INTRODUZIONE ALLE VARIETÀ DIFFERENZIABILI

↳ le varietà diff vengono dette anche lisce o C^∞

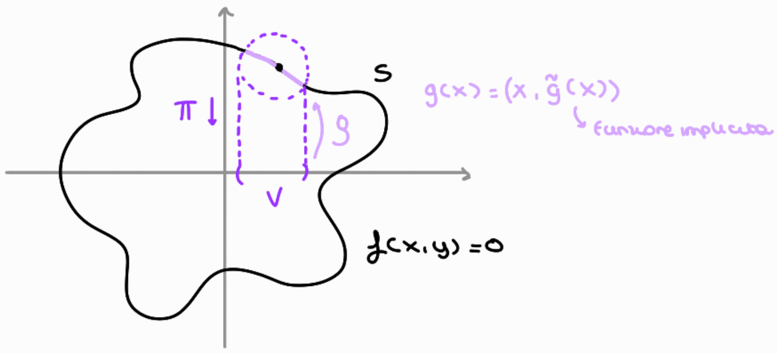
Varie def equivalenti:

- sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ (topologia indotta da $\mathbb{R}^n$):

  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ di dimensione d se $\forall x_0 \in S$ $\exists U \subseteq \mathbb{R}^n$ intorno aperto di x_0, $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ funzione C^∞ con $rg(J_f(x)) = n-d$ $\forall x \in U$ tc $S \cap U = f^{-1}(0)$ $\longrightarrow$ è localmente un luogo degli zeri

Per il teorema del Dini, ciò è equivalente:

- $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è sottov. se $\forall x_0 \in S$ $\exists$ $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq n$ e $\exists$ $U \subseteq \mathbb{R}^n$ intorno aperto di x_0, $\exists$ $V \subseteq \mathbb{R}^d$ intorno aperto di $\pi(x_0)$ dove $\pi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_{i_1}, \dots, x_{i_d})$, tc $\pi(U) = V$, $\pi|_{S \cap U}: S \cap U \longrightarrow V$ è omeomorfismo con inversa $g: V \longrightarrow S \cap U$ di classe C^∞.



<u>oss</u> se $U \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, allora è possibile definire funzioni $g: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^∞ (o C^k), ma per definire funzioni di classe C^∞ (o C^k) da un sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^n$ bisogna estenderle (localmente)

<u>def</u> $S \subseteq \mathbb{R}^n$ sottoinsieme, $f: S \longrightarrow \mathbb{R}^k$ funzione, allora

- f è di classe C^∞ se $\forall x_0 \in S$ $\exists$ $U \subseteq \mathbb{R}^n$ intorno aperto di x_0 in $\mathbb{R}^n$ e $\tilde{f}: U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ di classe C^∞ tale che $\tilde{f}|_{S \cap U} = f|_{S \cap U}$
- $f: \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\cap}{S}} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^m}{\overset{\cap}{T}}$ è un diffeomorfismo di classe C^∞ se f è C^∞, biiettiva e con inversa $f^{-1}: T \longrightarrow S$ di classe C^∞.

esercizio (prime lezioni di analisi)

Verificare che $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^n$ di dimensione d se e solo se ogni punto x di S possiede un intorno aperto in S diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^d$

def In questo caso chiamiamo il diffeomorfismo CARTA LOCALE e il diffeomorfismo inverso PARAMETRIZZAZIONE REGOLARE

def Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme. Sia $U \subseteq S$ un aperto di S. Una PARAMETRIZZAZIONE REGOLARE di U è $f: V \longrightarrow U$ con $V \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto di $\mathbb{R}^d$ tc

i) f è biiettiva $V \longrightarrow U$

ii) f è di classe C^∞

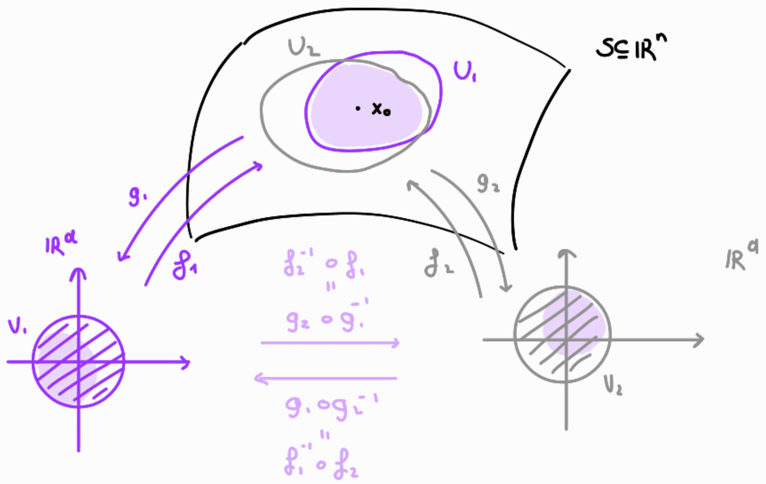
iii) $\forall\, x \in V \quad rg(Jf(x)) = d$ (è max)

iv) f è un omeomorfismo (cioè f è aperta)

esercizio Se $f: V \longrightarrow U \subseteq S$ una parametrizzazione regolare di $U \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^n$, verificare che $f^{-1}: U \longrightarrow V$ è una funzione C^∞, dunque f è diffeo

↳ ci vuole la def. di C^∞ detta sopra

prop $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è una sottovarietà diff di $\mathbb{R}^n$ se e solo se S è ricoperto da aperti che ammettono una parametrizzazione regolare



Le mappe sopra, come $f_2^{-1} \circ f_1 : f_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \longrightarrow f_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$, rappresentano il cambio di coordinate che mi permette di passare da una parametrizzazione regolare all'altra. In particolare è un diffeomorfismo da $\mathbb{R}^d$ a $\mathbb{R}^d$

Esempi

(a) $S^1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\} \subset \mathbb{R}^2$

- $U\subseteq\mathbb{R}^2$, $f: U\longrightarrow\mathbb{R}$, $(x,y)\longmapsto x^2+y^2-1$ è C^∞

$\forall\ P=(x,y)\in S^1 \quad J_f(P) = (2x \quad 2y) \neq (0,0)$

prima def $\Rightarrow$ $rg(J_f(P)) = 1\ \forall\ p\in S^1 \Rightarrow S^1$ è sottovarietà diff. di $\mathbb{R}^2$

- parametrizzazioni regolari: $\varphi_1 : (-\pi,\pi) \longrightarrow S^1 \setminus \{(-1,0)\} \subseteq S^1$, $\theta \longmapsto (\cos\theta, \sin\theta)$

φ_1 è C^∞, suriettiva sull'aperto $S^1\setminus\{(-1,0)\}$ e iniettiva ($\Rightarrow$ biettiva), aperta ($\Rightarrow$ φ_1 è omeomorfismo)

$rg(J\varphi_1(\theta)) = rg(-sen\,\theta, \cos\theta) \neq (0,0)$

vale lo stesso per $\varphi_2 : (0,2\pi) \longrightarrow S^1\setminus\{(1,0)\}$, $\varphi_2(\eta) = (\cos\eta, \sin\eta)$

domanda chi è la composizione di parametrizzazioni sull'intersezione?

chi è $\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1$?

(b) $S = \{(x,|x|) : x\in\mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

la mappa $t \longmapsto (t,|t|)$ è continua, è biettiva su S ed è aperta, ma non è C^1

$\Rightarrow$ è un omeomorfismo di $\mathbb{R}$ con S ma non è diffeo.

seconda def $\Rightarrow$ Per mostrare che non è sottov. diff. dobbiamo mostrare che il punto $(0,0)\in S$ non ammette proiezioni che sono diffeomorfismi.

Esso ha un sistema fondamentale di intorni $U_\varepsilon = (-\varepsilon,\varepsilon)\times(-\varepsilon,\varepsilon)$.

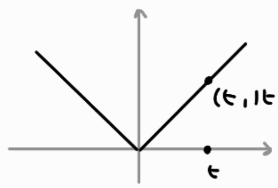
$\pi_1 : U_\varepsilon\cap S \longrightarrow (-\varepsilon,\varepsilon)$, $(x,y)\longmapsto x$ è omeomorfismo ma l'inversa non è C^1

$\pi_1^{-1}(x) = \begin{cases} (x,x) & x>0 \\ (x,-x) & x<0 \end{cases} = (x,|x|)$

$\pi_2 : U_\varepsilon\cap S \longrightarrow (-\varepsilon,\varepsilon)$, $(x,y)\longmapsto y$ non è invertibile perché non è suriettiva

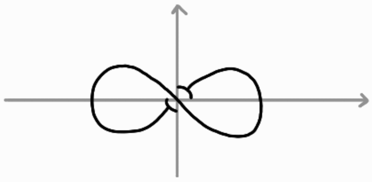
$\pi(x,|x|) = \pi(-x,|x|) = |x|$

Non esiste una proiezione che sia omeomorfismo con inversa C^∞ $\Rightarrow$ non è sottov. diff.



(c) $I=\left(\frac{\pi}{2},\frac{5}{2}\pi\right)\xrightarrow{f}\mathbb{R}^2$

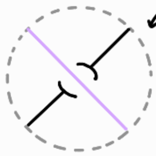
$t\longmapsto(\cos t,\sin(2t))$



- f è C^∞,
- f è iniettiva $\Rightarrow f: I\longrightarrow \underset{S}{\overset{\shortparallel}{f(I)}}$ è biiettiva
- $Jf(t)=(-\sin t,\,2\cos(2t))$, $\operatorname{rg}(Jf(t))=1\ \forall t$

Però f non è omeomorfismo perché non è aperta.

Ogni intorno aperto di $(0,0)$ in S contiene l'intersezione di un arco aperto centrato in $(0,0)$ con S: prendiamo $t_0=\frac{3}{2}\pi$, $f(t_0)=(0,0)$ ma $f\left(\frac{3}{2}\pi-\varepsilon,\frac{3}{2}\pi+\varepsilon\right)$ non è aperto in S



se fosse aperto, ci sarebbero entrambi i rami, ma c'è solo quello lilla

Quindi $f: I\longrightarrow\mathbb{R}^2$ verifica le condizioni (i), (ii), (iii) ma non (iv) della def. di parametrizzazione regolare.

Inoltre $f(I)=S\subset\mathbb{R}^2$ non è sottovar. diff., dato che nessuna delle 2 proiezioni da un intorno di $(0,0)$ è omeo.

perché non sono invertibili

esercizio Trovare un chiuso $C\subseteq\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right)$ tc $f(C)$ non sia chiuso in $S=f(I)$

$C=\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{4}\pi\right]\cup\left[\frac{9}{4}\pi,\frac{5}{2}\pi\right)$ è chiuso

$f(C)=$  ma non è chiuso perché $0\in S$, $0\in\partial(C)$, ma $0\notin C$

esercizio
- Mostrare che $Q=(0,1)\times(0,1)\subseteq\mathbb{R}^2$ è diffeomorfo a $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$.
- $\overline{Q}=[0,1]\times[0,1]\subseteq\mathbb{R}^2$ non è diffeomorfo a $\overline{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$

↳ l'idea intuitiva è legata al bordo delle due figure (esercizio difficile)

Terza definizione di varietà differenziabile:

M spazio topologico, di Hausdorff e a base numerabile

def
- Una CARTA LOCALE (U, φ) di M è un omeomorfismo $\varphi : U \longrightarrow V$ dove $U \subseteq M$ aperto e $V \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto.

  oss Date 2 carte locali $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ di M con $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, c'è un omeomorfismo $\underset{V_1 \subseteq \mathbb{R}^n}{\varphi_1(U_1 \cap U_2)} \xrightarrow[\varphi_1^{-1}]{} U_1 \cap U_2 \xrightarrow[\varphi_2]{} \underset{U_2 \subseteq \mathbb{R}^n}{\varphi_2(U_1 \cap U_2)}$

  Chiamo $\varphi_{21} := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$

- Due carte locali $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ si dicono COMPATIBILI se $\varphi_{21} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ è un diffeomorfismo (C^∞)
- Un ATLANTE DIFFERENZIABILE è $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ è una collezione di carte locali compatibili tali che $\bigcup_{i \in I} U_i = M$
- Una VARIETÀ DIFFERENZIABILE (ASTRATTA) è una coppia $(M, \mathcal{A})$ dove M è sp. top. T_2 a base num, $\mathcal{A}$ un atlante.
- Due atlanti $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ si dicono EQUIVALENTI se la loro unione $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ è ancora un atlante
- L'unione di tutti gli atlanti equivalenti è detta ATLANTE MASSIMALE per M

TEOREMA (Whitney). Data una varietà differenziabile M di dimensione n, $\exists\, S \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$ sottovar. diff. di dim n tc $M \underset{\text{diff}}{\cong} S$.

(c'è un discorso simile a quello che si fa per i gruppi: dato un gruppo finito di ordine n, esso sarà isomorfo ad un sottogruppo di un gruppo di permutazioni sufficientemente grande)

Esempi

(a) $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

- param. locali: $\underset{D_1 = \{(t_1, \dots, t_n) \mid \|(t_1, \dots, t_n)\| < 1\} \subseteq \mathbb{R}^n}{(t_1, \dots, t_n)} \longmapsto (\sqrt{1 - t_1^2 - \dots - t_n^2}, t_1, \dots, t_n) \in S^n$
- carte locali: le inverse delle mappe sopra.

- altre carte locali: proiezioni stereografiche

  sia $N = (1,0,\dots,0) \in S^n$, sia $P \in S^n$ con $P \neq N$, allora

$$\varphi: S^n \setminus \{N\} \longrightarrow H = \{(x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 = 0\}$$
$$P \longmapsto L(P,N) \cap H$$

esercizio
- verificare che φ è un diffeomorfismo, dunque è carta locale
- scrivere le equazioni di φ

(b) se $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è sottov. diff, allora $\forall\, U$ aperto in S, U è una sottov. diff di $\mathbb{R}^n$

(Negli appunti, il prof scrive: più in generale, se $S \subseteq \mathbb{R}^N$ è una sottov. diff., allora $\forall\, U$ aperto in S con $\pi: U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ proiezione invertibile con inversa C^∞, (U,π) è una carta).

(c) Una varietà diff "non immersa" in $\mathbb{R}^n$ è lo spazio proiettivo. Sia

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = \{\overbrace{[x_0 : \dots : x_n]}^{\text{coord. omogenee}} \mid (x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\} = \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\mathbb{R}^*}$$

munito della top. quoziente indotta dalla top. euclidea su $\mathbb{R}^n$.

Allora $U_i := \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \mid x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è aperto, ("aperti fondamentali")

$$\theta_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow U_i \quad \text{è biettiva}$$
$$(t_1,\dots,t_n) \longmapsto [t_1 : \dots : t_i : 1 : t_{i+1} : \dots : t_n]$$

esercizio θ_i è un omeomorfismo

Allora $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid U_i \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ aperto fond., $\varphi_i = \theta_i^{-1}\}_{i=0,\dots,n}$ è atlante.

$U_i \cap U_j = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} : x_i, x_j \neq 0\}$. Supponiamo $j > i$

$$\varphi_i = \theta_i^{-1}([x_0 : \dots x_n]) = \Big(\underset{\substack{\shortparallel \\ t_1}}{\frac{x_0}{x_i}}, \underset{\substack{\shortparallel \\ t_2}}{\frac{x_1}{x_i}}, \dots, \underset{\substack{\shortparallel \\ t_i}}{\frac{x_{i-1}}{x_i}}, \underset{\substack{\shortparallel \\ t_{i+1}}}{\frac{x_{i+1}}{x_i}}, \dots, \underset{\substack{\shortparallel \\ t_n}}{\frac{x_n}{x_i}}\Big) \in \mathbb{R}^n$$

$$\varphi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} = \theta_j^{-1}(\theta_i(t_1,\dots,t_n)) = \theta_j^{-1}(\underset{\substack{\shortparallel \\ x_0}}{t_1} : \dots : \underset{\substack{\shortparallel \\ x_{i-1}}}{t_i} : \underset{\substack{\shortparallel \\ x_i}}{1} : \underset{\substack{\shortparallel \\ x_{i+1}}}{t_{i+1}} : \dots : \underset{\substack{\shortparallel \\ x_n}}{t_n})$$

$$= \Big(\underset{\substack{\shortparallel \\ s_1}}{\frac{t_1}{t_j}}, \dots, \underset{\substack{\shortparallel \\ s_i}}{\frac{t_i}{t_j}}, \underset{\substack{\shortparallel \\ s_{i+1}}}{\frac{1}{t_j}}, \dots, \underset{\substack{\shortparallel \\ s_j}}{\frac{t_{j-1}}{t_j}}, \underset{\substack{\shortparallel \\ s_{j+1}}}{\frac{t_{j+1}}{t_j}}, \dots, \underset{\substack{\shortparallel \\ s_n}}{\frac{t_n}{t_j}}\Big) \in \mathbb{R}^n$$

definita sull'aperto $\varphi_i(U_i \cap U_j) = \{(t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_j \neq 0\}$ è C^∞,

L'inversa $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} = \theta_i^{-1} \circ \theta_j$ definita su $\varphi_j(U_i \cap U_j) = \{(s_1,\dots,s_n) \in \mathbb{R}^n \mid s_{i+1} \neq 0\}$

è anch'essa C^∞, dunque φ_{ji} è diffeomorfismo tra aperti di $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \varphi_i, \varphi_j$ sono differenz. compatibili $\Rightarrow \mathcal{A} = \{(U_0,\varphi_0),\dots,(U_n,\varphi_n)\}$ è atlante.

$\Rightarrow \mathbb{P}^n$ varietà diff. di dimensione n

<u>esercizio</u> (1) Mostrare che $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}^n$ è aperto per la topologia (quoziente) di $\mathbb{P}^n$ se e solo se $\forall\, i=0,\dots,n$ $\theta_i^{-1}(A \cap U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto per la topologia (euclidea) di $\mathbb{R}^n$ ($\Rightarrow$ ogni θ_i è un omeomorfismo).

(2) Mostrare che $\mathbb{P}^n$ è sp top. compatto

(3) consideriamo $\mathbb{C}^n$ munito della top. euclidea ($|(z_1,\dots,z_n)| = \sqrt{\sum |z_i|^2}$).
allora $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} = \dfrac{\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}}{\mathbb{C}^*}$ è varietà differenziabile? Di che dimensione?
È compatta?

<u>Parentesi</u>

Dato X uno sp. top. posso avere 2 atlanti $(X,\mathcal{A}_1)$, $(X,\mathcal{A}_2)$ non compatibili

Posso chiedermi se le due varietà diff $(X,\mathcal{A}_1)$, $(X,\mathcal{A}_2)$ sono diffeomorfe.

In generale, definiamo una mappa $F:(X_1,\mathcal{A}_1) \longrightarrow (X_2,\mathcal{A}_2)$ un diffeomorfismo se

(i) $F: X_1 \longrightarrow X_2$ è omeomorfismo

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[d, "\varphi_i"] & V_j \arrow[d, "\psi_j"'] \\ \varphi_i(U_i) & \psi_j(U_j) \end{tikzcd}$$ carte locali

(ii) $\forall\, \varphi_i \in \mathcal{A}_1,\ \psi_j \in \mathcal{A}_2$

$\psi_i \circ F \circ (\varphi_i)^{-1}$ è diffeomorfismo : $\varphi_i(U_j \cap F^{-1}(V_i)) \longrightarrow \psi_j(V_j \cap F^{-1}(U_i))$

Possiamo avere due atlanti non compatibili ma con varietà diffeomorfe

<u>esempio</u> $X = \mathbb{R}$ sp. top. con topologia euclidea

$\mathcal{A}_1 = \{\varphi_1 : X \xrightarrow{id} \mathbb{R}\}$

$\mathcal{A}_2 = \{\varphi_2 : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad t \longmapsto t^3\}$

allora $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ non sono equivalenti, infatti:

$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ non è diffeomorfismo perché $s \longmapsto s^{1/3}$ non è C^∞

$t \longmapsto t^3$

Tuttavia, $(X,\mathcal{A}_1)$ e $(X,\mathcal{A}_2)$ sono diffeomorfe:

$$\begin{tikzcd} (X,\mathcal{A}_1) = X = \mathbb{R} \arrow[r, "x \mapsto \sqrt[3]{x}", "\text{omeo}"'] \arrow[d, "id"'] & X = \mathbb{R} = (X,\mathcal{A}_2) \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "id"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$