SPAZI METRICI E SPAZI NORMATI

Definizione

def Una coppia (X, d) con X un insieme, $d: X \times X \to [0, \infty)$ una funzione si dice **SPAZIO METRICO** se si verifica:

i) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \iff x = y$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (simmetria)

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in X$ (disuguaglianza triangolare)

esempio
1) $X = \mathbb{R}$ $\quad d(x,y) = |x-y|$ $\quad$ è SM
2) $X = \mathbb{C}$ $\quad d(z,w) = |z-w|$ $\quad$ è SM
3) $X = \mathbb{R}$ $\quad d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ $\quad$ è SM → verificalo
4) $X = \mathbb{R}^n$ $\quad d(x,y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$ $\quad$ è SM (euclideo)
5) X insieme qualsiasi

sia $d: X \times X \to [0, \infty)$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

è SM (discreto).

oss Se (X, d) è uno SM e $Y \subset X$ allora (Y, d) è uno SM.

def Sia (X, d) uno SM. Per $x_0 \in X$ e $r > 0$ fissati definiamo

$$B(x_0, r) = B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\} \subset X$$

la **PALLA** centrata in x_0 di raggio r.

Sullo spazio metrico ristretto (Y, d) avremo: $B_Y(y_0, r) = B_X(y_0, r) \cap Y$

$\mathbb{R}^n$ con dist. euclidea

Indichiamo con $\langle \cdot , \cdot \rangle$ il prodotto scalare

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Definiamo $|\cdot| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$|x| \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

So che vale la disuguaglianza di CS : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x|\, |y|$$

<u>Lemma</u> Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, vale la subadditività alla norma Euclidea:

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

<u>dim</u> $|x+y|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$

$$= |x|^2 + 2 \langle x, y \rangle + |y|^2$$

$$\overset{CS}{\leq} |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$$

$$\leq (|x| + |y|)^2$$

$$\Rightarrow \quad |x+y| \leq |x| + |y| \qquad \square$$

Ora su $\mathbb{R}^n$ definiamo

$$d(x,y) = |x-y| \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$

Affermo che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno SM: verifichiamolo.

i) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \iff x = y$ ✓

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ ✓

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ✓

$d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y)$

Spazi normati

def Una coppia $(V, \|\cdot\|)$ è uno SPAZIO NORMATO se V è uno sp. vett. (su $\mathbb{R}$) e $\|\cdot\|: V \to [0,\infty)$ è una funzione (detta NORMA) che verifica:

i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall\, x \in V$ e $\|x\| = 0 \iff x = 0$

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \quad \forall\, x \in V \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ (positiva omogeneità della norma)

iii) $\forall\, x, y \in V$ vale

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(subadditività della norma)

oss Sia $(V, \|\cdot\|)$ spazio normato posso definire $d : V \times V \to [0,\infty)$

$$d(x,y) = \|x-y\| \qquad x, y \in V$$

Allora (V, d) è SM

Convergenza in SM

Sia (X,d) uno SM. Consideriamo $x : \mathbb{N} \to X$

$$x(k) = x_k \in X \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Potremmo indicarla $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Dato $x_\infty \in X$ diremo che

$$x_k \xrightarrow[k\to\infty]{(X,d)} x_\infty$$

se e solo se

$$\lim_{k\to\infty} d(x_k, x_\infty) = 0$$

Potremmo anche scrivere

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_\infty$$

oss Su $\mathbb{R}^n$ fissiamo la distanza standard. Sia $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di punti $x_k \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$. Avremo che

$$x_k \xrightarrow[k\to\infty]{(\mathbb{R}^n,d)} x_\infty \in \mathbb{R}^n \quad \left(\iff |x_k - x_\infty| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\right)$$

se e solo se

coordinata i-esima di x_k

$$\forall\, i = 1, \dots, n \qquad x_k^i \longrightarrow x_\infty^i$$

Esempio

$V = C([0,1])$ è uno SV. Definiamo $\|\cdot\|_\infty : V \to [0,\infty)$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

$(V, \|\cdot\|)$ è SN.

Sia $d_\infty(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.

convergenza uniforme!

Allora $f_n^{\in V} \xrightarrow[n\to\infty]{d_\infty} f^{\in V} \iff f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$

Esercizi

esercizio Sia $\ell^\infty(\mathbb{R}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$ tc $\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty\}$.
è sp. vett. Sia $\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$

$$\|a_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

Provare che $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ è uno SN.

esercizio Siano $a_1, \dots, a_n > 0$. Provare che $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2$.
considero i vettori di $\mathbb{R}^n$

$$x = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n}) \in \mathbb{R}^n$$

$$y = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) \in \mathbb{R}^n$$

Uso la dis. di CS

$$\langle x, y\rangle \leq |x| \cdot |y|$$

$$n = \sum_{i=1}^n \cancel{a_i} \cdot \frac{1}{\cancel{a_i}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)^{1/2}$$

CAPITOLO 1

Spazi metrici e spazi normati

1. Definizioni ed esempi

Enunciamo la definizione di *spazio metrico*.

DEFINIZIONE 1.1.1. Uno spazio metrico è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \to [0, \infty)$ è una funzione, detta *metrica* o *distanza*, che per ogni $x, y, z \in X$ verifica le seguenti proprietà:

1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simmetria);
3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare).

Primi esempi di spazi metrici sono costituiti da:

1) $\mathbb{R}$ con la funzione $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, è uno spazio metrico.
2) $\mathbb{R}$ con la funzione $d(x, y) = |x - y|^{1/2}$, $x, y \in \mathbb{R}$, è uno spazio metrico.
3) $\mathbb{C}$ con la funzione $d(z, w) = |z - w|$, $z, w \in \mathbb{C}$, è uno spazio metrico.
4) $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, con la funzione distanza

$$d(x, y) = |x - y| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \Big)^{1/2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

è uno spazio metrico (si veda la successiva Sezione 2).

Ecco altri esempi di spazi metrici.

ESEMPIO 1.1.2 (Spazio metrico discreto). Sia X un insieme e definiamo la funzione $d : X \times X \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

È facile verificare che d verifica gli assiomi della funzione distanza.

ESEMPIO 1.1.3 (Distanza centralista). Su $\mathbb{R}^2$ definiamo la funzione $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ nel seguente modo

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{se } x, y \in \mathbb{R}^2 \text{ sono collineari con } 0, \\ |x| + |y| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Lasciamo come esercizio il compito di provare che $(\mathbb{R}^2, d)$ è uno spazio metrico.

ESEMPIO 1.1.4. I numeri naturali $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ con la distanza

$$d(m, n) = \Big| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \Big|, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

sono uno spazio metrico.

Sia X uno spazio metrico con distanza $d : X \times X \to [0, \infty)$. Fissato un punto $x \in X$ ed un raggio $r \geq 0$, l'insieme

$$B_r(x) = B(x, r) = B_X(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

si dice *sfera* o *palla* (aperta) di centro x e raggio r.

Osservazione 1.1.5 (Spazio metrico restrizione). Dato un sottoinsieme $Y \subset X$, possiamo restringere la funzione distanza d ad Y: $d : Y \times Y \to [0, \infty)$. Allora anche (Y, d) è uno spazio metrico. La palle nella distanza d di Y sono fatte nel seguente modo:

$$B_Y(y, r) = B_X(y, r) \cap Y,$$

per ogni $y \in Y$ ed $r > 0$.

2. $\mathbb{R}^n$ come spazio metrico

Indichiamo con $\mathbb{R}^n$ lo spazio Euclideo n-dimensionale, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, dotato della usuale struttura di spazio vettoriale.

Definizione 1.2.1 (Prodotto scalare). Definiamo l'operazione $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n.$$

Tale operazione si dice *prodotto scalare (standard)* di $\mathbb{R}^n$.

Il prodotto scalare è bilineare (ovvero lineare in entrambe le componenti), simmetrico e non degenere. Precisamente, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà:

1) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$;
2) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;
3) $\langle x, x\rangle = 0$ se e solo se $x = 0$.

Talvolta, il prodotto scalare si indica anche con il simbolo (x, y) oppure con il simbolo $x \cdot y$.

Definizione 1.2.2 (Norma Euclidea). La norma Euclidea su $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, è la funzione $|\cdot| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ così definita

$$|x| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}, \quad x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Equivalentemente, $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

La norma Euclidea verifica le proprietà di una norma (si veda la successiva Sezione 3). Precisamente, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si verifica:

1) $|x| \geq 0$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
2) $|\lambda x| = |\lambda||x|$ (omogeneità);
3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (subadittività).

La verifica delle proprietà 1) e 2) è elementare. La subadittività segue osservando che

$$|x+y|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2,$$

dove nella disuguaglianza si è utilizzata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, che ora dimostriamo.

Proposizione 1.2.3 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale la disuguaglianza

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x||y|.$$

Dim. Il polinomio reale della variabile $t \in \mathbb{R}$

$$P(t) = |x + ty|^2 = |x|^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2|y|^2$$

non è mai negativo, $P(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e dunque il suo discriminante verifica $\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4|x|^2|y|^2 \leq 0$. La tesi segue estraendo le radici. Non abbiamo usato la forma specifica del prodotto scalare Euclideo ma solo le proprietà 1)-2)-3). □

Verifichiamo la subadittività della norma Euclidea. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$|x+y|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

ed estraendo le radici si ottiene la proprietà 3).

La norma Euclidea induce su $\mathbb{R}^n$ la funzione distanza $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$,

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

Lo spazio metrico $(\mathbb{R}^n, d)$ si dice spazio metrico Euclideo. Le proprietà 1), 2), e 3) si verificano in modo elementare. In particolare, si ha:

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in \mathbb{R}^n.$$

L'insieme

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$$

è la palla Euclidea di raggio $r > 0$ centrata in $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Spazi metrici indotti da spazi normati

Spazi metrici possono essere generati a partire dagli spazi normati.

Definizione 1.3.1 (Spazio normato). Uno spazio normato (reale) è una coppia $(V, \|\cdot\|)$ dove V è uno spazio vettoriale reale e $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ è una funzione, detta *norma*, che per ogni $x, y \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ verifica le seguenti proprietà:

1) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (omogeneità);
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (subadittività o disuguaglianza triangolare).

Chiaramente, $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^n$ sono spazi normati con le norme naturali. Una norma $\|\cdot\|$ su uno spazio vettoriale V induce canonicamente una distanza d su V definita nel seguente modo:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in V.$$

La disuguaglianza triangolare per la distanza d deriva dalla subadittività della norma $\|\cdot\|$. Infatti, per ogni $x, y, z \in V$ si ha:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

ESEMPIO 1.3.2 (Lo spazio $\ell^2(\mathbb{R})$). Sia $\ell^2(\mathbb{R})$ l'insieme delle successioni reali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di quadrato sommabile:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

Indichiamo con $\mathrm{x} \in \ell^2(\mathbb{R})$ un generico elemento di $\ell^2(\mathbb{R})$. La funzione $\|\cdot\|_{\ell^2(\mathbb{R})} : \ell^2(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$ così definita

$$\|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\Big)^{1/2}$$

è una norma. La proprietà di subadittività si prova come in $\mathbb{R}^n$. Definiamo su $\ell^2(\mathbb{R})$ il prodotto scalare

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle_{\ell^2(\mathbb{R})} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \quad \mathrm{x} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \mathrm{y} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

La disuguaglianza $2|a_n b_n| \le a_n^2 + b_n^2$ prova che la serie converge assolutamente. In particolare, avremo $\|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} = \langle \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle_{\ell^2(\mathbb{R})}^{1/2}$. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle_{\ell^2(\mathbb{R})}| \le \|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} \|\mathrm{y}\|_{\ell^2(\mathbb{R})},$$

si può dimostrare in modo analogo a quanto fatto in $\mathbb{R}^n$; da qui segue che $\|\mathrm{x}+\mathrm{y}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} \le \|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} + \|\mathrm{y}\|_{\ell^2(\mathbb{R})}$.

In conclusione, $\ell^2(\mathbb{R})$ con la funzione distanza

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)^2\Big)^{1/2}$$

è uno spazio metrico.

4. Successioni in uno spazio metrico

Una successione in uno spazio metrico (X, d) è una funzione $x : \mathbb{N} \to X$. Si usa la notazione $x_n = x(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e la successione si indica con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

DEFINIZIONE 1.4.1. Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un punto $x \in X$ nello spazio metrico (X, d) se

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0,$$

ovvero se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \ge \bar{n}$ si abbia $d(x_n, x) \le \varepsilon$. In questo caso si scrive

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,d)} x \quad \text{oppure} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{in } (X, d),$$

e si dice che la successione è *convergente* ad x ovvero che x è il limite della successione.

Se il limite di una successione esiste allora è unico. Se infatti $x, y \in X$ sono entrambi limiti di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, allora risulta

$$0 \le d(x, y) \le d(x, x_n) + d(x_n, y) \to 0, \quad n \to \infty,$$

e quindi $d(x, y) = 0$ ovvero $x = y$.

ESEMPIO 1.4.2 (Successioni in $\mathbb{R}^m$). Sia $X = \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, con la distanza Euclidea e consideriamo una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^m$. Ogni punto $x_n \in \mathbb{R}^m$ ha m coordinate, $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^m)$ con $x_n^1, \dots, x_n^m \in \mathbb{R}$. Sia infine $x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$ un punto fissato. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ in $\mathbb{R}^m$;

(B) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^i = x^i$ in $\mathbb{R}$ per ogni $i = 1, \dots, m$.

5. Esercizi

ESERCIZIO 1.5.1. Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ tali che $|\langle x, y\rangle| = |x||y|$. Provare che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $y = \lambda x$. Questo è il caso dell'uguaglianza nella disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

ESERCIZIO 1.5.2. Sia $R_\vartheta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotazione di un angolo $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Verificare che per ogni $x, y \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\langle R_\vartheta(x), R_\vartheta(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Ovvero: il prodotto scalare e quindi la distanza Euclidea sono invarianti per trasformazioni ortogonali.

ESERCIZIO 1.5.3. Siano $a_1, \dots, a_n > 0$ numeri reali positivi. Verificare che

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\Big) \geq n^2.$$

ESERCIZIO 1.5.4. Sia (X, d) uno spazio metrico e definiamo la funzione $\delta : X \times X \to [0, \infty)$

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

Verificare che (X, δ) è uno spazio metrico.

ESERCIZIO 1.5.5. Sia $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ la funzione così definita:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{se } x, y \text{ e } 0 \text{ sono collineari,} \\ |x| + |y| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Provare che d è una metrica su $\mathbb{R}^2$ e descrivere (graficamente) le palle in questa metrica.

ESERCIZIO 1.5.6. Sia $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, $n \geq 1$, la funzione definita in ciascuno dei seguenti tre casi per $x, y \in \mathbb{R}^n$: A) $d(x, y) = |x - y|^{1/2}$; B) $d(x, y) = |x - y|^2$; C) $d(x, y) = \log(1 + |x - y|)$. Dire in ciascuno dei tre casi se d è una distanza su $\mathbb{R}^n$ oppure no. Provare ogni affermazione.

ESERCIZIO 1.5.7. Sia $\alpha \in (0, 1]$ e definiamo la funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = |x - y|^\alpha, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

dove $|\cdot|$ indica la norma Euclidea di $\mathbb{R}^n$. Provare che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico.

ESERCIZIO 1.5.8. Sia $\ell^\infty(\mathbb{R})$ l'insieme di tutte le successioni reali limitate:

$$\ell^\infty(\mathbb{R}) = \big\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ successione in } \mathbb{R} \text{ limitata}\big\}.$$

Indichiamo con $\mathrm{x} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un generico elemento di $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

1) Verificare che $\ell^\infty(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale reale con le usuali operazioni di somma e moltiplicazione scalare per le successioni.
2) Verificare che la funzione $\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ così definita
$$\|\mathrm{x}\|_\infty = \sup\left\{|a_n| \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\right\}$$
definisce una norma.
3) Verificare che la funzione $d_\infty : \ell^\infty(\mathbb{R}) \times \ell^\infty(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$ così definita
$$d_\infty(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|_\infty$$
è una distanza su $\ell^\infty(\mathbb{R})$.