

INTEGRALI SU SOTTOVARIETA'

Curva in \mathbb{R}^n : $L(f) = \sup \{ \text{lunghezza delle perette} \}$

Esempio $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z \in (0, 1)\}$

$\text{per } 2\pi = A(M) = \sup \{ \text{arie triangolari} \}$? No, infatti:

$4kn$ triangoli $(T_j)_{j=1}^{4kn}$

Ciascuno ha la stessa area \geq area (proiezione di T_j)

$$= 2 \sin \frac{\pi}{n} (1 - \cos \frac{\pi}{n})$$

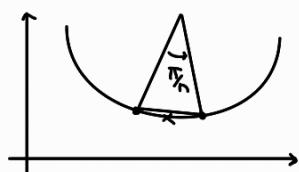
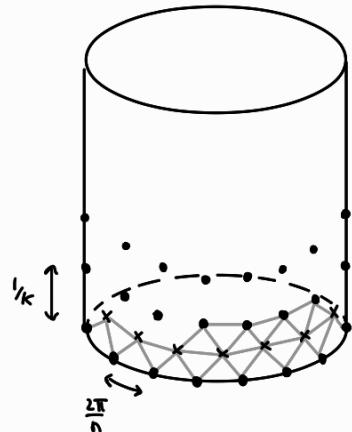
area tot. triangoli $\geq 4kn \cdot 2 \sin \frac{\pi}{n} (1 - \cos \frac{\pi}{n})$

$$\approx 4\pi^3 \frac{k}{n^2}$$

Dunque possiamo scegliere triangolazioni con $k = n^3$ e

ottenere così che $\sup \{ \dots \} = +\infty$.

Oss Il problema è che prendiamo triangolazioni "orizzontali non verticali"



Esercizio $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ mappa di rango max d $\leq n$

$V := T(\mathbb{R}^d)$ è d-piano

Guardo T come funz. lin. fra \mathbb{R}^d e la sua immagine (ca' posso considerare il det)

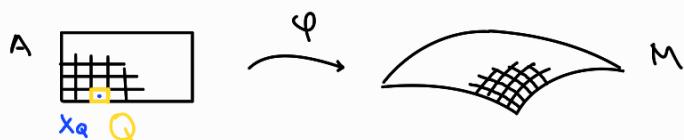
$$\tilde{T}: \mathbb{R}^d \rightarrow V, \tilde{T} := T, \text{ definisco } |\det \tilde{T}| = |\det \tilde{T}^t| = \sqrt{\det(\tilde{T}^t \tilde{T})} = \underbrace{\sqrt{\det(T^t T)}}_{\substack{\text{d'ora in poi } \tilde{T} \\ \text{tempre col } t}}$$

def $|\det T| = \sqrt{\det(T^t T)}$

↳ d'ora in poi "intenderà sempre col t"

Reasonamento euristico:

$M = \varphi(A)$, $\varphi \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$, piano regolare



$$\varphi(Q) \approx \varphi(x_Q) + J_{x_Q} \varphi(Q)$$

$$\text{Area}(M) = \text{Area}(\varphi(A)) = \sum_Q \text{arie}(\varphi(Q))$$

$$\approx \sum_Q \text{arie}(\varphi(x_Q) + J_{x_Q} \varphi(Q))$$

$$= \sum_Q |\det J_{x_Q} \varphi| \mathcal{L}^d(Q) \approx \int_A |\det J_x \varphi| dx$$

def $M = \varphi(A)$ sottovar in \mathbb{R}^n di dim d con $A \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto e $\varphi \in C^1(A; \mathbb{R}^m)$ param. regd.

L'AREA DI φ è

↪ "con molte ripetute"

$$\int_A |\det J_x \varphi| dx$$

dove $|\det J_x \varphi| := \sqrt{\det(J_x \varphi^t J_x \varphi)}$.

Se φ è iniettiva, l'AREA DI $M = \varphi(A)$ è $A(M) := A(\varphi)$

oss 1

Parliamo di "area di φ " e non di "area di M " perché φ potrebbe non essere iniettiva.

Infatti:

$$A \xrightarrow{\varphi} M = \varphi(A)$$
$$A(\varphi) = \int_A |\det J_x \varphi| dx = A(M)$$

oss 2

La def è benposta.

Se $\varphi_1: A_1 \rightarrow M$ e $\varphi_2: A_2 \rightarrow M$ sono param. iniettive, definiamo

$w := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1: A_1 \rightarrow A_2$ è diffeo :

$$\int_{A_1} |\det J_x \varphi_1| dx = \int_{A_1} \sqrt{|\det J_x \varphi_1^t J_x \varphi_1|} dx$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \circ w \Rightarrow \int_{A_1} \sqrt{\det(J_x w^t J_{w(x)} \underbrace{\varphi_2^t(J_{w(x)} \varphi_2 J_x w))}_{})} dx$$

$$= \int_{A_1} |\det J_{w(x)} \varphi_2| |\det J_x w| dx$$

$$\stackrel{w(x)=y}{=} \int_{A_2} |\det J_y \varphi_2| dy = \int_{A_2} |\det J_x \varphi_2| dx$$

fatto $A(M) = d\ell^d(M)$

oss 3 (grafico) $f \in C^1(A)$, $\varphi(x) = (x, f(x)) \in C^1(A; \mathbb{R}^{m+1})$

$$J_x \varphi = \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{R}^n} \\ \nabla f(x) \end{pmatrix} \quad J_x \varphi^t J_x \varphi = (1_{\mathbb{R}^n} | \nabla f)(\frac{1_{\mathbb{R}^n}}{\nabla f}) = 1_{\mathbb{R}^n} + \nabla f(x) \otimes \nabla f(x)$$

$v, w \in \mathbb{R}^n$, $v \otimes w \in M_n(\mathbb{R})$ tale che $(v \otimes w)_{ij} := v_i w_j$

esercizio $\det(1_{\mathbb{R}^n} + v \otimes w) = 1 + v \cdot w$

$$\Rightarrow |\det J_x \varphi| = \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}$$

$$\Rightarrow A(\text{gr } f) = \int_A \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \quad \text{FORMULA DELL'AREA}$$

or 3.1 $n=1$, $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$

$$L(\text{gr } f) = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx$$

or 4 $A \subseteq \mathbb{R}_{u,v}^2$ aperto, $\varphi \in C^1(A; \mathbb{R}^3)$ param. regolare

$$J\varphi = (\varphi_u | \varphi_v)$$

\hookrightarrow vettori in \mathbb{R}^3 tangent. a $\varphi(A)$

$$J\varphi^t J\varphi = \left(\begin{array}{c|c} \varphi_u & \varphi_v \\ \hline \varphi_v & \varphi_u \end{array} \right) (\varphi_u | \varphi_v) = \left(\begin{array}{cc} |\varphi_u|^2 & \varphi_u \cdot \varphi_v \\ \varphi_u \cdot \varphi_v & |\varphi_v|^2 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow |\det J\varphi|^2 = |\varphi_u|^2 |\varphi_v|^2 - (\varphi_u \cdot \varphi_v)^2 = |\varphi_u \wedge \varphi_v|^2$$



esempio 1) M = piano di un cerchio di raggio R e angolo tra α e β

$$\text{Param: } \varphi(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z), \quad (\theta, z) \in (\alpha, \beta) \times (0, h)$$

$$J\varphi = \begin{pmatrix} -R \sin \theta & 0 \\ R \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

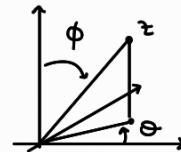
$$|\det J\varphi| = \sqrt{|\varphi_\theta|^2 |\varphi_z|^2 - \varphi_\theta \cdot \varphi_z} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\Rightarrow A(\varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^h R dz d\theta = Rh(\beta - \alpha)$$

2) Area laterale regolare R in \mathbb{R}^3

$$\varphi(\theta, \phi) = (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi)$$

$$(\theta, \phi) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$$



$$J\varphi = \begin{pmatrix} -R \sin \phi \sin \theta & R \cos \phi \cos \theta \\ R \sin \phi \cos \theta & R \cos \phi \sin \theta \\ 0 & -R \sin \phi \end{pmatrix}$$

↑ ↑
 φ_θ φ_ϕ

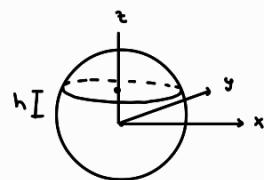
$$\varphi_\theta \wedge \varphi_\phi = \begin{pmatrix} -R \sin^2 \phi \cos \theta \\ -R \sin^2 \phi \sin \theta \\ -R^2 \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix} \Rightarrow |\varphi_\theta \wedge \varphi_\phi| = R^2 \sin \phi$$

$$= \sqrt{|\varphi_\theta|^2 |\varphi_\phi|^2 - (\varphi_\theta \cdot \varphi_\phi)^2}$$

$$\Rightarrow A(\varphi) = A(S_R) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\phi R^2 \sin \phi = 4\pi R^2$$

3) sezione intersezione alla colonna ferica del mo' al di sopra di un'ellisse di

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{S}_R^2 : z > h\}$$



uso la stessa parametrizzazione $\psi(\theta, \phi)$

$$\phi \in (0, \arccos \frac{h}{R})$$

$$\Rightarrow A(\text{calotta}) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\arccos \frac{h}{R}} R^2 \sin \phi \, d\phi = 2\pi R^2 \left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

fatto $|\det J\varphi| = (\det J\varphi^t J\varphi)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\substack{\text{minor di } d \times d \\ \text{di } J\varphi}} (\det M)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ FORMULA DI CAUCHY-BINET

4) Area di $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$

$$\text{"area di } S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\|=1, x_4 > 0\}$$

$$= \text{grafico di } f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 - \|x_1, x_2, x_3\|^2} \in B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$Df(x) = \left(-\frac{x_1}{\sqrt{1-\|x\|^2}}, -\frac{x_2}{\sqrt{1-\|x\|^2}}, -\frac{x_3}{\sqrt{1-\|x\|^2}} \right) = \frac{x}{\sqrt{1-\|x\|^2}}$$

$$\Rightarrow A(S^3) = 2 \int_{B(0,1)} \sqrt{1 + |Df|^2} \, d\mathcal{L}^3$$

$$= 2 \int_{B(0,1)} \sqrt{1 + \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|^2}} \, dx$$

$$= 2 \int_{B(0,1)} \frac{1}{\sqrt{1-\|x\|^2}} \, dx$$

$$= 2 \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\phi \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r^2 \sin \phi$$

$$= 8\pi \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} dr \stackrel{r=\sin t}{=} 8\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cos t dt =$$

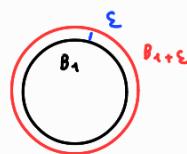
$$= 8\pi \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = 8\pi \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} = 2\pi^2 = 4 \frac{\pi^2}{2} = 4\omega_4$$

$\mathcal{L}^4(B(0,1))$

oss In generale: $A(S^{n-1}) = n\omega_n = n\mathcal{L}^n(B(0,1))$

coleo $\mathcal{L}^n(B_{1+\varepsilon} \setminus B_1) = ((1+\varepsilon)^n - 1)\omega_n$

$$\varepsilon A(S^{n-1}) + o(\varepsilon^n) \quad n\varepsilon\omega_n + o(\varepsilon^n)$$



nemo $A(S_R^{n-1})$

$$A(\partial B_R) = (\mathcal{L}^n(B_R))' = (\omega_n R^n)' = n\omega_n R^{n-1}$$

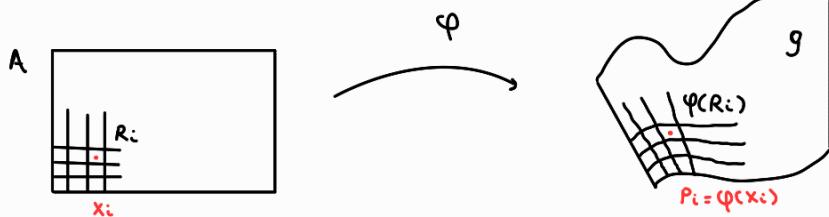
$g : M \rightarrow \mathbb{R}$, vorrei def $\int_M g$

def $M = \varphi(A)$ sottoinsieme di dimensione d , dove $A \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto e $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ param C¹ regolare iniettiva. Data $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ tc $g \circ \varphi / \det J\varphi \in L^1(A)$, scriviamo

$$\int_M g \, d\sigma := \int_A g(\varphi(x)) |\det J\varphi(x)| dx$$

elemento d'area

giustificazione della def:



$$\sum_m g = \sum_i \int_{\varphi(R_i)} g_i \approx \sum_i g(p_i) A(\varphi(R_i)) \approx \sum_i g(p_i) |\det J\varphi(x_i)| \approx \int_A g(\varphi(x)) |\det J\varphi(x)| dx$$

oss Non dipende dalla param φ (è cambio di variabile)

fatto $\int_M g \, d\sigma = \int_M g \, d\lambda^d$. In particolare, $A(M) = \lambda^d(M)$

esempio 1) $M = S^2_R = \{\rho \in \mathbb{R}^3 : \|\rho\| = R\}$

$$\varphi(\theta, \phi) = (R \cos \theta \sin \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \phi)$$

$$(\theta, \phi) \in (0, \pi) \times (0, \pi)$$

$$|\det J\varphi| = R^2 \sin \phi$$

$$\Rightarrow \int_{S^2_R} g \, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\phi g(R \cos \theta \sin \phi, \dots) R^2 \sin \phi$$

2) $S^2_{R,+} := \{(x, y, z) \in S^2_R : z > 0\}$

$$\begin{aligned} \int_{S^2_{R,+}} z \, d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi R \cos \phi R^2 \sin \phi \\ &= 2\pi R^3 \left[-\frac{\cos 2\phi}{4} \right]_0^{\pi/2} = \pi R^3 \end{aligned}$$

$$\int_{S^2_{R,+}} x \, d\sigma = 0 \quad (\text{questione di simmetria o fai i conti}).$$

$$\int_{S^2_{R,+}} y \, d\sigma = 0$$

$$\text{Il baricentro di } S^2_{R,+} \text{ è } \frac{(0, 0, \pi R^3)}{2\pi R^2} = (0, 0, \frac{R}{2})$$

def Il **BARICENTRO** di uno sottoinsieme $M \subseteq \mathbb{R}^n$ è $\frac{(\int_M x_1 \, d\sigma, \dots, \int_M x_n \, d\sigma)}{A(M)} \in \mathbb{R}^n$

def Il momento d'inerzia di M rispetto ad una retta è $\int_M \text{dist}(\cdot, e^2) d\sigma$

esempio Il momento d'inerzia di S_R^2 rispetto all'asse z è

$$\begin{aligned}\int_{S_R^2} (x^2 + y^2) d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\phi (R^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + R^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi) R^2 \sin \phi \\ &= 2\pi R^4 \int_0^\pi \underbrace{\sin^3 \phi}_{\sin \phi(1 - \cos^2 \phi)} d\phi \\ &= 2\pi R^4 \left[-\cos \phi + \frac{\cos^3 \phi}{3} \right]_0^\pi = \frac{8}{3} \pi R^4\end{aligned}$$

- Il momento d'inerzia di S_R^2 rispetto all'asse x è $\frac{8}{3} \pi R^4$ (simmetria)
- Il momento d'inerzia di $S_{R,\pi}^2$ rispetto all'asse z è $\frac{4}{3} \pi R^4$
(nel' integrale cambia π , che diventa $\pi/2$).
- Il momento d'inerzia di $S_{R,\pi}^2$ rispetto all'asse x è $\frac{4}{3} \pi R^4$

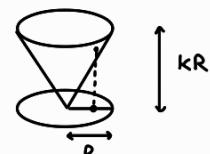
esempio (calcolo grafico) $f \in C^1(A)$, $\varphi(x) = (x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $M = \varphi(A)$

$$\text{Allora } \int_M g d\sigma = \int_A g(x, f(x)) \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} dx$$

esercizio Trovare il baricentro della superficie conica

$$C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2, z = k\sqrt{x^2 + y^2}\}$$

$C \setminus \{O\}$ è sottratt.



L'grafico di $f(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in B(0, R) \setminus \{O\}$

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{xk}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{yk}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

$$A(C) = \int_A \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} = \int_{B(0, R)} \sqrt{1 + k^2} = \sqrt{1 + k^2} \pi R^2$$

$$\int_C x d\sigma = 0 = \int_C y d\sigma$$

$$\int_C z d\sigma = \int_{B(0, R) \setminus \{O\}} k \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + k^2} dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr k r \sqrt{1 + k^2} r$$

$$= 2\pi k \sqrt{1 + k^2} \frac{R^3}{3}$$

$$\text{Il baricentro è } \frac{(0, 0, \frac{2}{3} \pi R^2 k \sqrt{1 + k^2})}{\sqrt{1 + k^2} \pi R^2} = (0, 0, \frac{2}{3} k R)$$

Superficie di rotazione

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ curva invertibile in $\mathbb{R}^2_{x,z}$

$\gamma_1'(t) > 0 \quad \forall t \in [a,b]$

$\varphi(t, \theta) := (\gamma_1(t) \cos \theta, \gamma_2(t) \sin \theta, \gamma_3(t))$

$$J\varphi = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \cos \theta & -\gamma_1(t) \sin \theta \\ \gamma_1'(t) \sin \theta & \gamma_2(t) \cos \theta \\ \gamma_3'(t) & 0 \\ \hline \varphi_t & \varphi_\theta \end{pmatrix}$$

$$|\det J\varphi|^2 = \sum_{M \in \mathbb{R}} (\det M)^2 = (\gamma_1'(t) \gamma_2(t))^2 + (\gamma_1(t) \gamma_3'(t))^2 = \gamma_1(t)^2 \|\gamma'(t)\|^2$$

non serve al
modulo perche' $\gamma_1 > 0$ perche'

$$\Rightarrow \text{Area} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b dt \underbrace{\gamma_1(t) \|\gamma'(t)\|}_{\text{non serve al modulo perche' } \gamma_1 > 0} dt = 2\pi \int_f x \, ds$$

$$= 2\pi L(\gamma) \underbrace{\int_f \frac{x \, dx}{L(\gamma)}}_{\substack{\text{prima coord.} \\ \text{del baricentro}}}$$

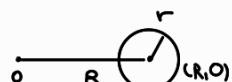
TEOREMA DI GULDINO $A(\text{rotatore di } \gamma) = L(\gamma) L(\text{circonferenza descritta dal baricentro})$

oss fe ruoto solo per $\theta \in [\alpha, \beta]$

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_\alpha^\beta d\theta \int_a^b dt \underbrace{\gamma_1(t) \|\gamma'(t)\|}_{\text{non serve al modulo perche' } \gamma_1 > 0} dt = (\beta - \alpha) \int_f x \, ds \\ &= (\beta - \alpha) L(\gamma) \underbrace{\int_f \frac{x \, dx}{L(\gamma)}}_{\substack{\text{prima coord.} \\ \text{del baricentro}}} = L(\gamma) L(\text{una cerchia descritta dal baricentro}) \end{aligned}$$

esempio

Area toro con raggio di raggio r e "spina" di raggio R



$\gamma(t) = (R + r \cos t, 0, r \sin t)$, baricentro è charente $(R, 0)$:

$$A(\text{toro}) = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 r R$$

$$\varphi(t, \theta) = ((R + r \cos t) \cos \theta, (R + r \cos t) \sin \theta, r \sin t)$$

esercizio Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z

Esercizio

$$M = \{(x, y, z) : x^2 + (y - R)^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2\}$$

$$\varphi(\theta, t) = (R \sin \theta, R - R \cos \theta, t)$$

$$\theta \in (0, \pi)$$

$$z^2 \leq 4R^2 - (x^2 + y^2) = 4R^2 - R^2 \sin^2 \theta - R^2 + 2R^2 \cos^2 \theta$$

$$= 2R^2(1 + \cos 2\theta) = 4R^2 \cos^2 \theta$$

$$1 + \cos 2\theta = 1 + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta$$

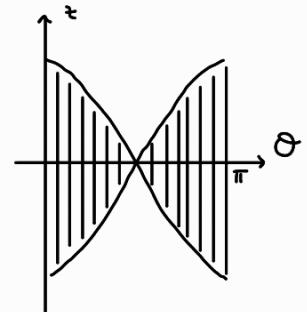
$$T\varphi = \begin{pmatrix} 2R \cos 2\theta & 0 \\ 2R \sin 2\theta & 0 \\ 0 & 1 \\ " & " \\ \varphi_x & \varphi_z \end{pmatrix}$$

$$|\det T\varphi| = \dots = 2R$$

$$\Rightarrow \text{Area}(M) = \int_0^\pi d\theta \int_{-2R|\cos \theta|}^{2R|\cos \theta|} dz = 2R$$

$$= \int_0^\pi 8R^2 |\cos \theta| d\theta$$

$$= 8R^2 \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = 16R^2$$



$$\int_M z^4 d\sigma = \int_0^\pi d\theta \int_{-2R|\cos \theta|}^{2R|\cos \theta|} dz = z^4 \cdot 2R$$

$$= 2R \int_0^\pi \left(\frac{2R|\cos \theta|}{2} \right)^4 d\theta$$

$$= \frac{2^3 R^6}{5} \int_0^\pi |\cos \theta|^4 d\theta$$

$$= \frac{2^8 R^6}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta$$

$$= \frac{2^8 R^6}{5} \left[\sin \theta - \frac{2}{3} \sin^3 \theta + \frac{\sin^5 \theta}{5} \right]_0^{\pi/2} = \frac{2^8 R^6}{75}$$

Formula di coarea

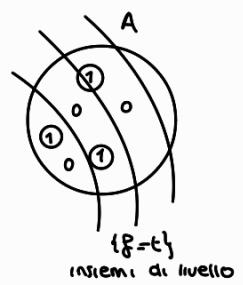
TEOREMA

(formula di coarea). $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in C^\infty(A)$

Allora $\forall g : A \rightarrow [0, +\infty]$ di Borel

$$\int_A g(x) |Df(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\{x \in A : f(x) = t\}} g d\sigma dt$$

in realtà
basta C^1

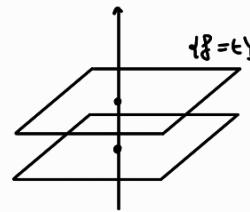


esempio

$$f(x) = x_n$$

$$\int_A g(x) \cdot 1 dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x'} g(x_1, \dots, \underbrace{x_{n-1}, t}_{x'}) dt \right) dx'$$

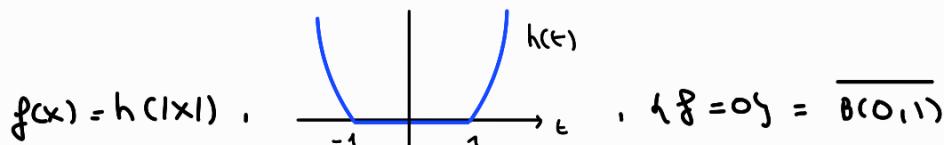
\Rightarrow coarea = "�ubini generalizzato"



oss 1 Ok anche se $|Df(x)| \in L^1(A)$ ($g = g^+ - g^-$)

oss 2 $\{f=t\}$ potrebbero non essere iper superficie regolari

Ad esempio $f(x) = |x|^2$, $\{f=0\} = \{0\}$: non è iper superficie.



TEOREMA (du Bois Reymond). $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in C^k(A; \mathbb{R}^m)$, $m \in \mathbb{N}$.

$C_f := \{x \in A : \text{rank } Jf(x) < m\}$. Se $k > n-m+1$, allora

$$\mathcal{L}^m (\underbrace{f(C_f)}_{\text{punti critici}}) = 0$$

dunque ha anche i punti critici molti, la loro immagine ha misura nulla.

Per noi $m=1$, dunque se $f \in C^n(A)$, allora $\mathcal{L}^1(f(C_f)) = 0$, $C_f = \{x : Df(x) = 0\}$

\Rightarrow per \mathcal{L}^1 -q.o. $t \in \mathbb{R}$, $t \notin C_f$

\Rightarrow per \mathcal{L}^1 -q.o. $t \in \mathbb{R}$, $\{x \in A : f(x) = t\}$ è iper superficie di classe C^n

(perché il gradiente non ha annulle mai).

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \int_{\{f=t\}} g d\sigma dt$ è ben def.

In realtà bassa meno di $C^n(A)$.

fatto (formula di coarea). $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in \text{Lip}(A)$. Allora $\forall g : A \rightarrow [0, +\infty]$ di Borel

$$\int_A g(x) |\underbrace{Df(x)}_{\substack{\text{teorema} \\ \text{di Rademacher}}}| dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\{x \in A : f(x) = t\}} g d\mathcal{H}^{n-1} dt$$

esempio $f(x) = |x|$, $Df(x) = \frac{x}{|x|}$ se $x \neq 0$.

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \cdot 1 dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\{f=t\} = S_{\epsilon}^{n-1}} g(x) d\sigma dt$$

$$f \circ g(x) = h(|x|) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} g = \int_0^\infty \int_{S_t^{n-1}} h(t) d\sigma dt$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{A(S^{n-1}) t^{n-1}}_{A(S_t^{n-1})} h(t) dt$$

oss $A(S^{n-1}) = n \omega_n$

$$h = X_{(0,R)} \quad (g = X_{B(0,R)})$$

$$\Rightarrow L^{\infty}(B(0,R)) = \int_0^R A(S^{n-1}) t^{n-1} dt \quad \text{e il dominio (*)}$$

$$\omega_n R^n = A(S^{n-1}) \frac{R^n}{n}$$

esercizio $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} \dots e^{-x_n^2} dx_1 \dots dx_n = \left(\int e^{-t^2} dt \right)^n = \pi^{n/2}$

Uso (*) con $h(t) = e^{-t^2}$:

$$= n \omega_n \int_0^\infty e^{-t^2} t^{n-1} dt, \quad t^2 = s \quad (t = s^{1/2})$$

$$= \frac{n \omega_n}{2} \int_0^\infty s^{\frac{n}{2}-1} e^{-s} ds$$

$$= \frac{n \omega_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\text{P di Ewino: } \Gamma(t) = \int_0^\infty s^{t-1} e^{-s} ds = \left[\frac{s^t}{t} e^{-s} \right]_{s=0}^\infty + \int_0^\infty \frac{t}{s} e^{-s} ds$$

$$= 0 + \frac{1}{t} \Gamma(t+1)$$

$$\Rightarrow \pi^{n/2} = \frac{n \omega_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \omega_n = \frac{2 \pi^{n/2}}{n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

esercizio $\int_{B(0,R)} |x|^\alpha dx = A(S^{n-1}) \int_0^R t^\alpha t^{n-1} dt =$

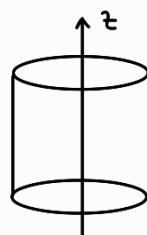
$\frac{n \omega_n}{\alpha+n} R^{\alpha+n} \quad \text{se } \alpha > -n$
 $+ \infty \quad \text{se } \alpha \leq -n$

esercizio $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} |x|^\alpha dx \quad (\text{vire a destra})$

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{distanza da origine z}$$

$$|\nabla f(x,y,z)| = \frac{(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0)$$

$$|\nabla f| = 1$$



$$\int_{\mathbb{R}^3} g(x) \cdot 1 \, dx = \int_0^\infty \int_{\{f=t\}} g dH^2 \, dt$$

caso Momento d'inerzia risp. atte t di $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq R, 0 \leq z \leq h\}$

$$\int_C (x^2+y^2) = \int_{\mathbb{R}^3} (x^2+y^2) \chi_C(x, y, z) \, d\mathcal{L}^3$$

$$\int_C (x^2+y^2) \cdot t = \int_0^R \int_{\{f=t\}} (x^2+y^2) \chi_C \, d\sigma \, dt$$

$$= \int_0^R t^2 \text{Area (fipa-ellisse di raggio } t \text{ e altezza } h) \, dt$$

$$= 2\pi h \int_0^R t^3 \, dt = \frac{\pi h R^4}{2}$$

TEOREMI DELLA DIVERGENZA E DEL ROTORE

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $F = (F_1, \dots, F_n) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vettoriale

def La DIVERGENZA di F è $(\operatorname{div} F)(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)$, $x \in A$

ors $\operatorname{div} F : A \rightarrow \mathbb{R}$

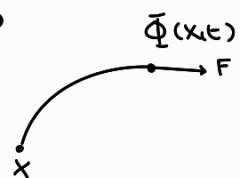
è ben definito se $F \in C^1$

$$\operatorname{div} F = \operatorname{tr}(JF)$$

Vediamo un'interpretazione geometrica della divergenza.

Supponiamo $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, sia $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un suo flusso

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(x, t) = F(\Phi(x, t)) \\ \Phi(0, x) = x \end{cases}$$

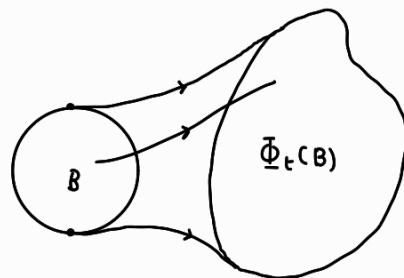


Dato $B \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile (es. $B = \text{palla}$) definiamo

$$m_B(t) := \mathcal{L}^n(\Phi_t(B))$$

$$\text{Noto } m_B(t) = \int_{\Phi_t(B)} \lambda \, dx$$

$$= \int_B (\det J\Phi_t)$$



$J\Phi_0 = I$, inoltre $J\Phi_t$ non si annulla mai $\Rightarrow \det J\Phi_t > 0$

$$= \int_B \det J\Phi_t$$

Lemma $A : \mathbb{R} \rightarrow M^{n \times n}$ C^1 , $A(0) = \text{Id}$, allora $\frac{d}{dt} \det A(t) \Big|_{t=0} = \operatorname{tr}(A'(0))$

$$\text{dim} \quad A(t) = \text{Id} + \underbrace{\dot{A}(0)t}_{(\text{aggi})} + o(t)$$

$$A(t) = \left(\begin{array}{cccc} 1 + \partial_{11}t & \partial_{12}t & & \\ \partial_{21}t & 1 + \partial_{22}t & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 + \partial_{nn}t \end{array} \right) + o(t)$$

sviluppo di Taylor
componente per componente

) te voglio convegno tutto quello che è $o(t)$
devo guardare il prodotto
 $(1 + \partial_{11}t) \dots (1 + \partial_{nn}t)$

$$\det A(t) = 1 + t(\partial_{11} + \dots + \partial_{nn}) + o(t)$$

$$= 1 + t \operatorname{tr}(A'(0)) + o(t)$$

utilizzo le ipotesi per
scomporre derivata ed integrale

$$\Rightarrow m_B(0) = \frac{d}{dt} \left(\int_B \det J\Phi_t \right) \Big|_{t=0} \stackrel{A(t)}{=} \int_B \frac{d}{dt} \left(\det \underbrace{J\Phi_t}_{A(t)} \right) \Big|_{t=0} = \text{(*)}$$

perché C^∞ , ma fidi.

$$\Phi_t(x) = x + F(x)t + o(t) \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow A(t) = J\Phi_t(x) = Id + JF(x)t + o(t)$$

$$\Rightarrow \dot{A}(0) = JF(x)$$

(*) $\stackrel{\text{lemma}}{=} \int_B k \cdot JF(x) dx = \int_B \operatorname{div} F(x) dx$

Dunque la divergenza ci dice come varia il volume di B nel tempo.

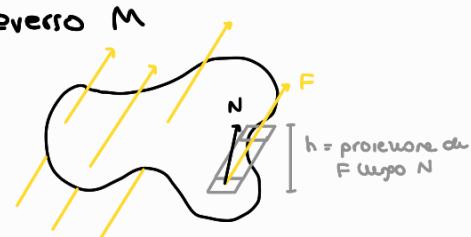
Oss 1 $\bar{\Phi}_{t+s} = \bar{\Phi}_s \circ \bar{\Phi}_t$, dunque $m_B(t) = \int_{\bar{\Phi}_t(B)} \operatorname{div} F(x) dx$

Oss 2 se $\operatorname{div} F = 0$, $m_B(t)$ è costante int

"**Fluido incompressibile**"

Def $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ cont, $M \subseteq A$ ipersuperficie C^1 orientata da N normale unit. (cont.) in M . Il **flusso** di F attraverso M

$$\mathcal{J}(F; M) = \int_M \langle F, N \rangle dH^{n-1}$$



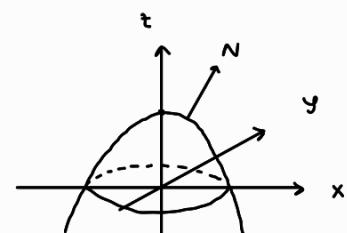
esempio $F := (x^4, y, z)$

$$M = \{(x, y, z) : z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$$

orientata "verso l'alto"

$$\text{param } \varphi(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2), (x, y) \in B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$N = \pm \frac{(\nabla \varphi, -1)}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2}} \Rightarrow \text{sepolo il } - \text{ per avere ultima componente} > 0$$



$$\int_M F \cdot N dH^n = \int_{B(0,1)} \begin{pmatrix} x^4 \\ y \\ 1-x^2-y^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \cdot \underbrace{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}_{\text{fattore Jacobiano}} dxdy$$

(scrivere per integrare facendo param)

$$= \int_{B(0,1)} (2x^5 + 2y^2 + 1 - x^2 - y^2) dxdy = \int_{B(0,1)} 1 dxdy = \pi$$

La funzione è simmetrica
e lungo l'asse x > 0

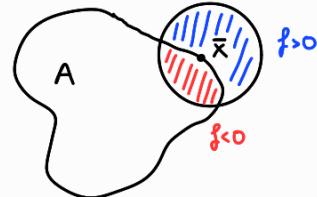
oss se M è grafico di $f: U \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_M F \cdot N = \int_U F(x, f(x)) \cdot (-\nabla f(x), 1) d\mathcal{L}^n$$

dcl $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto si dice di **CLASSE C^1** se $\forall \bar{x} \in \partial A \exists r > 0 \exists f \in C^1(B(\bar{x}, r))$ tc

$$A \cap B(\bar{x}, r) = \{x \in B(\bar{x}, r) : f(x) < 0\}$$

$$\nabla f \neq 0 \text{ in } B(\bar{x}, r)$$



esempio Il quadrato non è di classe C^1



oss1 • se A è di classe $C^1 \Rightarrow \partial A$ è iperiperficie C^1

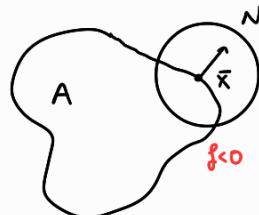
$$\text{ovvero: localmente } \partial A = \{f=0\}$$

• l'implicazione inversa è falsa. Ad esempio $A = \mathbb{R}^n \setminus \{\text{iperpiano}\}$

perché deve esserci un "dentro" e anche un "fuori", ovvero almeno un valore nello $f > 0$ e almeno uno in cui $f < 0$

oss2 A è di classe $C^1 \Rightarrow \partial A$ è orientato

$$\text{Per farlo richiedere normale esterno } N = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$



TEOREMA DELLA DIVERGENZA

$$F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato di classe C^1 , $F \in C^1(\bar{A}, \mathbb{R}^n)$. Allora

$$\int_A \operatorname{div} F d\mathcal{L}^n = \int_{\partial A} F \cdot N d\mathcal{H}^{n-1}$$

normale uscente

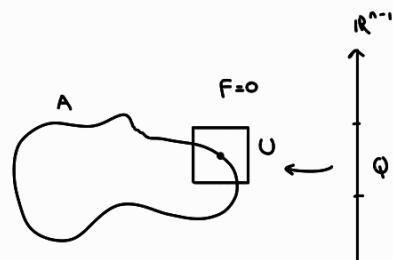
Intuitivamente: se faccio passare l'acqua attraverso una rete reticolare e voglio misurare un suo flusso, mi aspetto che ne entrano tanta quanta ne esce, dunque il flusso sia = 0. E infatti, la divergenza è 0, perché l'acqua è un fluido incompressibile. Questo non è detto che accada con l'aria, perché l'aria può essere compressa, dunque può entrare di più di quelle che escono.

dclm (caso particolare)

Supponiamo che l'insieme A complementare è un aperto in cui il campo vale 0

$$1) \text{ s.t. } F := \begin{cases} F & \text{in } A \\ F+0y & \text{in } U \text{ cubo // iperplani coordinati} \end{cases}$$

rispetto a F



2) $\partial A \cap U = \{(\xi, \varphi(\xi)) : \xi \in Q\}$ dove $\varphi \in C^1(Q)$, Q cubo $\subseteq \mathbb{R}^{n-1}$

$$A \cap U = \{(\xi, t), t > \varphi(\xi), \xi \in Q\}$$

$$\int_A d\mu F = \int_{A \cap U} d\mu F = \sum_{i=1}^n \int_Q \int_{\varphi(\xi)}^h \frac{\partial F_i}{\partial x_i} (\xi, x_n) dx_n d\xi$$

se possono cambiare derivate ed integrale

$$\sum_{i=1}^n \int_Q \left[\frac{\partial}{\partial \xi_i} \int_{\varphi(\xi)}^h F_i(\xi, x_n) dx_n + F_i(\xi, \varphi(\xi)) \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial \xi_i} \right] d\xi +$$

(*)

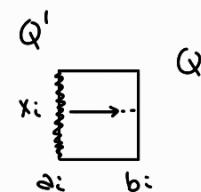
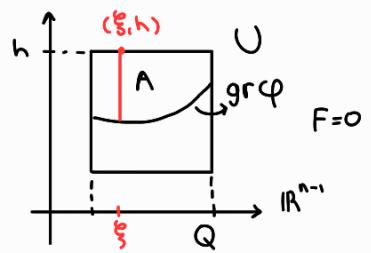
$$+ F_n(\xi, h) - F_n(\xi, \varphi(\xi)) = (*)$$

" (e' punto sul bordo)

(*)

$$= \int_{Q'_i} \int_{a_i}^{b_i} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_i} \int_{\varphi(\xi)}^h F_i(\xi, x_n) dx_n \right] d\xi_i d\xi$$

$$= \int_{Q'_i} \int_{\varphi(\xi)}^h F_i(\dots, b_i) - F_i(\dots, a_i) = 0$$



(*)

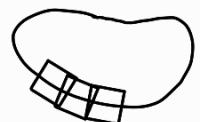
$$= \int_Q \langle F(\xi, \varphi(\xi)), \underbrace{(\nabla \varphi(\xi), -1)}_{\sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2}} \rangle \cdot \sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2} d\xi$$

$= N(\xi, \varphi(\xi))$ è una direzione grata!

$$= \int_{\partial A \cap U} \langle F, N \rangle dH^{n-1} = \int_{\partial A} \langle F, N \rangle dH^{n-1}$$

(caso generale). Particolare dell'unione:

1) Ricopri ∂A con cubetti U_i : "buoni" (come prima), $i = 1, \dots, k$



2) Fisso aperto $U_0 \subseteq A$: $\bar{U}_0 \subseteq A$ e $\overline{A \setminus \bigcup_i U_i} \subseteq U_0$.

3) $\exists (m_i)_{i=0, \dots, k}$ cc $m_i \in C_c^\infty(U_i)$, $m_i \geq 0$ e $\sum_{i=0}^k m_i = 1$ su A

$$\int_A d\mu F = \sum_{i=0}^k \int_A d\mu (m_i F) \quad \text{campo con supporto in } U_i$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} d\mu (m_0 F) + \sum_{i=1}^k \int_A d\mu (\underbrace{m_i F}_{\sim})$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial (m_0 F_j)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^k \int_{\partial A} \langle m_i F, N \rangle dH^{n-1}$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial (m_0 F_j)}{\partial x_j} dx_j \right) dx' + \int_{\partial A} \langle F, N \rangle dH^{n-1}$$

" (all'infinito fa 0 e devo "fare la differenza fra i valori agli estremi")

□

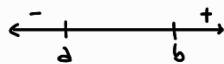
oss $F = (0, \dots, 0, fg, 0, \dots, 0)$

$$\Rightarrow \int_A \operatorname{div} F = \int_{\partial A} F \cdot N \, dH^{n-1}$$

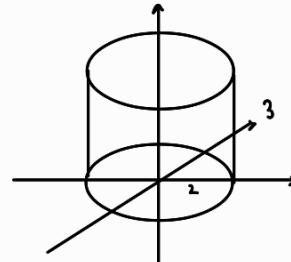
$$\int_A \left(f \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} g \right) \, dV = \int_{\partial A} f g \, N_i \, dH^{n-1}$$

$$\Rightarrow \int_A f \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dV = \underbrace{\int_{\partial A} f g \, N_i \, dH^{n-1}}_{\text{termine del bordo}} - \int_A g \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dV$$

(in una variabile era l'integrale calcolato agli estremi)



teorema E' sufficiente che A sia un aperto Lipschitziano : localmente e' meno di rotazione, A e' il grafico di una funzione Lipschitz.



esercizio $F(x, y, z) = (2xy^2, 2x^2y, (x^2+y^2)z^2)$

$$A = \{x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$$

$$\int_{\partial A} F \cdot N \, dH^2 = ?$$

oss Non e' C^1 , ma e' Lipschitz.

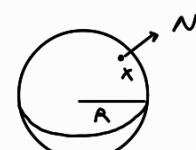
$$\int_{\partial A} F \cdot N \, dH^2 = \int_A \operatorname{div} F \, dV = \int_A (2y^2 + 2x^2 + 2z(x^2+y^2)) \, dx \, dy \, dz$$

coord.
cilindriche

$$\begin{aligned} &= \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr (2r^2(1+z)) r \\ &= 2\pi \left[z + \frac{r^4}{2} \right]_0^3 \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^2 = 120\pi \end{aligned}$$

esercizio 1) $\int_{S_R^{n-1}} x_1^2 \, dH^{n-1} = \int_{g_n} (Rx_1, 0, \dots, 0) \cdot N(x) \, dH^{n-1}$

$N(x) = \frac{x}{R}$



$$= \int_{B(0,R)} \operatorname{div} F \, dV = R \underbrace{\omega_n R^n}_{\substack{\text{volume} \\ \text{della palla}}} = \omega_n R^{n+1}$$

2) $\int_{S_R^{n-1}} \left(\frac{x_1^2}{2} + 2x_2^2 - 3x_n^2 \right) \, dH^{n-1} \quad (n \geq 3)$

$$= \int_{S_R^{n-1}} \left(\frac{Rx_1}{2}, 2Rx_2, 0, \dots, -3x_n \right) \cdot N(x) \, dH^{n-1}$$

$$= \int_{B(0,R)} \operatorname{div} F \, dV = \frac{9}{2} \omega_n R^{n+1}$$

def $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto. Il **rotore** di un campo vettoriale $F = (F_1, F_2, F_3) \in C^1(A; \mathbb{R}^3)$ è il campo vettoriale $\text{rot } F \in C(A; \mathbb{R}^3)$

$$\text{rot}(F) = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \wedge F = \det \begin{pmatrix} dx_1 & F_1 & i \\ dx_2 & F_2 & j \\ dx_3 & F_3 & k \end{pmatrix}$$

TEOREMA (del rotore). Siano $F \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ ed $M \subset \mathbb{R}^3$ una 2-superficie di classe C^1 , limitata ed orientata con frontiera $\partial M \in C^1$. Allora vale l'identità

$$\int_{\partial M} \langle F, T \rangle dt^1 = \int_M \langle \text{rot } F, N \rangle dA^2$$

dove N è il campo normale ad M e T è il campo tangente a ∂M , orientati in modo concorde ("se N punta in alto, T punta in senso antiorario").

- oss
- ∂M è formato da curve chiuse
 - l'integrale di sinistra è detto **CIRCUITAZIONE** di F lungo ∂M
 - l'integrale di destra è il flusso del rotore lungo M

def Il campo $F \in C^1(A; \mathbb{R}^3)$ si dice **IRROTATIONALE** se $\text{rot } F = 0$ su A .

Questo accade se e solo se la 1-forma diff. $w_F = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$ è chiusa.

In questo caso $\int_{\partial M} \langle F, T \rangle dt^1 = 0$

oss Il flusso di un campo vettoriale irrotazionale non può avere traiettorie periodiche.

dim $\text{PA } F \neq 0$ ha una curva integrale chiusa, Γ

prendo M tc $\partial M = \Gamma$

$$\implies \int_{\partial M} \langle F, T \rangle dt^1 = \int_{\partial M} \langle F, \frac{F}{|F|} \rangle dt^1 = \int_{\partial M} |F| dt^1 = 0 \quad \{$$