \underbrace{\int_{|y| \leq \delta} |f(x-y) - f(x)| |K_f(y)| dy}_{\mathcal{T}\delta} + \underbrace{\int_{|y| > \delta} |f(x-y) - f(x)| |K_f(y)| dy}_{(I) \quad (II)}$$

$$(I) = \int_{|y| < \delta} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy$$

$$|K_f(x)| \leq \frac{A}{\delta^d} \Rightarrow \frac{A}{\delta^d} \int_{|y| < \delta} |f(x-y) - f(x)| dy = A \bar{\Phi}(\delta)$$

$$(II) = \int_{|y| > \delta} |f(x-y) - f(x)| |K_f(y)| dy$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k \delta \leq |y| < 2^{k+1} \delta} |f(x-y) - f(y)| |K_f(y)| dy$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k \delta \leq |y| < 2^{k+1} \delta} |f(x-y) - f(y)| \frac{A \delta}{|y|^{d+1}} dy$$

$$\leq A \delta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k \delta)^{d+1}} \int_{2^k \delta \leq |y| < 2^{k+1} \delta} |f(x-y) - f(y)| dy$$

$$\leq A \delta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k \delta)^{d+1}} \int_{|y| < 2^{k+1} \delta} |f(x-y) - f(y)| dy$$

$$= A 2^d \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2^{k+1} \delta} \right)^d \int_{|y| < 2^{k+1} \delta} |f(x-y) - f(y)| dy}_{\bar{\Phi}(2^{k+1} \delta)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{T}\delta \leq 2^d A \left(\bar{\Phi}(\delta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \bar{\Phi}(2^{k+1} \delta) \right)$$

Fatto $\varepsilon > 0$. Sia $N \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$.

$$\mathcal{T}\delta \leq 2^d A \left(\bar{\Phi}(\delta) + \underbrace{\sum_{k=0}^N \bar{\Phi}(2^{k+1} \delta)}_{\sum_{k=0}^{N+1} \bar{\Phi}(2^k \delta)} + \underbrace{\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \bar{\Phi}(2^{k+1} \delta)}_{M \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}} \right)$$

$$\sum_{k=0}^{N+1} \bar{\Phi}(2^k \delta) \quad M \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{M}{2^N} \leq \varepsilon N$$

Da (1) $\exists r_0 > 0$ t.c. se $r < r_0$, allora $\bar{\Phi}(r) < \frac{\varepsilon}{N+1}$. Se $\delta < r_0$, allora

$$\bar{\Phi}(\delta 2^k) < \frac{\varepsilon}{N+1} \quad \forall k=0, \dots, N+1. \text{ Allora}$$

$$\mathcal{T}\delta \leq 2^d A \left(\sum_{k=0}^{N+1} \bar{\Phi}(2^k \delta) + \varepsilon M \right)$$

$$\leq 2^d A \left(\sum_{k=0}^{N+1} \frac{\varepsilon}{N+1} + \varepsilon M \right)$$

$$\leq 2^d A \varepsilon (N+1).$$

def $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la **TRASFORMATA DI FOURIER** di f è definita per $\xi \in \mathbb{R}^d$ con

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

con $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_d \xi_d$

oss $|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx = \|f\|_1 \Rightarrow \|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

lemma (Riemann-Lebesgue). $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, allora \hat{f} è una funzione continua di ξ e $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

dum • (continuità). Fatto $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ e considero $\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \hat{f}(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$

Dall'operazione sopra $|f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi}| \leq |f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^d)$, dunque per il teorema di convergenza dominata possiamo scambiare limite ed integrale ottenendo

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi_0} dx = \hat{f}(\xi_0).$$

• ($\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$). Data $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, definisco $\tau_y f(x) = f(x-y)$, $y \in \mathbb{R}^d$.

$$\text{Ottengo } \|\tau_y f\|_p = \|\hat{f}\|_p$$

lemma $y \in \mathbb{R}^d$, $\lim_{y \rightarrow 0} \|\hat{f} - \tau_y \hat{f}\|_p = 0 \quad \forall 1 \leq p < \infty, f \in L^p(\mathbb{R}^d)$

dum se $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$, allora φ è uniformemente continua, dunque $\forall \varepsilon > 0 \exists r_0 \text{ tc } |x-z| < r_0 \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(z)| < \varepsilon$

$$\text{Dunque } \|\tau_y \varphi - \varphi\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x-y) - \varphi(x)|^p dx$$

$$\begin{aligned} K &= \bigcup_{|y| < 1} \text{supp } \tau_y \varphi = \int_K \underbrace{|\varphi(x-y) - \varphi(x)|^p}_{\wedge} dx \\ &\quad \& |y| < r_0 \\ &\leq \varepsilon^p |K|. \end{aligned}$$

Fatto $\delta > 0$. $\exists \varphi \in C_c(\mathbb{R})$ con $\|\hat{f} - \varphi\|_p < \delta$

$$\|\hat{f} - \tau_y \hat{f}\|_1 \leq \|\tau_y \hat{f} - \tau_y \varphi\|_1 + \|\tau_y \varphi - \varphi\|_1 + \|\varphi - \hat{f}\|_1$$

$$= 2\|\hat{f} - \varphi\|_1 + \|\tau_y \varphi - \varphi\|_1$$

$$\leq 2\delta + \|\tau_y \varphi - \varphi\|_1 \leq 3\delta$$

$$\Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} \|\hat{f} - \tau_y \hat{f}\|_1 = 0.$$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx + \frac{1}{2} (-e^{i\pi}) \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx - \frac{1}{2} e^{2i\pi \xi \cdot (\frac{\xi}{2|\xi|^2})} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

$$\underset{x - \frac{\xi}{2|\xi|^2} = y}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \xi (x - \frac{\xi}{2|\xi|^2})} dx$$

$$\downarrow = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} f(y + \frac{\xi}{2|\xi|^2}) e^{-2\pi i \xi \cdot y} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (f(y) - f(y + \frac{\xi}{2|\xi|^2})) e^{-2\pi i \xi \cdot y} dy$$

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi)| &= \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (f(y) - f(y + \frac{\xi}{2|\xi|^2})) e^{-2\pi i \xi \cdot y} dy \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y) - f(y + \frac{\xi}{2|\xi|^2})| dy \\
&= \frac{1}{2} \|f - T_{-\frac{\xi}{2|\xi|^2}} f\|_1 \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

prop Se $p \in [1, \infty]$. Si vale la disegualanza $\|\hat{f}\|_p \leq \|f\|_1$ V $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, altrimenti $p = \infty$

dum Se $\delta \neq 0$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f_\delta(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(\delta x)$,

$$\|\hat{f}_\delta\|_p \leq \|f\|_1 \Rightarrow \forall \delta > 0 \quad \|\hat{f}_\delta\|_p \leq \|f\|_1$$

$$\bullet \quad \|f_\delta\|_1 = \int |\delta^d f(\delta x)| dx = \delta^d \int |f(\delta x)| dx \stackrel{\substack{f(x)=y \\ x=y/\delta \\ dx=\delta^{-d} dy}}{=} \int |f(y)| dy = \|f\|_1$$

$$\bullet \quad \hat{f}_\delta(\xi) = \int \delta^d f(\delta x) e^{-2\pi i x \cdot \frac{\xi}{\delta}} dx \stackrel{\substack{f(x)=y \\ x=y/\delta \\ dx=\delta^{-d} dy}}{=} \int f(y) e^{-2\pi i y \cdot \frac{\xi}{\delta}} dy = \int f(y) e^{-2\pi i y \cdot \frac{\xi}{\delta}} dy$$

$$= \hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right)$$

$$\|\hat{f}_\delta(\xi)\|_p = \|\hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right)\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right)|^p d\xi \right)^{1/p} \stackrel{\substack{\xi/f = m \\ \xi = fm \\ d\xi = f^d dm}}{=} \left(\delta^d \int |\hat{f}(m)|^p dm \right)^{1/p} = \delta^{\frac{d}{p}} \|\hat{f}\|_p$$

$$\Rightarrow \delta^{\frac{d}{p}} \|\hat{f}\|_p \leq \|f\|_1 \quad \forall \delta > 0$$

$$\Rightarrow p = \infty, \text{ infatti se forse } p < \infty, \lim_{\delta \rightarrow \infty} \delta^{\frac{d}{p}} = +\infty \notin$$

oss $T \in GL(\mathbb{R}^d)$, $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}
\widehat{(f \circ T)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(Tx) e^{-2\pi i x \cdot \frac{\xi}{\delta}} dx \\
&\stackrel{\substack{Tx=y \\ x=T^{-1}y \\ dx=|\det T|^{-1} dy}}{=} \frac{1}{|\det T|} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i T^{-1}y \cdot \frac{\xi}{\delta}} dy \\
&= \frac{1}{|\det T|} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i y \cdot (T^{-1})^\epsilon \frac{\xi}{\delta}} dy = \frac{1}{|\det T|} \widehat{f}((T^{-1})^\epsilon \frac{\xi}{\delta})
\end{aligned}$$

Dato $\delta > 0$, se $T_\delta x = \delta x$ allora avremo

$$\widehat{f \circ T_\delta}(\xi) = \frac{1}{\delta^d} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right)$$

In particolare, se definiamo $f_\delta(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(\delta x)$ otteremo

$$\widehat{f_\delta}(\xi) = \delta^d \widehat{f \circ T_\delta}(\xi) = \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right)$$

OSS $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\tau_h f(x) = f(x-h)$. Allora

$$\widehat{\tau_h f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-h) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i (y+h) \cdot \xi} dy \\ &= e^{-2\pi i h \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy = e^{-2\pi i h \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

Sia $e_h(\xi) = e^{-2\pi i h \cdot \xi}$. Allora

prodotto
puntuale

$$\begin{aligned} \widehat{e_h f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i h \cdot x} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot (h+\xi)} dx = \widehat{f}(h+\xi) \end{aligned}$$

def $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ è di tipo **TENSORIALE** se $\exists f_1, \dots, f_d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ t.c. $f(x) = f_1(x_1) \cdots f_d(x_d)$

lemme se $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ è una funzione tensoriale $f(x) = f_1(x_1) \cdots f_d(x_d)$, allora anche \widehat{f} lo è e vale $\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}_1(\xi_1) \cdots \widehat{f}_d(\xi_d)$

dum $e^{-2\pi i x \cdot \xi} = e^{-2\pi i x_1 \xi_1} \cdots e^{-2\pi i x_d \xi_d}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d f_j(x_j) e^{-2\pi i x_j \xi_j} dx \\ &= \prod_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}} f_j(x_j) e^{-2\pi i x_j \xi_j} dx; = \prod_{j=1}^d \widehat{f}_j(\xi_j) \end{aligned}$$

prop Data $G(x) = e^{-\pi|x|^2}$ si ha $\widehat{G}(\xi) = G(\xi)$

dum • $G(x) = e^{-\pi|x|^2} = e^{-\pi x_1^2} e^{-\pi x_2^2} \cdots e^{-\pi x_d^2}$ è di tipo tensoriale, dunque è sufficiente calcolare la trasformata di $g(r) = e^{-\pi r^2}$, $r \in \mathbb{R}$

• $\varphi(t) := \widehat{g}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi s^2} e^{-2\pi i st} ds$

• Osservo che $|\partial_t (e^{-\pi s^2} e^{-2\pi i st})| = |-2\pi i s e^{-\pi s^2} e^{-2\pi i st}| = 2\pi |s| e^{-\pi s^2} \in L^1(ds)$

dunque dalla proposizione sulla derivazione fatto a tempo di integrale abbiamo

$$\varphi'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t (e^{-\pi s^2} e^{-2\pi i st}) ds = i \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi i s) e^{-\pi s^2} e^{-2\pi i st} ds$$

• Osservo $\varphi'(t) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_s (e^{-\pi s^2}) e^{-2\pi i st} ds$

Integro
per parti

$$\begin{aligned} &= i \lim_{R \rightarrow +\infty} \underbrace{[e^{-\pi s^2} e^{-2\pi i st}]_{-R}^R}_{=0} - i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi s^2} \partial_s (e^{-2\pi i st}) ds \end{aligned}$$

$$= -i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi s^2} (-2\pi i t) e^{-2\pi i st} ds$$

$$= -2\pi t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi s^2} e^{-2\pi i st} ds = -2\pi t \varphi(t)$$

$$\Rightarrow \varphi'(t) + 2\pi t \varphi(t) = 0 \quad \text{eq. diff. del primo ordine con soluzione } \varphi(t) = A e^{-\pi t^2}$$

$$\Rightarrow \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi s^2} ds = 1 \quad \Rightarrow \widehat{g}(t) = \varphi(t) = e^{-\pi t^2}$$

Dunque le Gaußiane sono punti fermi della trasformata di Fourier:

$$\hat{G}(\xi) = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right) = \frac{1}{\pi} e^{-\pi |\xi|^2} = e^{-\pi |\xi|^2} = G(\xi)$$

OSS Se s>0. L'approx dell'area sotto curva alla Gaußiana è

$$G_s(x) := \frac{1}{s^d} G\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{s^d} e^{-\pi \frac{|x|^2}{s^2}}$$

$$\begin{aligned} \hat{G}_s(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{s^d} e^{-\pi \frac{|x|^2}{s^2}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &\stackrel{x/s=y}{=} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi |y|^2} e^{-2\pi i s y \cdot \xi} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi |y|^2} e^{-2\pi i s y \cdot \xi} dy = \hat{G}(s\xi) = G(s\xi) = e^{-\pi s^2 |\xi|^2} \end{aligned}$$

(Lo si può ottenere anche estendendo una delle oss. precedenti, infatti se $f(\xi) = G(\xi)$, allora $G_s(x) = f_{s^{-1}}(x)$, da cui

$$\hat{G}_s(\xi) = \hat{f}_{s^{-1}}(\xi) = \hat{f}\left(\frac{\xi}{s}\right) = \hat{f}(s\xi) = \hat{G}(s\xi) = G(s\xi) = e^{-\pi s^2 |\xi|^2}$$

TEOREMA (Fubini). Se $f \in L^1(\mathbb{R}^{2d}, dx \otimes dy)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^{2d}$, $x,y \in \mathbb{R}^d$, allora

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x,y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y) dy \right) dx$$

TEOREMA (formula di inversione). Se $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e supponiamo che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, allora

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

dimo • Vogliamo mostrare che $f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x \cdot \xi} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy \right) d\xi$

• Se s>0. $I_s(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i (x-y) \cdot \xi} f(y) e^{-\pi s^2 |\xi|^2} dy \right) d\xi$

Ottengo che $|e^{2\pi i (x-y) \cdot \xi} f(y) e^{-\pi s^2 |\xi|^2}| = |f(y)| e^{-\pi s^2 |\xi|^2} \in L^1(dy \otimes d\xi)$

Per il teorema di Fubini troviamo

$$\begin{aligned} I_s(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi s^2 |\xi|^2} e^{-2\pi i (y-x) \cdot \xi} d\xi \right) dy \\ &= \hat{G}(s\xi) = \hat{G}_s(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \underbrace{\hat{G}_s(y-x)}_{= G_s(y-x)} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{infatti } \hat{G}_s(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{G}(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{G}(sx) e^{-2\pi i sx \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi s^2 |x|^2} e^{-2\pi i sx \cdot \xi} dx \stackrel{jx=y}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{s^d} e^{-\pi |y|^2} e^{-2\pi i sy \cdot \xi} dy \\ &= \frac{1}{s^d} \hat{G}\left(\frac{\xi}{s}\right) = \frac{1}{s^d} e^{-\pi \frac{|\xi|^2}{s^2}} = G_s(\xi) \end{aligned}$$

ma allora

$$I_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) G_\delta(y-x) dy$$

Gaussian
è simmetrica $\rightarrow = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) G_\delta(x-y) dy$
 $= f * G_\delta(x)$

G_δ è un'approssimazione dell'unità e ricorre $f \in L^1$, se x è p.t.o. di Leb. dif. allora

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} I_\delta(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} f * G_\delta(x) = f(x)$$

• Considero nuovamente

$$\begin{aligned} I_\delta(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} f(y) e^{-\pi \delta^2 |\xi|^2} dy \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi \delta^2 |\xi|^2} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy \right)}_{= \hat{f}(\xi)} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi \delta^2 |\xi|^2} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \end{aligned}$$

Adepro considero

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} I_\delta(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi \delta^2 |\xi|^2} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

Ottengo $|e^{-\pi \delta^2 |\xi|^2} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi}| = e^{-\pi \delta^2 |\xi|^2} |\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi)| \in L^1(\mathbb{R}^d)$

dunque per il teorema del conv. dominante posso scambiare derivata ed integrale

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} I_\delta(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} (e^{-\pi \delta^2 |\xi|^2} \hat{f}(\xi)) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \quad \text{per } x \text{ p.t.o. di Lebesgue di } f$$

oss1 se $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R}^d)$ la dimostrazione ci fornisce comunque un metodo per calcolare $f(x)$

oss2 $f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{-2\pi i(-x) \cdot \xi} d\xi = \widehat{\hat{f}}(-x)$

dunque se f e \hat{f} sono integrabili, allora per il lemma di Riemann-Lebegue f è continua e ha limite nullo all'infinito.

oss3 La trasformata di Fourier è iniettiva su L^1 : se $f \in L^1$ e $\hat{f} = 0$ q.o. $\Rightarrow f = 0$ q.o.

prop1 $f, g \in L^1$, allora $\widehat{f+g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \widehat{g}(\xi)$

$$\begin{aligned} \text{dim} \quad \widehat{f+g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f+g)(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) e^{-2\pi i(x-y) \cdot \xi} e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy \right) dx \end{aligned}$$

$$\text{Fubini} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) e^{-2\pi i \xi \cdot (x-y)} dx \right) e^{-2\pi i \xi \cdot y} dy$$

ponendo $z = x-y$ vedo che
 $e^z = \hat{f}(\xi)$

$$= \hat{f}(\xi) \int_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{-2\pi i \xi \cdot y} dy = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$$

prop 2 $f, g \in L^1$, $\hat{g} \in L^1$, allora $\widehat{f \cdot g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx = (\hat{f} * \hat{g})(\xi)$

prodotto
puntuale

dimo $\int f(x) g(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(m) e^{2\pi i m \cdot x} dm \right) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx$ formula di inversione

(*)

Fubini $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(m) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{2\pi i x \cdot (m-\xi)} dx \right) dm$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(m) \hat{f}(\xi - m) dm = \hat{g} * \hat{f}(\xi)$$

OSS 4 L'algebra $(L^1, *)$ non ha l'identità.

Assumo per dimostrarlo che $\exists e \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tc $f * e = f \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\Rightarrow \widehat{f * e} = \widehat{f} \widehat{e} = \widehat{f} \Rightarrow \widehat{e} = 1 \text{ q.o. } \{$$

perciò il lemma di Riemann-Lebesgue dice che la trasformata di Fourier di una funzione integrabile si annulla all'infinito.

(*) Manca di dimostrare $f \cdot g \in L^1$: $g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi$

$$\Rightarrow |g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{g}(\xi)| = \|\hat{g}\|_1 < \infty$$

$$\Rightarrow |f(x) g(x)| \leq |f(x)| \|\hat{g}\|_1 \in L^1$$

Esempio (Annulus di Poisson)

- Sia $K_f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{f}{x^2 + f^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $f > 0$. È un'approssimazione dell'identità

$$\int_{\mathbb{R}} K_f(x) dx = \frac{y=x/f}{dx=f dy} \frac{1}{\pi} \int \frac{dy}{1+y^2} = 1$$

$$|K_f(x)| \leq \frac{1}{\pi} \frac{f}{f^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{f}$$

$$|K_f(x)| \leq \frac{1}{\pi} \frac{f}{x^2} = \frac{f}{x^2 \pi}, \quad x \neq 0$$

- La funzione $P_y(x) = p(x, y) = K_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ è armonica nel semipiano superiore $H_+ = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in (0, +\infty)\}$.

Supponiamo che se $f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ è olomorfa in un aperto connesso, allora $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono armoniche. Ricordiamo che $f(z) = \frac{1}{z}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e in particolare $\ln H_+ = \{z : \operatorname{Im}(z) > 0\} \ni z = (x+iy : y > 0)$

Osserviamo che $f(z) = f(x+iy) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \left(-\frac{y}{x^2+y^2} \right)$

$\stackrel{\text{"}}{u(x,y)}$ $\stackrel{\text{"}}{v(x,y)}$

$\Rightarrow -\pi P(x, y) = v(x, y)$ è armonica in $H_+ = \{(x, y) : y > 0\}$

$\Rightarrow p(x, y)$ è armonica in H_+

- Vale $\Delta(f * P) = f * \Delta P \quad \forall y > 0$ e dunque $u(x, y) := f * P_y(x)$ è armonica in H_+ (con $f \in L^1(\mathbb{R})$).

Osserviamo che $|\partial_x P(x, y)|, |\partial_{x^2} P(x, y)|$ sono limitate $\forall x \in \mathbb{R}$, infatti:

$$|\partial_x P(x, y)| = \left| -\frac{y}{\pi} \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \right| = \frac{1}{\pi} \left| \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right| \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} \frac{1}{\pi} \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{y^2}$$

$$|\partial_{x^2} P(x, y)| = \left| -\frac{2}{\pi} \frac{y^3 - 3x^2y}{(x^2+y^2)^3} \right| \leq \frac{2}{\pi} \frac{y(y^2 + 3x^2)}{(x^2+y^2)^3} \leq \frac{6}{\pi} \frac{y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{6}{\pi} \frac{y}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{6}{\pi} \cdot \frac{1}{y^2}$$

Dunque dalla proposizione vista in classe abbiamo

$$\partial_{x^2} (f * P) = f * \partial_{x^2} P$$

Osserviamo inoltre che, fissato $y_0 > 0$, $|\partial_y P(x, y)|, |\partial_{y^2} P(x, y)| \leq C_y$ $\forall y \geq y_0 > 0$ infatti:

$$|\partial_y P(x, y)| = \left| \frac{1}{\pi} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right| \leq \frac{1}{\pi} \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{y^2} \leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{y_0^2}$$

$$|\partial_{y^2} P(x, y)| = |\partial_{x^2} P(x, y)| \leq \frac{6}{\pi} \cdot \frac{1}{y_0^3} \leq \frac{6}{\pi} \cdot \frac{1}{y_0^3}$$

Dunque dal teorema per la derivazione netta si trova che integrando segue

$$\partial_{y^2} (f * P) = f * \partial_{y^2} P$$

$$\Rightarrow \Delta(f * P) = f * \Delta P$$

Dal questo segue banalmente che $\Delta u(x, y) = \Delta(f * P)(x) = f * \Delta P(x, y) = 0 * f = 0$, ovvero u è armonica sul semipiano H_+ .

- Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ si dimostra che u soddisfa il problema di Dirichlet $\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & y > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & y = 0 \end{cases}$
Dal teorema delle approssimazioni dell'identità segue che se $x \in \mathbb{R}$ è p.t.o. di Lebesgue allora $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = f(x)$. Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, allora $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = f(x)$ e $u(x, y) = f * P_y(x)$ si estende ad una funzione continua sul semipiano \bar{H}_+ chiuso con $u(x, 0) = f(x)$. Dunque si può risolvere il problema classico.

NB 1 In generale non è vero che se $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$

Ad esempio, la successione di funzioni $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definite come $f_1 = \mathbf{1}_{[0,1/2]}$, $f_2 = \mathbf{1}_{[1/2,1]}$,
 $f_3 = \mathbf{1}_{[0,1/4]}$, $f_4 = \mathbf{1}_{[1/4,1/2]}$, $f_5 = \mathbf{1}_{[1/2,3/4]}$, $f_6 = \mathbf{1}_{[3/4,1]}$, $f_7 = \mathbf{1}_{[0,1/8]}$, ...
è tale che $\|f_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, ma non c'è convergenza puntuale a $f(x) = 0$.

NB 2 In generale non è vero che $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ammette limite all'infinito

Ad esempio, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{1}_{(n,n+1)}(x) \in L^1(\mathbb{R})$, ma $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \not\exists$

NB 3 In generale non è vero che $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ implica che f è continua per qualsiasi $x \in \mathbb{R}^d$

Ad esempio, data $\{(r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ un'enumerazione dei razionali in $(0,1)$,

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{|x-r_n|}} \mathbf{1}_{\{y : |y-r_n| \leq 1\}}(x) \in L^1(0,1)$, ma non è continua in nessun punto di $[0,1]$.

NB 4 Una funzione integrabile e uniformemente continua ha limite nullo all'infinito.

Mentre se è solo integrabile e continua non ha limite nullo all'infinito in generale.