Sistemi lineari di eq. differenziali

$x_0 \in I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto

Sia $A : I \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ continua

$$x \longmapsto A(x)$$

Definiamo $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$f(x,y) \longmapsto A(x)\,y$$

- $f \in C(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$
- $K \subset I$ compatto

Allora si ha

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |A(x)(y_1 - y_2)|$$
$$\leq \underset{\substack{\uparrow \\ x\ \text{continua}}}{\|A(x)\|}\, |y_1 - y_2|$$
$$\leq \left(\max_{x \in K} \|A(x)\|\right) |y_1 - y_2| \Rightarrow f \text{ lipschitziana in } y$$

Dunque con $y_0 \in \mathbb{R}^n$ il (PC) $\begin{cases} y' = A(x)\,y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ ha soluzione locale unica y

In effetti, $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ in quanto

$$|f(x,y)| = |A(x)\,y|$$
$$\leq \max_{x \in K} \|A(x)\| \cdot |y|$$

e vale il teorema delle soluzioni globali.

Cerco di calcolare la soluzione quando A è matrice costante. Uso il procedimento di iterazione per $Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} A\,y(t)\,dt$

Le ipotesi soddisfano quelle del teorema di esistenza ed unicità locale, dunque, con procedimento analogo, si può dimostrare che $Ty(x)$ è contrazione. Ricordando la dimostrazione del teorema di Banach, si ha che il punto fisso y (la soluzione del PC) è ottenuto tramite $\lim_{n\to\infty} T^n y_0(x)$ con y_0 una funzione dello spazio funzionale $\{y \in C^1(I) : |y(x) - y_0| \leq \varepsilon,\ y(x_0) = y_0,\ x \in I\}$. Da ciò segue il metodo di iterazione di punto fisso.

Trasformo $y \equiv y_0$:

$$T\,y(x) = y_0 + A\int_{x_0}^{x} y_0\,dt$$
$$= y_0 + \underbrace{A y_0}_{\in\, \mathbb{R}^n}\, \underbrace{(x - x_0)}_{\in\, \mathbb{R}}$$

Itero:

$$T^2 y(x) = y_0 + A\int_{x_0}^{x} y_0 + A y_0 (t - x_0)\,dt$$
$$= y_0 + A y_0 (x - x_0) + A^2 y_0 \frac{(x-x_0)^2}{2}$$

Dunque per $k \in \mathbb{N}$:

$$T^k y(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-x_0)^i}{i!} A^i y_0$$

per $k \longrightarrow \infty$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} A^k y_0$$

<u>def</u> Per $A \in M_n(\mathbb{R})$, si definisce il suo ESPONENZIALE

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} A^k y_0$$

<u>oss</u> La serie e^A converge

Infatti: siano $n \leq m$: $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} \frac{A^k}{k!}$

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k!} \|A\|^k \leq \varepsilon \qquad \forall\, \substack{n \geq \bar{n} \\ m \geq n}$$
$$\varepsilon > 0$$

La serie è di Cauchy. Per il criterio del confronto e^A converge

<u>corollario</u> La sol. del (PC) $\begin{cases} y' = Ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ è la funzione $y \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$

$$y(x) = e^{(x-x_0)A} \cdot y_0$$

Equazioni lineari differenziali del secondo ordine

$I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto

$x_0 \in I$

$a, b, f \in C(I, \mathbb{R})$

Voglio studiare

$$\mathcal{L}\, y(x) = y'' + a(x) y' + b(x) y = f(x)$$

con $\mathcal{L} : C^2(I) \longrightarrow C(I)$ operatore lineare

$$\mathcal{L} y(x) = y'' + a(x) y' + b(x) y$$

Sappiamo:

TEOREMA il problema di Cauchy $\forall\, y_0, y_0' \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \mathcal{L} y = f \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

ha soluzione unica $y \in C^2(I; \mathbb{R})$

1) **caso omogeneo**

$f \equiv 0$

$\mathcal{L}y = y'' + a(x) y' + b(x) = 0$

Definiamo $S = \{ y \in C^2(\mathbb{R}) : \mathcal{L}y = 0 \}$

prop Proviamo che $\dim_{\mathbb{R}} S = 2$.

dim Considero $T : S \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(y) = (y(x_0), y'(x_0))$$

- è lineare
- è iniettiva $\to$ $Tz = Ty \implies z = y$ per l'unicità della soluzione
- è suriettiva per il teorema d'esistenza

Siano $y_1, y_2 \in S$ e definiamo il **WRONSKIANO**

$$W_{y_1 y_2} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$

dipende da x. Sia poi $w = w(x) = \det W_{y_1, y_2}$ il DETERMINANTE WRONSKIANO.

Osservo questo:

$$w' = (y_1 y_2' - y_1' y_2)'$$
$$= \cancel{y_1' y_2'} + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - \cancel{y_1' y_2'}$$

Uso $y_1'' = -a y_1' - b y_1$

$y_2'' = -a y_2' - b y_2$

e sostituisco

$$w' = y_1(-a y_2' - \cancel{b y_2}) - y_2(-a y_1' - \cancel{b y_1})$$
$$= -a(y_1 y_2' - y_2 y_1') = -a w$$

Conclusione:

$$w(x) = w(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt}$$

<u>prop</u> Siano $y_1, y_2 \in S = \{ y \in C^2(I) : \mathcal{L}y = 0 \}$. Allora:

1) y_1 e y_2 sono lin dipendenti su $\mathbb{R}$ $\iff$ $\overset{(\forall)}{\exists}\, x \in I$ tc $W(x) = 0$

2) y_1 e y_2 sono lin indip su $\mathbb{R}$ $\iff$ $\exists\, x \in I$ tc $W(x) \neq 0$

<u>dim</u> 1) $(\Rightarrow)$ Siano y_1, y_2 lin dip: $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, tc

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \equiv 0 \text{ su } I \Rightarrow \alpha y_1' + \beta y_2' \equiv 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\neq 0}{\alpha} \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow W \equiv 0$ su I.

$(\Leftarrow)$ Sia $W(x_0) = 0$, $x_0 \in I$ $\Rightarrow$ $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, tc

$$\begin{cases} \alpha y_1(x_0) + \beta y_2(x_0) = 0 \\ \alpha y_1'(x_0) + \beta y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Sia $z = \alpha y_1 + \beta y_2 \in S$ ovvero $\mathcal{L}z = 0$

$$\iff (PC) \begin{cases} z'' + a z' + b z \equiv 0 \\ z(x_0) = 0 \\ z'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Per l'unicità della sol. del (PC) deduco che $w \equiv 0$ su I.

2) Ottengo la dim negando 1). $\square$

2) metodo di variazione delle costanti

Siano $y_1, y_2 \in S$ lin. indip. (base di soluzioni per l'eq. omogenea).

Voglio risolvere $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$ per $f \in C(I)$.

Cerco soluzione del tipo

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

con $c_1, c_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ da scoprire

Uso il metodo della variazione delle costanti. Conti:

$$y' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2'$$

Impongo $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$ (1)

↳ posso imporre questa condizione perché lo sp. vett. ha dim. 2, dunque posso mettere 1 vincolo

Derivo di nuovo:

$$y'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2''$$

Impongo $c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x)$ (2) → questa condizione la trovo sostituendo y, y', y'' nell'eq. diff. (non omogenea). di seguito viene fatta una verifica del fatto che è soddisfatta

Abbiamo un sistema di due ED: $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$

Sostituisco y, y', y'' nella $\mathcal{L}y = f$ e richiedo

$$\cancel{f} + c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + a(c_1 y_1' + c_2 y_2') + b(c_1 y_1 + c_2 y_2) \overset{?}{=} \cancel{f}$$

$$c_1(\underbrace{y_1'' + a y_1' + b y_1}_{=0}) + c_2(\underbrace{y_2'' + a y_2' + b y_2}_{=0}) = 0$$

l'eq. è verificata perché y_1 e y_2 sol. dell'eq. omogenea.

Risolvo il sistema

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

$\updownarrow$

$\det(\dots) \neq 0$ in tutto I

Posso invertire:

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

Integro e trovo c_1 e c_2 a meno di due costanti additive.

Eq. diff. lineari del secondo ordine a coeff. costanti

$$y'' + ay' + by = 0$$

con $a, b \in \mathbb{R}$

Cerco soluzione del tipo

spesso le soluzioni sono trigonometriche

$$y(x) = e^{\alpha x}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

Sostituisco nell' ED

$$\underset{\substack{\neq \\ 0 \ \forall \alpha}}{e^{\alpha x}} (\alpha^2 + a\alpha + b) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{cases}$$

$$\Delta = a^2 - 4b$$

$\Delta > 0$ $\quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ e trovo due sol. lin. indip esponenziale

$$y_1 = e^{\alpha_1 x} \qquad y_2 = e^{\alpha_2 x}$$

$\Delta = 0$ $\quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \in \mathbb{R}$

$$y_1 = e^{\alpha x}$$

le trovo con il metodo delle matrici

$$y_2 = x e^{\alpha x}$$

sono sol. lin. indip

$\Delta < 0$ $\quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$

$$\alpha_1 = \frac{-a - i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha - i\beta$$

$$\alpha_2 = \frac{-a + i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha + i\beta$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Le soluzioni sono

$$z_1 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x))$$

$\cos(-\beta x) + \sin(-\beta x)$ $=$

$$z_2 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))$$

Ora

$$y_1 = \frac{z_1 + z_2}{2} = \cos(\beta x) e^{\alpha x}$$

$$y_2 = \frac{z_2 - z_1}{i} = \sin(\beta x) e^{\alpha x}$$

sono due soluzioni reali linearmente indipendenti.

Eq. diff. lin. 2° ordine di Eulero

Sono del tipo $ax^2y''+bxy'+cy=0$ con $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$.

Si cercano soluzioni del tipo $y=x^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{C}$

$$y'=\alpha x^{\alpha-1}$$

$$y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

Sostituisco:

$$\underset{\neq 0}{x^\alpha}(\overset{\neq 0}{a}\underbrace{\alpha(\alpha-1)+b\alpha+c}_{=0})=0$$

trovo due soluzioni $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}$

1) $\alpha_1\neq\alpha_2$ reali $\Rightarrow y=c_1x^{\alpha_1}+c_2x^{\alpha_2}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

2) $\alpha_1=\alpha$, α_2 complesse $\Rightarrow y=x^\alpha$

$\alpha=\alpha+i\beta$

$$= e^{\ln x^\alpha}$$

$$= e^{\alpha\ln x}$$

$$= e^{(\alpha+i\beta)\ln x}$$

$$= x^\alpha e^{i\beta\ln x} = x^\alpha(\cos(\beta\ln x)+i\sin(\beta\ln x))$$

$\alpha_2=\bar{\alpha}$ complessa coniugata, ma allora, come per le eq. a coeff costanti, posso fare parte reale e parte immaginaria, trovando soluzione generale:

$$y(x)=x^\alpha(c_1\cos(\beta\log x)+c_2\sin(\beta\log x))$$

3) $\alpha_1=\alpha_2=\alpha\in\mathbb{R}$. Trovo le due sol. lin. indip:

$$y_1=x^\alpha$$

$$y_2=(\log x)x^\alpha$$

$$y(x)=x^\alpha(c_1+c_2\log x)$$

Esercizio Considero (PC) $\begin{cases} y'' + 2y^3 = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$. Provare:

1) $\exists !$ sol. locale
2) sol. è def su $\mathbb{R}$
3) sol. è pari
4) sol. è periodica

1) Poniamo $y' = z \Rightarrow -2y^3 = y'' = z'$. Dunque

$$(PC) \iff \begin{cases} y' = z \\ z' = -2y^3 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

Qui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(y,z) = (z, -2y^3)$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) \Rightarrow f$ è loc. di Lipschitz in (y,z)

il PC equiv. ha soluzione locale unica

2) oss Non posso usare il teorema delle sol. globali perché la seconda coordinata cresce in modo cubico. Dunque voglio cercare di usare il teorema di fuga dai compatti, cercando di mostrare che y e z sono limitate.

Moltiplico per y' l'ED.

$$y'' y' + 2y^3 y' = 0$$

$$\left(\frac{(y')^2}{2}\right)' + \left(\frac{y^4}{2}\right)' = 0$$

$$(y')^2 + y^4 = \text{costante} = (y'(0))^2 + y(0) = 1$$

Deduco che $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$ $\forall x \in$ intervallo di def della soluzione.

Dunque per il teorema di fuga dai compatti y sol è def $\forall x \in \mathbb{R}$

3) idea Costruisco la simmetrica della sol. e spero che soddisfi il (PC). Per unicità allora devono coincidere.

Sia y soluzione e definiamo

$$\eta(x) = y(-x)$$

$$h'(x) = -y'(-x)$$

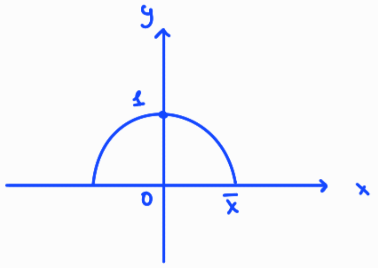
$$h''(x) = y''(-x)$$

sostituisco e trovo.

$$\begin{cases} h''(x) + 2h(x)^3 = y''(-x) + 2y(-x)^3 = 0 \\ h(0) = y(0) = 1 \\ h'(0) = -y'(0) = 0 \end{cases}$$

h risolve il (PC). Per l'unicità $h = y \Rightarrow y$ è pari.

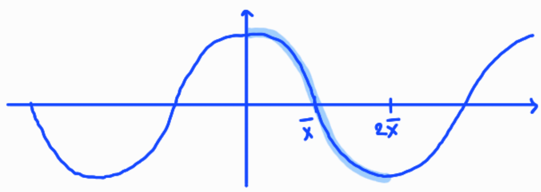
4)



$y''(0) = -2y(0)^3 = -2 < 0 \Rightarrow 0$ è p.to di max e la funzione è concava,
finché non incontro l'asse delle x

Deduco che $\exists\, \bar{x}$ t.c. $y(\bar{x}) = 0$ e $y > 0$ fra $(-\bar{x}, \bar{x})$

<u>claim</u> il periodo è $4\bar{x}$ e ha l'andamento di un coseno



↳ voglio traslare il ramo evidenziato indietro di $2\bar{x}$ e poi ribaltarlo: se la funzione è periodica dovrebbe coincidere con y nell'intervallo $[-2\bar{x}, 0)$

Sia y la soluzione e costruisco

$$w(x) = -y(x - 2\bar{x})$$

Derivo

$$w' = -y'(x - 2\bar{x})$$

$$w'' = y''(x - 2\bar{x})$$

Vedo che

$$w'' + 2w^3 = y''(x - 2\bar{x}) + 2y(x - 2\bar{x})^3 = 0 \qquad \forall x$$

In $x = \bar{x}$

$$w(\bar{x}) = -y(-\bar{x}) = 0 = y(\bar{x})$$

$$w'(\bar{x}) = -y'(x - \bar{x})\Big|_{x=\bar{x}} = -y'(-\bar{x})$$

Sappiamo che $y'^2 + y^4 = 1 \Rightarrow y'(\bar{x})^2 + \underset{0}{\underset{\parallel}{y'(\bar{x})^4}} = 1 \Rightarrow y'(\bar{x}) = -1$

$$\Rightarrow y'(-\bar{x}) = 1$$

dunque $w'(\bar{x}) = -y'(-\bar{x}) = -1 = y'(\bar{x})$

Per il teorema di unicità della soluzione $w = y$, ovvero

$$y(x) = w(x) = -y(x-2\bar{x})$$

$$= y(x-4\bar{x}) \qquad \forall x$$

tolgo $2\bar{x}$ e nasce un segno $-$ davanti alla y

$\Rightarrow$ y è $4\bar{x}$-periodica

esercizio Calcola l'integrale generale (tutte le soluzioni) dell'eq. diff. $y''-y=\dfrac{e^x}{1+e^x}$

- caso omogeneo: $y''-y=0$

cerco sol. del tipo $y=e^{\alpha x}$, $\alpha\in\mathbb{C}$

$\alpha^2 e^{\alpha x}-e^{\alpha x}=0 \iff (\alpha^2-1)=0 \iff \alpha=\pm 1$

L'integrale generale dell'omogenea:

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}\,,\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

- metodo di variazione delle costanti: $c_1,c_2\in C^1(\mathbb{R})$

$y=c_1e^x+c_2e^{-x}$

$y'=\underline{c_1'e^x}+c_1e^x+\underline{c_2'e^{-x}}-c_2e^{-x} \implies$ pongo $c_1'e^x+c_2'e^{-x}=0$

$y''=\underline{c_1'e^x}+c_1e^x-\underline{c_2'e^{-x}}+c_2e^{-x}$ ($\implies$ pongo $c_1'e^x-c_2'e^{-x}=\dfrac{e^x}{1+e^x}$)

sostituisco nell'eq. diff.

$$c_1'e^x+\cancel{c_1e^x}-c_2'e^{-x}+\cancel{c_2e^{-x}}-\cancel{c_1e^x}-\cancel{c_2e^{-x}}=\frac{e^x}{1+e^x}$$

questo mi dice che la seconda condizione da imporre è $c_1'e^x-c_2'e^{-x}=\dfrac{e^x}{1+e^x}$

Dunque

$$\begin{cases} c_1'e^x+c_2'e^{-x}=0\\ c_1'e^x-c_2'e^{-x}=\dfrac{e^x}{1+e^x}\end{cases} \iff \begin{cases} 2c_1'e^x=\dfrac{e^x}{1+e^x}\\ 2c_2'e^{-x}=-\dfrac{e^x}{1+e^x}\end{cases}$$

Calcolo c_1:

$$c_1'=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+e^x}$$

$$c_1=k_1+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+e^x}\,dx$$

$$\underset{dx=\frac{1}{t}dt}{\overset{\substack{e^x=t\\ x=\ln t}}{=}} k_1+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t(1+t)}\,dt$$

$$=k_1+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=k_1+\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|1+t|$$

$$=k_1+\frac{1}{2}\ln\frac{e^x}{1+e^x}$$

trovo anche c_2 e la pongo dentro $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$.