# CURVE DIFFERENZIABILI

**def**

- Una **CURVA (DIFF.) PARAMETRICA** è una mappa $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ di classe $C^\infty$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto. Inoltre è detta **REGOLARE** se $\alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$
- Se $J \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, $\varphi : J \longrightarrow I$ diffeomorfismo, diremo che $\beta := \alpha \circ \varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è una **RIPARAMETRIZZAZIONE** della curva parametrica $\alpha$.
  Inoltre se $\varphi'(t) > 0 \quad \forall t$ "$\beta$ è **ORIENTATA CONCORDEMENTE** ad $\alpha$"
  se $\varphi'(t) < 0 \quad \forall t$ "$\beta$ è **ORIENTATA DISCORDEMENTE** ad $\alpha$"
- $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrica regolare, se $[a,b] \subseteq I$, la **LUNGHEZZA** di $\alpha$ tra $a$ e $b$ è

$$L(\alpha, [a,b]) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt$$

**oss** La lunghezza non dipende dalle riparametrizzazioni. Se $\varphi : J \longrightarrow I$ riparametrizzazione $\varphi(s_1) = t_1$, $\varphi(s_2) = t_2$, $t_1 < t_2$ abbiamo

$\varphi(s) = t$
$dt = \varphi'(s)\, ds$

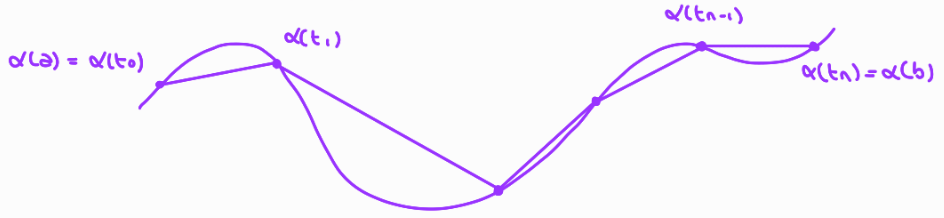
$$\varphi' > 0 : \; s_1 < s_2 \; \text{e} \; \int_{s_1}^{s_2} \|\beta'(s)\| \, ds = \int_{s_1}^{s_2} \|\alpha'(\varphi(s))\| \cdot \varphi'(s) \, ds = \int_{t_1 = \varphi(s_1)}^{t_2 = \varphi(s_2)} \|\alpha'(t)\| \, dt$$

$$\varphi' < 0 : \; s_2 < s_1 \; \text{e} \; \int_{s_2}^{s_1} \|\beta'(s)\| \, ds = \int_{s_2}^{s_1} \|\alpha'(\varphi(s))\| \cdot |\varphi'(s)| \, ds = -\int_{s_2}^{s_1} \|\alpha'(\varphi(s))\| \cdot \varphi'(s) \, ds$$

$\varphi(s) = t$
$\varphi'(s)\, ds = dt$

$$= -\int_{t_2 = \varphi(s_2)}^{t_1 = \varphi(s_1)} \|\alpha'(t)\| \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| \, dt$$

**esercizio** Sia $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ curva regolare, $[a,b] \subset I$, sia $P : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ una partizione di $[a,b]$. $|P| := \max_{i = 1,\ldots,n} (t_i - t_{i-1})$ e sia $\ell(\alpha; P) = \sum_{i=1}^{n} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$ la lunghezza della poligonale inscritta in $\alpha$




(1) Mostrare che $\forall P$ partizione di $[a,b]$ si ha $\ell(\alpha; P) \leq L(\alpha, [a,b])$

(2) Mostrare che $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che $\forall P$ partizione di $[a,b]$ con $|P| < \delta$ si ha

$$0 \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt - \ell(\alpha, P) < \varepsilon$$

Quindi in particolare

$$L(\alpha, [a,b]) = \sup \{ \ell(\alpha, P) \mid P \text{ partizione di } [a,b] \}$$

**TEOREMA** Data $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ curva param. regolare, possiamo trovare una riparametrizzazione di $\alpha$ per lunghezza d'arco, ovvero troviamo una riparametrizzazione

$$\beta: \tilde{I} \xrightarrow[\varphi]{} I \xrightarrow[\alpha]{} \mathbb{R}^N \quad \text{tale che} \quad \forall [s_1, s_2] \subset \tilde{I}, \ L(\beta, [s_1, s_2]) = s_2 - s_1$$

In particolare, $L(\alpha, [\varphi(s_1), \varphi(s_2)]) = s_2 - s_1$.

$\equiv$ trovare una riparametrizzazione di $\alpha$ che ha velocità costante $= 1$.

dim Fissato $t_0 \in I$, considero $s: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\| \, dt$ è $C^\infty(I)$.

Inoltre $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0 \quad \forall t$ $\Rightarrow$ $s$ monotona $\Rightarrow$ $s$ invertibile

$\Rightarrow s: I \longrightarrow \tilde{I} = s(I) \subseteq \mathbb{R}$ è un diffeo.

sia $\theta: \tilde{I} \longrightarrow I$ la funzione inversa (con $\theta \in C^\infty, \theta' > 0$) e $\forall s = s(t) \in \tilde{I}$, $\forall t \in I$

abbiamo $\theta'(s) = (s'(t))^{-1} = \dfrac{1}{\|\alpha'(t)\|} = \dfrac{1}{\|\alpha'(\theta(s))\|}$, allora se $\beta = \alpha \circ \theta : \tilde{I} \xrightarrow[\theta]{} I \xrightarrow[\alpha]{} \mathbb{R}^N$

(pensa al grafico e alla derivata dell'inversa) $\theta'(s) = s^{-1\prime}(s) = \dfrac{1}{s'(s^{-1}(s))} = \dfrac{1}{s'(t)}$

$$\|\beta'(s)\| = \|(\alpha \circ \theta)'(s)\| = \|\theta'(s) \cdot \alpha'(\theta(s))\| = 1 \quad \forall s$$

$\Rightarrow \beta$ soddisfa $L(\beta, [s_1, s_2]) = s_2 - s_1$ $\square$

Quindi riparametrizzando possiamo ottenere una curva regolare con $\|\alpha'(t)\| = 1$, detta CURVA A VELOCITÀ UNITARIA (O PARAMETRIZZATA A LUNGHEZZA D'ARCO)

Esempi

(1) (rette) $\ell \in \mathbb{R}^N$, $\ell = P + \langle v_0 \rangle$

$\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$t \longmapsto P + t \dfrac{v_0}{\|v_0\|}$

$\alpha' = \dfrac{v_0}{\|v_0\|} \in \mathbb{R}^n$

$\alpha'(t) = 1 \quad \forall t$

$\alpha''(t) = \alpha'''(t) \equiv 0$

(2) (circonferenza)

$I = \mathbb{R}$ $\quad \alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad \alpha$ è $C^\infty$

$t \longmapsto (\cos(t), \sin(t))$

$\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \neq (0,0) \quad \forall t \Rightarrow$ è curva regolare

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1 \quad \forall t \Rightarrow \alpha$ ha velocità unitaria

$\alpha''(t) = (-\cos(t), -\sin(t))$ è un vettore unitario con $\alpha''(t) \perp \alpha'(t)$

$\Rightarrow \{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ è una b.o.n. di $\mathbb{R}^2$

(3) (circonferenza raggio r)

$I = \mathbb{R}$ , $r \in \mathbb{R}_{>0}$ , $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longmapsto (r\cos(t), r\sin(t))$

è curva regolare : $\alpha'(t) = (-r\sin(t), r\cos(t)) \neq 0$ e $\|\alpha'(t)\| = r \quad \forall t$

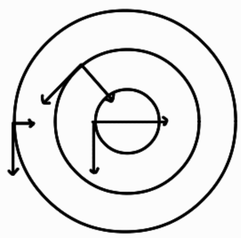
Riparametrizziamo considerando $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$s \longmapsto s/r$

$\beta(s) = \alpha(\varphi(s)) = \left(r\cos\left(\frac{s}{r}\right), r\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right)$

$\beta'(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right)\right) \implies \|\beta'(s)\| = 1$

$\beta''(s) = \left(-\frac{1}{r}\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r}\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right)$ non è unitario, ma è ortogonale a $\beta'(s)$



e i due formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$

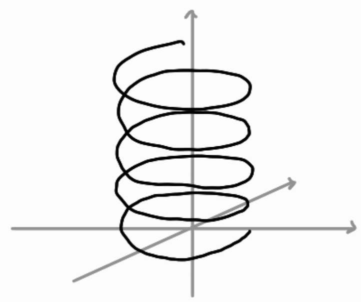
la derivata seconda ci dice quanto la curva "sta curvando" :

- $r \ll 1$ il vettore della derivata seconda è molto lungo
  ( ⟹ curva molto)
- $r = 1$ vettore della derivata seconda e della prima entrambi unitari
- $r \gg 1$ vettore della derivata seconda molto piccolo
  ( ⟹ curva poco)

(4) (curva elicoidale)

$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\qquad I = \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ , $s \in \mathbb{R}$

$t \longmapsto (r\cos(t), r\sin(t), st)$



$\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t, s) \neq 0 \quad \forall t$

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{r^2 + s^2} \equiv c \in \mathbb{R}_{>0}$

$\alpha''(t) = (-r\cos t, -r\sin(t), 0)$ $\qquad \underbrace{\alpha''(t) \perp \alpha'(t) \quad \forall t}$

per la b.o.n. del th sugli sp. osculatori in questo caso posso prendere $\left\{\alpha'(t), \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|}, \alpha'(t) \times \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|}\right\}$

## Proprietà geometriche delle curve parametriche

Vogliamo descrivere proprietà di $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ invarianti per trasformazioni euclidee :

$\mathbb{R}^N \rtimes SO(N)$ oppure $\mathbb{R}^N \rtimes O(N)$ , cioè le mappe $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ , $x \longmapsto f(x) := Ax + v$ ,

con $A \in SO(N)$ oppure $A \in O(N)$ e $v \in \mathbb{R}^N$ , ossia i movimenti rigidi

<u>oss</u> $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ e $\beta = f \circ \alpha : I \xrightarrow[\alpha]{} \mathbb{R}^N \xrightarrow[f]{} \mathbb{R}^N$, se $\alpha$ è regolare, allora anche $\beta$ lo è :

$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_N(t))$

$\beta(t) = A\begin{pmatrix}\alpha_1(t)\\ \vdots \\ \alpha_N(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_1\\ \vdots \\ v_N\end{pmatrix} \implies \beta'(t) = A\alpha'(t) = A\begin{pmatrix}\alpha_1'(t)\\ \vdots \\ \alpha_N'(t)\end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N$

**def** Sia $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ curva regolare, al variare di $t \in I$ gli spazi vettoriali

$$\Theta_1(t) = \langle \alpha'(t) \rangle \subseteq \Theta_2(t) = \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle \subseteq \dots \quad \Theta_{N-1}(t) = \langle \alpha'(t), \dots, \alpha^{(N-1)}(t) \rangle$$

sono detti primo, secondo, ..., (N-1) esimo SPAZIO OSCULATORIO di $\alpha$

**oss** i) se $f(x) = Ax + v$ è movimento rigido, se $\Theta_1^\alpha(t), \dots, \Theta_{N-1}^\alpha(t)$ sono gli spazi osculatori di $\alpha$, allora se $\beta(t) = f(\alpha(t))$ e $\Theta_1^\beta(t), \dots, \Theta_{N-1}^\beta(t)$ sp. osculatori di $\beta$, si ha $\forall j = 1, \dots, N-1 \quad \Theta_j^\beta(t) = A \; \Theta_j^\alpha(t)$

ii) $\dim \Theta_{N-1}(t) = N-1 \iff \alpha'(t), \dots, \alpha^{(N-1)}(t)$ sono lin. indip.

$\iff \forall j = 1, \dots, N-1 \quad \dim \Theta_j(t) = j$

$\equiv \dim \Theta_1(t) = 1 \;\; \forall t$

iii) supponiamo che non solo $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ sia curva regolare, ma anche che $\forall t \in I$, $\forall k = 1, \dots, N-1 \quad \dim \Theta_k(t) = k$. Questo è equivalente a

(*) $\forall t \in I \quad \alpha'(t), \dots, \alpha^{(N-1)}(t)$ lin. indip.

**def** Chiamiamo CAMPO VETTORIALE su una curva parametrica $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ un'applicazione $v: I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ di classe $C^\infty$. In particolare, $\alpha', \dots, \alpha^{(N-1)}$ sono campi vett. su $\alpha$

(consideriamo $\alpha(t) \in \mathbb{R}^N$ un punto di uno sp. affine, $v(t)$ un vettore di $\mathbb{R}^N$).

**TEOREMA** Sia $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ curva regolare a velocità unitaria che verifica (*).

Allora $\exists$ N campi vettoriali $b_1, \dots, b_N$ su $\alpha$ tali che $\forall t \in I$:

(i) $\{b_1(t), \dots, b_N(t)\}$ formano una b.o.n. orientata positivamente

(ii) $\Theta_k(t) = \langle b_1(t), \dots, b_k(t) \rangle$ per $k = 1, \dots, N-1$

(iii) $b_k(t) \cdot \alpha^{(k)}(t) > 0$ per $k = 1, \dots, N-1$

**dim** per (i) e (ii) applichiamo Gram-Schmidt di $\Theta_{N-1}(t)$ $\{\alpha'(t), \dots, \alpha^{(N-1)}(t)\}$ otteniamo $b_1(t), \dots, b_{N-1}(t)$ base ortonormale di $\Theta_{N-1}(t)$. Scegliamo tra i due versori normali a $\Theta_{N-1}(t)$, quello $b_N(t)$ che rende la base $\{b_1(t), \dots, b_N(t)\}$ equiorientata alla base canonica. Così sono verificate (i) e (ii).

Mostriamo che $b_k(t)$ è campo vettoriale per $k = 1, \dots, N$.

Osserviamo come sono costruiti :

$b_1(t) = \alpha'(t)$ è campo vettoriale

$$b_i(t) = \frac{c_i(t)}{\|c_i(t)\|} \quad \text{dove} \quad c_i(t) = \underbrace{\alpha^{(i)}(t) - \sum_{j=1}^{i-1} (\alpha^{(i)}(t) \cdot b_j(t))\, b_j(t)}_{\text{somma di funzioni } C^\infty}$$

funzione $C^\infty$

$\Rightarrow c_i(t)$ è $C^\infty$ e $\|c_i(t)\| > 0$

$\Rightarrow$ se $b_1, \dots, b_{i-1}$ sono campi vett. $C^\infty$, anche $b_i$ lo è

$\Rightarrow b_1, \dots, b_{N-1}$ sono campi vettoriali.

Anche $b_N$ lo è.

<u>esercizio</u> anche il prodotto vettoriale di $b_1, \dots, b_N$ è un campo vett.

Per il punto (iii) osserviamo per $N=1$ : $\alpha'(t) = b_1(t) \Rightarrow \alpha'(t) \cdot b_1(t) = 1 > 0$

Per $K = 2, \dots, N-1$ :

$$\begin{aligned} c_K(t) \cdot \alpha^{(K)}(t) &= \left(\alpha^{(K)}(t) - \sum_{j=1}^{K-1} (\alpha^{(K)}(t) \cdot b_j(t))\, b_j(t)\right) \cdot \alpha^{(K)}(t) \\ &= \|\alpha^{(K)}(t)\|^2 - \sum_{j=1}^{K-1} (\alpha^{(K)}(t) \cdot b_j(t))^2 \\ &= \underbrace{\sum_{j=1}^{N} (\alpha^{(K)}(t) \cdot b_j(t))^2}_{\substack{\text{(teorema di Pitagora)} \\ \text{faccio le proiezioni lungo} \\ \{b_1 \dots b_N\} \text{ b.o.n. e sommo} \\ \text{i loro quadrati}}} - \sum_{j=1}^{K-1} (\alpha^{(N)}(t) \cdot b_j(t))^2 > 0 \end{aligned}$$

$\square$

<u>oss</u> I campi vett. $b_1, \dots, b_N$ sono univocamente determinati dalle condizioni (i), (ii), (iii)

<u>def</u> La base $\{b_1(t), \dots, b_N(t)\}$ è detta BASE MOBILE DI FRENET

La base mobile di Frenet determina le proprietà geometriche della curva: vediamo in che modo ottenere delle informazioni indipendenti da movimenti rigidi.

# CLASSIFICAZIONE DELLE CURVE IN $\mathbb{R}^N$

**OSS** Se $\beta = f \circ \alpha$ con $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ curva regolare unitaria (*) e $f: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ isometria diretta $f(x) = Ax + v$, $x \in SO(N)$, se $b_1^\alpha, \dots, b_N^\alpha$ base di Frenet per $\alpha$; $b_1^\beta, \dots, b_N^\beta$ base di Frenet per $\beta$ allora abbiamo $b_k^\beta(t) = A \cdot b_k^\alpha(t) \quad \forall t$

**TEOREMA** $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ curva regolare unitaria (*) e sia $\{b_1, \dots, b_N\}$ la base mobile di Frenet. Allora esistono $k_1, \dots, k_{N-1}: I \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni $C^\infty$ tali che

- $k_i(t) > 0 \quad \forall t \in I \quad i = 1, \dots, N-2$
- $\frac{d}{dt}(b_i(t)) = -k_{i-1}(t)\, b_{i-1}(t) + k_i(t)\, b_{i+1}(t) \quad \forall t \in I, \ i = 1, \dots, N$

(convenzione: $k_0(t) = k_N(t) = 0$, $b_0(t), b_{N+1}(t) = 0 \in \mathbb{R}^N$)

cioè
$$\boxed{\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & & & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & & \\ & -k_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & k_{N-1} \\ 0 & & & -k_{N-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}}$$

**OSS** (*) Le funzioni $k_1, \dots, k_{N-1}: I \longrightarrow \mathbb{R}$ sono invarianti metrici della curva $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^N$, cioè non cambiano se prendiamo $\beta = f \circ \alpha$ con $f$ isometria diretta.

**dim** $\{b_1(t), \dots, b_N(t)\}$ sono una b.o.n. quindi $\forall t \ b_i'(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij}(t)\, b_j(t)$

e inoltre $a_{ij}(t) = b_i'(t) \cdot b_j(t)$

$b_i'(t) = a_{i1}(t)\, b_1(t) + \dots + a_{iN}(t)\, b_N(t)$

$$\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

$b_i'(t) \cdot b_j(t) = (a_{i1}(t)\, b_1(t) + \dots + a_{iN}(t)\, b_N(t)) \cdot b_j(t)$

$= a_{i1}(t)\, \underbrace{b_1(t) \cdot b_j(t)}_{0} + \dots + a_{iN}(t)\, \underbrace{b_N(t) \cdot b_j(t)}_{0}$

$= a_{ij}(t)\, \underbrace{b_j(t) \cdot b_j(t)}_{1} = a_{ij}(t)$

obiettivo: $(a_{ij}(t))_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & & \\ -k_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & k_{N-1} \\ & & -k_{N-1} & 0 \end{pmatrix}$

otteniamo che $b_i(t) \cdot b_j(t) = \delta_{ij}$

$\overset{\text{deriva}}{\Rightarrow} b_i'(t) \cdot b_j(t) = -b_j'(t) \cdot b_i(t)$

$b_i(t) \cdot b_j(t) = \delta_{ij}$

$b_i'(t) \cdot b_j(t) + b_i(t) \cdot b_j'(t) = 0$

$\Rightarrow$ la matrice $(a_{ij}(t))_{ij}$ è antisimmetrica

Inoltre ogni $b_k(t) \in \Theta_k(t) = \langle \alpha'(t), \dots, \alpha^{(k)}(t) \rangle$

$\Rightarrow b_k'(t) \in \Theta_{k+1}(t) = \langle \alpha'(t), \dots, \alpha^{(k+1)}(t) \rangle$

$\Rightarrow b_k'(t)$ è comb. lineare di $b_1(t), \dots, b_{k+1}(t)$

dato che $\langle b_1(t), \dots, b_{k+1}(t) \rangle = \langle \alpha'(t), \dots, \alpha^{(k+1)}(t) \rangle$

$b_k(t) = \sum_{i=1}^k d_i(t)\, \alpha^{(i)}(t)$

$b_k'(t) = \sum_{i=1}^k d_i'(t)\, \alpha^{(i)}(t) + \sum_{i=1}^k d_i(t)\, \alpha^{(i+1)}(t) \quad \in \langle \alpha'(t), \dots, \alpha^{(k+1)}(t) \rangle$

$\Rightarrow \quad \alpha_{13}=\alpha_{14}=\dots=\alpha_{1N}=0$

$\alpha_{24}=\alpha_{25}=\dots=\alpha_{2N}=0$

$\vdots$

$\alpha_{N-2,N}=0$

$$K \to \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & & 0 \\ & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & 0 & \alpha_{k,k+1} \quad 0 \end{pmatrix}$$

Siccome la matrice è antisimmetrica, otteniamo il risultato voluto.

Poniamo $k_1=\alpha_{12}$, $k_2=\alpha_{23}$, $\dots$, $k_{N-1}=\alpha_{N-1,N}$, $k_0=k_N=0$.

$b_{i+1}(t)$.

se $(b_i'(t))=(-k_{i-1}(t)\cancel{b_{i-1}(t)}+k_i(t)\underbrace{b_{i+1}(t))\cdot b_{i+1}(t)}_{1}$ allora $k_i(t)=b_i'(t)\cdot b_{i+1}(t)$.

Mostriamo che $k_i>0$ per $i=1,\dots,N-2$.

Ricordiamo $c_i(t)=\alpha^{(i)}(t)-\sum_{j=1}^{i-1}(\alpha_i(t)\cdot b_j(t))b_j(t)$ e $b_i(t)=\dfrac{c_i(t)}{\|c_i(t)\|}$

$b_i'(t)=\dfrac{1}{\|c_i(t)\|}(\alpha^{(i+1)}(t))+v(t)$ dove $v: I\longrightarrow\mathbb{R}^N$ è

un campo vettoriale e $\forall t\in I$ $v(t)\in\oplus_i(t)$

l'altro addendo ha prodotto scalare nullo con $b_{i+1}(t)$ (è comb. lineare di $b_j$, $j\neq i+1$)

Allora $k_i(t)=b_i'(t)\cdot b_{i+1}(t)=\underbrace{\dfrac{1}{\|c_i(t)\|}}_{>0}\underbrace{\alpha^{(i+1)}(t)\cdot b_{i+1}(t)}_{>0 \text{ per } i+1\le N-1 \Rightarrow i=1,\dots,N-2}$ $\square$

**def** $\alpha: I\longrightarrow\mathbb{R}^n$ curva unitaria (*) chiamiamo $k_1,\dots,k_{N-1}$ la prima, seconda, $\dots$, $(N-1)$ esima curvatura di $\alpha$

In particolare, per $N=3$,

- $k:=k_1$ è detta la CURVATURA di $\alpha$
- $\tau:=k_2$ è detta la TORSIONE di $\alpha$
- $b_1(t)=:\underline{t}(t)$ VERSORE TANGENTE
- $b_2(t)=:\underline{n}(t)$ VERSORE NORMALE
- $b_3(t)=:\underline{b}(t)$ VERSORE BINORMALE

$$\begin{pmatrix}\underline{t}'(t)\\ \underline{n}'(t)\\ \underline{b}'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{t}(t)\\ \underline{n}(t)\\ \underline{b}(t)\end{pmatrix}$$

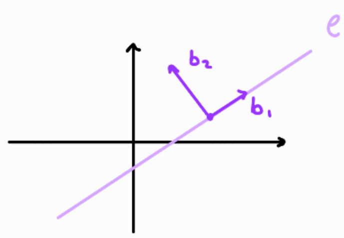
**esempi** i) Il teorema precedente afferma che se $N\geq 3$ le curvature $k_1,\dots,k_{N-2}$ sono ovunque positive, ma non assegna alcuna condizione sull'$(N-1)$-esima curvatura.

$\ell=P+\langle v\rangle\subseteq\mathbb{R}^2$ $\quad \alpha: t\longmapsto P+tv$ $\quad \|v\|=1$

$\alpha'(t)=v\equiv b_1$ costante

$k_1 b_2=b_1'=\alpha''(t)=0$

$\Rightarrow b_2$ è costante e curvatura $k_1=0$



ii) (circonferenza) $\alpha: t \longmapsto (r\cos t, r\sin t)$  $\|\alpha'(t)\| = r$ non va bene perché la norma deve essere 1

$\beta: s \longmapsto (r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r})$  $\|\beta'(s)\| = 1$

$\beta'(s) = (-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r})$ ,  $b_1(s) = \beta'(s)$

$\beta''(s) = (-\frac{1}{r}\cos(\frac{s}{r}), -\frac{1}{r}\sin(\frac{s}{r}))$  $\|\beta''(s)\| = \frac{1}{r}$

$\Rightarrow$ $b_1(s) = \beta'(s)$ e $b_2(s) = r\,\beta''(s)$

$\Rightarrow$ $(b_1(s))' = \beta''(s) = \frac{1}{r} b_2(s)$ $\Rightarrow k_1 = \frac{1}{r}$  più piccola è la circonferenza, più grande è la curvatura (ricurvano più velocemente)

**def** Se $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ curva (unitaria) diciamo che $\beta = f\circ\alpha$ con $f$ isometria affine diretta è CONGRUENTE ad $\alpha$

**oss** (*) Due curve congruenti danno le stesse curvature:

$\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^N$  $b^\alpha = (b_1^\alpha, \dots, b_N^\alpha)$  $(b^\alpha)' = M b^\alpha$

isometria $f: x \longmapsto Ax + c$

$B = f\circ\alpha$ : $\beta' = A\alpha'$  $\beta'' = A\alpha''$ ...

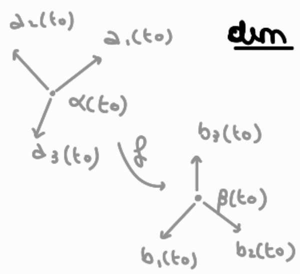
$b_j^\beta = A b_j^\alpha$

$(b_j^\beta)' = A(b_j^\alpha)' = A(-k_{j-1} b_{j-1}^\alpha + k_j b_{j+1}^\alpha) = -k_{j-1}(A b_{j-1}^\alpha) + k_j(A b_{j+1}^\alpha)$

$= -k_{j-1}(b_{j-1}^\beta) + k_j(b_{j+1}^\beta)$

vediamo che vale il viceversa.

**TEOREMA** Siano $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $\beta: I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ curve unitarie (*). Siano $k_{1,\alpha}, \dots, k_{N-1,\alpha}: I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $k_{1,\beta}, \dots, k_{N-1,\beta}: I \longrightarrow \mathbb{R}$ le rispettive curvature. Se $\forall t$ $k_{1,\alpha}(t) = k_{1,\beta}(t), \dots, k_{N-1,\alpha}(t) = k_{N-1,\beta}(t)$ allora le curve sono congruenti: $\exists f: x \longmapsto Ax + c$ isometria diretta di $\mathbb{R}^N$ tc $\beta = f\circ\alpha$




**dim** Siano $\{a_1, \dots, a_N\}$ b.m. di Frenet per $\alpha$ e $\{b_1, \dots, b_N\}$ b.m. di Frenet per $\beta$.

Fissiamo un punto $t_0 \in I$, $\exists!$ isometria diretta $f(x) = Ax + c$ tc $f(\alpha(t_0)) = \beta(t_0)$ e tc $A a_1(t_0) = b_1(t_0), \dots, A a_N(t_0) = b_N(t_0)$.

Consideriamo le curve $\beta: I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ e $f\circ\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^N$.

Allora la curva $\beta - f\circ\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ verifica

$\frac{d}{dt}(\beta - f\circ\alpha) = \beta'(t) - A\alpha'(t) = b_1(t) - A a_1(t)$

(in $t_0$ abbiamo $b_1(t_0) = A a_1(t_0) \Rightarrow b_1(t_0) - A a_1(t_0) = 0$)

Consideriamo i campi vettoriali $Aa_1(t), \dots, Aa_N(t)$ e $b_1(t), \dots, b_N(t)$, essi verificano:

- $\frac{d}{dt}(b_i(t)) = -k_{i-1,\beta}(t)\, b_{i-1}(t) + k_{i,\beta}(t)\, b_{i+1}(t) \quad i=1,\dots,N$
- $\frac{d}{dt}(A a_i(t)) = A \frac{d}{dt} a_i(t) = -k_{i-1,\alpha}(t)\, A a_{i-1}(t) + k_{i,\alpha}(t)\, A a_{i+1}(t)$
- $k_{i,\beta} = k_{i,\alpha}$ per ipotesi

$\Rightarrow$ i campi vettoriali $(b_1,\dots,b_N)$ e $(Aa_1,\dots,Aa_N)$ verificano lo stesso sistema omogeneo di eq. diff. lineari e le stesse condizioni iniziali in $t_0$

$\Rightarrow (b_1,\dots,b_N)$ e $(Aa_1,\dots,Aa_N)$ coincidono

In particolare, $\frac{d}{dt}(\beta - f\circ\alpha) \equiv 0 \Rightarrow \beta - f\circ\alpha = c \in \mathbb{R}^n$

Poiché in $t_0$ $\beta(t_0) = f(\alpha(t_0))$, allora $c=0$

$\Rightarrow \forall t \quad \beta(t) = f(\alpha(t))$ $\square$

Quindi abbiamo che se due curve $\alpha, \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ hanno le stesse curvature $k_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $i=1,\dots,N-1$ allora sono congruenti.

Vediamo ora che assegnate delle curvature $k_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$, esiste una curva con quelle curvature date.

**TEOREMA** Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto con $0 \in I$. Siano $k_1, \dots, k_{N-1} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni $C^\infty$ tc $k_i(t) > 0$, $i=0,\dots,N-2$, $t \in \mathbb{R}$. Allora $\exists\ \alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ curva parametrica regolare a velocità unitaria tc $\alpha$ verifica (*) e $\alpha$ ha curvature $k_1,\dots,k_{N-1}$

dim $\forall t$ consideriamo
$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & k_1(t) & & \\ -k_1(t) & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & k_{N-1}(t) \\ & & -k_{N-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \in M_N(\mathbb{R})$$

e il sistema di eq. diff. lineari $B'(t) = M(t)B(t)$, $B(t) \in M_N(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Fissando un dato iniziale esiste un'unica soluzione $B(t)$ funzione $C^\infty$ $: I \longrightarrow M_N(\mathbb{R})$

Fissiamo $B(0) = I_N$. Mostriamo che $\forall t \in I$ $B(t) \in SO(N)$:

$B(t) \in SO(N) \iff {}^tB(t) \cdot B(t) = I_N$

$$\frac{d}{dt}\left({}^tB(t)\cdot B(t)\right) = {}^tB'(t)\cdot B(t) + {}^tB(t)\cdot B'(t)$$

$$= {}^t\left(M(t)\cdot B(t)\right)\cdot B(t) + {}^tB(t)\cdot\left(M(t)\cdot B(t)\right)$$

antisimmetria di $M(t)$

$$= {}^tB(t)\cdot \underset{\substack{\parallel \\ -M(t)}}{{}^tM(t)}\cdot B(t) + {}^tB(t)\cdot M(t)\cdot B(t) = 0$$

Poiché per $t=0$ $\quad {}^tB(0)\cdot B(0) = I_N \Rightarrow \forall t \quad {}^tB(t)\cdot B(t) = I_N$

$\Rightarrow B(t) \in O(N) \Rightarrow \det(B(t)) = \pm 1$. Siccome $\det(B(0)) = \det(I_N) = 1$

e le matrici $B(t)$ sono $C^\infty$, si ha: $\det(B(t)) = 1 \Rightarrow B(t) \in SO(N)$.

Consideriamo $B(t)$ come matrice le cui ~~colonne~~ righe sono la base di Frenet della curva che cerchiamo.

Consideriamo $T(t) = \cancel{\begin{pmatrix} b_{11}(t) \\ \vdots \\ b_{N1}(t) \end{pmatrix}}$ $\begin{pmatrix} b_{11}(t) \\ \vdots \\ b_{1N}(t) \end{pmatrix}$ la prima ~~colonna~~ riga e poniamo

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

$$t \longmapsto \int_0^t T(s)\,ds = \begin{pmatrix} \int_0^t b_{11}(s)\,ds \\ \vdots \\ \int_0^t b_{\cancel{N1}\,1N}(s)\,ds \end{pmatrix}$$

$\alpha'(t) = T(t)$ vettore velocità unitario

e poiché $B'(t) = M(t)\,B(t)$, $\alpha$ ha curvature $k_1,\dots,k_{N-1}$ $\quad\square$

<u>esempi</u> i) (circonferenza) $\quad \alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto (\cos t, \sin t)$$

$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0,0) \qquad \|\alpha'(t)\| = 1 \quad \forall t$

$\alpha''(t) = (-\cos t, -\sin t) \perp \alpha'(t) \qquad \|\alpha''(t)\| = 1 \quad \forall t$

$\begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} \in SO(2) \Rightarrow b_2(t) = \alpha''(t)$

C'è una sola funzione di curvatura $k_1(t)$:

$b_1'(t) = (-\cos t, -\sin t) = b_2(t) \Rightarrow k_1(t) \equiv 1 \quad \forall t$

(circonferenza di raggio $r$) $\quad \alpha(s) = \left(r\cos\frac{s}{r},\ r\sin\frac{s}{r}\right)$

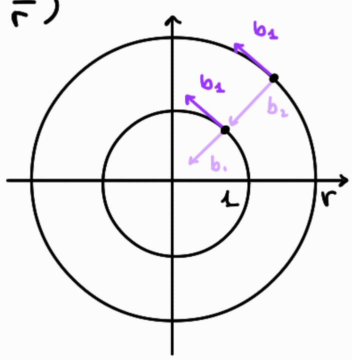
$\alpha'(s) = \left(-\sin\frac{s}{r},\ \cos\frac{s}{r}\right) \qquad \|\alpha'(s)\| = 1$

$\Rightarrow b_1(s) = \alpha'(s)$

$\alpha''(s) = \left(-\frac{1}{r}\cos\left(\frac{s}{r}\right),\ -\frac{1}{r}\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right) \perp \alpha'(s)$

$\Rightarrow b_2(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right),\ -\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right)$

$b_1'(s) = \alpha''(s) = \frac{1}{r}(b_2(s)) \Rightarrow k_1(s) \equiv \frac{1}{r} \quad \forall s$



ii) (curva elicoidale). Fissiamo $r \in \mathbb{R}^{>0}$, $s \in \mathbb{R}$, $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \longmapsto (r\cos t, r\sin t, s \cdot t)$$

$$\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t, s) \qquad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{r^2+s^2} = c \in \mathbb{R}^{>0}$$

Riparametrizziamo con $t = \frac{w}{c}$

$$\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$w \longmapsto \left(r\cos\frac{w}{c}, r\sin\frac{w}{c}, \frac{s}{c}w\right)$$

$$\beta'(w) = \left(-\frac{r}{c}\sin\frac{w}{c}, \frac{r}{c}\cos\frac{w}{c}, \frac{s}{c}\right) \qquad \|\beta'(w)\| = \sqrt{\frac{r^2+s^2}{c^2}} = 1$$

$$\beta''(w) = \left(-\frac{r}{c^2}\cos\frac{w}{c}, -\frac{r}{c^2}\sin\frac{w}{c}, 0\right)$$

$$= \frac{r}{r^2+s^2}\left(-\cos\left(\frac{w}{c}\right), -\sin\left(\frac{w}{c}\right), 0\right) \perp \beta'(w) \qquad \|\beta''(w)\| = \frac{r}{r^2+s^2}$$

$$\Rightarrow \underset{T=}{} b_1(w) = \beta'(w) = \left(-\frac{r}{c}\sin\frac{w}{c}, \frac{r}{c}\cos\frac{w}{c}, \frac{s}{c}\right)$$

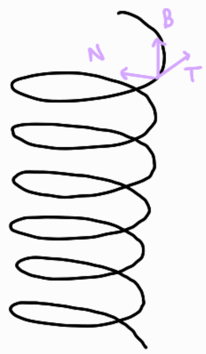
$$\underset{N=}{} b_2(w) = \frac{\beta''(w)}{\|\beta''(w)\|} = \left(-\cos\left(\frac{w}{c}\right), -\sin\left(\frac{w}{c}\right), 0\right)$$

$$\underset{B=}{} b_3(w) = b_1(w) \wedge b_2(w) = \frac{1}{c}\begin{vmatrix} -r\sin\frac{w}{c} & -\cos\frac{w}{c} & e_1 \\ r\cos\frac{w}{c} & -\sin\frac{w}{c} & e_2 \\ s & 0 & e_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{c}\left(s\sin\frac{w}{c}, -s\cos\frac{w}{c}, \underbrace{r}_{r\sin^2(w/c) + r\cos^2(w/c)}\right)$$

verifica $\quad \|b_3(w)\| = \frac{1}{c}\sqrt{s^2+r^2} = 1$

$$b_1(w) \cdot b_3(w) = b_2(w) \cdot b_3(w) = 0$$




Mancano le funzioni di curvatura.

$$b_1'(w) = \beta''(w) = \frac{r}{r^2+s^2}\left(-\cos\frac{w}{c}, -\sin\frac{w}{c}, 0\right)$$

$$\Rightarrow k_1(w) = \frac{r}{r^2+s^2}$$

$$b_3'(w) = \left(\frac{s}{c^2}\cos\frac{w}{2}, \frac{s}{c^2}\sin\frac{w}{c}, 0\right) = -\frac{s}{c^2} b_2(w)$$

$$b_3' = -k_2 b_2 \Rightarrow k_2(w) = \frac{s}{r^2+s^2}$$

esercizio $\quad$ Mostrare che fissati $k_1 \equiv c_1 > 0$, $k_2 \equiv c_2 \in \mathbb{R}$ $\exists$ una curva elicoidale $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con curvature $k_1, k_2$.

iii) (cubica gobba / curva razionale normale). $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \longmapsto (t, t^2, t^3)$$

$$\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2) \neq 0 \qquad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{1+4t^2+9t^4} = v(t)$$

$s(t) = \int_0^t \sqrt{1+4w^2+9w^4}\, dw$ è funzione invertibile, ma non sappiamo come invertirla (la sua inversa è necessaria per riparametrizzare $\alpha$ a velocità unitaria).

Calcoliamo allora la base di Frenet T, N, B:

$\alpha''(t) = (0, 2, 6t)$

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{v(t)}(1, 2t, 3t^2)$$

B(t) deve essere ortogonale al piano osculatore $\Theta_2 = \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle$

$B(t) \perp \alpha', \alpha''$
$\perp T, N$
ed equiorientato

$$\Rightarrow B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e_1 \\ 2t & 2 & e_2 \\ 3t^2 & 6t & e_3 \end{vmatrix} \frac{1}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}}(3t^2, -3t, 1)$$

$N(t) = B(t) \wedge T(t)$

$$= \begin{vmatrix} 3t^2 & 1 & e_1 \\ -3t & 2t & e_2 \\ 1 & 3t^2 & e_3 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+9t^2+9t^4)(1+4t^2+9t^4)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1+9t^2+9t^4)(1+4t^2+9t^4)}} (-2t-9t^3, -9t^4+1, 6t^3+3t)$$

<u>domanda</u> Chi sono $k_1(t)$ e $k_2(t)$?

Abbiamo visto che la riparametrizzazione con la lunghezza d'arco è sempre possibile, ma a volte è scomodo: vogliamo trovare un modo per descrivere una base mobile, e quindi le funzioni curvatura, in modo indipendente dalla parametrizzazione.

# CURVE A VELOCITÀ NON UNITARIA

Chiamiamo $\beta(s) = \alpha(\theta(s))$ una riparametrizzazione di curva equiorientata ad $\alpha$

$$\beta'(s) = \underbrace{\theta'(s)}_{\text{scalare}} \; \underbrace{\alpha'(\theta(s))}_{\text{vettore}} \in \langle \alpha'(\theta(s)) \rangle$$

$$\beta''(s) = \theta''(s)\,\alpha'(\theta(s)) + (\theta'(s))^2\,\alpha''(\theta(s)) \in \langle \alpha'(\theta(s)), \alpha''(\theta(s)) \rangle$$

e $\beta', \beta''$ lin. indip. se $\alpha', \alpha''$ lo sono. Inoltre

- $\theta'(s) > 0$ e $(\theta'(s))^2 > 0$
- la base $\{\beta'(s)\}$ è equiorientata a $\{\alpha'(\theta(s))\}$ e la base $\{\beta'(s), \beta''(s)\}$ è equiorientata a $\{\alpha'(\theta(s)), \alpha''(\theta(s))\}$

  $\Rightarrow$ stessa cosa per le derivate superiori $\beta'''\dots$

Vogliamo ottenere un nuovo sistema di equazioni differenziali per le curvature.

Lavoriamo in $\mathbb{R}^3$:

$T(t)$ = versore tangente nel punto $\alpha(t)$

$N(t)$ = versore normale nel punto $\alpha(t)$

$B(t)$ = versore binormale nel punto $\alpha(t)$

Si dimostra
$$\begin{cases} T'(t) = k(t)\,v(t)\,N(t) \\ N'(t) = -k(t)\,v(t)\,T(t) + \tau(t)\,v(t)\,B(t) \\ B'(t) = -\tau(t)\,v(t)\,N(t) \end{cases}$$

dove $v(t) = \|\alpha'(t)\|$. Vogliamo individuare $k(t), \tau(t)$.

Abbiamo visto:

$$\begin{tikzcd} \tilde{I} \arrow[r, "\simeq", "\text{diffeo}"'] \arrow[rr, bend left, "\beta"] & I \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

$t \longmapsto \alpha(t)$

$s \longmapsto t(s)$

$s(t) \longleftarrow t$

$\beta(s) = \alpha(t(s))$

È definita $T^\beta(s)$, $N^\beta(s)$, $B^\beta(s)$

e si ha: $T^\alpha(t) = T^\beta(s(t))$ $\quad N^\alpha(t) = N^\beta(s(t))$ $\quad B^\alpha(t) = B^\beta(s(t))$

$\beta$ è curva a lunghezza unitaria

Abbiamo per $\beta$ le due curvature $k_1^\beta(s)$, $k_2^\beta(s)$.

Poniamo $k(t) = k_1^\beta(s(t))$ e $\tau(t) = k_2^\beta(s(t))$

Otteniamo $\dfrac{d}{dt} T^\alpha(t) = \dfrac{d}{dt}\left(T^\beta(s(t))\right) = k_1^\beta(s(t))\; s'(t)\; N^\beta(s(t))$

$(T^\beta(s))' = k_1^\beta(s)\; N^\beta(s)$

$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(w)\|\, dw \qquad s'(t) = \|\alpha'(t)\| = v(t)$ velocità

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} T^\alpha(t) = k(t)\, s'(t)\, N^\alpha(t) = k(t)\, v(t)\, N^\alpha(t)$$

Analogamente $\frac{d}{dt} N^\alpha(t) = \frac{d}{dt}(N^\beta(r(t))) = -k(t)v(t)T^\alpha + \tau(t)v(t)B^\alpha(t)$

$\frac{d}{dt} B^\alpha(t) = -\tau(t)\, v(t)\, N^\alpha(t)$

<u>OSS</u> le funzioni $k(t)$ e $\tau(t)$ sono invarianti per riparametrizzazione

$\Rightarrow$ $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \alpha(t)$ curva (*), allora $\exists!$ b.o.n. di Frenet $T(t)$, $N(t)$, $B(t)$

con $v(t) = \|\alpha'(t)\|$. Allora vale il sistema:

$$\boxed{\begin{cases} T' = kvN \\ N' = -kvT + \tau vB \\ B' = -\tau vN \end{cases}}$$

**TEOREMA** $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ curva (*) allora:

non necess. unitaria

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \qquad B(t) = \frac{\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)\|}, \qquad N(t) = B(t)\wedge T(t)$$

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} \qquad \tau(t) = \frac{(\alpha'(t)\wedge\alpha''(t))\cdot\alpha'''(t)}{\|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)\|^2}$$

le formule per T, B, N seguono da sopra

<u>dim</u> i) Poniamo $v(t) = \|\alpha'(t)\|$, sappiamo $T'(t) = k(t)v(t)N(t)$

$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \Rightarrow \alpha'(t) = v(t)T(t)$

$\alpha'(t)\wedge\alpha''(t) = v(t)T(t) \wedge \frac{d}{dt}(v(t)T(t)) =$ perché prodotto vett. di T(t) con un vett. ad esso parallelo

$= v(t)T(t) \wedge (\cancel{v'(t)T(t)} + v(t)\frac{d}{dt}T(t))$

$= v(t)T(t) \wedge v(t)^2 k(t) N(t)$

$= v(t)^3 k(t) \underbrace{B(t)}_{\text{ha norma } 1}$

$\Rightarrow \frac{\|\alpha'\wedge\alpha''\|}{v(t)^3} = \frac{\|\alpha'\wedge\alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = k(t)$

ii) Scriviamo $(\alpha'\wedge\alpha'')\cdot\alpha''' = (v(t)^3 k(t) B(t))\cdot\alpha'''(t)$

$\alpha''(t) = \frac{d}{dt}(\alpha'(t)) = \frac{d}{dt}(v(t)T(t)) = v'(t)T(t) + v(t)^2 k(t) N(t)$

$\alpha'''(t) = v(t)^2 k(t)\frac{d}{dt}(N(t)) +$ (termini in T e N)

$= v(t)^2 k(t)(\tau(t)v(t)B(t)) +$ (termini in T e N) → a noi interessano solo i termini in B, perché gli altri si annullano nel prodotto scalare

$= v(t)^3 k(t)\tau(t) B(t) + (\dots)$

$\Rightarrow (\alpha'\wedge\alpha'')\cdot\alpha''' = v(t)^3 k(t) B(t) \cdot v(t)^3 k(t)\tau(t) B(t) = v(t)^6 k(t)^2 \tau(t)$

$$\|\alpha'\wedge\alpha''\| = v(t)^3\, k(t)$$

$$\Rightarrow \frac{(\alpha'\wedge\alpha'')\cdot\alpha'''}{\|\alpha'\wedge\alpha''\|^2} = \frac{v(t)^6 k(t)^2 \tau(t)}{v(t)^6 k(t)^2} = \tau(t) \qquad \square$$

**def** Data $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ curva reg. (*)

- Chiamiamo RETTA TANGENTE ad $\alpha$ in $\alpha(t)$ la retta affine:

  $\alpha(t) + \langle T(t)\rangle = \alpha(t) + \langle\alpha'(t)\rangle$

- Chiamiamo PIANO OSCULATORE ad $\alpha$ in $\alpha(t)$ il piano affine:

  $\alpha(t) + \langle T(t), N(t)\rangle = \alpha(t) + \langle\alpha'(t), \alpha''(t)\rangle$

- Chiamiamo CERCHIO OSCULATORE ad $\alpha$ in $\alpha(t)$ la circonferenza $C$

  di raggio $\frac{1}{k(t)}$ e centro $C(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} N(t)$ nel piano affine $\pi$.

  $C$ ha equazioni parametriche

  $$[0,2\pi] \ni s \longmapsto C(t) + \frac{1}{k(t)}\sin(s)\,T(t) - \frac{1}{k(t)}\cos(s)\,N(t)$$

- Chiamiamo EVOLUTA DELLA CURVA $\alpha$ la curva parametrica descritta

  dal variare dei centri dei cerchi osculatori di $\alpha$

  $$e: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
  $$t \longmapsto \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} N(t)$$

**esercizi**

- calcolare curvatura e torsione per le curve studiate: retta, circonferenza, curva elicoidale, cubica gobba
- calcolare piano, cerchio osculatore ed evoluta della cubica gobba

**esempio** (cubica gobba) $\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \longmapsto (t, t^2, t^3)$$

$\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2)$ $\qquad v(t) = \|\alpha'(t)\| = \sqrt{1+4t^2+9t^4}$

$\alpha''(t) = (0, 2, 6t)$ $\qquad \alpha'\wedge\alpha'' = (6t^2, -6t, 2)$

$\alpha'''(t) = (0, 0, 6)$ $\qquad \|\alpha'\wedge\alpha''\| = 2\sqrt{1+9t^2+9t^4}$

$$T(t) = \frac{1}{v(t)}(1, 2t, 3t^2)$$

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}}(3t^2, -3t, 1)$$

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{\phantom{x}}\ \sqrt{\phantom{x}}} (-9t^3-2t,\ -9t^4+1,\ 6t^3+3t)$$

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{2\sqrt{1+9t^2+9t^4}}{(\sqrt{1+4t^2+9t^4})^3}$$

$$\tau(t) = \frac{(\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2} = \frac{12}{4(1+9t^2+9t^4)} = \frac{3}{1+9t^2+9t^4} > 0$$

cerchio osculatore:

$$C(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} N(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} + \frac{(\sqrt{1+4t^2+9t^4})^3}{2\sqrt{1+9t^2+9t^4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}\sqrt{1+4t^2+9t^4}} \begin{pmatrix} -9t^3-2t \\ -9t^4+1 \\ 6t^3+3t \end{pmatrix}$$

<u>oss</u> $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ param. regolare

(*) = $\forall t$ $\alpha'(t), \dots, \alpha^{(N-1)}(t)$ sono lin. indep.

da questo abbiamo dedotto $k_1(t), \dots, k_{N-1}(t)$, dove

- $k_1(t), \dots, k_{N-2}(t) > 0$, in particolare $\neq 0$
- se $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ è contenuta in un iperpiano $H$: $H_1 x_1 + \dots + H_N x_n = b$

derivo l'eq. dell'iperpiano, che è una costante $= b$

$(H_1 \cdots H_N)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = b$, allora se $\alpha' = (\alpha_1'(t) \cdots \alpha_N'(t))$ allora

$(H_1 \cdots H_N)\begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_N' \end{pmatrix} = 0$ , $(H_1 \cdots H_N)\begin{pmatrix} \alpha_1'' \\ \vdots \\ \alpha_N'' \end{pmatrix} = 0$ e così via

In particolare $\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(N-1)}$ appartengono al piano $\tilde{H}$ di eq.

omogenea $(H_1 \cdots H_N)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = 0$.

stanno su un iperpiano!

In particolare anche $\alpha^{(N)}(t) \in H \Rightarrow \alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(N-1)}, \alpha^{(N)}$ sono lin. DIP

inoltre $\Theta_{N-1}(t) = \langle \alpha'(t), \dots, \alpha^{(N-1)}(t) \rangle$ è la giacitura dell'iperpiano

↳ iperpiano vettoriale associato all'iperpiano affine

$H$, cioè l'iperpiano vettoriale $(H_1 \cdots H_N)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \forall t$ $b_N(t)$ è il vettore normale all'iperpiano $H$ => è costante

derivo

$\Rightarrow \forall t$ $b_N'(t) = -k_{N-1}(t) \underset{\neq 0}{b_{N-1}(t)} \equiv 0 \Rightarrow k_{N-1}(t) \equiv 0$

vale il viceversa!

<u>prop</u> se $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ è regolare (*) e $k_{N-1}(t) \equiv 0 \iff \alpha$ è contenuta in un iperpiano affine

<u>dim</u> se $k_{N-1}(t) = 0$ $\forall t$ allora $b_N'(t) = 0$ $\forall t$ (dalla formula)

$\Rightarrow b_N(t)$ costante

$\underline{b} := b_N(t) \quad \Rightarrow \forall t \quad \Theta_{N-1}(t) = \langle \alpha'(t), \dots, \alpha^{(N-1)}(t) \rangle = \underline{b}^{\perp}$

è iperpiano (vettoriale) fissato.

Fissiamo $t_0 \in I$ e consideriamo $F(t) = (\alpha(t) - \alpha(t_0)) \cdot \underline{b}$

allora $F'(t) = \underset{\Theta_{N-1} \Rightarrow \perp b}{\alpha'(t)} \cdot \underline{b} = 0 \ \forall t$

$\Rightarrow \forall t \quad \alpha(t) \cdot \underline{b} = \alpha(t_0) \cdot \underline{b}$, cioè $\alpha$ è contenuta nell'iperpiano affine

di equazione $\underline{b} \cdot X = \underline{b} \cdot \alpha(t_0)$ cioè $\alpha(t_0) + \underline{b}^{\perp}$ $\square$

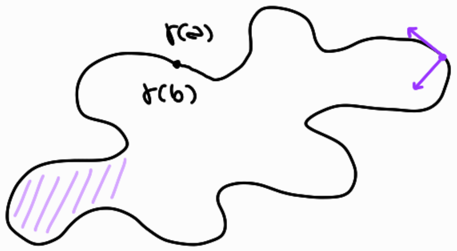
# Teoremi finali

Uno dei seguenti teoremi permette di dim che il cerchio con bordo non è diffeomorfo al quadrato con bordo (mentre quadrato e cerchio senza bordo sono diffeomorfi).

**def** Una CURVA CHIUSA SEMPLICE è $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ $C^\infty$ (basta $C^1$ a tratti)

- chiusa: $\gamma(a)=\gamma(b)$
- semplice: gli unici $t_1\neq t_2$ tc $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$ sono $a$ e $b$

**TEOREMA** (Jordan). Data una curva chiusa semplice $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ allora $\mathbb{R}^2\setminus\gamma([a,b])$ ha 2 componenti connesse, di cui una limitata detta "l'interno di $\gamma$".




**def** $\gamma$ è ORIENTATA POSITIVAMENTE se $\forall\, t\in(a,b)\ \exists\, \varepsilon>0$ tc il segmento $\{\gamma(t)+\lambda N(t)\ :\ \lambda\in(0,\varepsilon)\}$ è contenuto nell'interno di $\gamma$.

(Si gira in senso antiorario)

**TEOREMA** (Stokes). Sia $\gamma:[a,b)\longrightarrow\mathbb{R}^2$ curva chiusa semplice. Chiamiamo $\gamma(t)=(x(t),y(t))$. Allora l'area all'interno di $\gamma$ è

$$A(\gamma)=\int_a^b x(t)\,y'(t)\,dt=-\int_a^b x'(t)\,y(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_a^b\big(x(t)\,y'(t)-x'(t)\,y(t)\big)\,dt$$

Stokes: area $A$ con bordo orientato $\partial A=\gamma$, allora

$$\int_A dx\wedge dy=\int_A\frac{1}{2}\,d(xdy-ydx)=\int_\gamma\frac{1}{2}\,xdy-ydx=\int_a^b\frac{1}{2}\,(x(t)y'(t)-x'(t)y(t))\,dt$$

$$\left(\int_A \partial\omega=\int_{\partial A}\omega\right)$$

**TEOREMA** (disuguaglianza isoperimetrica). Sia $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ curva chiusa semplice, $L(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,dt$ la lunghezza di $\gamma$. Allora $A(\gamma)\leq\dfrac{L(\gamma)^2}{4\pi}$.

Inoltre vale l'uguaglianza $\iff$ $\gamma$ è una circonferenza