Derivate di ordine superiore

$A \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Sia $f: A \to \mathbb{R}$ derivabile $\forall\, x \in A$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f_{x_i}(x) \quad \text{esistono } \forall\, x \in A$$

se i limiti esistono finiti, posso definire $\forall\, i,j = 1,\dots,n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+te_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}{t}$$

<u>notazioni</u> $\quad \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = f_{x_i x_j} = D_j D_i f$ **DERIVATE PARZIALI SECONDE DI TIPO MISTO**

se poi $i=j$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ **DERIVATE PARZIALI SECONDE**

<u>esempio</u> Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x=y=0 \end{cases}$$

Voglio capire che legame c'è fra $f_{xy}(0)$ e $f_{yx}(0)$.

$f_x(0) = 0$

Per $x^2+y^2=0$ $\quad f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} = \frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2) - (x^3y-xy^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$

$$f_{xy}(0) = \lim_{y\to 0}\frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\cdot\frac{-y^5}{y^4} = -1$$

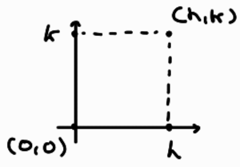
Ora calcolo $f_{yx}(0,0) = 1$ — il conto è lo stesso di prima, a meno di un segno −, per via della simmetria della funzione

TEOREMA (Schwarz). Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione tale che f_{xy} ed f_{yx} esistono in un intorno di 0 e sono continue in 0. Allora deve essere

$$f_{xy}(0) = f_{yx}(0)$$

<u>dim</u> $\quad \Delta: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\Delta(h,k) = \underbrace{f(h,k) - f(h,0)}_{:= F(h,k)} - (\underbrace{f(0,k) - f(0,0)}_{= F(0,k)})$$



$$= F(h,k) - F(0,k)$$

$$\underset{\substack{\exists\, h^* \in [0,h] \\ \text{con } h^* = h^*(h,k)}}{\overset{\text{Lagrange}}{=}} F_x(h^*, k) \cdot h$$

$$= \left(f_x(h^*,k) - f_x(h^*,0)\right) \cdot h$$

$$\underset{\exists\, \hat{k} \in [0,k]}{\overset{\text{Lagrange}}{=}} f_{xy}(h^*, \hat{k})\ kh$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta(h,h)}{h^2} = f_{xy}(h^*, \hat{h}) \xrightarrow[h \to 0]{} f_{xy}(0,0)$$

$$\left(h \to 0 \Rightarrow h^*, \hat{h} \to 0 \underset{f_{xy}\text{ continua}}{\Rightarrow} f_{xy}(h^*, \hat{h}) \to f_{xy}(0,0) \right)$$

$$\Delta(h,k) = f(h,k) - f(h,0) - f(0,k) + f(0,0)$$

$$= (\underbrace{f(h,k) - f(0,k)}_{:= G(h,k)}) - (\underbrace{f(h,0) - f(0,0)}_{G(h,0)})$$

$$= G(h,k) - G(h,0)$$

$$\vdots$$

$$= f_{yx}(\bar{h}^*, \bar{\hat{k}})\ hk$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta(h,h)}{h^2} = f_{yx}(\bar{h}^*, \bar{\hat{h}}) \xrightarrow[h \to 0]{} f_{yx}(0,0)$$

$$\Rightarrow \quad f_{yx}(0,0) = f_{xy}(0,0) \qquad \square$$

def $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Indichiamo con $C^2(A)$ l'insieme di tutte le $f: A \to \mathbb{R}$ tali che esistono continue tutte le derivate parziali seconde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \in C(A) \qquad \forall\, i,j = 1,\dots,n$$

def Per $f \in C^2(A)$ possiamo definire la MATRICE HESSIANA di f

$$D^2 f = Hf(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$$

È una matrice simmetrica (teorema di Schwarz).

def Per $k \in \mathbb{N}$ indichiamo con $C^k(A)$ l'insieme di tutte le $f: A \to \mathbb{R}$ tali che esistono continue in A tutte le derivate parziali di ordine k

$$D_{i_1} \cdots D_{i_k} f(x) \quad \text{per ogni } i_1, \dots, i_k \{1, \dots, n\}$$

Infine $C^\infty(A) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(A)$.

oss Se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, allora $D_{i_1} \cdots D_{i_k} f(x) = D_{\sigma(i_1)} \cdots D_{\sigma(i_k)} f(x)$
$\forall\ \sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ che fissa $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$

esempio $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}} & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$

1) f non è continua nell'origine
2) le derivate parziali

$$\frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^m \partial y^n}(x,y)$$

esistono $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $\forall (x,y) \subseteq \mathbb{R}^2$.

Formula di Taylor

lemma Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in C^2(A)$, $x, x_0 \in A$ tc $[x, x_0] \subset A$. (segmento da x a y)

Allora esiste $z \in [x, x_0]$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(z)(x - x_0), x - x_0 \rangle$$

(prodotto matrice vettore colonna)

dim Sia

$$\varphi(t) = f(tx + (1-t)x_0), \quad t \in [0,1)$$

$\varphi(0) = x_0$

$\varphi(1) = x$

$\varphi \in C^2([0,1])$

Sappiamo che $\exists\, \tau \in [0,1)$ tc

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(\tau)$$

e sostituisco

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(\cdots), x - x_0 \rangle = \sum f_{x_i}(\cdots)\, v_i$$

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\cdots)\, v_j v_i = \langle Hf(\cdots)(v), v \rangle$$

Con $z = \tau x\,(1-\tau)\, x_0$ trovo

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(z)(x-x_0), x - x_0 \rangle. \quad \square$$

oss $\langle Hf(\underset{(x,\,x_0)}{z})v, v \rangle = \langle Hf(x_0)v, v \rangle + \langle [\underbrace{Hf(z) - Hf(x_0)}]v, v \rangle$ questo è $o(|x-x_0|)$

$f \in C^2 \Rightarrow o(1)$ per $x \to x_0$

Teo Taylor 2° ordine con resto di Peano

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(x_0)(x-x_0), x-x_0 \rangle + \underset{x \to x_0}{o(|x-x_0|)}$$

def sia $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ (0 compreso) un vettore **n-MULTI-INDICE**.

$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ è detto **FATTORIALE** di α

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ e' detto **PESO** di α

Per $x \in \mathbb{R}^n$: $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$

$$\partial^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

TEOREMA Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in C^{k+1}(A)$ e $x, x_0 \in A$ tc $[x, x_0] \subset A$. Allora $\exists\, z \in (x, x_0)$ tale che

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{\partial^\alpha f(z)}{\alpha!}(z - x_0)^\alpha$$

elemento che è un vettore (sopra è definita questa operazione) esercizio Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il dominio della funzione

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \log(1+x^{2n}+y^{2n})$$

1) Determinare D

2) Provare $f \in C(D)$

3) Provare $f \in C^1(D)$

1) $|x| \geq 1$ oppure $|y| \geq 1 \Rightarrow \log(1+x^{2n}+y^{2n}) \geq \log 2 \Rightarrow$ serie diverge

Voglio utilizzare il criterio di Weierstrass per le serie.

Fissiamo $0<\delta<1$ e siano $|x|,|y| \leq \delta$.

Osserviamo $\log(1+t) \leq t \quad \forall t \geq 0$.

$$\Rightarrow \log(1+x^{2n}+y^{2n}) \leq x^{2n}+y^{2n} \leq 2\delta^{2n}$$

$$\Rightarrow \sum \log(1+x^{2n}+y^{2n}) \leq \sum 2\delta^{2n} = 2\sum(\delta^2)^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{converge} \\ \text{perché } \delta<1}}{=} 2\frac{1}{1-\delta^2} < \infty$$

ho dimostrato $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\substack{|x|\leq\delta \\ |y|\leq\delta}} |\log(1+x^{2n}+y^{2n})| < \infty$

$\Rightarrow$ la serie converge unif in $[-\delta,\delta]\times[-\delta,\delta]$

2) Dunque $D=(-1,1)\times(-1,1)$ e ho provato che $f \in C(D)$

3) Conti formali:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty} \log(1+x^{2n}+y^{2n})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \log(1+x^{2n}+y^{2n})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n x^{2n-1}}{1+x^{2n}+y^{2n}} \leq 2\sum_{n=0}^{\infty} n x^{2n-1} < \infty$$

$\Rightarrow$ converge se $|x|<1$ per il criterio della radice o del rapporto

Inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\substack{|x|\leq\delta \\ |y|\leq\delta}} |n x^{2n-1}| = \sum_{n=0}^{\infty} n\delta^{2n-1} < \infty$$

$\Rightarrow$ converge unif. in $|x| \leq \delta < 1$

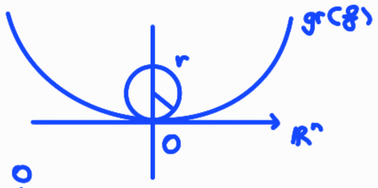
$\Rightarrow$ potevo fare la derivata! $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ esiste

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ è continua perché serie di funzioni continue conv. unif.

$f_x \in C^1(D)$ e, analogamente, $f_y \in C^1(D) \Rightarrow f \in C^1(D)$.

<u>esercizio</u> Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, tale che $f(0)=0$ e $\nabla f(0)=0$

Provare che posso mettere una palla sopra il $gr(f)$ che tocca $gr(f)$ esattamente in $0 \in \mathbb{R}^n$.



$$f(x) = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(x_0)}} + \langle \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\nabla f(x_0)}}, x-x_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(x_0)(x-x_0), x-x_0 \rangle + o(|x-x_0|^2)$$

Pongo $x_0 = 0$.

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Hf(0)(x), x \rangle + o(|x|^2)$$

Sia g la funzione della calotta della biglia: devo individuarla.

Sia P il centro della biglia, r il raggio. $B_r(P)$ è la palla.

Sono interessato alla frontiera:

$r>0 \qquad P=(0,r)$

$$\partial B_r(0) = \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : |x-0|^2 + |x_{n+1}-r|^2 = r^2\}$$
$$= \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : |x|^2 + |x_{n+1}-r|^2 = r^2\}$$

$$(x_{n+1}-r)^2 = r^2 - |x|^2 \implies x_{n+1} - r = \pm\sqrt{r^2-|x|^2}$$

↳ se scelgo il segno + ottengo la calotta superiore, viceversa quella inferiore

Considero

$$g(x) = r - \sqrt{r^2-|x|^2} \qquad |x| \leq r$$

$\implies g \in C^\infty(\{|x|<r\})$

Faccio lo sviluppo di Taylor:

$g(0)=0$

$$g_{x_i}(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{-2x_i}{\sqrt{r^2-|x|^2}} = \frac{x_i}{\sqrt{r^2-|x|^2}} \implies Dg(0)=0$$

1 se $i=j$
0 se $i \neq j$

$$g_{x_i x_j}(x) = \frac{\delta_{ij}\sqrt{r^2-|x|^2} - x_i \cdot \dfrac{x_j}{\sqrt{r^2-|x|^2}}}{r^2-|x|^2}$$

$$g_{x_i x_j}(0) = \frac{1}{r}\delta_{ij} \implies Hg(0) = \frac{1}{r} I_n$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\langle Hf(0)(x), x \rangle + o(|x|^2) = \frac{1}{2}|x|^2 \cdot \frac{1}{r} + o(|x|^2)$$

$$g(x) - f(x) = \frac{1}{2r}|x|^2 + o(|x|^2) - \Big(\frac{1}{2}\underbrace{\langle Hf(0)(x), x\rangle}_{\substack{\leq \text{ CS} \\ |Hf(0)(x)|\,|x| \\ \leq \text{ trasf lineari} \\ \|Hf(0)\|_\infty |x|^2}} + o(|x|^2)\Big)$$

$$\geq |x|^2 \Big(\underbrace{\frac{1}{2r} - \frac{\|Hf(0)\|_\infty}{2}}_{\text{positivo per r sufficientemente piccolo}} + o(1)\Big) \qquad \forall\, |x| < r \text{ con } r \text{ piccolo}$$

Forme quadratiche in $\mathbb{R}^n$

Consideriamo B matrice reale $n\times n$ simmetrica, $B=B^t$. A B è associata la forma quadratica $Q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$Q(x) = \langle Bx, x\rangle \quad , \quad x\in\mathbb{R}^n$$

<u>def</u> 1) Diciamo che B è semidefinita positiva se $\langle Bx, x\rangle \geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$.

Scriveremo $B\geq 0$.

2) Diremo che B è definita positiva se $\langle Bx, x\rangle > 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^n, \ x\neq 0$.

Scriveremo $B>0$.

3) Diremo che B è semidefinita negativa $(B\leq 0)$ se e solo se $-B\geq 0$.

4) Diremo che B è definita negativa $(B<0)$ se e solo se $-B>0$.

<u>oss</u> Sia $B=B^t$. Consideriamo $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\ldots\leq\lambda_n<\infty$ gli autovalori di B.

Noto che $B\geq 0 \iff \lambda_1\geq 0$

$B>0 \iff \lambda_1>0$

<u>Lemma</u> Sia $B=B^t$ una matrice reale $n\times n$. Sono equivalenti:

1) $B>0$

2) $\exists\, m>0$ tc $\langle Bx, x\rangle \geq m|x|^2 \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$

<u>dim</u> $2)\Rightarrow 1)$. semplice

$1)\Rightarrow 2)$. L'insieme $K=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|=1\}$ è compatto. Poi

$Q: K\longrightarrow\mathbb{R}$, $\quad Q(x)=\langle Bx, x\rangle$ è continua su K.

$\overset{W}{\Longrightarrow}$ esiste $\bar{x}\in K$ tale che $Q(\bar{x})\leq Q(x) \quad \forall x\in K$.

$$Q(\bar{x}) = \langle B\bar{x}, \bar{x}\rangle \overset{B>0}{=} m > 0$$

Ho finito: $x\in\mathbb{R}^n$, $x\neq 0$ allora

$$\left\langle B\frac{x}{|x|}, \frac{x}{|x|}\right\rangle \geq m$$

$$\Rightarrow \langle Bx, x\rangle \geq m|x|^2$$

$\square$

Condizioni necessarie e sufficienti di estremalità locale

$A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$

def 1) Diciamo che $x_0 \in A$ è **PUNTO DI MINIMO LOCALE** (stretto) di f se $\exists r > 0$ tc

$$f(x) \geq f(x_0) \quad (>) \qquad \forall x \in B_r(x_0) \subset A \quad (x \neq x_0)$$

2) Diciamo che $x_0 \in A$ è **PUNTO DI MASSIMO LOCALE** (stretto) di f se $\exists r > 0$ tc

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (<) \qquad \forall x \in B_r(x_0) \subset A \quad (x \neq x_0)$$

def Sia $f \in C^1(A)$. Diremo che $x_0 \in A$ è un **PUNTO CRITICO** di f se

$$\nabla f(x_0) = 0.$$

TEOREMA (condizioni necessarie di min. locale). Siano $f \in C^2(A)$, $x_0 \in A$.
Se x_0 è un punto di minimo locale di f, allora:

1) $\nabla f(x_0) = 0$ (x_0 p.to critico) — condizione necess. del primo ordine

2) $Hf(x_0) \geq 0$ — condizione necess. del secondo ordine

dim Sia $r > 0$ tc $B_r(x_0) \subset A$ e $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in B_r(x_0)$.

Allora per $i = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \geq 0$$

$$= \lim_{t \to 0^-} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0.$$

Proviamo ora che $\langle Hf(x_0) v, v \rangle \geq 0$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$. Taylor: per $v \in \mathbb{R}^n$

$$\underset{B_r(x_0)}{f(x_0 + tv)} \overset{t \to 0}{=} f(x_0) + \underbrace{\langle \nabla f(x_0), tv \rangle}_{=0} + \frac{1}{2} \langle Hf(x_0) tv, tv \rangle + o(|tv|^2)$$

$$0 \leq f(x_0 + tv) - f(x_0) = \frac{1}{2} \langle Hf(x_0) tv, tv \rangle + \frac{o(|tv|^2)}{t^2} \cdot t^2$$

$\forall t$ piccolo

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{2} t^2 \langle Hf(x_0) v, v \rangle + t^2 \underbrace{o(1)}_{\to 0 \ (t \to 0)}$$

$$\overset{t \to 0}{\Rightarrow} \quad 0 \leq \langle Hf(x_0) v, v \rangle$$

$\square$

TEOREMA (condizioni sufficienti di min locale stretto). Siano $f \in C^2(A)$, $x_0 \in A$.

Supponiamo che

1) $\nabla f(x_0) = 0$

2) $Hf(x_0) > 0$

Allora x_0 è un punto di minimo locale stretto.

dim Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \langle \overset{0}{\overset{\parallel}{\nabla f(x_0)}}, x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(x_0)(x-x_0), x - x_0 \rangle + o(|x-x_0|^2)$$

$$Hf(x_0) > 0 \overset{\text{lemma}}{\Longrightarrow} \exists\, m > 0 \text{ tale che } \langle Hf(x_0)v, v \rangle \geq m|v|^2$$

Quindi:

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{1}{2} m |x - x_0|^2 + |x - x_0|^2 \cdot \underset{\substack{\downarrow x \to x_0 \\ 0}}{o(1)}$$

$$\geq |x - x_0|^2 \left(\frac{m}{2} + o(1) \right)$$

$$\overset{\exists \delta > 0}{\geq} |x - x_0|^2 \frac{m}{4} \quad \text{per} \quad |x - x_0| < \delta$$

$$\Longrightarrow f(x) > f(x_0).$$

$\square$

oss B matrice reale 2×2, $B = B^t$, $\lambda_1 \leq \lambda_2$ suoi autovalori

$tr(B) = \lambda_1 + \lambda_2$

$det(B) = \lambda_1 \lambda_2$

- $B > 0 \iff \lambda_1 > 0 \iff \begin{cases} tr(B) > 0 \\ det(B) > 0 \end{cases}$ $\qquad B < 0 \iff \lambda_2 < 0 \iff \begin{cases} tr(B) < 0 \\ det(B) > 0 \end{cases}$

- $B \geq 0 \iff \lambda_1 \geq 0 \iff \begin{cases} tr(B) \geq 0 \\ det(B) \geq 0 \end{cases}$ $\qquad B \leq 0 \iff \lambda_2 \leq 0 \iff \begin{cases} tr(B) \leq 0 \\ det(B) \geq 0 \end{cases}$

def Sia $f \in C^2(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Diremo che $x_0 \in A$ è un **PUNTO DI SELLA** se

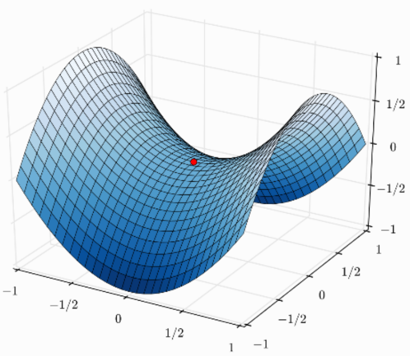
i) $\nabla f(x_0) = 0$

ii) $det\, Hf(x_0) < 0$

esempio $f(x,y) = x^2 - y^2$

$\nabla f(0) = 0$

$$Hf(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



<u>Esercizi</u>

(1) Sia $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^{3x} - 3ye^{x} + y^3$$

Determinare i punti critici e se sono min/max locali

$$f_x = 3e^{3x} - 3ye^{x}$$

$$f_y = -3e^{x} + 3y^2$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 3e^{3x} - 3ye^{x} = 0 \\ -3e^{x} + 3y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^{2x} = y \\ e^{x} = y^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow e^{x} = e^{4x} \Rightarrow 1 = e^{3x} \iff x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

un solo punto critico

$$P = (0,1).$$

deve essere matrice hessiana!

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 3e^{3x} - 3ye^{x} & -3e^{x} \\ -3e^{x} & 6y \end{pmatrix}$$

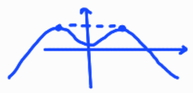
$$Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det Hf(0,1) = 36 - 9 > 0$$

$$\operatorname{tr} Hf(0,1) = 6 + 6 = 12 > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow Hf(0,1) > 0 \\ \quad \nabla f(0,1) = 0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{condizioni sufficienti}} (0,1) \text{ è min. locale stretto}$$

<u>Oss</u> $\displaystyle\lim_{y \to -\infty} f(x,y) = -\infty$, x fissato

⚠ Intuitivamente si sarebbe portati a pensare che $\exists$ un punto di max locale, ma non c'è! (In $\mathbb{R}$ ci sarebbe )

(2) Dato $\gamma \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^x(y^2 + \gamma x) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Al variare di γ studiare i punti critici.

$$f_x = e^x(y^2 + \gamma x) + e^x \gamma = e^x(y^2 + \gamma x + \gamma)$$

$$f_y = 2e^x y$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} y^2 + \gamma x + \gamma = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma(x+1) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\underline{\gamma = 0}$ c'è una retta di punti critici $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$

$f(x,y) = e^x y^2$

$\Rightarrow$ i punti $(x,0)$ sono punti di min assoluto di f

$\underline{\gamma \neq 0}$ c'è un solo punto critico $(-1,0)$

$$f_{xx} = e^x(y^2 + \gamma x + 2\gamma)$$

$$f_{xy} = 2e^x y$$

$$f_{yx} = 2e^x y$$

$$f_{yy} = 2e^x$$

$$Hf(x,y) = e^x \begin{pmatrix} y^2 + \gamma x + 2\gamma & 2y \\ 2y & 2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(-1,0) = \frac{1}{e} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det Hf(-1,0) = \frac{2\gamma}{e^2}$$

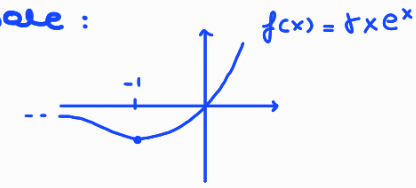
$$\operatorname{tr} Hf(-1,0) = \frac{\gamma + 2}{e}$$

- $\gamma < 0 \Rightarrow \det < 0 \Rightarrow (-1,0)$ è punto di sella
- $\gamma > 0 \Rightarrow Hf(-1,0) > 0$

  $\Rightarrow (-1,0)$ è punto di minimo loc. stretto

Ci rimane da stabilire se è minimo globale:

$$f(x,y) \geq e^x \cdot \gamma x \geq -\frac{\gamma}{e}$$



$\Rightarrow$ è min globale!

(3) Siano $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ e $f: K \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{2-(x^2+y^2)}$$

Provare che esistono e calcolare max e min di f su K.

$$\left.\begin{array}{l} K \text{ chiuso e limitato} \overset{HB}{\iff} K \text{ compatto} \\ f: K \to \mathbb{R} \text{ continua} \end{array}\right\} \overset{W}{\Longrightarrow} \exists \text{ max e min di } f \text{ su } K$$

Calcoliamo i punti critici interni.

$$f_x = y + \frac{2x}{[2-(x^2+y^2)]^2}$$

$$f_y = x + \frac{2y}{[2-(x^2+y^2)]^2}$$

Punti critici:

$$\nabla f(x,y) = 0 \implies \begin{cases} y + \dfrac{2x}{(2-(x^2+y^2))^2} = 0 \\ x + \dfrac{2y}{[2-(x^2+y^2)]^2} = 0 \end{cases} \overset{x,y\neq 0}{\longrightarrow} \begin{cases} xy + \dfrac{2x^2}{[2-(x^2+y^2)]^2} = 0 \\ xy + \dfrac{2y^2}{[2-(x^2+y^2)]^2} = 0 \end{cases}$$

$$\implies x^2 = y^2 \implies x = \pm y$$

($x=0, y=0$ è p.to critico)

Provo a porre $x=y \implies x=0$ e $y=0$ (già visto)

$$x=-y \implies -x - \frac{2x}{(2-(x^2))^2} = 0$$

$$\iff -1 + \frac{2}{4(1-x^2)^2} = 0$$

$$\iff (1-x^2)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\iff \underbrace{1-x^2}_{>0 \implies \text{scelgo segno} +} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \iff x^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \iff x = \pm\underbrace{\sqrt{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}}_{\text{ammissibile}}$$

Ci sono 3 punti critici: $(0,0)$, $\pm\left(\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}, -\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$

$$f(0,0) = 1/2$$
$$\vee$$
$$f(\pm(\ ,\ )) = \sqrt{2} - 1$$

Vediamo cosa succede nella frontiera $f|_{\partial K}$, ovvero quando $x^2+y^2=1$.

$(x,y) \in \partial K$ si ha

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{2-1} = xy + 1$$

Usiamo le coordinate polari

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

$$f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta \sin\theta + 1 = \frac{\sin 2\theta}{2} + 1$$

Su ∂K

- il max di f è $\frac{3}{2}$
- il min di f è $\frac{1}{2}$

<u>conclusione</u>

- $\min_K f = \sqrt{2} - 1$
- $\max_K f = \frac{3}{2}$

⚠ non sempre è necessario fare il calcolo della matrice hessiana!

Funzioni convesse in $\mathbb{R}^n$

def
- $[x,y] = \{tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1]\}$, $x,y \in \mathbb{R}^n$
- $A \subset \mathbb{R}^n$ è **CONVESSO** $\iff [x,y] \subset A \quad \forall x,y \in A$
- $f : A \to \mathbb{R}$ è (strettamente) **CONVESSA** se e solo se

$$f(tx + (1-t)y) \overset{(<)}{\leq} tf(x) + (1-t)f(y) \quad \forall x,y \in A \underset{(x \neq y)}{} ,\ t \in [0,1] \underset{t \in (0,1)}{}$$

prop $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso, $f : A \to \mathbb{R}$. Sono equivalenti:

1) f è convessa
2) $epi(f) := \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in A,\ x_{n+1} > f(x)\}$ è un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^{n+1}$ ("epigrafico"; $x \in \mathbb{R}^n$)

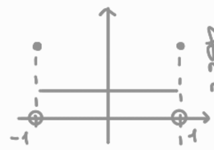
prop $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso, $f \in C(A)$. Sono equivalenti:

1) f è convessa
2) $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad \forall x,y \in A.$

prop Sia $I = [a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$. Sia $\varphi : I \to \mathbb{R}$ convessa. Allora

1) $\forall y \in I \quad x \longmapsto \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x-y}$, $x \neq y$ è crescente
2) $\forall\ a < \alpha < \beta < b$, la funzione $\varphi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ è lipschitziana

def $r > 0$. $Q_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq r,\ \forall i = 1, \dots, n\}$



f è convessa, ma non è continua nella frontiera

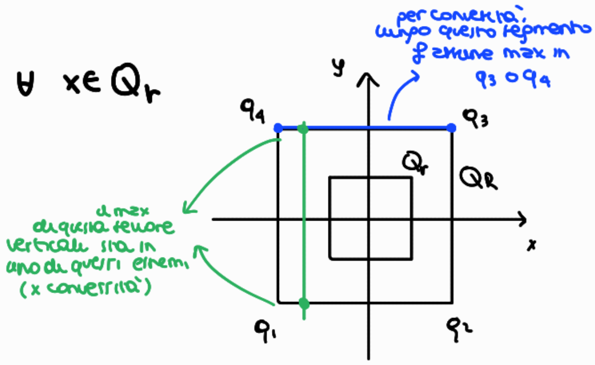
TEOREMA Siano $0 < r < R < \infty$ e sia $f : Q_R \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.
Allora esiste $L < \infty$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y| \quad \forall x \in Q_r$$

dim caso $n=2$.

$f : Q_r \to \mathbb{R}$ è continua

∂Q_r compatto? $\overset{W}{\implies} \exists\ m = \min_{\partial Q_r} f \in \mathbb{R}$



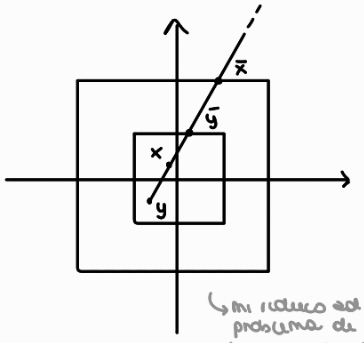
Poi osservo che se $x \in \partial Q_R \implies f(x) \leq \max\{f(q_1), \dots, f(q_4)\}$

In realtà $x \in Q_R \implies f(x) \leq \max\{f(q_1), f(q_2), f(q_3), f(q_4)\} = M < \infty$

Siano ora $x, y \in Q_r$. Sia L_{xy} la semiretta in figura

Definiamo $\bar{y} = L_{xy} \cap \partial Q_r$

$\bar{x} = L_{xy} \cap \partial Q_R$



↳ mi riduco ad un problema di analisi 1: la retta viene parametrizzata da una sola variabile

Esamino

A1 ≡ "analisi 1"

$$\frac{f(x)-f(y)}{|x-y|} \overset{\text{lemma A1}}{\leq} \frac{f(\bar{x})-f(y)}{|\bar{x}-y|}$$

$$\leq \frac{f(\bar{x})-f(\bar{y})}{|\bar{x}-\bar{y}|}$$

metto il valore più piccolo, così il numeratore è max

$$\leq \frac{M-m}{R-r} =: L \qquad \square$$

↳ anche qua metto il valore più piccolo che può essere assunto

corollario Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso ed $f: A \to \mathbb{R}$ convessa. Allora esiste $E \subset A$ di misura nulla tale che f è differenziabile in ogni $x \in A \setminus E$

f convessa è loc. lipschitziana $\Rightarrow$ Rademacher

notazione $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso, $x, y \in A$. $I_{xy} = \{t \in \mathbb{R} : tx + (1-t)y \in A\}$ è un intervallo

Poi data $f: A \to \mathbb{R}$ def

$$\varphi_{xy} : I_{xy} \to \mathbb{R}$$

$$\varphi_{xy}(t) = f(tx + (1-t)y) = f(y + t(x-y))$$

TEOREMA Sia $f \in C^1(A)$. $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto convesso. Sono equivalenti:

1) f è convessa

2) $f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x-y \rangle \quad \forall\, x, y \in A$

la funzione sta sopra al piano tangente!

3) $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x-y \rangle \geq 0 \quad \forall\, x, y \in A$

dim 1) $\Rightarrow$ 2). So che $f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$, $t \in [0,1]$

$$f(y + t(x-y)) - f(y) \leq t(f(x) - f(y))$$

$$\frac{f(y+t(x-y)) - f(y)}{t} \leq f(x) - f(y)$$

Per $t \to 0^+$: $\langle \nabla f(y), x-y \rangle \leq f(x) - f(y)$.

2) $\Rightarrow$ 3). $f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x-y \rangle$

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle$$

sommando membro a membro

$$0 \leq \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x-y \rangle$$

$3) \Rightarrow 1)$. Se $t \longmapsto \varphi'_{xy}(t)$ cresce

$\Rightarrow$ $t \longmapsto \varphi_{xy}(t)$ convessa $\forall x,y \in A$

$\Leftarrow$ $f : A \to \mathbb{R}$ convessa

$\varphi_{xy}(t)$ convessa

$\Rightarrow$ $t \longmapsto \dfrac{\varphi_{xy}(t) - \varphi_{xy}(s)}{t-s}$ è crescente

$\Rightarrow$ scelgo $t \in [0,1]$:

$$\frac{\varphi_{xy}(1) - \varphi_{xy}(0)}{1-0} \geq \frac{\varphi_{xy}(t) - \varphi_{xy}(0)}{t-0}$$

$$f(x) - f(y) \geq \frac{f(tx+(1-t)y) - f(y)}{t}$$

$$tf(x) - tf(y) + f(y) \geq f(tx+(1-t)y)$$

$\Rightarrow$ $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$

Verifichiamo $t \longmapsto \varphi'_{xy}(t)$ crescente:

$$\varphi'_{xy}(t) = \langle \nabla f(\underbrace{y+t(x-y)}_{z_t}), x-y \rangle$$

Siano ad esempio $s<t$

Osservo che $z_t - z_s = y + t(x-y) - y - s(x-y)$

$$= (x-y)(t-s)$$

$$\varphi'_{xy}(t) - \varphi'_{xy}(s) = \langle \nabla f(z_t), x-y \rangle - \langle \nabla f(z_s), x-y \rangle$$

$$= \langle \nabla f(z_t) - \nabla f(z_s), x-y \rangle$$

$$= \frac{\langle \nabla f(z_t) - \nabla f(z_s), z_t - z_s \rangle}{t-s} \geq 0 \quad \forall t,s$$

$\forall x,y \in A$ $\square$

TEOREMA Sia $f \in C^2(A)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto convesso.

Sono equiv:

1) $f : A \to \mathbb{R}$ è convessa

2) $Hf(x) \geq 0 \quad \forall x \in A$

dim $1) \Rightarrow 2)$. Fisso $x \in A$ e $v \in \mathbb{R}^n$ e considero $\varphi(t) = f(x+tv)$

φ è convessa $\overset{A1}{\Longrightarrow}$ $\varphi''(t) \geq 0 \quad \forall t$

Dunque per $t=0$

$$\varphi''(0) = \langle Hf(x)v, v \rangle \geq 0 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

$2) \Rightarrow 1)$. Uso Taylor in $x_0 \in A$. $\exists z \in [x_0, x)$ tc:

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x-x_0 \rangle + \frac{1}{2}\underbrace{\langle Hf(z)(x-x_0), (x-x_0) \rangle}_{\geq 0}$$

$\Rightarrow$ $f(x) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x-x_0 \rangle \quad \forall x_0, x \in A$

$\overset{\text{teorema precedente}}{\Longrightarrow}$ f è convessa $\square$

corollario $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto convesso. $f: A \to \mathbb{R}$ convessa

1) $f \in C^1(A)$

$x_0 \in A$ è un punto critico di $f \Rightarrow x_0$ è punto di minimo globale

2) Ora $f \in C^2(A)$.

$x_0 \in A$ è un punto critico di f $\Rightarrow$ x_0 è punto di minimo globale unico

$Hf(x_0) > 0$

dim 1) $f(x) \geq f(x_0) + \underbrace{\langle \nabla f(x_0), (x - x_0) \rangle}_{=0}$ in x_0 p.to critico

2) dimostrazione del teorema precedente. $\square$

TEOREMA (Alexandrov). Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa. Allora esistono funzioni $f_{ij}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $i,j = 1, \dots, n$ ed esiste $E \subset \mathbb{R}^n$ con $|E| = 0$ (misura nulla) tali che $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus E$

$$\underset{\mathbb{R}^n}{f(x)} = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), (x - x_0) \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(x_0)(x - x_0), x - x_0 \rangle + o(|x - x_0|^2)$$

dove

$$Hf(x_0) = (f_{ij}(x_0))_{i,j = 1, \dots, n}$$

$\Rightarrow$ le funzioni convesse hanno le derivate seconde quasi in tutti i punti

esercizio Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^{x+y} + x^4 + y^4$$

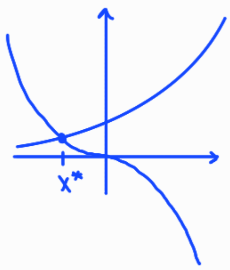
Studiare max/min di f.

Osservo che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Cerco punti critici

$$\begin{cases} f_x = e^{x+y} + 4x^3 = 0 \\ f_y = e^{x+y} + 4y^3 = 0 \end{cases}$$

$\cdot^3$ è iniettiva

$\Rightarrow x^3 - y^3 = 0 \iff x = y$



Dunque $x = y$ nella f_x:

$$e^{2x} + 4x^3 = 0 \iff e^{2x} = -4x^3$$

vedo che $\exists\, x^* < 0$ unico che risolve l'equazione.

Quindi f ha un'unico punto critico $P = (x^*, x^*)$

oss "mi sembra che sto sommando 3 funzioni convesse".

Guardo la matrice hessiana per controllare la convessità di f.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} + 12x^2 & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} + 12y^2 \end{pmatrix}$$

$tr(Hf) > 0$

$\det(Hf) = e^{x+y} \cdot 12 \cdot (x^2+y^2) + 144\, x^2 y^2 \geq 0$

$\Rightarrow \; Hf(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^2$

In x^* è strett def. positiva $\Rightarrow$ x^* è minimo unico.

⚠ non sempre è necessario essere in grado di calcolare i punti critici.