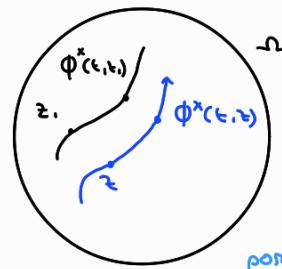


FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE

X completo su Ω

$\Phi^x : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$ "flusso" di X

$$(t, z) \mapsto \gamma_t(z) = \Phi^x(t, z) = \phi_t^x(z)$$



possiamo fissare t e ottenere il suo "evoluto" al tempo t

possiamo fissare t e vedere come evolvono diversi punti z in Ω

Per ogni $t \in \mathbb{R}$ $\phi_t^x : \Omega \rightarrow \Omega$ "mappa a tempo t fissato del flusso"

Flusso dell'eq. lin. $\dot{z} = Az$ $\Phi^x(t) = \exp(tA) z \quad \forall t$

prop $X \in C^\infty \Rightarrow \phi \in C^\infty$. Inoltre:

$$1. \Phi_0^x = \text{id}_{\Omega} \quad (\Phi_0^x(z) = z \quad \forall z \in \Omega)$$

$$2. \Phi_t^x \circ \Phi_s^x = \Phi_{t+s}^x \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

$$3. \forall t \quad \Phi_t^x \text{ è invertibile e } (\Phi_t^x)^{-1} = \Phi_{-t}^x$$

$$4. \forall t \quad \Phi_t^x \text{ è un diffeomorfismo di } \Omega \text{ in } \Omega$$

$$\underline{\text{dim}} \quad 1. \Phi_0^x(z) = \gamma_z(0) = z$$

$$2. \Phi_t^x(\Phi_s^x(z)) = \Phi_t^x(\gamma_z(s)) = \gamma_{\Phi_s^x(z)}(t) \stackrel{\text{prop. di gruppo}}{\downarrow} = \gamma_z(s+t) = \Phi_{s+t}^x(z)$$

$$3. \Phi_{-t}^x \circ \Phi_t^x = \Phi_0^x = \text{id}$$

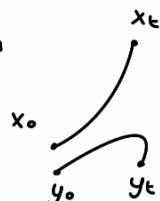
$$\Phi_t^x \circ \Phi_{-t}^x = \Phi_0^x = \text{id}$$

Dipendenza dai dati iniziali

$$\phi : (t, z) \mapsto \Phi_t(z_0) = \gamma_{z_0}(t), \quad z_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

$C^\infty \Rightarrow C^\infty$, dunque per def di continuità si ha $\forall t \in \mathbb{R}$ fissato,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tc} \quad \|z_0 - y_0\| \leq \delta \Rightarrow \|\Phi_t(z_0) - \Phi_t(y_0)\| < \varepsilon$$



Esempio $\dot{z} = kz, \quad z \in \mathbb{R}$

$$z(t) = e^{kt} z_0$$

$$|z(t) - y(t)| = e^{kt} |z_0 - y_0|$$

$$\forall T > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta_{T, \varepsilon} > 0 \quad \text{tc} \quad \|z_0 - y_0\| < \Delta_{T, \varepsilon} \Rightarrow \|z(t) - y(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall |t| \leq T$$

è sempre vero per completezza

Potrebbe essere che $\Delta_{T,\varepsilon} \rightarrow 0$ per $T \rightarrow \infty$ (ovvero c'è continuità ma non è uniforme nel tempo).

prop $\Omega = \mathbb{R}^n$, x Lipschitziano con costante K ($\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \|x(x) - x(y)\| \leq K \|x - y\|$)
 $\|\phi_t^{x(y_0)} - \phi_t^{x(z_0)}\| \leq e^{K|t|} \|y_0 - z_0\|$
Allora $\forall y_0, z_0$ si ha $\|y_t - z_t\| \leq e^{K|t|} \|y_0 - z_0\| \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(se il campo non fosse Lipschitziano, se non $\forall C$ compatto $\subseteq \Omega \exists K_C, t_C$ vale l'ultimo)

dimo $z_0 \neq y_0 \Rightarrow z_t \neq y_t \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} m_t &:= \|z_t - y_t\| \\ m_t^2 &= \|z_t - y_t\|^2 = (z_t - y_t) \cdot (z_t - y_t) \end{aligned}$$

soluzione con dati iniziali

prodotto scalare

$$\frac{d}{dt} m_t^2 = \begin{cases} = 2m_t \frac{d m_t}{dt} \\ = 2(z_t' - y_t') \cdot (z_t - y_t) = 2(X(z_t) - X(y_t)) \cdot (z_t - y_t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2m_t |m_t'| &= 2 |(X(z_t) - X(y_t)) \cdot (z_t - y_t)| \\ &\stackrel{\text{cs}}{\leq} 2 \|X(z_t) - X(y_t)\| \|z_t - y_t\| \\ &\leq 2k \|z_t - y_t\|^2 = 2k m_t^2 \end{aligned}$$

$$|m_t'| \leq k m_t \Rightarrow -k m_t \leq m_t' \leq k m_t \quad \forall t$$

confronto m_t con e^{kt} :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_t}{e^{kt}} \right) = \frac{m_t' e^{kt} - m_t k e^{kt}}{(e^{kt})^2} = \frac{m_t' - k m_t}{e^{kt}} \leq 0$$

$\Rightarrow t \mapsto \frac{m_t}{e^{kt}}$ decrescente

$$\Rightarrow t \geq 0 : \frac{m_t}{e^{kt}} \leq \frac{m_0}{e^0} = m_0 \Rightarrow m_t \leq e^{kt} m_0 \quad \text{per } t \geq 0$$

$$\text{Similmente } \frac{d}{dt} \left(\frac{m_t}{e^{-kt}} \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow t < 0 : \frac{m_t}{e^{-kt}} \leq \frac{m_0}{e^0} = m_0 \Rightarrow m_t \leq m_0 e^{-kt} = m_0 e^{kt} \quad \underset{t < 0}{\square}$$

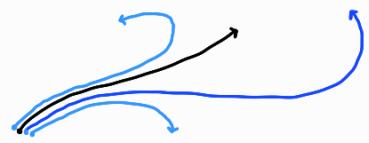
Questa prop afornitce una stima di $\Delta_{T,\varepsilon}$:

$$\forall T > 0 \quad \exists \Delta_{T,\varepsilon} > 0 \quad t \in \mathbb{R} \quad \|y_0 - z_0\| \leq \Delta_{T,\varepsilon} \Rightarrow \|y_t - z_t\| \leq \varepsilon \quad \forall |t| \leq T$$

Sappiamo $\|y_t - z_t\| \leq e^{kT} \|y_0 - z_0\| \leq e^{kT} \Delta_{T,\varepsilon}$, dunque ci basta scegliere $\Delta_{T,\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{e^{kT}}$

osr per $T \rightarrow \infty$, $\Delta_{T,\varepsilon} \rightarrow 0$ (molto rapidamente)

def se le soluzioni si separano con velocità max, allora si dice che la dinamica
o l'eq. diff. ha "dipendenza sensibile dai dati iniziali"



In dim 1 e 2 i comportamenti avranno sono semplici; in dim superiore, invece, sono complicati

Dipendenza dai parametri

def "campo vett. su Ω che dipende da k parametri" è una mappa

$$X: \Omega \times P \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, \mu) \mapsto X(x, \mu) =: \underbrace{x_\mu}_\text{in questo modo, fissati i parametri ho un normale campo vettoriale}$$

$P \subseteq \mathbb{R}^k$ aperto

in questo modo, fissati i parametri ho un normale campo vettoriale

prop se $X \in C^\infty$, allora $\forall z_0, t \in \overset{\circ}{P} \subseteq \mathbb{R}^k$ $\mu \mapsto \phi_t^{x_\mu}(z_0)$ è C^∞

dimo considero: $\begin{cases} \dot{z} = X(z, \mu) \\ \dot{\mu} = 0 \end{cases} \quad \Omega \times P \ni (z, \mu)$

A dato iniziale (z_0, μ_0) ho una soluzione (z_t, μ_t) e allora

$$\begin{cases} z_t = \phi_t^{x_{\mu_0}}(z_0) \\ \mu_t = \mu_0 \end{cases} \quad \text{è } C^\infty \text{ in } (z_0, \mu_0)$$

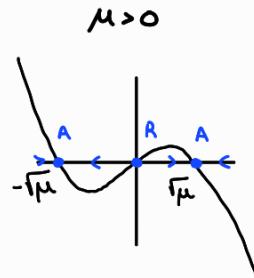
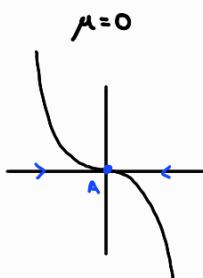
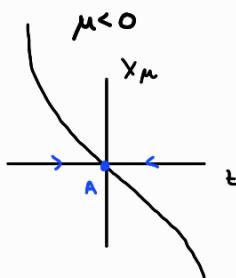
$$\Rightarrow z_t = \phi_t^{x_{\mu_0}}(z_0) \text{ è } C^\infty \text{ in } \mu_0$$

□

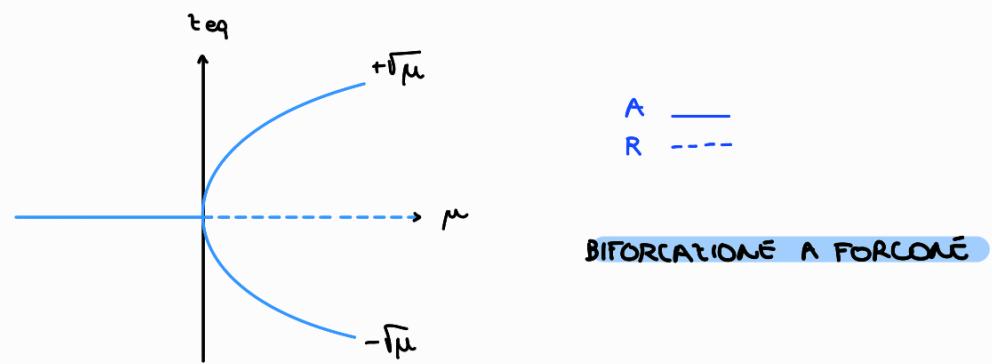
Anche in questo caso c'è da aspettarsi che per tempi grandi due soluzioni con $\mu_0 \neq \mu_1$,

siano drasticamente diverse: in questi casi si creano le biforcazioni

esempio i) $\dot{z} = z(\mu - z^2) \quad z \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$



Tracciamo il diagramma di biforcazione



$$\text{ii) } \dot{z} = z(\mu - z), \quad z \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

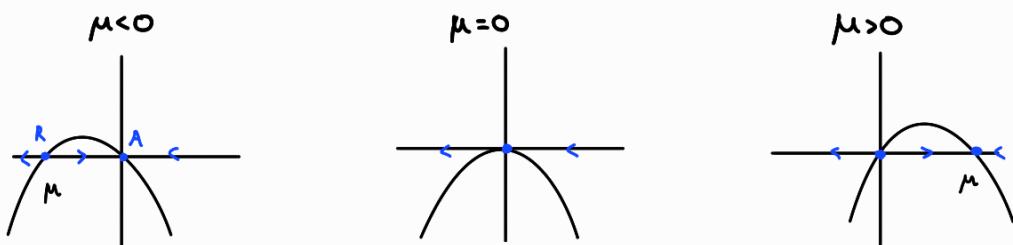
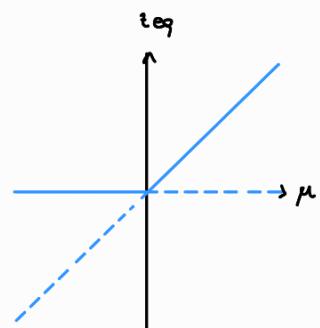


diagramma di biforcazione:



CONIUGAZIONI DI FLUSSI

def $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ aperti di \mathbb{R}^n

- è "diffeomorfismo" se:
 - differenziabile
 - invertibile
 - inverso differenziabile
- è "diffeo. locale" a $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}$ se \exists intorno U di x t.c.
 $\varphi|_U: U \rightarrow \varphi(U)$ è diffeo
- è "diffeo. locale" se è diffeo. locale in ogni punto di Ω

prop Un diffeo. locale è diffeo. se e solo se è invertibile

TEOREMA (funzione inversa). $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ è diffeo. locale in \tilde{x} se e solo se $\det[\varphi'(\tilde{x})] \neq 0$

def X campo vett. su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

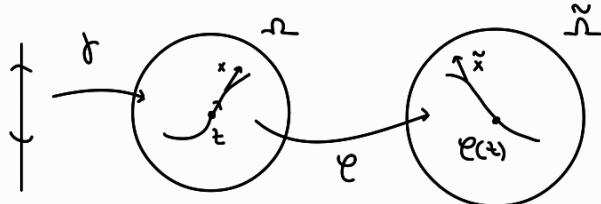
\tilde{X} campo vett. su $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$

$\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ diffeo

Diciamo che Ω "congiuga" X e \tilde{X} ($\dot{x} = X(t) \Rightarrow \dot{\tilde{x}} = \tilde{X}(\varphi(x))$ se, per esempio, $\varphi^t \circ \phi^x$)

se manda curve integrali di X in curve integrali di \tilde{X}

Ovvero, se γ è curva integrale di X , allora $\varphi \circ \gamma$ è curva integrale di \tilde{X}



prop Dati φ e X sì \tilde{X} coniugato a X da φ ed è $\tilde{X} = (\varphi' x) \circ \varphi'$

$$\text{cioè } \forall y \in \tilde{\Omega} \quad \tilde{X}(y) = (\varphi' x)(\varphi''(y)) \quad \begin{array}{l} \text{valore } \varphi' \text{ e } x \text{ in } \varphi''(y) \\ \text{e poi faccio il prodotto} \end{array}$$

$$= \underbrace{\varphi'(\varphi''(y))}_{\text{matrice}} \underbrace{X(\varphi''(y))}_{\text{vettore}}$$

$$\forall z \in \Omega \quad \tilde{X}(\varphi(z)) = \underbrace{\varphi'(z)}_{\text{matrice}} \underbrace{X(z)}_{\text{vettore}} \Rightarrow \text{vettore}$$

dim $t \mapsto \gamma(t)$ curva integrale di $X \Rightarrow \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$

considero $\tilde{\gamma} := \varphi \circ \gamma$, $t \mapsto \tilde{\gamma}(t) = \varphi(\gamma(t))$

$$\tilde{f}' = (\varphi \circ f)' = (\varphi' \circ f) \cdot f'$$

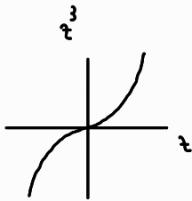
$$\begin{aligned} f' &= x \circ \tilde{f} \\ &= (\varphi' \circ f)(x \circ f) \\ &= (\varphi' x) \circ \varphi^{-1} \circ \tilde{f} \\ &= \tilde{x} \circ \tilde{f} \end{aligned}$$

oss suppongo di avere $\Omega \xrightarrow[\text{diffeo}]{\varphi} \tilde{\Omega}$
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$

esempio 1) $\dot{z} = z^2$, $z \in \mathbb{R}_+$

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$z \mapsto z^3 =: y$$



voglio riscrivere il campo vettoriale facendo un cambio di coordinate:

① formula generale utile nelle questioni teoriche

$$\begin{aligned} X(z) &= z^2 \\ \varphi'(z) &= 3z^2 \\ \varphi^{-1}(y) &= y^{1/3} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \varphi'(z) X(z) = 3z^4$$

sostituisco $z = y^{1/3}$

$$\Rightarrow \dot{X}(y) = 3y^{4/3} \quad \Rightarrow \dot{y} = 3y^{1/3}$$

c'è anche un altro modo, più facile, utilizzando la regola della catena

② derivare l'equazione utile regole esercizi del campo vettoriale

$$t \mapsto z(t) \text{ soluzione di } \dot{z} = z^2$$

$$t \mapsto y(t) := \varphi(z(t)) = z(t)^3$$

$$\frac{dy}{dt} = 3z(t)^2 z'(t) = 3z(t)^4 = 3y(t)^{4/3}$$

$$\Rightarrow \dot{y} = 3y^{4/3}$$

Considero $y = z^3$ e derivo lungo la soluzione

$$\dot{y} = 3z^2 \dot{z} = 3z^4 = 3y^{4/3}$$

2) $\dot{z} = Az$, $z \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(t) = Pz \text{ con } P \in GL(n)$$

① $\varphi'(t) = P$

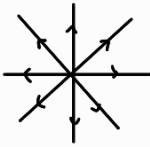
$$\frac{\partial \tilde{P}_i(z)}{\partial z_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} (P_z)_i = \frac{\partial}{\partial z_j} \sum_{h=1}^n P_{ih} z_h = \sum_h P_{ih} \frac{\partial z_h}{\partial z_j} = \sum_h P_{ih} \delta_{jh} = P_{ij}$$

$$\tilde{x}(y) = (\mathcal{C}'x)(\mathcal{C}^{-1}(y)) \stackrel{P^{-1}y}{\sim}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}'(\mathcal{C}^{-1}(y)) &= P \\ \mathcal{C}'(\mathcal{C}^{-1}(y)) \cdot x(\mathcal{C}^{-1}(y)) &= PA \mathcal{C}^{-1}(y) \\ &= PA P^{-1}y \end{aligned}$$

② $y = Pt$, $t = P^{-1}y$
 $\dot{y} = P\dot{t} = PA\tau = PA P^{-1}\tau$

3) $\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1 \\ \dot{z}_2 = z_2 \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}^2$



$$\mathcal{C}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(z_1, z_2) \mapsto (2z_1, z_1, z_2) = (y_1, y_2)$$

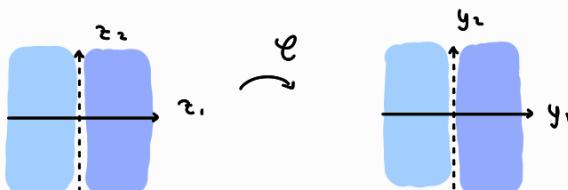
verifichiamo se è diffeo.

$$\mathcal{C}'(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \quad \det(\mathcal{C}'(z_1, z_2)) = 2z_1 \neq 0 \quad \text{se } z_1 \neq 0$$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ è diffeo (locale) in $\mathbb{R}^2 \setminus \{z_1=0\}$. vediamo che è diffeo in se stesso.

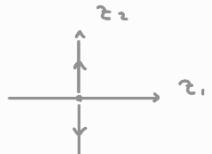
$$\begin{cases} 2z_1 = y_1 \\ z_1 z_2 = y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = \frac{y_1}{2} \\ z_2 = \frac{y_2}{z_1} = 2 \frac{y_2}{y_1} \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathcal{C}^{-1}$ esiste $y_1 \neq 0$



Oss Supponiamo un'ard. che per l'asse $z_1 = 0$

da quel punto in poi non tocca più che succede, perché il cambio di coordinate non è definito. In questo caso non c'è problema, dato che l'asse $z_1 = 0$ è ricoperto da altre



② Scrivere C.C. lungo le soluzioni

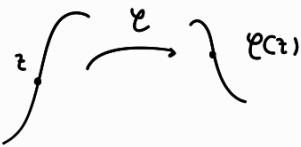
$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 2\dot{z}_1 = 2z_1 = y_1 \\ \dot{y}_2 &= \dot{z}_1 z_2 + z_1 \dot{z}_2 = 2z_1 z_2 = 2 \frac{y_1}{2} \cdot 2 \frac{y_2}{y_1} = 2y_2 = 2y_1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 \\ \dot{y}_2 = 2y_1 \end{cases}$$

③ Formula: $\tilde{x}(\mathcal{C}(z)) = \mathcal{C}'(z) X(z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z_1 \\ z_1 z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \tilde{x}(y)$

X, \tilde{X} complessi, mappa su t
fittizio del flusso

$$t \mapsto \gamma_t(z) = \phi_t^X(z)$$

$$t \mapsto \hat{\gamma}_t(y) = \phi_t^{\tilde{X}}(y)$$



$$\tilde{F}_{\varphi_t}(t) = \varphi(\tilde{\gamma}_t(z)) \quad \forall t, \forall z$$

Riscriviamo in termini di flusso: $\phi_t^{\tilde{X}}(\varphi(z)) = \varphi(\phi_t^X(z)) \quad \forall t, \forall z$

$$\Rightarrow \phi_t^{\tilde{X}} \circ \varphi = \varphi \circ \phi_t^X \quad \forall t \quad \Rightarrow \phi_t^{\tilde{X}} = \varphi \circ \phi_t^X \circ \varphi^{-1}$$

In altre parole: se φ è diffeo allora il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{\Omega} \\ \downarrow \phi_t^X & \curvearrowright & \downarrow \phi_t^{\tilde{X}} \\ \Omega & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{\Omega} \end{array}$$

Esempio $\dot{z} = Az = X(z)$

$$\varphi(t) = P t \quad \det P \neq 0$$

$$\tilde{X}(y) = PAP^{-1}y$$

$$\phi_t^X = \exp(tA)$$

$$\phi_t^{\tilde{X}} = \exp(tPAP^{-1}) = P \exp(tA) P^{-1} = \varphi \circ \phi_t^X \circ \varphi^{-1}$$

come già sapiamo!

Vogliamo capire perché nel C.C. appare la matrice Jacobiana del campo vett.

In generale, possiamo usare i diffeo per trasportare funzione da Ω in funzione da $\tilde{\Omega}$

def $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ diffeo

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{\Omega} \\ \tilde{f} \circ \varphi & \nearrow & \searrow f \circ \varphi^{-1} \\ \text{IR}^n & & \text{IR}^n \end{array}$$

"però avrei la funzione f sul punto immagine (che $\varphi(x) = \tilde{x}$)"

$\varphi^* f := f \circ \varphi^{-1}$ è detto "push forward di f sotto φ "

$\varphi^* \tilde{f} := \tilde{f} \circ \varphi$ è detto = pull back di \tilde{f} sotto φ "

"però indietro" \tilde{f} da $\tilde{\Omega}$ in Ω

Usiamo lo stesso approccio per i campi vettoriali:

$$\begin{array}{ccc} \text{cavo vett.} & \Omega & \xrightarrow{\varphi} \tilde{\Omega} \\ x & \downarrow & \downarrow \tilde{x} \\ \text{provvvisorialmente} & \text{IR}^n & \xrightarrow{\varphi'} \text{IR}^n \\ \text{ultimo IR}^n, sarebbe} & & \xleftarrow{\varphi'^{-1}} \text{IR}^n \end{array}$$

della trattazione precedente:
 $\tilde{x} = (\varphi' x) \circ \varphi^{-1}$

e' utile per ricordarsi la formula di conjugazione

questo diagramma è del tutto analogo a quello delle funzioni, ma c'è un'inversione.

(*)

$y \mapsto \psi^{-1}(y) \mapsto x(\psi^{-1}(y))$, ma non è chiaro, solo dal diagramma, in quale punto venga valutata la matrice Jacobiana ψ' . Non sappiamo che va valutata in $\psi^{-1}(y)$, ma siccome questo non è vero, significa che c'è un problema da qualche parte: deride dal fatto che il campo vettoriale non va pensato come una mappa in \mathbb{R}^n , ma come una mappa sul fibrato tangente.

Per questo motivo studieremo il "follemento tangente"

Follemento tangente di mappe

$M \subseteq \mathbb{R}^d$, $P \subseteq \mathbb{R}^k$ aperti

$\psi: M \rightarrow P$ differentiabile
(non necess. diffeo)



Prendo $z \in M$, $v \in T_z M$

intervallo aperto che contiene l'origine

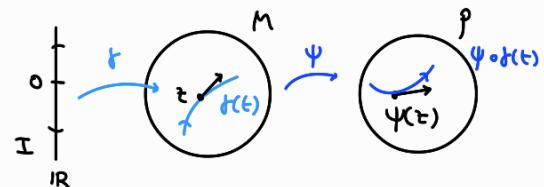
3 curva $\gamma: I \rightarrow M$, $\gamma(0) = z$, $\gamma'(0) = v$

$\Rightarrow t \mapsto \psi \circ \gamma: I \rightarrow P$

$$(\psi \circ \gamma)(0) = \psi(\gamma(0)) = \psi(z)$$

$$(\psi \circ \gamma)'(0) \in T_{\psi(z)} P$$

$$\psi'(\gamma(0)) \gamma'(0) = \psi'(z) v$$



def/oss $\forall z \in M$ $\psi: M \rightarrow P$ differentiabile induce una mappa (lineare)

$$T_z \psi: T_z M \rightarrow T_{\psi(z)} P$$

$$v \mapsto \psi'(z)v$$

detta "mappa tangente" di ψ in z

Questo spiega perché nel cambio di coordinate debba apparire la matrice Jacobiana!

def $TM = \{(z, v) : z \in M, v \in T_z M\} = M \times \mathbb{R}^d$

$$TP = \{(y, w) : y \in P, w \in T_y P\}$$

La mappa indotta da $\psi: P \rightarrow M$

$$T\psi: TM \rightarrow TP$$

$$(v, z) \mapsto (\psi(z), \psi'(z)v)$$

perché vettori tangent
si trasformano tramite la matrice Jacobiana

e' detta "follemento tangente di ψ "

Ricordo di diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{\mathbb{R}} \\ x \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\varphi'} & \mathbb{R}^n \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{dalla relazione precedente:} \\ \varphi_* x = (\varphi' x) \circ \varphi'^{-1} \\ \text{push-forward di } x \text{ fatto } \varphi \end{array}$$

Risolvere del "pericolo":

$$X^t : \mathbb{R} \longrightarrow T\mathbb{R}$$

$$t \longmapsto (t, X(t))$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{\mathbb{R}} \\ x \uparrow & \text{--->} & \downarrow \varphi_* X^t \\ T\mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi_*} & T\tilde{\mathbb{R}} \end{array}$$

$$T\varphi \circ X^t(t) = T\varphi(t, X(t)) = (\varphi(t), \varphi'(t) X(t))$$

rassunto

$$\Psi : M \longrightarrow P$$

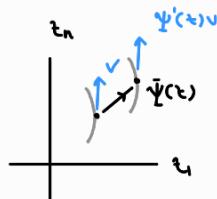
$$T\Psi : TM \longrightarrow TP$$

$$(z, v) \longmapsto (\Psi(z), \Psi'(z)v)$$

esempi 1) $\Psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (z \in \mathbb{R}^n)$

$$z \longmapsto z + a$$

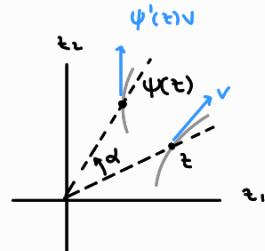
$$\Psi'(z)v = 1v = v$$



2) $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$z \longmapsto R_\alpha z, \quad R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Psi'(z)v = R_\alpha v$$



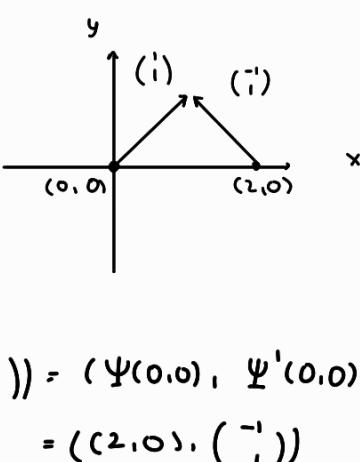
3) $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto (x^2 - y + z, xy + y)$$

$$\Psi'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ y & 1+x \end{pmatrix}$$

$$\Psi'(x, y) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xu - v \\ yu + (1+x)v \end{pmatrix} \Big|_{\substack{y=0 \\ x=0 \\ u=1 \\ v=1}}$$

$$(x, y) = (0, 0), \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T\Psi((0, 0), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = (\Psi(0, 0), \Psi'(0, 0)(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}))$$



prop $\Psi: M \rightarrow P$ diffuso.

$T\Psi: TM \rightarrow TP$ è diffuso e $(T\Psi)^{-1} = T(\Psi^{-1})$

$$\text{dim } \text{1) } T\Psi(z, v) = (\Psi(z), \Psi'(z)v) \quad \begin{array}{l} \text{diff} \leftarrow \text{ovv} \\ \text{invertibile } \textcircled{1} \\ \text{inverso diff } \textcircled{2} \end{array}$$

① dato $(y, w) \in TP$ richiede re $\exists! (z, v) \in TM$ tc $T\Psi(z, v) = (y, w)$

$$T\Psi(z, v) = (\Psi(z), \Psi'(z)v) \stackrel{!}{=} (y, w)$$

$$\begin{cases} z = \Psi^{-1}(y) \text{ perche' } \Psi \text{ diffuso} \\ v = (\Psi'(z))^{-1}w \text{ perche' } \Psi \text{ diffuso} \Rightarrow \Psi'(z) \text{ matrice invertibile} \end{cases}$$

② $(y, w) \mapsto (\underbrace{\Psi^{-1}(y)}_{\text{e diff}}, \underbrace{(\Psi'(z))^{-1}w}_{\text{e diff}})$ con $\Psi^{-1}(y) = z$

$$\underbrace{\Psi'(\Psi^{-1}(y))^{-1}}_{\text{diff}} \xrightarrow{\text{manca da capire se l'invera mi conferisce diff.}}$$

$z \mapsto L(z)$ diff e invertibile

$$\begin{pmatrix} L_{11}(z) & \cdots & L_{1n}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{n1}(z) & \cdots & L_{nn}(z) \end{pmatrix}$$

$$L(z)^{-1} = \frac{1}{\det(L(z))} \underbrace{C(z)^T}_{\substack{\text{matrice dei} \\ \text{cofattori}}}$$

$\det(L(z))$ e $C(z)^T$ sono prodotti e somme delle entrate di L ,

che dipendono in modo diff da z . Il det non si annulla,

dato che $L(z)$ invertibile, dunque l'inversa $L(z)^{-1}$ è effettivamente diff.

\Rightarrow invera è diff.

$$2) \quad \Psi^{-1} \circ \Psi = \text{id} \Rightarrow (\Psi^{-1} \circ \Psi)(z) = z$$

$$(\Psi^{-1} \circ \Psi)(z) = z$$

$$\underbrace{(\Psi^{-1})^{-1}(\Psi(z))}_{(\Psi'(z))^{-1}} \quad \Psi'(z) = z \quad \underset{\text{!}}{(T\Psi)^{-1}(y, w)}$$

$$\Rightarrow (y, w) \mapsto (\Psi^{-1}(y), (\Psi^{-1})^{-1}(\Psi(z))w) = (\Psi^{-1}(y), (\Psi^{-1})^{-1}(y)w)$$

$$= T(\Psi^{-1})(y, w) \quad \square$$

esercizio

$$M \xrightarrow{\Psi_1} P \xrightarrow{\Psi_2} N \quad \text{e, allora } T(\Psi_2 \circ \Psi_1) = T\Psi_2 \circ T\Psi_1.$$

Cambiamento di coordinate in equazioni II ordine

$$\ddot{x} = \psi(x, \dot{x}) \quad x \in C \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \psi(x, v) \end{cases}, \quad (x, v) \in TC = C \times \mathbb{R}^m$$

In TC posso fare cambiamenti di coordinate!

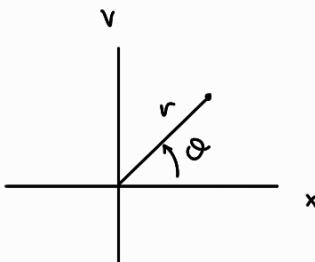
$$\mathbb{R}^{2m} \supseteq TC \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^{2m}$$

Esempio

(OA)

$$\omega = 1 \Rightarrow \dot{x} = -x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -x \end{cases}, \quad (x, v) \in \mathbb{R}^2$$



Voglio fare il cambio di coordinate da quelle cartesiane a quelle polari
(nuovo spazio delle soluz.)

$$(x, y) \mapsto (r, \theta) = (\sqrt{x^2+y^2}, \arctan \frac{y}{x})$$

e' definito
 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
(semiretta per $(0,0)$)
(esistono non c'e'
la bivalvocita')

Usciamo il cambio di coordinate inverso:

$$(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, v)$$

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \boxed{r \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta} & ! \quad v = \boxed{r \sin \theta} \\ \dot{y} = \boxed{r \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta} & ! \quad -x = \boxed{-r \cos \theta} \end{cases}$$

dove derivo
 r e θ come funzioni
del tempo t

$$c = \cos \theta$$

$$s = \sin \theta$$

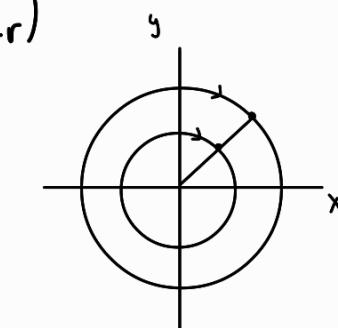
$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \dot{s} \\ -r \dot{c} \end{pmatrix}$$

matrice di rotazione
 \Rightarrow l'inversa è la trasposta

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \dot{s} \\ -r \dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases}$$

il moto sta fermo
l'angolo come con
velocità -1



è effettivamente un OA!

L'unica diff. è che quella appena ottenuta non è più un'eq. del II ordine
né per ρ né per θ !

domanda effetto del cambiamento di coordinate che mantiene la struttura del II ordine di un'eq. diff?

prop $f: C \rightarrow \tilde{C}$ diffeo fra spazi. di \mathbb{R}^n . Allora $T^f: TC \rightarrow T\tilde{C}$ (che è diffeo) coniuga ogni campo vett. del II ord. su TC in un campo vett. del II ord. su $T\tilde{C}$

oss Vale il viceversa

dum $\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \psi(x, v) \end{cases}, (x, v) \in TC = C \times \mathbb{R}^n$

Considero soluzione $t \mapsto (x_t, v_t)$

$$v_t = x_t' = \frac{dx_t}{dt}$$

Considero $t \mapsto T^f(x_t, v_t) = (\psi(x_t), \psi'(x_t)v_t) = (y_t, w_t)$:

$$y_t' = \frac{d}{dt} \psi(x_t) = \psi'(x_t)x_t' = \psi'(x_t)v_t = w_t$$

$$w_t' = \frac{d}{dt} (\psi'(x_t)v_t) = \dots$$

dunque è sol. di $\begin{cases} \dot{y} = w \\ \dot{w} = \dots \end{cases}$ che è del II ordine!

□

esempio $\ddot{x} = -(x+1), x \in \mathbb{R}$ fisico - □

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x+1$$

① $\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -(x+1) \end{cases}$

$$T^f(x, v) = (\psi(x), \psi'(x)v) = (x+1, v) = (y, w)$$

$$T^{\psi'}(x, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

...

② derivare due volte lungo le soluzioni di c.c.

$$y = x+1$$

$$\dot{y} = \dot{x}$$

$$\ddot{y} = \ddot{x} = -(x+1) = -y$$

oss In generale $\ddot{x} = \dot{y}(x, \dot{x})$, $y = \ddot{x}(x)$

$$\dot{y} = \dot{y}'(x) \dot{x}$$

$$\ddot{y} = \dot{y}'(x) \ddot{x} + \underbrace{\dot{y}''(x) \dot{x} \dot{x}}_{\text{non è ben scritto perché non rappresenta bene che oggetto è } \dot{y}''(x)}$$

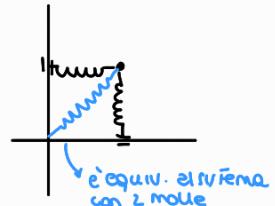
non è ben scritto perché non rappresenta bene che oggetto è $\dot{y}''(x)$

Se anche l'eq. di partenza non dipende dalla velocità, in generale si ha un'eq. differenziale che dipende (quadraticamente) dalla velocità.

esempio

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x \\ \ddot{y} = -\omega^2 x \end{cases}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 = C$$

Voglio usare coord. polari nello sp. delle configurazioni



Conviene dividere 2 volte il c.c. Lungo le soluzioni e usare il c.c. Invertito

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{r} \cos \theta - 2 \dot{r} \dot{\theta} \sin \theta - r \ddot{\theta} \sin \theta - r(\dot{\theta})^2 \cos \theta = -\omega^2 x = -\omega^2 r \cos \theta \\ \ddot{y} = \ddot{r} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\theta} \cos \theta + r \ddot{\theta} \cos \theta - r(\dot{\theta})^2 \sin \theta = -\omega^2 y = -\omega^2 r \sin \theta \end{cases}$$

Risolvere ...

$$\begin{cases} \ddot{r} = r \dot{\theta}^2 - \omega^2 r \\ \ddot{\theta} = -\frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} \end{cases}$$

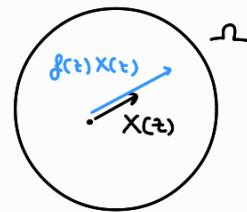
Si noti che il cambio di coordinate ha introdotto nelle equazioni una dipendenza dalle velocità che prima era assente (come notato nel precedente osservazione).

RISCALAMENTI DI CAMPI VETTORIALI / RIPARAMETRIZAZIONI DEL TEMPO

$$\dot{z} = \lambda(z), z \in \Omega$$

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$\dot{z} = f(z) X(z)$$



oss $t \mapsto \delta(t)$

$$s \mapsto t(s)$$

$\tilde{r}(s) = \delta(t(s))$ ha la stessa immagine anche se è percorsa a velocità diversa

Dunque se f è ovunque positiva le orbite rimangono esattamente le stesse, se f è ovunque negativa le orbite rimangono fatte ma si inverte il verso di percorrenza
Se vogliamo studiare le orbite, la dinamica, possiamo riparametrizzare

prop $f(z) = k > 0 \quad \forall z$

$$\dot{z} = X(z) \quad t \mapsto \Phi_t^X(z)$$

$$\dot{z} = k X(z) \quad t \mapsto \Phi_t^{kX}(z)$$

Aurora $\Phi_t^{kX}(z) = \tilde{\Phi}_{kt}^X(z) \quad \forall t, \forall z$

dimo mostriamo che danno sol. della stessa eq. diff.

$$\frac{d}{dt} \Phi_t^{kX}(z) = k X(\Phi_t^{kX}(z))$$

\downarrow
 $\tilde{f}(t)$

$$\frac{d}{dt} \Phi_{kt}^X(z) = k X(\Phi_{kt}^X(z))$$

\downarrow
 $\tilde{f}(t)$

$$\begin{cases} \dot{f}(t) = k X(f(t)) \\ f(0) = z \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{f}}(t) = k X(\tilde{f}(t)) \\ \tilde{f}(0) = 0 \end{cases}$$

Per l'unicità $f \equiv \tilde{f}$

esempio 1) $\dot{z} = kz, z \in \mathbb{R}, k > 0$

ha lo stesso ritratto in fare di $\dot{z} = z, z \in \mathbb{R}$

\Rightarrow finché $k > 0$ non ci sono biforcazioni

$$t \mapsto e^{kt} z_0$$

← →

2) (eq. logistica)

$$\begin{aligned} \dot{z} &= kz - hz^2 & k, h > 0 \\ \text{c.c.} \quad \left(\begin{array}{l} \dot{z} = z - \frac{h}{k} z^2 \\ y = \alpha z, \quad \alpha > 0 \end{array} \right) & \frac{h}{k} > 0 \quad \text{ha lo stesso risultato in fare, ma un parametro in meno!} \\ y &= \alpha z, \quad \alpha > 0 \\ \dot{y} &= \alpha \dot{z} = \alpha kz - \alpha hz^2 = ky - \frac{h}{\alpha} y^2 & \text{riscalam/} \\ \alpha = \frac{h}{k} \Rightarrow \dot{y} &= ky - ky^2 = k(y - y^2) \Rightarrow \dot{y} = y - y^2 \quad \text{riparam.} \end{aligned}$$

Cambiamenti di coordinate dipendenti dal tempo

def un diffeomorfismo che dipende da t è una mappa

$$\varphi: \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \tilde{\Omega}$$

$$(z, t) \longmapsto \varphi(z, t) =: \varphi_t(z)$$

$\forall t \quad \varphi_t: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ è diffeo

def un campo vett. che dipende da t è una mappa diff.

$$X: \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(z, t) \longmapsto X(z, t) =: X_t(z)$$

$$(\forall t, \quad X_t(z) \in T_z \Omega)$$

Vediamo cosa succede quando facciamo un c.c. che dipende dal tempo

$$(*) \dot{z} = X(z, t) \quad t \in \Omega$$

\downarrow diffeo φ t-dip

$$y \in \tilde{\Omega}$$

Soluzione $t \mapsto t_t$ da $(*)$

$$t \mapsto \varphi(z_t, t) =: y_t$$

$$\frac{d}{dt} \varphi(z_t, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z_t, t) \dot{z}_t + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(z_t, t) = \varphi'_t(z_t) X_t(z_t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(z_t, t)$$

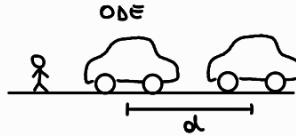
$$\Rightarrow \dot{y} = \left(\varphi'_t X_t + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \cdot \varphi_t^{-1}$$

\downarrow il nuovo punto si sposta non solo perche' ha ricevuto fatto influente della flusso, ma anche perche' il cambio di coordinate lo fa muovere

In generale, un cambiamento di coordinate dipendente dal tempo ride non soltanto le equazioni autonome. Tuttavia, puo' anche capitare il contrario, come nell'esempio seguente:

ESEMPIO

(traffico)

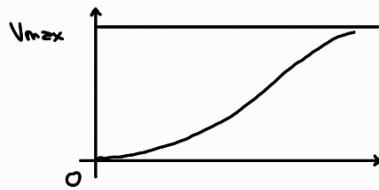


Il nostro modello si basa sull'idea che la velocità di una macchina dipenda dalla sua distanza dalla macchina che si muove davanti.

"velocità ottimale"

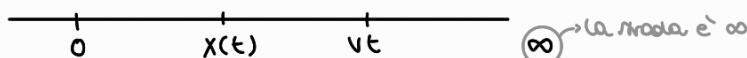
$$V_{opt} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

non puo' tornare indietro



In funzione della distanza la curva della velocità ottimale è una curva di questo tipo: monotonica crescente

$$V_{max} > V > 0$$

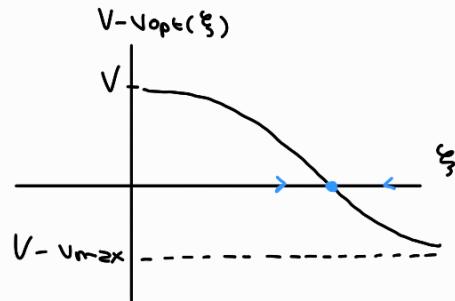
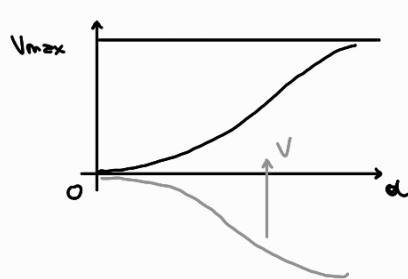


$$\dot{x}(t) = V_{opt} \underbrace{(vt - x(t))}_{\xi} \quad (*)$$

Introduco un cc. t-dip. $\xi(x,t) = vt - x$

Derivo lungo le soluzioni di (*):

$$\dot{\xi} = V - \dot{x} = V - V_{opt} (vt - x) = V - V_{opt} (\xi) , \quad \xi \in \mathbb{R}_+$$



\Rightarrow c'e' un unico eq. ellittico!

Nota: un'assunzione forte è che il cambio di velocità sia istantaneo, un modello più realistico dare considerazione dei ritardi (tempi e meccanica della macchina)

SOTTOVARIETÀ INVARIANTI

Ricambi sulle sottovarietà

$A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^k$ aperti.

1. m, k , $\Psi : A \rightarrow B$ è "sommersore in $a \in A$ " se $\Psi'(a)$ ha rango $= k = \dim B$

Ovvero, se data $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_k)$, si ha $D\Psi_1(a), \dots, D\Psi_k(a)$ lin. indip.

Si dice che Ψ_1, \dots, Ψ_k sono "funzionalmente indipendenti"

Questo è equiv. a chiedere che la sua mappa tangente

$T_a \Psi' : T_a A \longrightarrow T_{\Psi(a)} B$ sia suriettiva.

$$v \longmapsto \Psi'(a)v$$

Ψ è "sommersore" se è form. in ogni $a \in A$.

opp $m=k$ Ψ form. $\equiv \Psi$ diffuso locale

↪ th invertibilità locale
 $\text{rk}(J\Psi) = m \Leftrightarrow \det(J\Psi) \neq 0$

2. $m \leq k$, $\Psi : A \rightarrow B$ è "immersore in $a \in A$ " se $\Psi'(a)$ ha rango $= m = \dim A$

Ovvero, se data $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_k)$, si ha $D\Psi_1(a), \dots, D\Psi_m(a)$ lin. indip.

Si dice che Ψ_1, \dots, Ψ_k sono "funzionalmente indipendenti"

Questo è equiv. a chiedere che la sua mappa tangente

$T_a \Psi' : T_a A \longrightarrow T_{\Psi(a)} B$ sia iniettiva.

$$v \longmapsto \Psi'(a)v$$

Ψ è "immersore" se è imm. in ogni $a \in A$.

opp $m=k$ Ψ imm. $\equiv \Psi$ diffuso locale

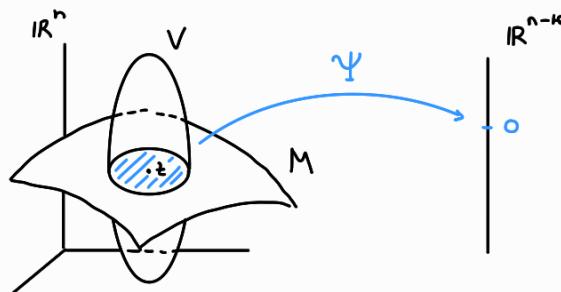
def $M \subseteq \mathbb{R}^n$ è sottovariet. di dim $k \leq n$ se:

↪ SOTTOVARIETÀ
 - insieme di livello di una sommersore
 - immagine di un'immersore

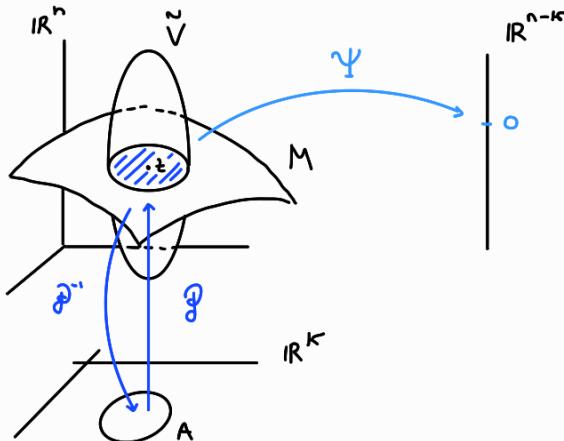
- $V \subseteq M$ è intorno v di t in \mathbb{R}^n e sommersore

$$\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_{n-k}) : V \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

$$\text{tc } V \cap M = \Psi^{-1}(0)$$



- \exists $\tilde{\psi}$ intorno a \tilde{v} in \mathbb{R}^n , un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^k$ e una immersione iniettiva $\tilde{\varphi}: A \rightarrow \tilde{V}$ tc $M \cap \tilde{V} = \tilde{\varphi}(A)$
 $\tilde{\varphi}$ è detta "parametrizzazione locale" di M



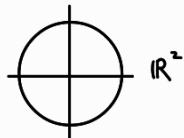
Oss $\tilde{\varphi}: A \rightarrow \tilde{\varphi}(A) = M \cap \tilde{V}$ è invertibile

$\tilde{\varphi}^{-1}: M \cap \tilde{V} \rightarrow A$ è detta "sistema di coordinate" o "carta" locale di M .

Oss Nella top. sottoposta $\tilde{\varphi}^{-1}$ è continua, dunque $\tilde{\varphi}$ è un omorfismo.

Localmente la sottoposta M è omorfo ad un aperto di \mathbb{R}^k

Oss Non ogni sottoposta è immagine di un'unica param.



Il cerchio è compatto e non può essere omorfo ad un aperto di \mathbb{R}

Oss Tutto ciò ha ferro anche se $k=0$ \circ $k=n$
 punti isolati
 aperti di \mathbb{R}^n

Esempio (1) Cerchio di raggio R in \mathbb{R}^2)

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\} \text{ sottov. 1-dim di } \mathbb{R}^2$$

$$1. \quad \Psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto x^2 + y^2 - R^2$$

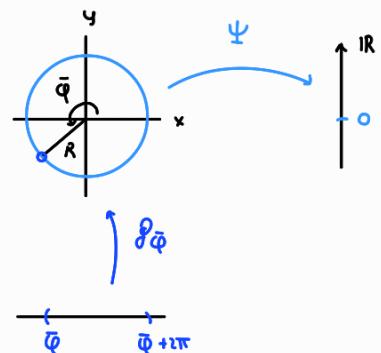
$$\Psi'(x,y) = (2x, 2y) \neq (0,0) \quad \forall (x,y) \in C$$

$$2. \quad \tilde{\varphi}_{\bar{\varphi}}: (\bar{\varphi}, \bar{\varphi} + 2\pi) \rightarrow C$$

$$\varphi \mapsto (R \cos \varphi, R \sin \varphi)$$

$$\nabla \tilde{\varphi}_{\bar{\varphi}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\text{altra param: } \tilde{\varphi}(x) = (x, \sqrt{R^2 - x^2}))$$



(2) Sfera di raggio R in \mathbb{R}^3)

$$S^2_R = \{ z \in \mathbb{R}^3 : \|z\| = R \} = \Psi^{-1}(0)$$

$$1. \quad \Psi(z) = \|z\|^2 - R^2$$

$$\Psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{dim } S^2 = 2$$

$$\nabla \Psi(z) = 2\|z\| \nabla \|z\| \quad (z \neq 0 \quad \forall z \in S^2)$$

$$= 2\|z\| \frac{z}{\|z\|} = 2z \neq 0 \quad \forall z \in S^2$$

$\Rightarrow S^2_R$ è zero di una norma.

$$2. \quad (\varphi, \theta) \mapsto (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta)$$

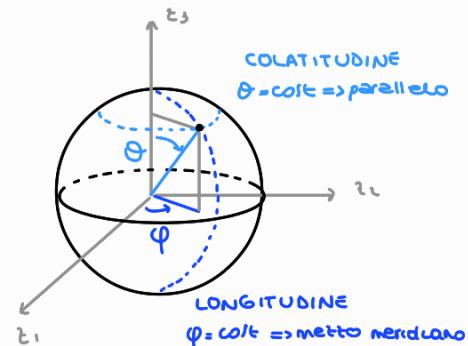
$$(0, 2\pi) \times (0, \pi) \longrightarrow S^2_R \setminus \{(0, 0, \pm R)\}$$

$$\text{oppure} \quad (\bar{\varphi}, \bar{\varphi} + \pi) \times (0, \pi) \quad + \text{escludo un meridiano}$$

$$\text{altri param: } \begin{cases} x^2 + y^2 < 1 \\ y \end{cases} \longrightarrow S^2_R$$

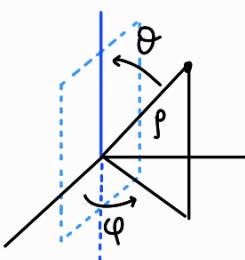
$$(x, y) \mapsto (x, y, \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$$

Se si calcola la matrice Jacobiana, si vede che nei poli c'è una catena di tipo (è < 2)



OSS Siccome gli aperti di \mathbb{R}^n sono fattori n -dim, possiamo introdurre dei nuovi sistemi di coordinate

\mathbb{R}^3 : coordinate polari sferiche

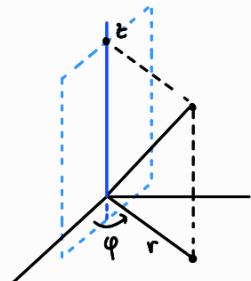


$$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{ente } z\} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{piano verticale}\}$$

$$\rho \in \mathbb{R}_+, \theta \in (0, \pi), \varphi \in (\bar{\varphi}, \bar{\varphi} + \pi)$$

(NON $(0, 2\pi)$)

coordinate cilindriche



$$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{ente } z\} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{piano verticale}\}$$

$$r \in \mathbb{R}_+, \varphi \in (\bar{\varphi} + \pi, \bar{\varphi} + 2\pi), z \in \mathbb{R}$$

$M \subseteq \mathbb{R}^n$, $\dim M = k$ sottovarietà

$$T_x M = \{ \delta'(0) \mid \delta: I \longrightarrow M, \delta(0) = x \}$$

$C T_x \mathbb{R}^n$ vettori. di $T_x \mathbb{R}^n$ di $\dim = \dim M$

$$\textcircled{1} \quad M \text{ loc } = \Psi^{-1}(0) \ni z$$

$\Psi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ sommersore

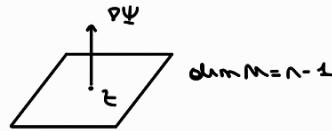
$$T_z M = \ker(\Psi'(z))$$

$$\underline{\dim} \subseteq: \quad r(t) \in M \Rightarrow \Psi(r(t)) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \Psi'(r(t)) r'(t) = 0 \quad \forall t \\ \Rightarrow \Psi'(z) r'(0) = 0$$

esempio

$$\Psi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

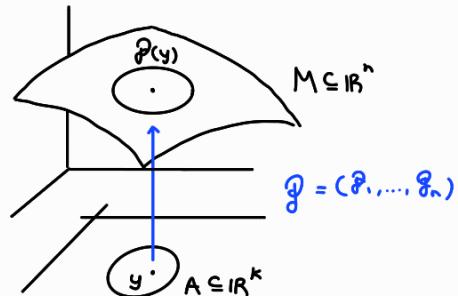
$$T_z M = \ker(\Psi'(0)) = (\nabla \Psi(z))^\perp$$



$$\textcircled{2} \quad \varphi: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ immersore}$$

$$T_{\varphi(y)} M = \text{Rg}(\varphi'(y)) = \text{Im}(\varphi'(y))$$

immagine



esempio

$$C_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$$

curva sul cerchio

$$\textcircled{1} \quad t \mapsto (x(t), y(t)) = r(t) \in C_R$$

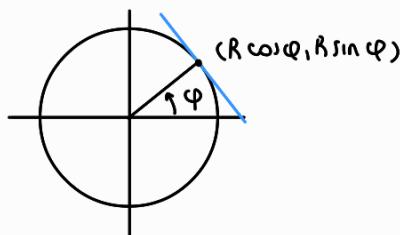
$$\text{usiamo parametrizzazione} \quad \delta'(0) = (x'(0), y'(0)) = (u_1, u_2)$$

$$\Psi(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 \text{ sommersore}$$

$$\nabla \Psi(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\delta'(0) \perp C_R \Rightarrow \nabla \Psi \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 2(xu_1 + yu_2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$$



valore int = 0 e ottenuto:

$$\delta(0) = (R \cos(\varphi(0)), R \sin(\varphi(0))) = (x, y)$$

$$\delta'(0) = R \varphi'(0) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(0)) \\ \cos(\varphi(0)) \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

↑ come ottenuto sopra.

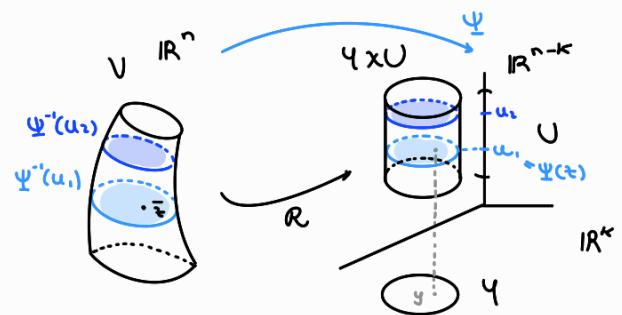
$$\textcircled{2} \quad t \mapsto \varphi(t) \text{ parametrizzazione}$$

$$r(t) = (R \cos(\varphi(t)), R \sin(\varphi(t)))$$

$$r'(t) = (-R \varphi'(t) \sin(\varphi(t)), R \varphi'(t) \cos(\varphi(t))) = R \varphi'(t) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix}$$

TEOREMA (delle immersioni) . $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ sommersore in $V \in \mathbb{R}^n$. Allora \exists :

- intorno V di \bar{z}
- apert. $Y \subseteq \mathbb{R}^k$, $U \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$
- $R : V \rightarrow Y \times U$ diffeo tc
 $\forall u \in U \quad R(\Psi^{-1}(u) \cap V) = Y \times \{u\}$
"raddrizzante"



Informalmente, questo diffeo "raddrizza" gli insiemni di livello di Ψ in V in sottospazi che hanno $n-k$ coordinate costanti.

oss $z \xrightarrow{R} (y, \Psi(z)) \quad \exists y \Rightarrow$ le y possono essere utilizzate come coordinate sugli insiemni di livello di V
 \Rightarrow possiamo introdurre delle coordinate (y, u) non solo sugli insiemni di livello, ma su tutto lo spazio di partenza, dove u finisce l'insieme di livello su cui si trovano

def $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ sommersore, localmente \exists coord. $(y, u) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$
e si dicono "coordinate adattate" a Ψ

sono coordinate nello spazio di partenza della sommersore

oss $R^{-1}|_{Y \times \{u\}} : Y \rightarrow \Psi^{-1}(u) \cap V \quad \text{è immersione e dà una parametrizzazione}$
locale di $\Psi^{-1}(u)$

esempio $\Psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+$ è diff ed è sommers.

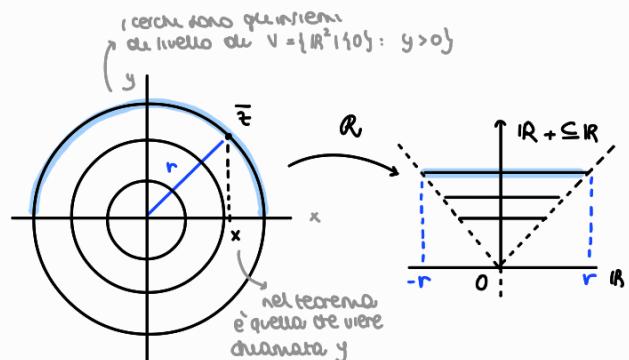
$$(x, y) := z \mapsto \|z\|^2$$

$$y > 0 : \quad R(z) = (\underbrace{?}_{\text{reparam}}, \Psi(z) = \|z\|^2) \\ R(x, y) = (x, x^2 + y^2)$$

$$V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \ni (x, y)$$

$$Y = \mathbb{R}, \quad U = \mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \xrightarrow{R} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ (x, y) \mapsto (x, x^2 + y^2)$$



si verifica con
matrice Jacob.
+ invertibilità

E' diffuso, ma non va bene perché il triangolo ottenuto non è il prodotto tra un aperto di \mathbb{R}^k e un aperto di \mathbb{R}^{n-k} .

Abbiamo scelto la mappa spezzata: vogliamo rendere i due "bordi" del

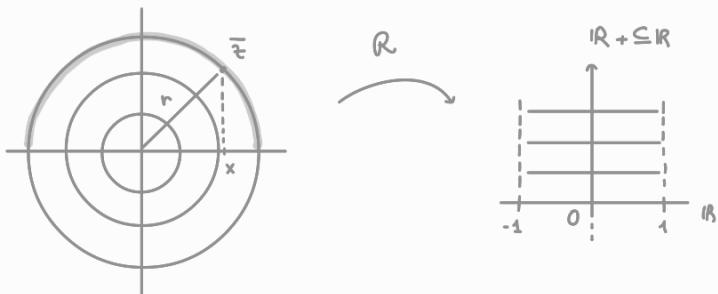
rispetto due rette verticali.

$$\text{Scegliamo } R(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2 \right).$$

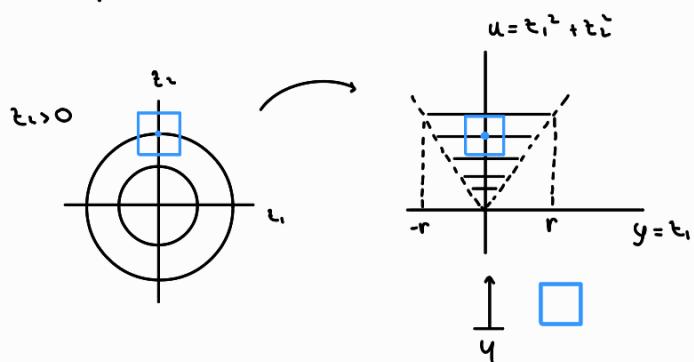
$$\text{E' diffeo locale, infatti, } J\mathcal{R}(x,y) = \begin{pmatrix} \left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^{3/2} & -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\det J\mathcal{R} = \frac{2}{(x^2+y^2)^{3/2}} (y^3+x^2y) = \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0 \quad \forall y \neq 0$$

$$\infty \text{ iniettivo: } \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2 \right) = \left(\frac{\theta}{\sqrt{a^2+b^2}}, a^2+b^2 \right) \Rightarrow \theta = x \stackrel{\substack{b>0 \\ y>0}}{\Rightarrow} b=y$$



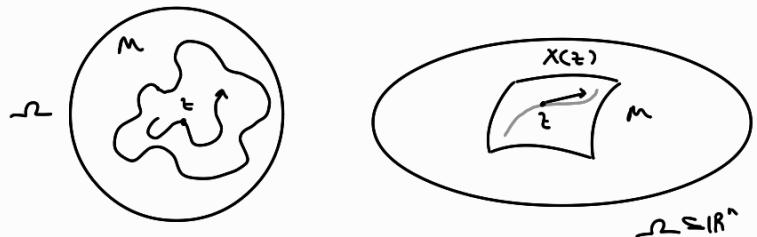
In realtà, siccome il teorema delle sommissioni è locale, possiamo tenere il diffeo $(x, \sqrt{x^2+y^2})$ e tempicamente restringere il dominio in modo tale che il codominio possa essere il prodotto fra un aperto di \mathbb{R} e un aperto di \mathbb{R}^+ , ad esempio considerando:



Sottovarietà invarianti e quasi-invarianti

$$z = X(z), \quad z \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

$M \subset \Omega$ invariante



def Un campo vett. X in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è "tangente" a sottovarietà $M \subset \Omega$ se $X(z) \in T_z M \quad \forall z \in M$

prop M sottovar di Ω invariante per X , allora X è tangente a M

dum $\forall z \in M$, la curva integrale $t \mapsto \gamma(t)$ di X con $\gamma(0)=z$ è t.c. $\gamma(t) \in M \Rightarrow \gamma'(t) = X(\gamma(t)) \in T_{\gamma(t)} M$
 $t=0 \Rightarrow X(z) \in T_z M$ □

Quindi la tangenza di X a M è condizione necessaria per l'invarianza di M .

Ma in generale non è condizione sufficiente.

esempio 1) $M = \{(x,0) : |x| < 1\}$ sottovar. 1-dim di \mathbb{R}^2

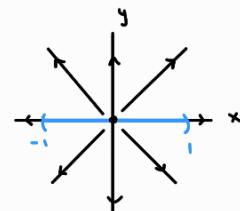
$$X(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ campo vett. radiale}$$

$$X(x,0) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ è tangente a } M$$

$$M = \Psi^{-1}(0) \text{ con formazione } \Psi(x,y) = y$$

$$\nabla \Psi(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X(x,0) \cdot \nabla \Psi(x,0) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$



Ma M non è invariante: a parte l'origine, ogni soluzione "esci"

attraverso i punti $(1,0), (-1,0)$ (il suo "bordo") e va all'interno.

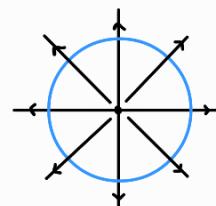
2) $M = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ sottovar. 2-dim in \mathbb{R}^2
 (interno del disco unitario)

$$X(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ campo vett. radiale}$$

fuori da M , esco da un p.t.o di $\bar{M} \setminus M$,

avendo del "bordo" di M

$\bar{M} \setminus M$
 ∂M
 in generale
 (in questo caso sì)



prop X tangente a sottov. M . Allora:

(*) 1. se una curva integrata di X esce da M , lo fa attraverso $\bar{M} \setminus M$

2. se $\bar{M} = M$ (M sottov. topologicamente chiusa), allora M è invariante

esempi (sottovarietà chiuse)

1) se $M = \Psi^{-1}(0)$ con Ψ sommersore perché è preimmagine continua di un chiuso:

- si trova in \mathbb{R}^n e $n \geq 2$ (perché $\|\cdot\|^2 - R^2$)
- top.
- tutte queste compatte

2) In \mathbb{R}^n , $M = \{(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) : x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : x'(x) = 0\}$
(fattori per i ch. sp. vert.)

def M è "quasi-invariante" se ogni curva integrale che esce da M lo fa attraversando il bordo $\bar{M} \setminus M$

oss X tangente a sottovarietà $M \Leftrightarrow M$ quasi-invariante

oss M sottr. compatta e invariante, allora l'intervallo di esistenza massimale di t_0 è \mathbb{R}
possiamo dire in questo caso che $X|_M$ è completo

esercizio 1) $\begin{cases} \dot{x} = x - xy^2 \\ \dot{y} = xy - y^3 \end{cases}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$M = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ è invariante?

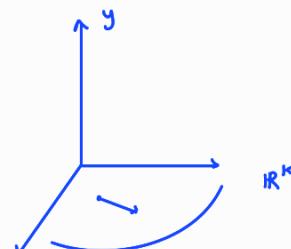
$X(x, 0) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ è tg $\in M \Rightarrow M$ è quasi-invariante
 M è top. chiuso } $\Rightarrow M$ è invariante

2) Generalizzo:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}, (x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

$$g(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$$

Allora $M = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}^k\}$ è invariante

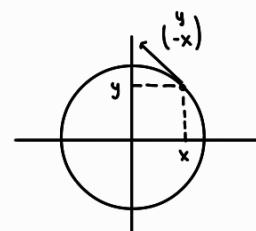


3) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + x^2 + y^2 - 1 \end{cases}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$C_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ è invariante?

$$X(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x + x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} \in T_{(x,y)} C_1$$

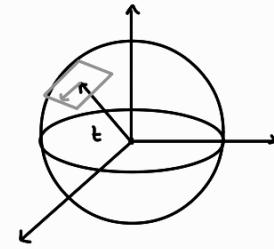
C_1 è quasi-invariante e compatto $\Rightarrow C_1$ è invariante



4) $X(z) = e_3 \times z + (1 - \|z\|^2) z, z \in \mathbb{R}^3$

$S^2 = \{z \in \mathbb{R}^3 : \|z\|=1\}$ è invariante?

$$X(z) = \underbrace{e_3 \times z}_{\text{è ortogonale a } z} \Rightarrow \text{è tangente alla sfera}$$



Ackermann: $S^2 = \Psi^{-1}(0)$

$$\Psi(z) = \|z\|^2 - 1 = z \cdot z - 1$$

$$\nabla \Psi \cdot z \Big|_{z \in S^2} = 2z \cdot e_3 \times z = 0$$

Dunque S^2 è invariante

Esercizio

$$\begin{aligned} & (\partial_{ij})_{ij} \\ & \nabla(Az \cdot z) = (A + A^T)z \quad Q(z) = \sum_{i=1}^n a_{ii} z_i^2 + \sum_{\substack{j,i=1 \\ i \neq j}}^n (a_{ij} + a_{ji}) z_i z_j \\ & Q(z) \\ & \nabla Q = \left(\begin{array}{c} 2a_{11}z_1 + \sum_{j=2}^n (a_{1j} + a_{j1}) z_j \\ \vdots \\ 2a_{nn}z_n + \sum_{j=1}^{n-1} (a_{nj} + a_{jn}) z_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \sum_{j=1}^n (a_{j1} + a_{1j}) z_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n (a_{jn} + a_{nj}) z_j \end{array} \right) \\ & = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12}+a_{21} & \cdots & a_{1n}+a_{n1} \\ a_{21}+a_{12} & 2a_{22} & \cdots & a_{2n}+a_{n2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+a_{1n} & a_{n2}+a_{2n} & \cdots & 2a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = (A + A^T)z \end{aligned}$$

$\underbrace{Az \cdot z}_{\text{derivo per la componente } i\text{-esima}}$

derivo per la componente i -esima \Rightarrow muovere la i -esima componente di $Az = \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j$

per derivare la z sotto A dall'altra parte del prodotto scalare e otengo la terna

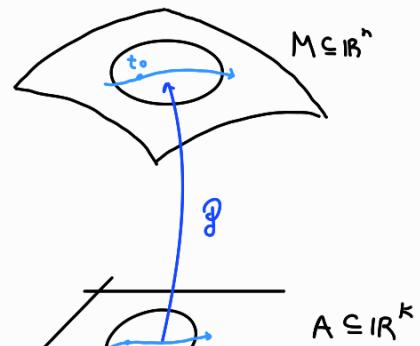
Equazione rispetto

Vogliamo studiare soluzioni di un'eq. diff. che restano su una sottovarietà invariante M

$$\dot{z} = X(z)$$

$$z \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

Dato $t \mapsto z(t) \in M \ni t \mapsto y(t) \in A \text{ tc } t(t) = \varphi(y(t)) \forall t$



Vogliamo studiare $y(t)$, la "rappresentativa locale" di $t(t)$

(nelle coordinate scelte) e $\dot{y} = X_{\text{rispetto}}(y)$, $y \in \mathbb{R}^k$

Il vantaggio è che ci possiamo ridurre allo studio di un campo vettoriale di dim k (invece di n)

Abbiamo 2 modi per fare questa analisi

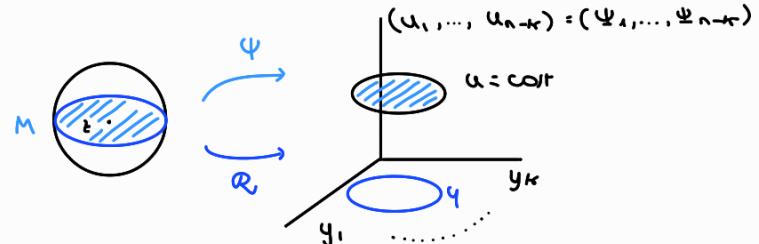
① Coordinate adattate a M

Abbiamo visto che (y_1, \dots, y_k) possono essere usate come coordinate sulle "fibre" di livello di una sommatoria $\Psi : \Omega \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^{n-k}$

In questo caso abbiamo una sottovar. M ,

dunque possiamo scrivere Ψ tc

$$M = \Psi^{-1}(0)$$



Nelle nuove coordinate, date dal diffeo R , M è l'insieme tale che $(y, u) = (y, 0)$

Potrei ricevere il campo vett.: $\dot{z} = X(z)$

$$\begin{array}{c} \downarrow R(\text{push-forward}) \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = f(y, u) \\ \dot{u} = g(y, u) \end{array} \right. \end{array}$$

u campo vett. di partenza è tangente a M
e u campo vett. nell'nuove coord. è tangente a $u=0$

Siccome M è invariante, anche $u=0$ è invariante (le soluzioni che rimangono su M , poi rimangono anche su $u=0$)

$$g(y, 0) = 0 \quad \forall y$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{y} = f(y, 0)} \quad \text{se parto da } u=0.$$

"equazione rispetto suo fatto". (scritta in coordinate y)

② "derivo lungo le funzioni"

determinare $t \mapsto z(t) \in M$

$$t \mapsto P(y(t))$$

$z(t) = P(y(t))$, allora derivo questa param. lungo le funzioni

$$\left. \begin{array}{l} z'(t) = P'(y(t)) y'(t) \\ X(z(t)) = X(P(y(t))) \end{array} \right\} X(P(y(t))) = P'(y(t)) y'(t)$$

L'eq: $P'(y_t) y_t' = X(P(y_t))$ è sempre ribilanciata per y_t' (si può mettere in forma normale), infatti:

$$\underbrace{P'(y)}^{\text{funzione}} \underbrace{P'(y)}_{\substack{\text{invertibile} \\ k \times k}} \dot{y} = \underbrace{P'(y)}^{\text{invertibile}} X(P(y))$$

$$\Rightarrow \dot{y} = (P'(y)^t P'(y))^{-1} P'(y)^t X(P(y))$$

esempio 1) $\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1 - z_1 z_2 \\ \dot{z}_2 = z_1 z_2 - z_2^2 = 0 \text{ su } z_2=0 \Rightarrow X \text{ tangente a } \{z_2=0\} \xrightarrow{\downarrow} \text{ opp } z_1 \text{ marcante} \end{cases}$

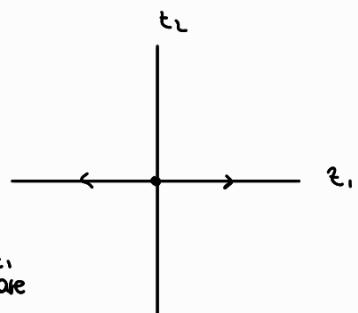
① coord. adattate

seguiamo (y_1, u) e sommersore: $D\Psi \neq 0$
 $\begin{cases} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{cases} = \Psi(z_1, z_2)$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1 - z_1 z_2 \mid_{z_2=0} = z_1 \\ \dot{z}_2 = z_1 z_2 - z_2^2 \mid_{z_1=0} = 0 \end{cases}$$

eq. risolta

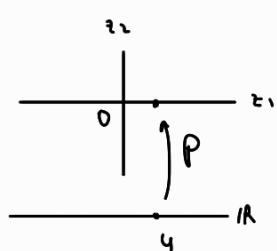
fissare z_1
 un'aria in forte
 è questo



② $z = P(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(*)} \text{ voglio arrivare sulla retta } x$

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} X(P(y)) \xrightarrow{(*)} X(y, 0) = \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{y} = y$$



Calcoliamo la formula trovata prima:

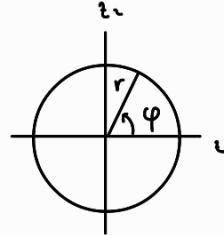
$$P'(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P'(y)^t = (1 \ 0)$$

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} (1 \ 0)(1 & 0) \\ P'(y)^t P'(y) \end{pmatrix}^{-1} (1 \ 0) \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = y$$

$$2) \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -z_1 + z_1^2 + z_2^2 - 1 \end{cases}$$

Vogliamo esprimere le coordinate del cerchio unitario, che è invariante in questo caso

① Coordinate esatte a $\psi(t) = \|z\|^2 - 1$



Proviamo ad utilizzare le coord. polari:

Sono sicuramente coordinate esatte, perché

quindi al livello di ψ sono circoli e dunque

$$\begin{aligned} z_1 &= r \cos \varphi \\ z_2 &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

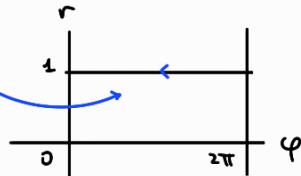
Sono dati da r -costante

$$\Rightarrow r = a, \varphi = y, \text{ si trova}$$

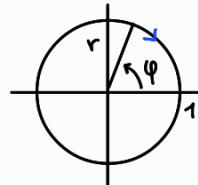
$$\begin{cases} \dot{r} = (r^2 - 1) \sin \varphi \\ \dot{\varphi} = -1 + (r - \frac{1}{r}) \cos \varphi \end{cases}$$

Si vede che $r = 1$ è invariante

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = -1$$



$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi = z_2 = r \sin \varphi \\ \dot{z}_2 &= \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi = -r \cos \varphi + r^2 - 1 \\ (\cos \varphi &- \sin \varphi) \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \varphi \\ -r \cos \varphi + r^2 - 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \sin \varphi \\ -r \cos \varphi + r^2 - 1 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} \dot{r} = r \cos \varphi \sin \varphi - r \cos \varphi \sin \varphi + (r^2 - 1) \sin \varphi \\ \dot{\varphi} = \frac{1}{r} (-r \sin^2 \varphi - r \cos^2 \varphi + (r^2 - 1) \cos \varphi) \end{cases} \end{aligned}$$

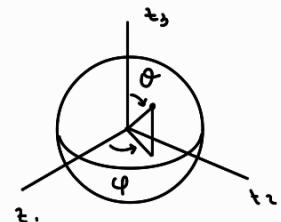


$$3) \dot{z} = e_3 \times z + (1 - \|z\|^2) z, \text{ la sfera unitaria è invariante}$$

$$z \in \mathbb{R}^3, \theta \in (0, \pi), \varphi \in (0, 2\pi)$$

$$\rho(\varphi, \theta) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) = (z_1, z_2, z_3)$$

param della sfera, tanti poli
 $t \mapsto (\theta(t), \varphi(t))$ soluzione, deriviamo il c.c.:



$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \\ \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \times \mathbf{I}_{\|z\|=1} = e_3 \times z$$

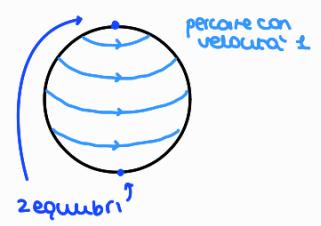
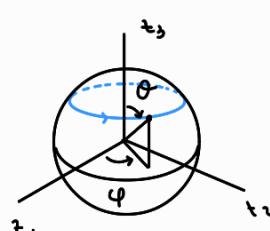
$$e_3 \times z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_2 \\ z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ora devo risolvere le eq. rispetto a $\dot{\theta}$ e $\dot{\varphi}$: riappunto $-\dot{\theta} \sin \theta = 0 \quad \forall \theta \in (0, \pi)$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \dot{\varphi} = \pm$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\varphi} = \pm \end{cases} \quad \text{eq. ristretta alla sfera}$$

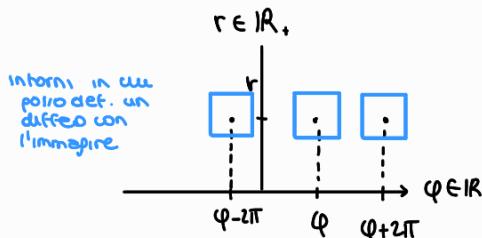
non afferisce indicazione sui poli,
perché le coord. sfere non sono definite,
ma dall'eq. del campo vettoriale si
vede che se $t = (0, 0, \pm 1)$, allora $\dot{z} = 0$
 \Rightarrow i poli sono equilibri.



Coordinate polari

si ottengono per inversione locale di $P: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

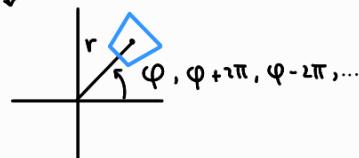
che è mappa non invertibile:



stare "polare" non
per "parametrizzazione"

$$(r, \varphi) \longmapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

tutti i punti del tipo $(r, \varphi + 2k\pi)$
vengono mandati qui



$$P'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r \neq 0 \quad \forall (r, \varphi) \neq (0, 0)$$

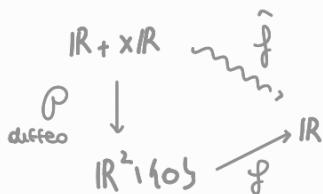
$\Rightarrow P$ è diffeo locale

Però le coordinate polari sono una rettatura perché per invertirle ogni volta bisognerebbe escludere una rettiliera per l'origine (avendo restituita la dominio di P e, come conseguenza, non potrebbe definire globalmente).

La soluzione è lavorare in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$:

Mi chiedo te :)

$$\hat{f}(r, \varphi) = f(P(r, \varphi)) \\ = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$



In questo modo posso lavorare con \hat{f} invece che con f

Vogliamo fare lo stesso con i campi vett.

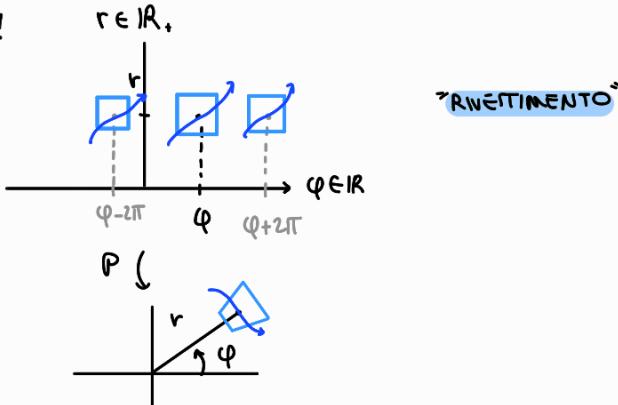
Dato X campo vett. su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, a chiediamo se esiste un campo vett. \hat{X} in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tale che: curve integrali di $\hat{X} \xrightarrow{P}$ curve integrali di X.

È evidente che in questo modo posso lavorare direttamente con \hat{X} , invece che con X.

Inoltre, se questo campo vett. esiste, tutte le curve che

differiscono nell'angolo per $k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, verranno proiettate

nella stessa curva integrale!



La matrice Jacobiana di
una mappa fra spazi tangentili

prop $P: \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$ con $\Omega, \hat{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ diffeomorfismo funzionale

Dato X campo vett. su Ω def il campo vett. \hat{X} su $\hat{\Omega}$ col'

$$\hat{X}(\hat{x}) := \underbrace{P'(\hat{x})^{-1}}_{\text{matrice}} \underbrace{X(P(\hat{x}))}_{\text{vettore}}$$

Allora se $t \mapsto \hat{x}(t)$ è curva integrale di \hat{X} , $t \mapsto P(\hat{x}(t))$ è curva
integrale di X

dim $\hat{x}(t) := P(\hat{x}(t))$

$$\begin{aligned} \hat{x}'(t) &= P'(\hat{x}(t)) \hat{\dot{x}}'(t) \\ &\parallel \\ X(\hat{x}(t)) &= X(P(\hat{x}(t))) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P'(\hat{x}(t)) \hat{\dot{x}}'(t) = X(P(\hat{x}(t)))$$

$$\Rightarrow \hat{X}(\hat{x}) = (P'(\hat{x}))^{-1} X(P(\hat{x}))$$

□

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Omega} & \xrightarrow{\hat{x}} & \mathbb{R} \\ T_{\hat{x}} \hat{\Omega} & \xleftarrow{\quad P' \quad} & T_{P(\hat{x})} \Omega \\ T_{\hat{x}} \hat{\Omega} & \xleftarrow{\quad (P')^{-1} \quad} & T_{P(\hat{x})} \Omega \end{array}$$

Ritorniamo ad un campo vettoriale nel piano (tutta l'origine) e vogliamo usare coord.

polari, poniamo di scrivere il campo vett. come

$$\hat{X}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}^{-1} X(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

questo è esattamente il conto che si fa per scrivere il campo vettoriale in coordinate polari: quello che vogliamo è l'interpretazione geometrica delle azioni che vogliamo nella pratica

studiare le sue curve integrali (una qualunque) e poi proiettarla nello

lo stesso spazio dove lavorare sul cerchio: non farò prendere φ come coordinata,

sempre per questioni di iniezione, ma posso valutare su \mathbb{R} , al suo rivestimento

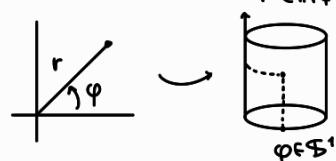
$$\begin{array}{c} \varphi \\ \longrightarrow \varphi \in \mathbb{R} \\ (\hat{P}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)) \\ \downarrow \\ \varphi \in \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Facciamo nello sul rivestimento e poi lo interpretiamo ponendolo fermo

oss posso vedere le coordinate polari come $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$, dunque vedo come

è come lavorare su un cilindro: l'elisse è il raggio e poi identifico tutti gli angoli

che ritrovano a distanza $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ottenendo un cerchio



Questo permette anche altre coord. sfondate: $(\theta, \varphi) \in (0, \pi) \times \mathbb{S}^1$

