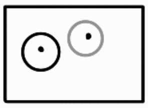
# SEPARAZIONE

**def** $(X,\tau)$ è detto $T_1$ o SEPARATO se i punti sono chiusi.

**prop** $(X,\tau_X)$ è $T_1$ se e solo se $\forall x\in X$ $\forall y\in Y$, $x\neq y$, esiste un aperto $U$ di $X$ con $x\in U$ e $y\notin U$ (ed un aperto $V$ di $X$ con $y\in V$, $x\notin U$)

↳ forse inutile per simmetria



**dim** Se $X$ è $T_1$, allora $U=X\setminus\{y\}$ e $V=X\setminus\{x\}$ soddisfano le condizioni richieste.

Mostro ora che i punti sono chiusi. Fisso $x\in X$ e mostro che $X\setminus\{x\}$ è aperto. Se $y\in X\setminus\{x\}$ $(y\neq x)$ allora $\exists$ $V$ con $V$ aperto, $V$ contiene $y$ e $x\notin V$. Ma allora $V\subseteq X\setminus\{x\}$, $y\in V$ e $V$ aperto. Dunque $X\setminus\{x\}$ è intorno di ogni suo punto e quindi è aperto □

**def** $(X,\tau)$ è detto $T_2$ o HAUSDORFF se $\forall x,y\in X$, $\exists$ $U$ e $V$ aperti di $X$ con $x\in U$, $y\in V$ e $U\cap V=\emptyset$.

**oss** (1) $T_2\Rightarrow T_1$. Chiaro perché in particolare se $U$ e $V$ sono come nella def di $T_2$ si ha che $y\in V$, $y\notin U$ e $x\in U$, $x\notin V$

Grazie alla prop precedente, in tutti gli spazi di Hausdorff i p.ti sono chiusi

(2) Se doto $\mathbb{R}$ della top. di Zariski, o cofinita, allora ottengo uno spazio $T_1$ che non è $T_2$

$T_1$: $\{x\}$ è un insieme finito quindi chiuso

$T_2$: $U\cap V\neq\emptyset$ $\forall$ $U,V$ aperti diversi da $\emptyset$

(3) I sottospazi di $T_2$ sono $T_2$.

Infatti, se $Y\subseteq X$, gli aperti di $Y$ sono del tipo $U\cap Y$ con $U\subseteq X$ aperto, scelgo quindi $x,y\in Y$, $x\neq y$, e due aperti di $X$; $U_1$ e $U_2$ con $U_1\cap U_2=\emptyset$, $x\in U_1$, $y\in U_2$. Ma allora $(U_1\cap Y)\cap(U_2\cap Y)=\emptyset\Rightarrow Y$ è $T_2$.

(4) $\prod_{s\in S}X_s$ è $T_2$ se ciascun $X_s$ è $T_2$.

Infatti, se $f,g\in\prod_{s\in S}X_s$, $f\neq g$, allora $\exists$ $s\in S$ tc $f(s)\neq g(s)$

$\Rightarrow \exists\ U, V$ aperti di $X_s$ tc $f(s) \in U$, $g(s) \in V$, $U \cap V = \emptyset$

Allora $p_s^{-1}(U)$ e $p_s^{-1}(V)$ sono due aperti di

$\prod_{s \in S} X_s$ e $p_s^{-1}(U) \cap p_s^{-1}(V) = \emptyset$.

<u>def</u> Una SUCCESSIONE è una funzione $\mathbb{N} \longrightarrow X$, $X$ ST, che indichiamo generalmente $n \longmapsto x_n$. Dico che $n \longmapsto x_n$ CONVERGE a $x \in X$ se $\forall\ N \in \mathcal{N}_X(x)$ $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tc $x_n \in N$ $\forall\ n \geq n_0$. Scrivo in questo caso $\lim_n x_n = x$

<u>prop</u> Se una successione $n \longmapsto x_n$ converge in uno spazio $T_2$, il suo limite è unico

<u>dim</u> Se $\lim_n x_n = x$, $\lim_n x_n = y$, con $x \neq y$, scelgo due aperti $U$ e $V$ con $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. So che esistono $n_1, n_2$ tc $x_n \in U$ $\forall n \geq n_1$ e $x_m \in V$ $\forall m \geq n_2$.

Se $n \geq \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow x_n \in U \cap V = \emptyset$ $\lightning$

<u>oss</u> (1) Gli spazi metrici sono $T_2$.

Se $x \neq y$, $d = dist(x, y)$ allora $d > 0$ perciò

$$B(x, d/2) \cap B(y, d/2) = \emptyset$$

(2) $\mathbb{R}$ con la topologia di Zariski non è metrizzabile

Se lo fosse, sarebbe $T_2$, ma non lo è.

(3) $X$ è $T_2$ se e solo se l'intersezione di tutti gli intorni chiusi di $x$ è $\{x\}$.

<u>dim</u> Suppongo che $X$ sia $T_2$. Basta mostrare che $\forall\ y \neq x$ esiste un intorno chiuso che contiene $x$ ma non $y$ (infatti se questo è vero, $\cap$ intorni chiusi che contengono $x$ non può contenere nessun $y \neq x$).

Scelgo due aperti $U$ e $V$ con $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$, $y \in V$. Allora $C = X \setminus V$ è un chiuso che contiene un aperto $U \ni x$, dunque $C$ è un intorno chiuso di $x$ e $y \notin C$.

Viceversa, suppongo che $\cap$ intorni chiusi sia $\{x\}$. Mostro che $X$ è $T_2$.

Fisso $x, y \in X$, $x \neq y$. Scelgo $N$ intorno chiuso di $x$ con $y \notin N$. Sia $V = X \setminus N$ allora $V$ è aperto e $y \in N$. Sia poi $U \subseteq N$, $U$ aperto con $x \in U$.

Allora $U \cap V = \emptyset$.

**prop** $X$ è $T_2$ se e solo se $\Delta = \{(x,x) \in X \times X\}$ è chiusa

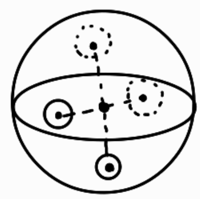
**dim** Suppongo che $X$ sia $T_2$ e mostro che $\Delta \subseteq X \times X$ è chiusa. Equivalentemente, mostro che $X \times X \setminus \Delta$ è aperto. Sia $(x,y) \in X \times X \setminus \Delta$, allora $x \neq y$; scelgo $U$ e $V$ aperti di $X$ con $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$, $y \in V$. Allora $U \times V$ è un aperto di $X \times X$, $(x,y) \in U \times V$ e $U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta$ perché $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$ (infatti se $(x_1,x_2) \in (U \times V) \cap \Delta$, allora $x_1 = x_2 \in U \cap V = \emptyset$).
Viceversa, fisso $x, y \in X$, $x \neq y$. Poiché $\Delta$ è chiuso, $X \times X \setminus \Delta$ è aperto, ma $(x,y) \in X \times X \setminus \Delta$, perciò $\exists\, W$ intorno di $(x,y)$ in $X \times X \setminus \Delta$. Scelgo un intorno di base $A \times B \subseteq W$ con $x \in A$, $y \in B$. Poiché $W \cap \Delta = \emptyset$, allora $A \cap B = \emptyset$. □

**esercizio** $f: X \longrightarrow Y$ continua, $Y$ sia $T_2$. Allora $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$ è chiuso

**prop** $f, g: X \longrightarrow Y$ continue, $Y$ sia $T_2$. Se $\exists\, D \subseteq X$ denso tale che $f(x) = g(x)$ $\forall\, x \in D$, allora $f = g$.

**dim** Se $f \neq g$, esiste $x \in X$ tc $f(x) \neq g(x)$. Poiché $Y$ è $T_2$, scelgo $U$ e $V$ aperti di $Y$ con $f(x) \in U$ e $g(x) \in V$, $U \cap V = \emptyset$.
Allora $f^{-1}(U)$ e $g^{-1}(V)$ sono due aperti di $X$ ($f$ e $g$ sono continue) non vuoti perché $x \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$. Poiché quest'ultimo è aperto, per densità $\exists\, d \in D$ tc $d \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ da cui segue che $f(d) = g(d) \in U \cap V$ $\lightning$ □

**oss** $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è $T_2$.
Infatti $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è omeomorfo a $S^n/\sim$, $\sim$ = antipodismo e $S^n/\sim$ è $T_2$.
I suoi punti sono coppie identificate tramite l'antipodismo e ciascuna coppia può essere separata da due intorni disgiunti.



# COMPATTEZZA

**def** Un RICOPRIMENTO di un sottoinsieme $S$ di un insieme $X$ è una famiglia di sottoinsiemi $F_i \subseteq X$, $i \in I$, t.c. $\bigcup_{i \in I} F_i \supseteq S$. Se $X$ è ST dico che un ricoprimento è APERTO se gli $F_i$ sono aperti.

**def** $(X, \tau)$ è COMPATTO se da ogni ricoprimento aperto di $X$ posso estrarre un sottoricoprimento finito.

**def** Un sottoinsieme $K \subseteq X$ è COMPATTO se $K$ compatto nella top indotta su $K$ da $X$.

**oss** (1) I compatti di $\mathbb{R}^n$ sono i chiusi e limitati. (Heine - Borel)

(2) In uno spazio metrico la compattezza è equivalente alla nozione di compattezza sequenziale: ogni successione ammette sottosuccessione convergente. Da questo le successioni limitate di $\mathbb{R}^n$ ammettono sottosuccessioni convergenti (Bolzano - Weierstrass).

**prop** Ogni chiuso in un compatto è compatto.

**dim** Fisso $K \subseteq X$ chiuso, sia $\mathcal{F} = \{U_i \mid i \in I\}$ un ricoprimento aperto di $K$ (quindi, $U_i \subseteq X$ aperti e $\bigcup_{i \in I} U_i \supseteq K$). Poiché $K$ è chiuso, $V = X \setminus K$ è aperto. Ma allora $\{U_i \mid i \in I\} \cup \{V\}$ è un ricoprimento aperto di $X$ e poiché $X$ è compatto, ne estraggo un sottoricoprimento finito $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}, V$. Ma allora

$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \implies K$ compatto $\square$

chiede sempre qualcosa di simile

**prop** Ogni sottoinsieme compatto di uno spazio $T_2$ è chiuso.

**dim** Sia $K \subseteq X$ compatto. Mostro che $X \setminus K$ è aperto. Mostro che $X \setminus K$ è intorno di ogni suo punto. Fisso $x \in X \setminus K$. Mostro che $\exists$ un aperto $V \subseteq X$ con $x \in V$ e $V \cap K = \emptyset$. Per ogni $y \in K$ scelgo due aperti $U_y$ e $V_y$ con $y \in U_y$, $x \in V_y$ e $U_y \cap V_y = \emptyset$

Ora $K \subseteq \bigcup_{y \in K} U_y$. Ma $K$ è compatto, dunque esistono $y_1, \dots, y_n \in K$ tc $K \subseteq U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$. Considero $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$ : sono tutti aperti, dunque $V = V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_n}$ è aperto. Poi è chiaro che $V_{y_i} \cap U_{y_i} = \emptyset$ $\forall i$ implica che $V \cap (\bigcup_i U_{y_i}) = \emptyset$.

Ma $K \subseteq \bigcup_i U_{y_i} \Rightarrow V \cap K = \emptyset$ □

<u>prop</u> Ogni sottoinsieme infinito $Z$ di uno ST $X$ compatto contiene un p.to di accumul.

<u>dim</u> PA: suppongo che $Z$ non abbia punti di accumulazione. Poiché $\overline{Z} = Z \cup D(Z)$, segue dunque che $Z = \overline{Z}$, cioè $Z$ chiuso. Ma $X$ è compatto $\Rightarrow$ $Z$ è compatto.

Mostro ora che se $Z$ è infinito e $D(Z) = \emptyset$, allora $Z$ ha la top. discreta, cioè che $\forall z \in Z$ $\{z\}$ è aperto. Fisso dunque $z \in Z$. Poiché $D(Z) = \emptyset$, $\exists N \in \mathcal{N}_X(z)$ tc $N \cap Z = \{z\}$; dunque $\exists A \subseteq N$, aperto, $z \in A$ tc $A \cap Z = \{z\}$, dunque $\{z\} \subseteq Z$ è aperto.

Consideriamo questo fatto e combiniamolo con il fatto che $Z$ è infinito per dedurre una contraddizione. Infatti so che: (1) $Z$ è compatto, (2) $Z$ ha top. discreta, (3) $Z$ infinito. (2) e (3) contraddicono (1), visto che $\{z\}_{z \in Z}$ è ricoprimento aperto di $Z$, da cui non posso estrarre alcun ricoprimento finito. □

<u>prop</u> $f: X \to Y$ continua, $X$ è compatto. Allora $f(X)$ è compatto.

<u>dim</u> Sia $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$. Allora $\{f^{-1}(U_i) \mid i \in I\}$ è un ricoprimento aperto di $X$, che è compatto, dunque $\exists i_1, \dots, i_n$ tali che $X = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(U_{i_k})$. Ma allora $f(X) = \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$. $\{U_{i_k} \mid k = 1, \dots, n\}$ è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$. Dunque $f(X)$ è compatto. □

<u>corollario</u> Se $f: X \to \mathbb{R}$ continua e $X$ è cpt, allora $f$ assume valori massimo e minimo

<u>dim</u> $f(X)$ è chiuso e limitato, perché cpt di $\mathbb{R}$

**corollario** Quozienti di cpt sono cpt.

**dim** $X \longrightarrow X/_\sim$ continua e suriettiva

**esempio** $S^n/_\sim \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è compatto poiché $S^n$ è compatto in $\mathbb{R}^{n+1}$, perché chiuso e limitato.

**def** $\mathcal{F}$ famiglia di sottoinsiemi di uno ST $X$ ha la **PROPRIETÀ DELL'INTERSEZIONE FINITA** se ogni sua sottofamiglia finita ha intersezione non vuota

**prop** $X$ cpt $\iff$ ogni famiglia $\mathcal{F}$ di chiusi di $X$ con la proprietà dell'$\cap$ finita ha intersezione non vuota (i.e. $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$)

**dim** ($\Rightarrow$) Suppongo $X$ cpt e fisso $\mathcal{F}$ famiglia di chiusi di $X$. Mostro equivalentemente che se $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$, allora $F$ non ha la proprietà dell'$\cap$ finita. Sia $\mathcal{U} = \{X \setminus F \mid F \in \mathcal{F}\}$ e poiché $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$ ho che $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X$. Poiché $X$ è compatto, $\exists\, U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ t.c. $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Ma allora $X = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus F_i)$, da cui $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \emptyset$. Allora $\exists$ una sottofamiglia finita di $\mathcal{F}$ che ha intersezione vuota, dunque $\mathcal{F}$ non ha la proprietà dell'$\cap$ finita. Segue dunque che se $\mathcal{F}$ ha la proprietà dell'$\cap$ finita, allora $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) Mostro che se ogni famiglia $\mathcal{F}$ di chiusi con la proprietà dell'$\cap$ finita ha $\cap$ non vuota, allora $X$ cpt. Fisso $\mathcal{U}$ ricoprimento aperto di $X$ e considero la famiglia di chiusi $\mathcal{F} = \{X \setminus U \mid U \in \mathcal{U}\}$. Ho che $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} (X \setminus U) = X \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = \emptyset$, dunque $\mathcal{F}$ non ha la proprietà dell'intersezione finita. Dunque $\exists\, F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ con $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \emptyset$. Ma allora se $F_i = X \setminus U_i$ si ha $\bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus U_i) = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} U_i = X$

qui utilizzo la negazione dell'ipotesi: se $\mathcal{F}$ famiglia di chiusi ha $\cap$ vuota, allora non ha la proprietà dell'$\cap$ finita

$\Rightarrow X$ cpt $\square$

**TEOREMA** (Tychonoff) $X_s$, $s\in S$, compatti $\Rightarrow \prod_{s\in S} X_s$ compatto

dim Uso il criterio della famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita, cioè la caratterizzazione della compattezza della prop. precedente.

Sia $X=\prod_{s\in S} X_s$. Fisso una famiglia $\mathcal{F}$ di chiusi con la proprietà dell'$\cap$ finita e mostro che ha intersezione non vuota, i.e. $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$

Allargo il problema. Considero l'insieme di tutte le famiglie di sottoinsiemi di $X$ che abbiano la proprietà dell'$\cap$ finita.

Quindi $I=\{\mathcal{F}=\{F\subseteq X\}$ con l'$\cap$ finita$\}$. L'insieme $I$ è parzialmente ordinato rispetto all'inclusione (cioè dico che $\mathcal{F}\le\mathcal{F}'$ per $\mathcal{F},\mathcal{F}'\in I$ se e solo se $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}'$). Inoltre, se $\Sigma$ è una catena in $I$, cioè un sottoinsieme totalmente ordinato di $I$ ($\mathcal{F}_{i_1}\subset\mathcal{F}_{i_2}\subset\dots$), allora $\Sigma$ ha un maggiorante, che è $\bigcup_{F\in\mathcal{F}\in\Sigma} F$. Applico il lemma di Zorn e ottengo un elemento massimale $\mathcal{B}=\{B\}$. Ora $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{B}$ per la massimalità di $\mathcal{B}$. Per mostrare che $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F\neq 0$ basta mostrare che $\bigcap_{B\in\mathcal{B}}\overline{B}\neq\emptyset$.

(Notare che $F=B$, $\exists B\in\mathcal{B}$ $\forall F\in\mathcal{F}$).

Poiché $\mathcal{B}$ è massimale, sappiamo che valgono le due condizioni seguenti:

(a) Ogni sottoinsieme di $X$ che sia intersezione di elementi di $\mathcal{B}$, appartiene a $\mathcal{B}$.
(se $B_1,B_2\in\mathcal{B}$ e $B_1\cap B_2\notin\mathcal{B}$, allora $\mathcal{B}\cup(B_1\cap B_2)\supsetneq\mathcal{B}$, contraddicendo la massimalità)

(b) se $Z\subseteq X$ sottoinsieme tale che $Z\cap B\neq\emptyset$ $\forall B\in\mathcal{B}$, allora $Z\in\mathcal{B}$.

Basta mostrare che $\bigcap_{B\in\mathcal{B}}\overline{B}\neq\emptyset$ perché $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{B}$. Fisso $s\in S$ e sia $p_s: X\longrightarrow X_s$ proiezione canonica. Sia $\mathcal{B}_s=\{p_s(B)\mid B\in\mathcal{B}\}$

Poiché $\mathcal{B}$ ha la proprietà dell'$\cap$ finita, anche $\mathcal{B}_s$ ha la proprietà dell'$\cap$ finita ($p_s(B_1)\cap\dots p_s(B_n)\neq\emptyset$ perché $B_1\cap\dots\cap B_n\neq\emptyset$ perché $\mathcal{B}$ ha $\cap$ finita e quindi $p_s(B_1\cap\dots\cap B_n)\neq\emptyset \Rightarrow p_s(B_1)\cap\dots\cap p_s(B_n)\neq\emptyset$).

Poiché $X_s$ è compatto, $\bigcap_{B\in\mathcal{B}}\overline{p_s(B)}\neq\emptyset$, e sia $x_s\in\bigcap_{B\in\mathcal{B}}\overline{p_s(B)}$.

Definisco $x=(x_s)_{s\in S}$. Mostro che $x\in\overline{B}$, $\forall B\in\mathcal{B}$, e quindi $x\in\bigcap_{B\in\mathcal{B}}\overline{B}$ ($\Rightarrow \bigcap_{C\in\mathcal{F}} C\neq\emptyset$).

Per mostrare che $x\in\overline{B}$, $\forall B\in\mathcal{B}$, scelgo $s\in S$ ed un aperto $U_s\subseteq X_s$, con $p_s(x)=x_s\in U_s$. Poiché $x_s\in\overline{p_s(B)}$, segue che $U_s\cap p_s(B)\neq\emptyset$ $\forall B\in\mathcal{B}$.

Da questo segue $p_s^{-1}(U_s) \cap B \neq \emptyset \quad \forall\, B \in \mathcal{B}$ (*).

(b) $\Rightarrow$ $p_s^{-1}(U_s) \in \mathcal{B}$. Questo lo faccio $\forall\, s \in S$

(a) $\Rightarrow$ ogni intersezione finita di insiemi del tipo $p_s^{-1}(U_s)$ sta ancora in $\mathcal{B}$. Segue che $\forall$ scelta $s_1, \dots, s_n$ e $\forall$ scelta $U_{s_1}, \dots, U_{s_n}$ come sopra

$$p_{s_1}^{-1}(U_{s_1}) \cap \dots \cap p_{s_n}^{-1}(U_{s_n}) \in \mathcal{B}$$

al variare degli intorni di x

ma gli insiemi di questo tipo sono una base (della top prodotto) di $X = \prod X_s$.

Da questo segue che $\forall\, N \in \mathcal{N}_X(x)$, $N \cap B \neq \emptyset \quad \forall\, B \in \mathcal{B}$

(ogni N contiene un aperto di base che contiene x). Segue che

$x \in \bar{B}$, $\forall\, B \in \mathcal{B}$, cioè $x \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \bar{B}$ $\square$

**esempi** (1) X e Y compatti, mostrare che $X \times Y$ è compatto senza usare Tychnoff

(2) $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è compatto $\Leftarrow$ $S^n/_\sim$ è compatto perché $S^n$ è compatto

(3) $T^n$ compatto perché prodotto di compatti ($S^1 \times \dots \times S^1$)

(4) $\{f : \mathbb{R} \to [0,1]\}$ è compatto perché $[0,1]$ lo è

**def** $f : X \to Y$ si dice **PROPRIA** se $\forall\, K \subseteq Y$ compatto, $f^{-1}(K) \subseteq X$ compatto.

**prop** Se $f: X \to Y$ continua, X cpt, Y sia $T_2$. Allora f è propria

**dim** Infatti se K è cpt, poiché Y e $T_2$, K è anche chiuso, dunque $f^{-1}(K)$ è chiuso, ma X è cpt, dunque $f^{-1}(K)$ è cpt.

(5) $X = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ non è compatto in $\mathbb{R}$

Infatti $[0,1] \cap \mathbb{Q} = \bigcup_{n \geq 4} \left( \left( [0, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{n}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{n}, 1] \right) \cap \mathbb{Q} \right)$

Noto che

$$\bigcup_{n \geq 4} \left( [0, \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{n}) \cup (\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{n}, 1] \right) = [0,1] \setminus \{\tfrac{1}{\sqrt{2}}\}$$

quindi

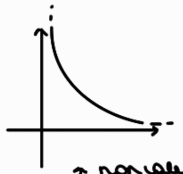
$$((\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{n}) \cup (\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{n}, 1 - \tfrac{1}{n}))$$

$$[0,1] \cap \mathbb{Q} = \bigcup_{n \geq 4} \left( \left( [0, \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{n}) \cup (\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{n}, 1] \right) \cap \mathbb{Q} \right)$$

questo è un ricoprimento aperto di $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ per cui non posso estrarre nessun sottoricoprimento finito $\hookrightarrow$ libro

(6) $(X,d)$ sm. $A,B$ chiusi di $X$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. Definisco

$$d(A,B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a,b)$$



Se $A$ o $B$ sono compatti, allora $d(A,B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$  non vale sempre

Se $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow d(A,B) = 0$. (vale sempre)

Per l'altra direzione suppongo $A$ cpt. Per ogni $n \geq 1$ esistono

$a_n \in A$, $b_n \in B$ tc $d(a_n, b_n) < \frac{1}{n}$

$A$ cpt $\Rightarrow \exists$ sottosucc $m \mapsto a_{n(m)}$ convergente e pongo

$a = \lim_n a_{n(m)}$. Fisso $\varepsilon > 0$ e scelgo $n_0 \geq 1$ tc $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Scelgo $m_0 \geq 1$

tc $\forall m \geq m_0$, $d(a, a_{n(m)}) < \varepsilon$. Prendo ora $N \geq \max(n_0, m_0\}$.

Allora $d(a, b_N) \leq d(a, a_N) + d(a_N, b_N)$

$$\leq \varepsilon + \frac{1}{n}$$

$$\leq 2\varepsilon$$

Quindi $\forall \varepsilon > 0$ esiste $b \in B$ tc $B(a, 3\varepsilon)$ contenga $B$. Cioè $a \in \bar{B}$, ma

$B$ è chiuso perciò $a \in B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

# CONNESSIONE

<u>def</u> $(X,\tau)$ ST si dice **CONNESSO** se gli unici sottoinsiemi aperti e chiusi di $X$ sono $X, \emptyset$. Se $X$ non è connesso, si dice **SCONNESSO**

<u>def</u> Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ si dice **CONNESSO** o **SCONNESSO** se lo è nella top. sottospazio

<u>prop</u> $X$ è sconnesso se e solo se è unione di due aperti disgiunti non vuoti

<u>dim</u> Se $X$ è sconnesso, $\exists\, V \subseteq X$ aperto e chiuso, $V \neq \emptyset$ e $V \neq X$. Quindi $W = X \setminus V$ è aperto (poiché $V$ chiuso), $W \neq X$, $W \neq \emptyset$ perché $V \neq \emptyset$, $V \neq X$.
Perciò $X = V \cup W$ è unione di aperti con $V \cap W = \emptyset$.
Viceversa, se $X = A \cup B$ con $A$ e $B$ aperti, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, allora $X \setminus B = A$ è chiuso perché $B$ è aperto, dunque $A \neq \emptyset, X$ è sia aperto che chiuso, dunque $X$ sconnesso.

<u>oss</u> $X$ è sconnesso se e solo se è unione di due chiusi disgiunti non vuoti
(Simile al precedente, oppure notare che $X = C_1 \cup C_2$ con $C_1, C_2$ non vuoti e chiusi se e solo se $X = (X \setminus C_1) \cup (X \setminus C_2)$ unione di due aperti disgiunti non vuoti.)

<u>oss</u> I connessi di $\mathbb{R}$ sono gli intervalli.

**<u>TEOREMA 1</u>** Gli intervalli di $\mathbb{R}$ sono connessi

<u>dim</u> Sia $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo sconnesso. Allora $\exists$ 2 chiusi $A$ e $B$ tc $A \cap B = \emptyset$, $J = A \cup B$, $J \cap A \neq \emptyset$, $J \cap B \neq \emptyset$. Fisso $a \in A \cap J$, $b \in B \cap J$. WLOG suppongo $a < b$. Poiché $J$ è intervallo, $[a,b] \subseteq J$. L'insieme $A \cap [a,b]$ è chiuso in $\mathbb{R}$, dunque contiene i suoi punti di accumulazione, perciò se $z = \sup(A \cap [a,b])$, $z \in A \cap [a,b]$. Se $x \in [a,b] > z$, allora $x \in B$. Inoltre, poiché $z \in A \cap [a,b]$ e $b \in B$, è chiaro che $z < b$. Dunque da queste due osservazioni segue che $(z, b) \subseteq B$, poiché $J$ intervallo. $B$ è chiuso, dunque $z \in B$, ma allora $A \cap B \neq \emptyset$ $\lightning$ $\square$

**TEOREMA 2** Ogni sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}$ è un intervallo

**dim** Usando il fatto che gli intervalli sono connessi (TEOREMA 1) è sufficiente mostrare che un sottoinsieme $Y \subseteq \mathbb{R}$ che non è intervallo è sconnesso se contiene almeno due punti distinti. Siano $a \in Y$ e $b \in Y$, $a \neq b$. Poiché $Y$ non è intervallo, a meno di rinominarli so che $\exists\, c \in \mathbb{R}$, $c \notin Y$, $a < c < b$. Sia $A = (-\infty, c)$, allora $A \cap Y = \bar{A} \cap Y$ (perché $\bar{A} = A \cup \{c\}$ e $c \notin Y$). Quindi $A \cap Y$ è un sottoinsieme di $Y$, $A \cap Y \neq \emptyset, Y$, che è aperto e chiuso
$\Rightarrow$ $Y$ non è connesso.

**prop** $Y, Z$ sottoinsiemi di $X$ tali che $Y \subseteq Z \subseteq \bar{Y}$. Se $Y$ è connesso, allora anche $Z$ lo è.

**dim** Sia $F \subseteq Z$ aperto e chiuso. Allora $\exists\, A \subseteq X$ aperto e $C \subseteq X$ chiuso tali che $F = Z \cap A = Z \cap C$. Poiché $Y \subseteq Z$

$$Y \cap F = Y \cap (Z \cap A) = Y \cap A \quad \text{è aperto di } Y$$
$$Y \cap F = Y \cap (Z \cap C) = Y \cap C \quad \text{è chiuso di } Y$$

Poiché $Y$ è connesso, se $Y \cap F$ è aperto e chiuso, allora $Y \cap F = \emptyset$ o $Y \cap F = Y$.

1) Se $Y \cap F = Y$, allora $Y = Y \cap F = Y \cap C \Rightarrow Y \subseteq C$
Poiché $C$ è chiuso $\bar{Y} \subseteq C$, da cui, visto che $Z \subseteq \bar{Y}$
$$F = Z \cap C \supseteq Z \cap \bar{Y} \supseteq Z$$
perciò $F = Z$.

2) Se $F \cap Y = \emptyset$, allora da $Y \subseteq Z \subseteq \bar{Y} = Y \cup D(Y)$, si ha $F \subseteq D(Y)$.
Se $F \neq \emptyset$, scelgo $x \in F$. Allora $\forall\, N \in \mathcal{N}_X(x)$ $\exists\, y \in N \cap X$, $y \neq x$.
D'altra parte $A \cap Z = F$, dunque poiché $x \in F$, ho che $x \in A$, dunque, essendo $A$ aperto, $A \in \mathcal{N}_X(x)$. Perciò $A \cap Y \neq \emptyset$, ma $A \cap Y = F \cap Y = \emptyset$ $\lightning$. Quindi $F = \emptyset$ □

**corollario** Se $Y \subseteq X$ è connesso, anche $\bar{Y} \subseteq X$ lo è.

**prop** Se $f: X \twoheadrightarrow Y$ suriettiva, continua e $X$ è connesso, anche $Y$ lo è.

**dim** Se $A \subseteq Y$ è aperto e chiuso, $A \neq \emptyset, Y$, $f^{-1}(A) \subseteq X$ è aperto e chiuso ; $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ perché $A \neq \emptyset$ e $f$ è suriettiva, $f^{-1}(A) \neq X$ perché $A \neq Y$ e $f$ è suriettiva. Ma $X$ è connesso $\lightning$ □

**corollario** $f: X \longrightarrow Y$ continua, $Z \subseteq X$ connesso. Allora $f(Z) \subseteq Y$ connesso

**dim** Applicare la prop precedente a $f: Z \twoheadrightarrow f(Z)$

**corollario** Quozienti di connessi sono connessi

**dim** $X \longrightarrow X/_\sim$ è continua e suriettiva

**prop** $Y, Z$ connessi di $X$. Se $Y \cap Z \neq \emptyset$, allora $Y \cup Z$ è connesso.

**dim** Sia $A \subseteq Y \cup Z$ aperto e chiuso; se $A \neq \emptyset$, allora mostro che $A = Y \cup Z$.
Se $A \neq \emptyset$, allora $A \cap Y \neq \emptyset$ oppure $A \cap Z \neq \emptyset$. Nel primo caso, essendo $Y$ connesso $A \cap Y = Y$. Dunque, poiché $Y \cap Z \neq \emptyset$, ho anche $A \cap Z \neq \emptyset$, dunque $A \cap Z = Z$ perché $Z$ connesso. Perciò $A = Y \cup Z$.
(se $A \cap Z \neq \emptyset$, ragiono in modo analogo). □

**def** Due punti $x, y \in X$ si dicono CONNESSI se esiste un sottoinsieme connesso $C \subseteq X$ con $x \in C$, $y \in C$.

**prop** se $\forall x, y \in X$, $x$ ed $y$ sono connessi, allora $X$ è connesso

**dim** Fisso $F \subseteq X$, $F$ aperto e chiuso, $F \neq \emptyset$, e mostro $F = X$. Fisso $x \in X$.
Per ogni $y \in F$, ho un insieme connesso $C \subseteq X$ con $x \in C$ e $y \in C$. Ora $F \cap C$ è aperto di $C$ e chiuso di $C$, dunque $F \cap C = C$ perché $C$ è connesso e non vuoto. Quindi $C \subseteq F$ e poiché $x \in C$, allora $x \in F$.
Quindi $\forall x \in X$, concludiamo che $x \in F$, cioè $F = X$ □

**corollario** Unione di connessi a intersezione non vuota è connessa

**dim** Sia $Y = \bigcup_{i \in I} C_i$, $C_i$ connessi $\forall i \in I$, $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$. Fisso $y_0 \in \bigcap_{i \in I} C_i$.
Dati $y_1$ e $y_2 \in Y$, scelgo $C_{i_1}$, $C_{i_2}$ tali che $y_1 \in C_{i_1}$ e $y_2 \in C_{i_2}$. Allora $C_{i_1} \cup C_{i_2}$ è connesso, infatti

$C_{i_1} \cap C_{i_2} \neq \emptyset$ e sono entrambi connessi. Perciò ogni coppia di punti di $Y$ è connessa, da cui segue che $Y$ è connesso per la prop. precedente. $\square$

**def** Dato $x \in X$, la COMPONENTE CONNESSA di $x$ è l'unione di tutti i connessi $C \subseteq X$ con $x \in C$. La indichiamo con $\mathcal{C}(x)$

**oss** (1) $\mathcal{C}(x)$ è connesso, in quanto unione di connessi a intersezione $\neq \emptyset$ ($\cap \ni x$)

(2) $\mathcal{C}(x)$ è il più grande (nel senso dell'inclusione) connesso che contiene $x$

(3) $\mathcal{C}(x)$ è chiuso: essendo connesso, anche $\overline{\mathcal{C}(x)}$ è connesso. $\mathcal{C}(x) \subseteq \overline{\mathcal{C}(x)}$ e la massimalità di $\mathcal{C}(x)$ implica che $\mathcal{C}(x) = \overline{\mathcal{C}(x)}$

**TEOREMA** Prodotto di connessi è connesso.

**dim** passo 1 $X \times Y$ è connesso se $X$ e $Y$ lo sono.

Fisso $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$. Poiché $X \xrightarrow[\text{omeo}]{\sim} X \times \{y_2\}$, $Y \xrightarrow[\text{omeo}]{\sim} \{x_1\} \times Y$, sono entrambi connessi. Dunque $(x_1, y_2), (x_2, y_2)$ stanno nella stessa componente connessa e lo stesso vale per $(x_1, y_1)$ e $(x_1, y_2)$. Dunque ho due connessi:

- $C_1$ che contiene $(x_1, y_2)$ e $(x_2, y_2)$
- $C_2$ che contiene $(x_1, y_1)$ e $(x_1, y_2)$

Poiché $(x_1, y_2) \in C_1 \cap C_2$, dunque anche $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$ sono connessi. Poiché ogni coppia di punti di $X \times Y$ è connessa, $X \times Y$ è connesso.

passo 2 Per induzione su $n$, verifico che $X_1 \times \dots \times X_n$ è connesso se $X_1, \dots, X_n$ lo sono

passo 3 Sia ora $X = \prod_{s \in S} X_s$ un prodotto arbitrario di spazi connessi. Fisso $x = (x_s)_s$ e mostro che $\mathcal{C}(x)$ è denso in $X$, da cui la conclusione segue facilmente.

Per mostrare la densità, mostro che $\forall$ aperto $A \subseteq X$ ho $A \cap \mathcal{C}(x) \neq \emptyset$.

Basta per questo mostrare che $\forall$ B aperto di base della topologia

di $X$ si ha $B \cap \mathcal{C}(x) \neq \emptyset$. Per def esistono aperti non vuoti
$A_{s_1} \subseteq X_{s_1}, \dots, A_{s_n} \subseteq X_{s_n}$ tc
$$B = \{ y = (y_s)_{s\in S} \mid y_{s_i} \in A_i,\ \forall i = 1,\dots,n \}$$

Fisso $y \in B$ tc
$$y_s \in A_{s_i} \quad \text{per } s = s_1,\dots,s_n$$
$$y_s = x_s \quad \text{per } s \neq s_1,\dots,s_n$$
Sia $Z \subseteq X$ il sottoinsieme definito da
$$Z = \{ z = (z_s)_{s\in S} \in X \mid z_s = x_s\ \forall\ s \neq s_1,\dots,s_n \}$$
Dunque $Z \simeq X_{s_1} \times \dots \times X_{s_n}$, dunque è connesso per il passo 2.
Inoltre $x = (x_s)_{s\in S} \in Z$
$$y = (y_s)_{s\in S} \in Z$$
Dunque $y \in \mathcal{C}(x)$ perché $Z$ è connesso. Segue $\mathcal{C}(x) \cap B \neq \emptyset$ $\forall B$.
Quindi $\mathcal{C}(s)$ è denso in $X$.

__passo 4__ Poiché $\mathcal{C}(x)$ è denso in $X$, $\overline{\mathcal{C}(x)} = X$. Poiché $\mathcal{C}(x)$ è connesso, $\overline{\mathcal{C}(x)}$ è connesso. Segue che $X$ è connesso. □

__esempi__ (1) $\mathbb{R}^n$ è connesso

(2) $\forall S$ $\{S \to \mathbb{R}\}$ è connesso

(3) Se $I_1,\dots,I_n$ sono intervalli di $\mathbb{R}$, allora $I_1 \times \dots \times I_n$ è connesso in $\mathbb{R}^n$

(4) $S^n$ è connesso
Infatti, $S^n \setminus \{N\} \xrightarrow[\text{omeo}]{\sim} \mathbb{R}^n$, dove $N \in S^n$ è un punto, il polo nord.
Dunque $S^n \setminus \{N\}$ è connesso, da cui la connessione di $S^n = \overline{S^n \setminus \{N\}}$

(5) $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è connesso
Infatti, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \simeq S^n/\sim$ (i quozienti di connessi sono connessi).

(6) $I = [0,1]$ non è omeomorfo a $S^1$
Se fisso un punto $0 < c < 1$, allora $I \setminus \{c\}$ non è connesso. Se tolgo un punto a $S^1$, ottengo uno ST. A meno di rotazione, posso assumere sia $P = (1,0)$ (punto) e ho un omeomorfismo $\underset{\text{intervallo}}{(0,1)} \xrightarrow{\sim} S^1 \setminus \{P\}$
$$t \longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

Segue che $S^1 \setminus \{p\}$ è connesso.

Se esistesse un omeomorfismo $\psi : [0,1] \longrightarrow S^1$ avrei un omeomorfismo indotto $\bar{\psi} : [0,1] \setminus \{c\} \longrightarrow S^1 \setminus \{\psi(c)\}$, che non esiste perché $[0,1] \setminus \{c\}$ è sconnesso e $S^1 \setminus \{\psi(c)\}$ è connesso.

(7) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ è sconnesso

Infatti $(-\infty, \sqrt{2})$ e $(\sqrt{2}, +\infty)$ sono aperti di $\mathbb{R}$ disgiunti e

$\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})) \cup (\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, +\infty))$

def Dico che $S \subseteq X$ SCONNETTE $X$ se $X \setminus S$ è sconnesso

domanda all'esame

(8) Ogni iperpiano sconnette $\mathbb{R}^n, n > 1$, mentre un sottospazio affine di dim $m \leq n-2$ non sconnette $\mathbb{R}^n$ $\forall n \geq 2$.

Mostro che un iperpiano sconnette $\mathbb{R}^n$. Suppongo che l'iperpiano sia $\pi : x_n = 0$.

Allora ho $\mathbb{R}^n \setminus \pi = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\} \cup \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n < 0\}$

Sia ora $m \leq n-2$ e fisso il sottospazio $W : \begin{cases} x_{m+1} = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$. Ho allora

$\mathbb{R}^n \setminus W \xrightarrow[\text{omeo}]{\sim} \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^{n-m} \setminus \{(0, \dots, 0)\})$

$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto ((x_1, \dots, x_m), (x_{m+1}, \dots, x_n))$

Basta mostrare che $\mathbb{R}^t \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ è connesso se $t \geq 2$. Per ogni $j = 1, \dots, t$ definiamo

$C_j^+ = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_j > 0\}$ $\quad C_j^- = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_j < 0\}$. Ciascun

$C_j^{\pm}$ è connesso perché omeomorfo a $\mathbb{R}^{t-1} \times \mathbb{R}$.

Inoltre $\mathbb{R}^t \setminus \{(0, \dots, 0)\} = \bigcup_j (C_j^+ \cup C_j^-)$. Sia $j \geq 2$ e noto che

$C_1^+ \cap C_j^+ \neq \emptyset \implies C_1^+ \cup C_j^+$ connesso

$C_1^- \cap C_j^- \neq \emptyset \implies C_1^- \cup C_j^-$ connesso

Poi $(C_1^+ \cup C_j^+) \cap (C_1^- \cup C_j^-) \neq \emptyset$

Ora $\bigcup_{j=1}^{t} (C_j^+ \cup C_j^-) = \bigcup_{j=1}^{t} (C_1^+ \cup C_j^+) \cup (C_1^- \cup C_j^-)$ è unione di connessi che hanno intersezione non vuota

guarda appunti

(9) $\mathbb{R}$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n, n \geq 2$

$\mathbb{R} \setminus \{\text{punto}\}$ non è connesso, mentre $\mathbb{R}^n \setminus \{\text{punto}\}$ lo è

(10) $GL_n(\mathbb{R})$ non è connesso

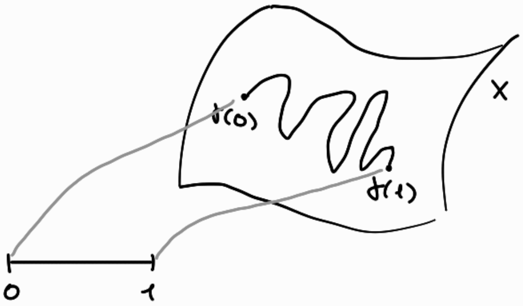
Infatti, $\det(GL_n(\mathbb{R})) \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\}$ continua, dunque

$GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{x<0\}) \cup \det^{-1}(\{x>0\})$

## Connessione per archi

**def** Un ARCO o CAMMINO in $X$ è una funzione continua $\gamma: I \longrightarrow X$, $I = [0,1]$.

Chiamo $\gamma(0)$ PUNTO INIZIALE e $\gamma(1)$ PUNTO FINALE




**def** $X$ è CONNESSO PER ARCHI se $\forall x,y \in X$ $\exists$ arco $\gamma: I \longrightarrow X$ con $\gamma(0)=x$ e $\gamma(1)=y$.

$Y \subseteq X$ è connesso per archi se lo è nella top. sottospazio

**oss** (•) $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi. Ad esempio, $\gamma: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (1-t)x + ty$ è continua con $\gamma(0)=x$, $\gamma(1)=y$

(•) Gli insiemi convessi sono connessi per archi.

**prop** Connesso per archi $\Rightarrow$ connesso

**dim** Basta mostrare che $\forall$ $x,y \in X$ esiste un connesso che li contiene.

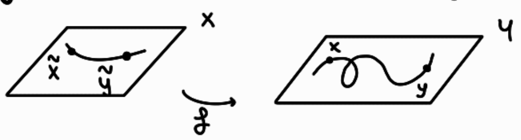
Ma se $x$ e $y$ sono connessi da un arco, cioè $\exists$ $\gamma: [0,1] \longrightarrow X$ con $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$, allora $C = \mathrm{Im}(\gamma)$ è un connesso (perché $[0,1]$ connesso e $\gamma$ continua) che contiene $x$ e $y$.

**prop** $f: X \longrightarrow Y$ continua, $Z \subseteq X$ connesso per archi. Allora anche $f(Z)$ lo è.

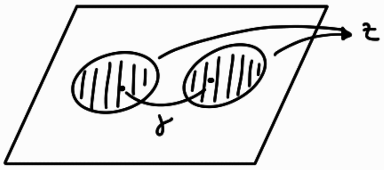
**dim** Fisso $x \in f(Z)$, $y \in f(Z)$. Scelgo $\tilde{x}, \tilde{y} \in Z$ tc $f(\tilde{x}) = x$, $f(\tilde{y}) = y$

Sia $\gamma: I \longrightarrow Z$ tc $\gamma(0) = \tilde{x}$, $\gamma(1) = \tilde{y}$. Allora considero

$f\circ\gamma: I \longrightarrow f(Z)$ è continua e si ha $(f\circ\gamma)(0) = x$ e $(f\circ\gamma)(1) = y$.



**nb** Sfrutta implicitamente il fatto che $Z$ è connesso poiché il cammino è supposto "interno". Se $Z$ fosse unione di due insiemi come in figura, il cammino sarebbe esterno a $Z$ e dunque la dimostrazione fallirebbe



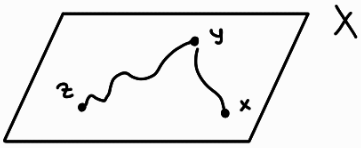

**corollario** Quozienti di connessi per archi sono connessi per archi

**def** La COMPONENTE CONNESSA PER ARCHI di $x$ è l'insieme

$$\mathcal{C}_a(x) = \{y \in X \mid \exists\, \gamma : I \longrightarrow X \text{ continua tc } \gamma(0)=x,\ \gamma(1)=y\}$$

**oss** (•) La "composizione di cammini" è ancora un cammino.

Suppongo $\gamma_1 : I \longrightarrow X$, $\gamma_2 : I \longrightarrow X$ due cammini con $\gamma_1(0)=x$, $\gamma_1(1)=y$, $\gamma_2(0)=y$, $\gamma_2(1)=z$




Definisco $\gamma : I \longrightarrow X$ tramite $\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & t\in[0,\frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1) & t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$

Allora $\gamma$ è continua, infatti $\gamma_1(2\cdot\frac{1}{2}) = \gamma_1(1) = y = \gamma_2(0) = \gamma_2(2\cdot\frac{1}{2}-1)$, inoltre $\gamma(0)=\gamma_1(0)=x$ e $\gamma(1)=\gamma_2(1)=z$

(•) Se $\gamma : I \longrightarrow X$ con $\gamma(0)=x$, $\gamma(1)=y$, allora posso costruire il cammino inverso ponendo $\bar{\gamma} : I \longrightarrow X$ con $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$ e allora si ha $\bar{\gamma}(0)=y$ e $\bar{\gamma}(1)=x$

(•) I cammini hanno struttura di gruppo.

**prop** $\mathcal{C}_a(x)$ è il più grande (nel senso dell'inclusione) connesso per archi di $X$ che contiene $x$

**dim** (1) $\mathcal{C}_a(x)$ è connesso per archi

Fisso $y \in \mathcal{C}_a(x)$ e $\gamma : I = [0,1] \longrightarrow X$ tc $\gamma(0)=x$ e $\gamma(1)=y$

Ora devo mostrare che il cammino sia tutto contenuto in $\mathcal{C}_a(x)$: basta mostrare che $\gamma(t) \in \mathcal{C}_a(x)$ $\forall t\in[0,1]$ (perché mostro che ogni punto è connesso ad $x$).

Basta far vedere dunque che esiste un cammino $\gamma' : I \longrightarrow X$ tc

$\gamma'(0) = x$, $\gamma'(1) = \gamma(t)$. $\gamma'$ esiste ed è $\gamma'(s) = \gamma(ts)$

(2) Mostro che $\forall y, z \in \mathcal{C}_a(x)$ $\exists \gamma : I \longrightarrow X$ tc $\gamma(0) = y$ e $\gamma(1) = z$.

Per ipotesi so che esistono

$$\gamma_1 : I \longrightarrow X \qquad \gamma_1(0) = x \qquad \gamma_1(1) = y$$

$$\gamma_2 : I \longrightarrow X \qquad \gamma_2(0) = x \qquad \gamma_2(1) = z$$

Allora posso prendere $\bar{\gamma}_1$ e $\gamma_2$ e ottenere così la composizione

$$\gamma = \gamma_2 \cdot \bar{\gamma}_1 = \begin{cases} \gamma_1(1-2t) & t \in [0, 1/2) \\ \gamma_2(2t-1) & t \in [1/2, 1) \end{cases}$$

$$\gamma(0) = y \quad \text{e} \quad \gamma(1) = z$$

$\gamma$ è continua perché $\gamma_1\left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \gamma_1(0) = x = \gamma_2(0) = \gamma_2\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)$

Inoltre, dal punto precedente

$$\gamma_1(I) \subseteq \mathcal{C}_a(x)$$

$$\gamma_2(I) \subseteq \mathcal{C}_a(x)$$

$\Rightarrow$ $\gamma(I) \subseteq \mathcal{C}_a(x)$

(3) Mostro quindi che se $Y \subseteq X$ è connesso per archi e contiene $x$, allora $Y \subseteq \mathcal{C}_a(x)$.

Fisso $y \in Y$. Poiché $x \in Y$, allora $\exists \gamma : I \longrightarrow Y$ $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, ma componendo con $Y \subseteq X$, $\gamma : I \longrightarrow X$ è un cammino tc $\gamma(0) = x$ $\gamma(1) = y$, dunque $y \in \mathcal{C}_a(x)$.

esempio $\mathbb{Q}$ non è connesso per archi


perché non esiste alcun cammino che va da $a$ a $b$ contenuto in $\mathbb{Q}$, dal momento che dovrebbe contenere dei punti di $\mathbb{R}$

**TEOREMA** $X = \prod_{s \in S} X_s$ è connesso per archi se ciascun $X_s$ lo è

dim Fisso $x = (x_s)_{s \in S}$, $y = (y_s)_{s \in S}$

Per ogni $s$ scelgo $\gamma_s : I \longrightarrow X_s$, $\gamma_s(0) = x_s$, $\gamma_s(1) = y_s$

Definisco $\gamma : I \longrightarrow X$, $\gamma(t) = (\gamma_s(t))_{s \in S}$ $\square$

esempio
- il toro è connesso per archi
- $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi ($\mathbb{R}$ è un "arco")

**def** $X$ è detto LOCALMENTE CONNESSO PER ARCHI se ogni $x \in X$ possiede un sistema di intorni aperti e connessi per archi

**prop** $X \neq \emptyset$ connesso e localmente connesso per archi $\Rightarrow X$ è connesso per archi

stile esame

**dim** Fisso $x \in X$. Basta che mostri che $\mathcal{C}_a(x) = X$. È chiaro che $\mathcal{C}_a(x) \neq \emptyset$ perché $x \in \mathcal{C}_a(x)$ ($\gamma : I \longrightarrow X$, $t \longmapsto x$ è cammino).

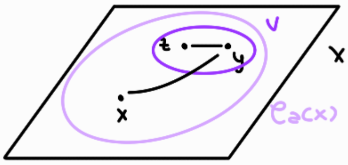
Se mostro che $\mathcal{C}_a(x)$ è sia aperto che chiuso ho finito perché $X$ è connesso.

Mostro che $\mathcal{C}_a(x)$ è aperto: fisso $y \in \mathcal{C}_a(x)$ e mostro che $\exists$ $V$ aperto di $X$ con $y \in V$ e $V \subseteq \mathcal{C}_a(x)$. Scelgo $V$ connesso per archi con $y \in V$ (posso farlo perché $X$ è localmente connesso per archi) e mostro che $V \subseteq \mathcal{C}_a(x)$.

Scelgo $z \in V$ e mostro che $\exists\, \gamma : I \longrightarrow \mathcal{C}_a(x)$ con $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = z$.

So che $\exists\, \gamma_1 : I \longrightarrow X$ con $\gamma_1(0) = y$ e $\gamma_1(1) = z$

$\gamma_2 : I \longrightarrow X$ con $\gamma_2(0) = x$ e $\gamma_1(1) = y$




Pongo $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$ cioè

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_2(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \gamma_1(2t-1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Segue che $z \in \mathcal{C}_a(x)$, dunque $V \subseteq \mathcal{C}_a(x)$.

Mostro ora che $\mathcal{C}_a(x)$ è chiuso, mostrando che $X \setminus \mathcal{C}_a(x)$ è aperto.

Fisso $y \in X \setminus \mathcal{C}_a(x)$ e mostro che $\exists$ $V$ aperto con $y \in V$ e $V \subseteq X \setminus \mathcal{C}_a(x)$.

Scelgo $V \in \mathcal{N}_X(y)$, aperto e connesso per archi. Suppongo per assurdo $V \cap \mathcal{C}_a(x) \neq \emptyset$. Sia $z \in \mathcal{C}_a(x)$.

Sia $\gamma_1 : I \longrightarrow X$ con $\gamma_1(0) = x$ $\gamma_1(1) = z$ e sia

$\gamma_2 : I \longrightarrow V$ con $\gamma_2(0) = y$ $\gamma_2(1) = z$

Moltiplico i due cammini ottenendo

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2-2t) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

è un cammino con $\gamma(0) = \gamma_1(0) = x$ $\gamma(1) = \gamma_2(0) = y$

$\Rightarrow y \in \mathcal{C}_a(x)$ ↯ $\Rightarrow V \subseteq X \setminus \mathcal{C}_a(x)$ $\square$

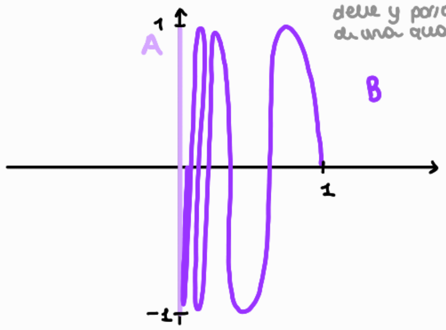
## Esempi

domanda da orale

(1) Considero $A=\{(0,y) \mid y\in[-1,1]\}$, $B=\{(x,\sin(\frac{1}{x})) \mid x\in(0,1]\}$

$X=A\cup B$ è connesso ma non per archi

l'idea è che avvicinandomi a zero sull'asse delle x, lungo l'asse delle y posso allontanarmi sempre di una quantità $>\varepsilon$




L'intuizione che useremo è che se ci fosse un cammino continuo, questo manderebbe qualcosa di lunghezza 1 in qualcosa di lunghezza infinita, ma $(0,1)$ non può essere omeomorfo a $(-\infty,\infty)$.

- Noto che $X=\overline{B}$ e poiché $B$ è connesso, allora anche $\overline{B}=X$ lo è.

  Per mostrare che $X=\overline{B}$ bisogna mostrare che $A\subseteq\overline{B}$. Sia $(0,y)\in A$.

  Ogni intorno di $(0,y)$ interseca $B$; infatti, prendo $B(0,\varepsilon)\subseteq A$, $\varepsilon<1$ e scelgo $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 1$ tc $\frac{1}{2\pi n}<\varepsilon$. Sia $\theta$ tale che $y=\sin\theta$ per $0\leq\theta\leq 2\pi$.

  Ho che $\left(\frac{1}{\theta+2n\pi},\ \sin(\theta+2n\pi)\right)=\left(\underbrace{\frac{1}{\theta+2n\pi}}_{\to 0},\ y\right)$

  Questo punto appartiene a $B((0,y),\varepsilon)$ perché $\frac{1}{\theta+2\pi n}\leq\frac{1}{2\pi n}<\varepsilon$

  Perciò ogni intorno di $(0,y)$ contiene un punto di $B$

  $\Rightarrow (0,y)\in\overline{B} \Rightarrow A\subseteq\overline{B}$.

  Da questo segue che $X=\overline{B}$, infatti: $X=A\cup B\subseteq\overline{B}$ e $\overline{B}\subseteq X$ perché $B\subseteq X$ e $X$ chiuso.

- Mostro ora che $X$ non è connesso per archi. Per questo mostro che non esiste alcuna funzione continua $f: I\longrightarrow X$ tc $f(0)\in B$, $f(1)\in A$.

  Poiché $A$ è connesso, basta fare il caso in cui $f(1)=(0,1)$

  (poi posso fare il cammino da qualsiasi el. di $A$ a $(0,1)$ e moltiplicarli).

  Suppongo che $\exists\, f: I\longrightarrow X$ tc $f(0)\in B$ e $f(1)=(0,1)$. Se esiste una tale $f$, scelto $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$ tc $\forall\ t\geq 1-\delta$, allora

  $$|f(1)-f(t)|=|(1,0)-f(t)|<\varepsilon$$

  Ora $f([\delta,1])\subseteq X$ è connesso perché $[\delta,1]$ lo è. Considero la proiezione sull'asse x $\quad p: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x$

Poiché $p$ è continua e $f([\delta,1])$ è connesso, $(p\circ f)([\delta,1])$ è connesso in $\mathbb{R}$, dunque, poiché $(p\circ f)(1) = p(0,1) = 0$, è un intervallo che contiene 0.

Sia $f(\delta) = (x_0, y_0) \in X$. Allora $x_0 \geq 0 \Rightarrow (p\circ f)(\delta) = x_0 \geq 0$.

Segue che $[0,x_0] \subseteq (p\circ f)([\delta,1])$. Segue che $0 \le x \le x_0$ esiste $t \in [\delta,1]$ tale che $f(t) = (x, \sin(\frac{1}{x}))$ verifichi

$$|(x,\sin(\tfrac{1}{x})) - (0,1)| < \varepsilon$$

ma questo non funziona perché se $x_n = \frac{1}{2\pi n - \pi/2}$, allora $\sin(\frac{1}{x_n}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ e

$$\left|(x_n, \sin(\tfrac{1}{x_n})) - (0,1)\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi n - \pi/2}\right)^2 + (-1-1)^2} \geq 2$$

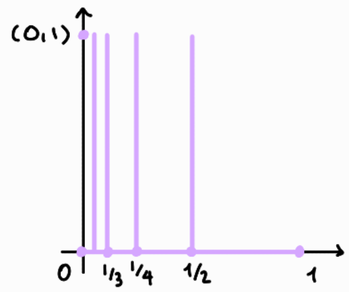
Scelto $\varepsilon < 2$ si giunge ad un assurdo $\Rightarrow \nexists f$ continua con $f(0) \in B$, $f(1) \in A$

(2) PETTINE $\quad (n \geq 1)$

$C_n = \{(\frac{1}{n}, y) \mid y \in [0,1]\}$

$J = \{(x,0) \mid x \in [0,1]\}$

$X = J \cup \bigcup_{n\geq 1} C_n \cup \{(0,1)\}$




X è connesso, ma non per archi

Connesso ok perché X è contenuto nella chiusura di $J \cup \bigcup_{n\geq 1} C_n$ che è connessa per archi (esercizio); verificare imitando l'esempio del $\sin(\frac{1}{x})$ che $(0,1)$ sta nella chiusura di $J \cup \bigcup_{n\geq 1} C_n$.

Non è connesso per archi: mostro che se ho $f:[0,1] \longrightarrow X$ continua con $f(0) = (0,1)$, allora $f(t) = (0,1)$ $\forall t \in [0,1]$. Infatti, considero il chiuso $C = f^{-1}((0,1)) \neq \emptyset$.

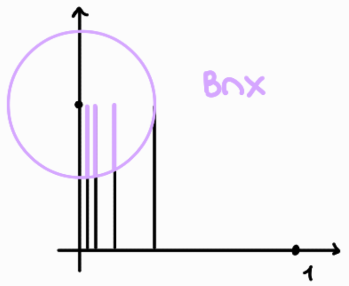
Mostro che $C = I$, che implica $f(t) = (0,1)$ $\forall t \in [0,1]$.

Sia $t_0 \in C$. Sia $B = B((0,1), \frac{1}{2})$, allora $\exists\, \varepsilon > 0$ tc

$$f((t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)) \subseteq B \cap X$$

Ora $f((t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon))$ contiene $(0,1) = f(t_0)$ ed è connesso, ma ogni sottoinsieme di $B\cap X$ è sconnesso: ha in effetti $\infty$ componenti connesse, una per ciascun $n > 2$.

Se $Im(f)$ contiene almeno un altro punto $\neq (0,1)$, allora $Im(f)$ sconnesso




ma questa è una contraddizione $\Rightarrow f(I) = (0,1)$.

In altre parole, l'unico connesso di $B \cap X$ che contiene $(0,1)$ è $\{(0,1)\}$

(3) $K = \{(0,y) \mid y \in [0,1]\}$

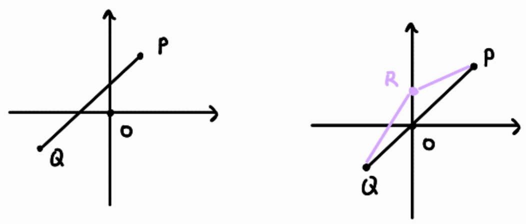
$X = K \cup J \cup \left(\bigcup_{n \geq 1} C_n\right)$

Allora $X$ è connesso per archi

(4) $GL_n(\mathbb{C})$ è connesso per archi $\forall n \geq 1$

Se $n=1$, allora $GL_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^* \underset{\text{omeo}}{\cong} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è connesso per archi

Fissati due punti considero la semiretta che li collega: è un cammino che li collega. L'unico problema è quando i due punti sono sym rispetto all'origine, ma allora costruisco un triangolo:




Sia $n \geq 2$. Scrivo $A \in GL_n(\mathbb{C})$ come $A = CBC^{-1}$ con $B$ triang. superiore e $C \in GL_n(\mathbb{C})$. Scrivo anche $B = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ (da Jordan)

Considero $\gamma : I = [0,1] \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} + (1-t) B'$$

dove $B' = B - \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$. È un cammino da $B$ a $\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$

Siano ora $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ cammini in $\mathbb{C}^*$ da $d_i$ a $1$, ottenendo

$$\delta : [0,1] \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

definito da

$$\delta(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_n(t) \end{pmatrix}$$

$\delta$ è un cammino dal punto iniziale $\delta(0)=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ a $\delta(1)=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

Componendo

$$(\gamma\cdot\delta)(t)=\begin{cases} \gamma(2t) & t\in[0,1/2] \\ \delta(2t-1) & t\in(1/2,1] \end{cases}$$

ottengo un cammino da $B$ a $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$. Perciò la componente connessa per archi di $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ è $GL_n(\mathbb{C})$ $\Rightarrow$ $GL_n(\mathbb{C})$ connesso per archi

Per rendere più chiara la conclusione: scrivo $A\in GL_n(\mathbb{C})$ come $A=CBC^{-1}$

e ho mostrato che $\exists\ \gamma: I \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ tc

$$\gamma(0)=B \qquad \gamma(1)=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Ora noto che $\gamma'(X)=C\gamma(X)C^{-1}$ è un cammino

$$\gamma': I \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}) \text{ tc}$$

$$\gamma'(0)=CBC^{-1}=A$$

$$\gamma'(1)=C\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}C^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

e così concludo

(5) $SL_n(\mathbb{C})=\{A\in GL_n(\mathbb{C}) \mid \det(A)=1\}$ è connesso per archi (il prodotto degli autovalori è $1=\det(A)$)

Si fa come il (3), ma osservando che $d_n=(d_1\dots d_{n-1})^{-1}$ e dunque l'ultimo cammino può essere scelto come l'inverso del prodotto dei precedenti.

$$\gamma_n(t)=(\gamma_1(t)\ \dots\ \gamma_n(t))^{-1}$$

Così ottengo sempre matrici di $\det=1$, dunque la connessione per archi in $SL_n(\mathbb{C})$.

(6) $U_n(\mathbb{C})=\{A\in GL_n(\mathbb{C}) : \bar{A}^t=A^{-1}\}$ è connesso per archi.

Usare il fatto che $A\in U_n(\mathbb{C})$ è ortogon. diagonalizzabile, cioè $\exists\ U_1\in U_n(\mathbb{C})$ tc $A=U_1\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}U_1^{-1}$, $\theta_i\in[0,2\pi)$. Allora

$$\gamma: I \longrightarrow U_n(\mathbb{C})$$
$$t \longmapsto U_1\begin{pmatrix} e^{i(1-t)\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i(1-t)\theta_n} \end{pmatrix}U_1^{-1}$$

è un cammino di $U_n(\mathbb{C})$ da $A$ a $I$.

(7) $GL_n(\mathbb{R})$ è unione di due componenti connesse per archi, che sono

$$GL_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det(A) > 0\}$$
$$GL_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det(A) < 0\}$$

Noto che $GL_n(\mathbb{R}) = GL_n^+(\mathbb{R}) \cup GL_n^-(\mathbb{R})$ e $GL_n^+(\mathbb{R}) \cap GL_n^-(\mathbb{R}) = \emptyset$.

Se mostro che $GL_n^+(\mathbb{R})$ e $GL_n^-(\mathbb{R})$ sono connesse per archi ho concluso.

- Basta per questo mostrare che $GL_n^+(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R})$ è connesso per archi.

  Infatti, se questo è vero, fissate $A, B \in GL_n^-(\mathbb{R})$ considero $A' = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} A$ e $B' = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} B$, allora $A', B' \in GL_n^+(\mathbb{R})$. Sia $\gamma' : I \longrightarrow GL_n^+(\mathbb{R})$ con $\gamma'(0) = A'$ e $\gamma'(1) = B'$. Allora $\gamma(t) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \gamma'(t)$ è un cammino in $GL_n^-(\mathbb{R})$ e

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} A = A$$

$$\gamma(1) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} B = B$$

- Resta da mostrare $GL_n^+(\mathbb{R})$ connesso per archi.

  Sia $A = E_1 \cdots E_r$ con $E_i$ matrici elementari. Mostro che $\forall$ matrice elementare $E$ esiste un cammino

$$\gamma_E : I \longrightarrow GL_n^+(\mathbb{R}) \quad \text{se } \det(E) > 0$$
$$\gamma_E(0) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma_E(1) = E$$

oppure

$$\gamma_E : I \longrightarrow GL_n^-(\mathbb{R}) \quad \text{se } \det(E) < 0$$
$$\gamma_E(0) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma_E(1) = E$$

Una volta fatto questo, definisco per $A = E_1 \cdots E_r$

$$\gamma : I \longrightarrow GL_n^+(\mathbb{R})$$
$$t \longmapsto \gamma_{E_1}(t) \cdots \gamma_{E_r}(t)$$

è un cammino da $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = (*)$

a $\gamma_{E_1}(1) \cdots \gamma_{E_r}(1) = E_1 \cdots E_r = A$

ma ricordo che $\gamma_E(t) \in GL_n^+(\mathbb{R})$ se $\det(E) > 0$

$$\gamma_E(t) \in GL_n^-(\mathbb{R}) \text{ se } \det(E) < 0$$

$\Rightarrow t \longmapsto \det(\gamma_E(t))$ ha segno costante ma siccome $\det(A) > 0$, allora $\det(\gamma(t)) > 0$ $\forall t$, perciò ho un numero pari di matrici del tipo $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ e perciò $(*) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

<u>caso 1</u> $E = (P_{ij})_{h,k} = \begin{cases} 1 & \text{se } h=k,\ h \neq i,\ k \neq j \\ 1 & \text{se } h=i,\ k=j;\ h=j,\ k=i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\begin{array}{c} \\ i \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \hspace{6em} j \\ \hspace{6em} \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & & & \\ & & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } h=k,\ h \neq i,\ k \neq j \\ \sin\left(t\frac{\pi}{2}\right) & \text{se } h=i,\ k=j;\ h=j,\ k=i \\ \mp\cos\left(t\frac{\pi}{2}\right) & \text{se } h=k=i,\ k=h=j \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccccccc|} & & & i & & j & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ i & & & -\cos\left(t\frac{\pi}{2}\right) & & \sin\left(t\frac{\pi}{2}\right) & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & & \\ j & & & \sin\left(t\frac{\pi}{2}\right) & & \cos\left(t\frac{\pi}{2}\right) & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{array}$$

$$P_{ij}(0) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow i \qquad P_{ij}(1) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \cdots 1 \end{bmatrix} = P_{ij}$$

$$\uparrow$$
$$i$$

Nota che $\det(P_{ij}(t)) = -\cos^2\left(t\frac{\pi}{2}\right) - \sin^2\left(t\frac{\pi}{2}\right) = -1$ $\forall t$

$\Rightarrow P_{ij}(t) \in GL_n^-(\mathbb{R})$

Collego $\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$ a $\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ in questo modo:

$$\gamma(t) = \begin{cases} -\cos(\pi t) & h=1,\ k=1 \\ \sin(\pi t) & h=1,\ k=i \\ \sin(\pi t) & h=i,\ k=1 \\ \cos(\pi t) & h=1,\ k=i \\ 1 & h=k,\ h \neq i,1 \quad k \neq i,1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \phantom{-\cos\pi t} & \phantom{I} & j & \phantom{I} \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array} &
\left[\begin{array}{c|c|c|c}
-\cos \pi t & & \sin \pi t & \\ \hline
 & I & & \\ \hline
\sin \pi t & & \cos \pi t & \\ \hline
 & & & I
\end{array}\right]
\end{array}
$$

allora $\det(\gamma(t)) = -\cos^2 t - \sin^2 t = -1 \quad \forall t$

$\gamma(0) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ e $\gamma(1) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$

Allora $\gamma_{P_{ij}}(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ P_{ij}(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$

è un cammino in $GL_n^-(\mathbb{R})$ con $\gamma_{P_{ij}}(0) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ e $\gamma_{P_{ij}}(1) = P_{ij}$

<u>caso 2</u> Fisso $d \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Fisso $i = 1, \dots, n$. Scrivo

$$
M_{d,i} = \begin{cases} 1 & h=k,\ h \neq i \\ d & h=k=i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}
\qquad
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\
i \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & d & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Se $d > 0$, scelgo un cammino $\gamma : I \longrightarrow (0, +\infty)$ con $\gamma(0) = 1$, $\gamma(1) = d$;

se $d < 0$, scelgo un cammino $\gamma : I \longrightarrow (-\infty, 0)$ con $\gamma(0) = -1$, $\gamma(1) = d$.

In ogni caso,

$$
M_{d,i}(t) = \begin{cases} 1 & h=k,\ h \neq i \\ \gamma(t) & h=k=i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}
$$

è un cammino contenuto in $GL_n^+(\mathbb{R})$ o $GL_n^-(\mathbb{R})$ con

$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \pm 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$ $\gamma(1) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & d & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

<u>caso 3</u> $S_{i,j,\alpha} = \begin{cases} 1 & h=k \\ \alpha & h=i,\ k=j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
$\qquad
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} & & j \downarrow \end{array} \\
i \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \alpha \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$

Basta considerare il cammino

$$S_{i,j,\alpha}(t) = \begin{cases} 1 & h=k \\ \alpha(1-t) & h=i,\ k=j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è un cammino in $GL_n^+(\mathbb{R})$ (per qualunque $\alpha$) con $S_{i,j,\alpha}(0) = S_{i,j,\alpha}$ e $S_{i,j,\alpha}(1) = \mathbb{1}_n$

Sia ora $E = E_1 \dots E_n$.

$\forall j = 1, \dots, n$ sia $E_j(t)$ un cammino da $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ a $E_j$ in $GL_n^-(\mathbb{R})$

oppure da $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ a $E_j$ in $GL_n^+(\mathbb{R})$

allora $t \longmapsto E_1(t) E_2(t) \dots E_n(t) = E(t)$ è un cammino in $M_n(\mathbb{R})$.

Il determinante di ogni $E_j(t)$ è costante. Se $A = E_1 \cdots E_k$, $\det(A) > 0$,

per quanto visto all'inizio il cammino sopra è tutto contenuto in $GL_n^+(\mathbb{R})$.

$\forall A \in GL_n^+(\mathbb{R})$, $\exists\ \gamma : I \longrightarrow GL_n^+(\mathbb{R})$ tc $\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, $\gamma(1) = A$.

$\Rightarrow GL_n^+(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_a\left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right) \Rightarrow GL_n^+(\mathbb{R})$ è connesso per archi