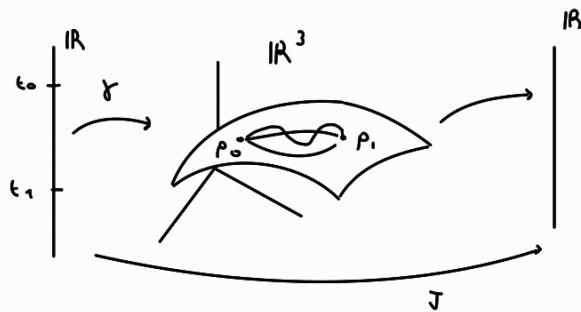


PRINCIPIO VARIATIONALE DI HAMILTON



$\Gamma = \{ \text{spazio di curve (diff)} \}$

$J : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{FUNZIONALI}$

$$f \mapsto J(f)$$

esempio $f = (t_1, \dots, t_n)$

$$E(f) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{f'(t)^2 + \dots + f_n'(t)^2} dt = \int_{t_0}^{t_1} \|f'(t)\| dt \quad \text{e' un funzionale}$$

nel normo caso sarebbe la lunghezza.

Consideriamo $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $L : \underbrace{U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}}_{TU} \rightarrow \mathbb{R}$, $(q, \dot{q}) \mapsto L(q, \dot{q})$.

non lo facciamo, ma
il tempo e' fisso

Fissiamo $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $q_0, q_1 \in U$

$$\Gamma_{(t_0, t_1; q_0, q_1)} = \{ f : [t_0, t_1] \rightarrow U \text{ diff} \mid f(t_0) = q_0, f(t_1) = q_1 \}$$



Considero ogni funzionale $J : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$. Ad esempio, mi interessa:

$$J_L : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto J_L(f) := \int_{t_0}^{t_1} L(f(t), f'(t), t) dt$$

detto **FUNZIONALE DI AZIONE** associato a L

Γ non è sp. vett., dato che $f, g \in \Gamma \quad (f+g)(t_0) = q_0 + q_1 = 2q_0 \neq q_0$, però è uno sp. affine con sp. vett. struttura (∞ -dim)

$$\Gamma_0 = \{ m : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n \mid m(t_0) = m(t_1) = 0 \}$$

dato che $(f-g)(t_0) = q_0 - q_1 = 0 = q_1 - q_0 = (g-f)(t_1)$.

calcolo differenziale per funzioni $\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$

esempio $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Abbiamo due porpositi:

- 1) diff (richiede norme in \mathbb{R}^n) : $df(x)$

2) derivate direzionali: la derivata di f in $x \in \mathbb{R}^n$ lungo la direzione $v \in \mathbb{R}^n$ è

$$(\text{te } \exists), \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \quad \frac{d}{dt} f(x+tv) \Big|_{t=0} = f'(x)(v) = df(x)v$$

1) \Rightarrow 2), ma non viceversa.

Se f è differenziabile, allora \bar{x} è "punto massimo" (critico) di f

$$\Leftrightarrow f'(\bar{x}) = 0$$

\Leftrightarrow tutte le derivate direzionali in \bar{x} sono $= 0$, ovvero

$$\frac{d}{dt} f(\bar{x}+tv) \Big|_{t=0} = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

Vogliamo estendere questo secondo approccio.

def • $J: P \rightarrow \mathbb{R}$ è "derivabile secondo Gateaux" $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall m \in P_0 \quad \exists$

$$\frac{d}{dt} J(\underbrace{\bar{r} + dm}_{\text{curve varate}}) \Big|_{t=0} =: D_f^G J(m) \quad \begin{array}{l} \text{"derivata di Gateaux"} \\ \text{"variazione"} \end{array}$$

• J è derivabile secondo G se lo è $\forall t \in \mathbb{R}$



prop $\forall L: U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diff. $J_L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile secondo Gateaux e

$$D_f^G J_L(m) = \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^{t_1} m_j(t) \left[\frac{\partial L}{\partial q_j}(r(t), r'(t), t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(r(t), r'(t), t) \right) \right] dt \quad \forall m \in P_0$$

$$\text{dim} \quad \bullet \quad J_L(\bar{r} + dm) = \int_{t_0}^{t_1} L(\bar{r}(t) + dm(t), \bar{r}'(t) + dm'(t), t) dt$$

$$\bullet \quad \frac{d}{dt} J_L(\bar{r} + dm) \Big|_{t=0} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} L(\underbrace{\bar{r}(t) + dm(t)}_q, \underbrace{\bar{r}'(t) + dm'(t)}_{\dot{q}}, t) dt \Big|_{t=0}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}(r(t), r'(t), t) m_j(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(r(t), r'(t), t) m'_j(t) \right) dt$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}(\dots) m_j(\dots) + \frac{d}{dt} \left(m_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right) dt$$

$$= \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(m_j(t) \frac{\partial L}{\partial q_j}(\dots) \right)_{t_0}}_{0} + \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^{t_1} m_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) dt \quad \square$$

def $J : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ G-densabile e' "stationario int" (o "stationario J") se
 $D_f^G J(m) = 0 \quad \forall m \in \Gamma_0.$

prop (principio variazionale di Hamilton). $L : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\delta \in \Gamma$ stationaria J_L

$$\text{se e solo se } \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} (\delta(t), \delta'(t), t) \right] - \frac{\partial L}{\partial q_j} (\delta(t), \delta'(t), t) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

che (in questo amb.) sono dette "eq. di Euler-Lagrange"

dimo (\Leftarrow) $t \mapsto \delta(t) \in \Gamma$ soddisfa $\mathcal{E}L \Rightarrow D_f^G J_L(m) = 0 \quad \forall m \in \Gamma_0$

(\Rightarrow) Supponiamo t stationaria $J_L \stackrel{?}{=} t$ è sol. di $\mathcal{E}L$

- $f_j(t) := \frac{\partial L}{\partial q_j} (\delta(t), \delta'(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} (\delta(t), \delta'(t), t) \right]$

$$\Rightarrow D_f^G J_L(m) = \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^{t_1} m_j(t) f_j(t) dt$$

- PA $D_f^G J_L(m) = 0$ ed $\exists f_i \neq 0$, wlog $f_1 \neq 0$

Vogliamo mostrare che $\exists f_i \neq 0$, allora $\exists m \in \Gamma_0$ tc $D_f^G J_L(m) \neq 0$

- $\exists \bar{t} \in [t_0, t_1] \quad f_1(\bar{t}) \neq 0$

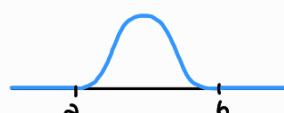
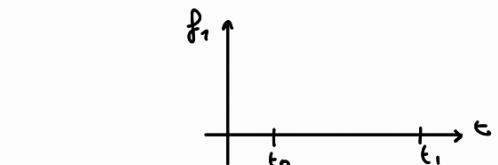
wlog $f_1(\bar{t}) > 0$

permanenza del segno $\exists (a, b) \subset (t_0, t_1)$ tc $f_1(t) > 0 \quad \forall t \in (a, b)$

- scopo $m = (m_1, \dots, m_n)$ tc

$$m_2 = \dots = m_n = 0$$

$$m_1(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ > 0 & a < t < b \\ 0 & t > b \end{cases}$$



Cerchiamo funzioni di questo tipo differenziabili quando si vede: sono

dette "bump function"

permettere C^∞ t, basta
utare

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

è bump function fra $-1 \leq x \leq 1$

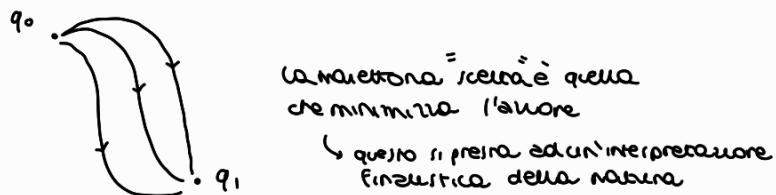
- $D_f^G J_L(m) = \dots = \int_{t_0}^{t_1} m_1(t) f_1(t) dt = \int_a^b m_1(t) f_1(t) dt > 0 \quad \{$
- $\Rightarrow f_1 = 0$

\square

nota J_c è funzionale d'azione. Il principio variazionale è talvolta chiamato principio di minima azione

oss Le eq. di Lagrange hanno origine variazionale, questo da' loro delle speciali proprietà (esempio: teorema di Noether)

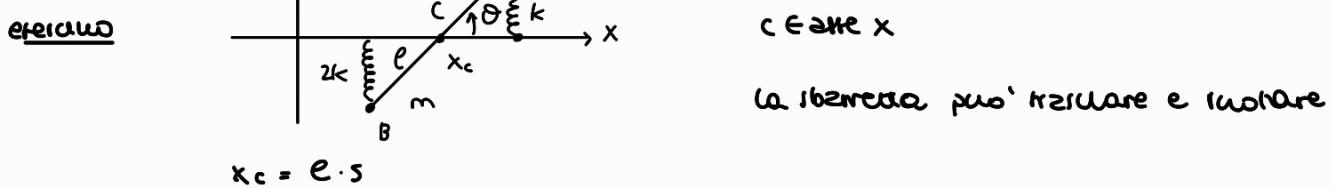
oss Noi siamo partiti dal principio di d'Alembert. In altre scuole di pensiero si prende come principio di partenza quello variazionale.
Le teorie derivate e quella meccanica partono da principi variazionali.
L'approccio variazionale è molto importante.



esempio (applicazione di principi variazionali nel problema dei 3 corpi).

Esistono (dall'aspetto di una matematica) soluzioni particolarmente regolari:

(e belle), come la seguente :  Il percorso di "coreografie".



$$Q \approx R \times S^1 \rightarrow (S, \theta) \quad (n=1)$$

oss Mi aspetto invarianza per traslazione

• Lagrangiana

$$\begin{cases} x_A = ls + lc \cos \theta \\ z_A = es \sin \theta \\ x_B = ls - lc \cos \theta \\ z_B = -es \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_A = es - e\dot{\theta} c \sin \theta \\ \dot{z}_A = e\dot{\theta} s \cos \theta \\ \dot{x}_B = es + e\dot{\theta} c \sin \theta \\ \dot{z}_B = -e\dot{\theta} s \cos \theta \end{cases}$$

$$\dot{x}_A^2 + \dot{z}_A^2 = e^2 (j^2 + \dot{\theta}^2 - 2j\dot{\theta}\sin\theta)$$

$$\dot{x}_B^2 + \dot{z}_B^2 = e^2 (j^2 + \dot{\theta}^2 + 2j\dot{\theta}\sin\theta)$$

$$\Rightarrow T(s, \theta, \dot{j}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m e^2 (3j^2 + 3\dot{\theta}^2 - 2j\dot{\theta}\sin\theta)$$

$$V_{\text{pot}} = 2mgz_A l_{z_A} + mgz_B l_{z_B} = mgs\sin\theta$$

$$V_{\text{restante}} = \frac{1}{2}K z_A^2 + \frac{1}{2}(2k) z_B^2 = \frac{3}{2}k e^2 s^2 \theta$$

$$L(j, \theta, \dot{j}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m e^2 (3j^2 + 3\dot{\theta}^2 - 2j\dot{\theta}\sin\theta) - \left[\frac{mg\theta}{e} \sin\theta + \frac{3}{2} \frac{k}{m} e^2 s^2 \theta \right]$$

$$= \frac{1}{2} (3j^2 + 3\dot{\theta}^2 - 2j\dot{\theta}\sin\theta) - \left[\theta \sin\theta + \frac{1}{2} \beta s^2 \theta \right]$$

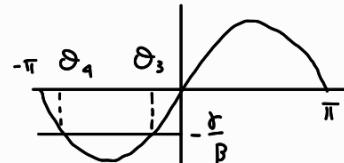
$$v''(j, \theta)$$

- equilibrio del sistema:

$$DV(j, \theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \cos\theta + \beta \cos\theta \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\gamma + \beta \sin\theta) \cos\theta = 0 \quad : \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = -\frac{\pi}{2} \quad \forall \beta, \gamma$$

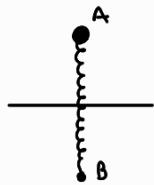
$$\sin\theta = -\frac{\gamma}{\beta} \quad \text{re } \frac{\gamma}{\beta} < 1 \quad (\text{se la molla e' forte})$$



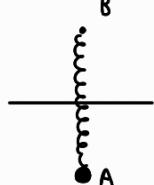
$$\theta_3 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \theta_4 = -\pi - \theta_3$$

config. di equilibrio: con $s \in \mathbb{R}$

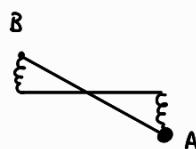
$$(j, \frac{\pi}{2})$$



$$(j, -\frac{\pi}{2})$$



$$\begin{cases} (j, \theta_3) \\ (j, \theta_4) \end{cases} \quad \text{re } \frac{\gamma}{\beta} < 1$$



- stabilità

$$v''(j, \theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$* \neq 0$ allora e' instabile

$* > 0$? siccome $n=2$, quanteq. stabili sono i minimi, ma non sono, dunque non sono equilibri stabili

- riduzione del sistema

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{S}} = 0, \text{ si ignora}$$

$$P_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{S}} = 3\dot{S} - \dot{\theta} \sin \theta = P \quad \text{e' I.P.}$$

$$\Rightarrow \dot{S} = \frac{1}{3}(P + \dot{\theta} \sin \theta)$$

termini quadrati: cambio segno
termini lineari: scomparsa
termini indipendenti: quali

$$L_p^R(\theta, \dot{\theta}) = -\frac{3}{2}\dot{S}^2 + \frac{3}{2}\dot{\theta}^2 - V(\theta) \quad \mid_{\dot{S} = \frac{P + \dot{\theta} \sin \theta}{3}}$$

$$= L_p^R(\theta, \dot{\theta}) = -\frac{3}{2} \frac{P^2 + \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + 2P\dot{\theta} \sin \theta}{9} + \frac{3}{2}\dot{\theta}^2 - V(\theta)$$

$$= \frac{1}{2}(3 - \frac{1}{3} \sin^2 \theta)\dot{\theta}^2 - \frac{3}{2}P^2 - \frac{1}{3}P\dot{\theta} \sin \theta - V(\theta)$$

$$L_p(\theta, \dot{\theta}) = \underbrace{\frac{1}{2}(3 - \frac{1}{3} \sin^2 \theta)\dot{\theta}^2}_{\mathcal{L}(q)} - \underbrace{\frac{1}{3}P\dot{\theta} \sin \theta}_{T_1} - V(\theta)$$

oss $-\frac{1}{3}P\dot{\theta} \sin \theta = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{3}P \cos \theta \right) \Rightarrow L_p \text{ e' equivalente alla lagrangiana}$

$$\tilde{L}_p(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(3 - \frac{1}{3} \sin^2 \theta)\dot{\theta}^2 - V(\theta)$$



Non e' accidentale!

Quello succede sempre quando $n=1$: un termine lineare nelle

velocita' e' del tipo $f(q)\dot{q} = \frac{d}{dt} F(q)$ con F primitiva di f

- $3 > \omega(q) > 2$ (e' def. pos. OK!)

ci basta fare il riferito in base 1-dim

$$V(\theta) = t \sin \theta + \frac{1}{2} \beta \sin^2 \theta$$

$$V'(\theta) = (t + \beta \sin \theta) \cos \theta$$

$$\text{eq: } \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{re } \frac{t}{\beta} < 1, \theta_3 \in \theta_q$$

$$V''(\theta) = -(t + \beta \sin \theta) \sin \theta + \beta \cos^2 \theta$$

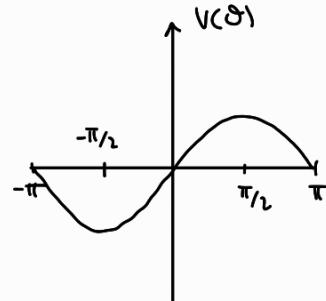
$$V''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -(t + \beta) < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ MAX}$$

$$V''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = t - \beta > 0 \text{ re } \frac{t}{\beta} < 1 \text{ MAX}$$

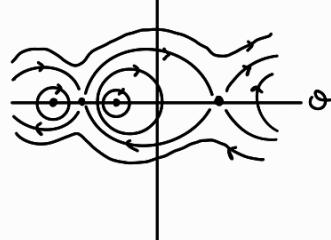
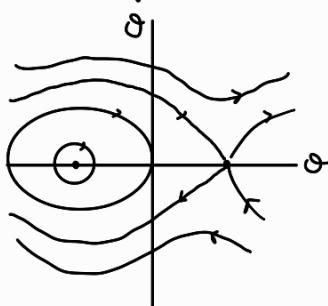
$$< 0 \text{ re } \frac{t}{\beta} > 1 \text{ MIN}$$

$$V(\pi_2) > V(-\pi_2)$$

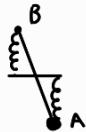
$$\frac{t}{\beta} > 1$$



$$\frac{t}{\beta} < 1$$



Il risultato infatti che $\frac{t}{P} > 1$ è un pendolo: questo non stupisce



- equilibri relativi

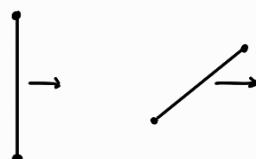
moti del sistema completo associati agli equilibri del sistema ridotto $(\dot{Q}^*, 0)$

$$L(\ddot{Q}, Q, \dot{Q}, \ddot{Q}), \quad \dot{E} = U_C(Q, \dot{Q}), \quad E(t) = E(0) + \int_0^t U_C(Q(s), \dot{Q}(s)) ds$$

$$\Rightarrow \text{relativo a } (\dot{Q}^*, 0) \text{ ha } E(t) = E(0) + U_C(Q^*, 0)t$$

$$\Theta = \theta_1, \theta_2, \underbrace{\theta_3, \theta_4}_{\beta > \gamma}$$

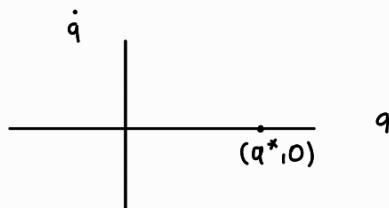
$$t \mapsto \left(E(0) + \frac{P}{3}t, \dot{\theta}_i \right)$$



- stabilità equilibri (di nuovo): $(s_i, \dot{\theta}_i)$, $s \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$

$$V''(s, \dot{\theta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial V}{\partial \dot{\theta}}(\dot{\theta}) \end{pmatrix} \quad "v"$$

Vorremmo dimostrare direttamente l'instabilità degli eq. per cui $V'' > 0$ attraverso la def di Lyap-stabilità e l'uso degli equilibri relativi.



Vogliamo mostrare che $\forall \varepsilon > 0 \exists$ moto condotto iniziale $(s_0, \dot{\theta}_0, \dot{s}_0, \dot{\dot{\theta}}_0)$

" ε -vicino" a $(q^*, 0) = (s, \dot{\theta}_i, 0, 0)$ che va all'infinito.

Consideriamo eq. relativo con $s_0 = s$, $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}_i$, $\dot{s}_0 = \varepsilon$, $\dot{\dot{\theta}}_0 = 0$

$$s \mapsto (s_0, \dot{\theta}_i, \varepsilon, 0) \Rightarrow P = 3\varepsilon$$

$$\frac{P}{3}$$

- frequente piccole oscillazioni sistema ridotto attorno agli eq. stabili

$$n=1 \quad L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \alpha(\theta) \dot{\theta}^2 - V(\theta)$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\theta_{3,4} \text{ t.c. } \frac{\beta}{\alpha} < 1$$

Nel caso $n=2$ det $(V'' - \lambda A(\theta)) = 0$ e

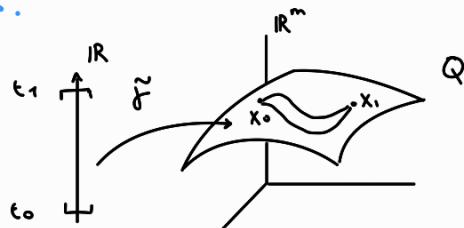
$$\theta = -\frac{\pi}{2} : \quad \omega^2 = d = \frac{V''(-\pi/2)}{\alpha(-\pi/2)} = \dots$$

GEOGETICHE DI SOTTOVAR.

$Q \subset \mathbb{R}^m$ di dim n

$\tilde{\gamma} : [t_0, t_1] \rightarrow Q$

$\tilde{\Gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n)$



\Rightarrow lunghezza (euclidea) della curva in Q è per definizione $\tilde{L}(\tilde{\gamma}) = \int_{t_0}^{t_1} \|\tilde{\gamma}'(t)\| dt$

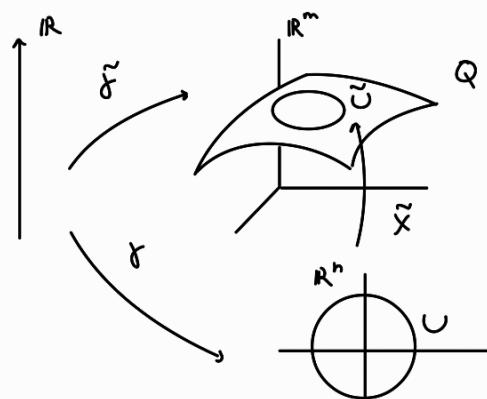
Consideriamo tutte le curve che connettono $x_0, x_1 \in Q$ e vogliamo trovare la curva di minima lunghezza $\tilde{L}(\tilde{\gamma})$.

A differenza di ieri, però, Q non è un aperto di \mathbb{R}^m . Inoltre non possiamo equipaggiare curve in Q perché "rischia di "uscire" dalle retta var. L'obiettivo è trovare coordinate in Q

$\forall f \exists! \gamma : [t_0, t_1] \rightarrow U \quad \text{t.c. } \tilde{\gamma} = \tilde{x} \circ \gamma$

$$\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{x}'(\gamma(t)) \gamma'(t)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{\gamma}'(t)\|^2 &= \tilde{x}'(\gamma(t)) \gamma'(t) \cdot \tilde{x}'(\gamma(t)) \gamma'(t) \\ &= \gamma'(t) \tilde{x}'(\gamma(t))^T \tilde{x}'(\gamma(t)) \gamma'(t) \end{aligned}$$



def La "matrice metrica" di Q relative a coord \tilde{x} è $\forall q \in U$

$$g(q) = \tilde{x}'(q)^T \tilde{x}'(q) \quad (\text{matrice } n \times n)$$

oss è matrice cartesica di un punto vincolato a q e di misura $m=n$

$$\|\tilde{\gamma}'(t)\| = \sqrt{\gamma'(t) \cdot g(\gamma(t)) \gamma'(t)}$$

$$\Rightarrow \tilde{L}(\tilde{\gamma}) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\gamma'(t) \cdot g(\gamma(t)) \gamma'(t)} dt =: L(\gamma)$$

$$\gamma : T\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(q, \dot{q}) \mapsto \gamma(q, \dot{q}) = \dot{q} \cdot g(q) \dot{q}$$

$$\Rightarrow L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\gamma(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))} dt$$

ci chiediamo quale curva $t \mapsto \gamma(t) \in U \subset \mathbb{R}^n$ stazionariamo al funzionale $L(\gamma)$:

essendo le soluzioni delle eq. di Euler-Lagrange per la lagrangiana $\sqrt{\dot{q} \cdot g(q) \dot{q}}$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad (\text{EL-1})$$

def Una "geodetica" di Q è ogni curva $\tilde{F} : [t_0, t_1] \rightarrow Q$ (conto t_0, t_1) la cui rappresentativa \tilde{x} in una, e dunque ogni, parametrizzazione di Q soddisfa ($\in L^1$)

a ferre \tilde{r}_x diff., dunque $\dot{q} \neq 0$

esempio geodetica in \mathbb{R}^2 : $\begin{matrix} \mathbb{R}^2 \\ \text{di} \end{matrix}$

coord. cartesiane $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{x} = \omega$

$$g(x, y) = 1 \quad \forall x, y$$

$$\tilde{\gamma}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

$$\text{eq. di } \tilde{\gamma}: \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \dot{x}} = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \frac{\dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2})^3} = \frac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dot{x}\dot{x}\ddot{x} - \dot{x}\dot{y}\ddot{y}}{(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2})^3}$$

$$= \frac{\dot{y}}{(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2})^3} \quad \dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y}$$

$$\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} (\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y}) = 0 \\ \frac{\dot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}) = 0 \quad (\text{è simmetrica in } x \text{ e } y) \end{cases}$$

Veniamo alle rette fondamentali (e eq.):

$$t \mapsto (x_0 + tu, y_0 + tv) \quad \text{le fondamentali chiaramente}$$

$$\begin{matrix} " & " \\ x(t) & y(t) \end{matrix}$$

oss $k\dot{x} \neq 0$ e $\dot{y} \neq 0$ le due equazioni sono le stesse equivalenti, dunque le eq. non possono essere vere nello stesso momento!

Questo spiega l'origine della mancanza di unicità delle soluzioni.

In effetti, consideriamo $t \mapsto (x_0 + f(t)u, y_0 + g(t)v)$,

$f'(t) > 0 \quad \forall t$: ora è ancora lo param. delle stesse rette!

oss Quanto appena visto è un fatto generale

La "l'apprirena" $\sqrt{L}(q, \dot{q}) = \sqrt{\dot{q} \cdot g(q) \dot{q}}$ è omogenea di grado 1 nelle \dot{q} :

$$\sqrt{L}(q, d\dot{q}) = \sqrt{d\dot{q} \cdot g(q) d\dot{q}} = d\sqrt{\dot{q} \cdot g(q) \dot{q}}, d > 0$$

Affinare le eq. di Lagrange potranno essere messe in forma normale,

la l'apprirena deve essere regolare: del $(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}) \neq 0$. Ma, siccome

$$L \text{ è } 1\text{-omogenea rispetto a } \dot{q} \Rightarrow \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}} = 0 \quad !!$$

Formulazione alternativa

Invece di L considero come l'apprirena $\tilde{L}(q, \dot{q}) = \dot{q} \cdot g(q) \dot{q}$, dunque le eq. di Lagrange sono ben def. (hanno qualche relazione con quelle di L)?

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} = 0 \quad (\text{EL-2})$$

prop 1) Ogni soluz. non n. di eq. di (EL-2) è anche soluz. di (EL-1)
(è la rappresentazione di una geodetica di Q)

2) Ogni geodetica di Q ha una r.p.m. la cui rappresentazione è soluz. di (EL-2)

dum 1) oss $L = T_2 - V_0, E = T_2 + V_0$

$\Rightarrow \tilde{L}$ è interprete primo di EL-2 (Jacobi)

• $t \mapsto f(t)$ di (EL-2), $f'(t) \neq 0$ A t

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}} (f(t), f'(t)) \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} (f(t), f'(t)) =$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\tilde{L}} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{1}{2\tilde{L}} \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}}$$

"
 $\frac{1}{2\tilde{L}(f(t), f'(t))}$ è costante

$$= \frac{1}{2\tilde{L}} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} \right) = 0 \quad \square$$

oss 1 \tilde{L} è l'utile l'energia cinetica di un sistema dinamico con var. config. $Q \in M = \mathbb{R}^n$ dove non ci sono forze attive. Quello a dire che i moti in esenza di forze attive ("moti spontanei" o "flusso geodetico") seguono le geodetiche.

esempio $m=3, \dim Q=2$

\tilde{L} è l'utile l'apprirena di un punto di mero 1

vincolato a Q in assenza di forze attive

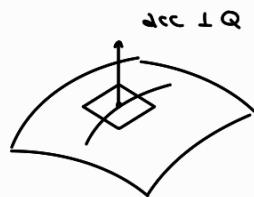


oss 2

Nel caso di geodetica:

$$m\ddot{x} = R(x, \dot{x}) \quad x \in \mathbb{R}^3$$

risoluzione univocale



. fono le stesse cose?

$$\Rightarrow R(x, \dot{x}) \perp T_x Q \quad \forall x \in Q \quad \forall \dot{x} \in T_x Q$$

\Rightarrow è evidentemente la stessa proprietà !!!

oss 3

tra due punti su Q non è garantito che esista una geodetica che li connette e, se esiste, che sia unica.

oss 4

Problema a valori minimi per le geodetiche

$$\forall x_0 \in Q, \forall v_0 \in T_{x_0} Q \exists! \text{ geod. (soluzione di EL-2)}$$

Potremo chiedci come cambia la geodetica indipendente da v_0 : se prendo

$v_0 + k v_0$ la geodetica non cambia, dunque mi porro l'informazione $\|v_0\|=1$.

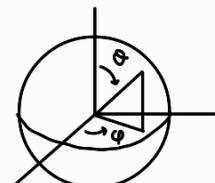
esempio

(geodetica della sfera)

$$(\theta, \varphi) \in (0, \pi) \times \mathbb{S}^1$$

$$\dot{r}(\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} R^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)$$

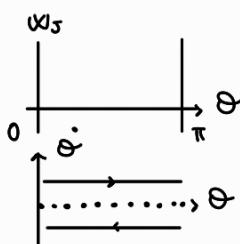
$$p_\varphi = \frac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} \sin^2 \theta = J \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{J}{\sin^2 \theta}$$



$$L_J^R(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \quad |_{\dot{\varphi}=0} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{J^2}{\sin^2 \theta}}_{W_J(\theta)} \quad \begin{cases} J=0 \\ J \neq 0 \end{cases}$$

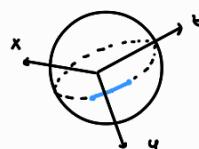
$$J=0: \quad L_J^R = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2$$

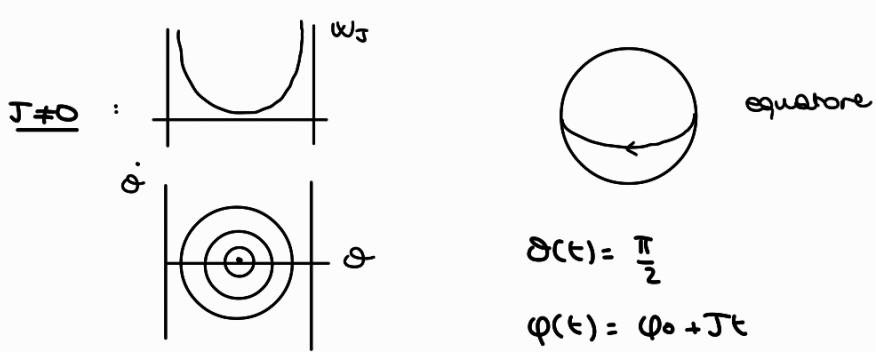
$$\dot{\varphi}=0$$



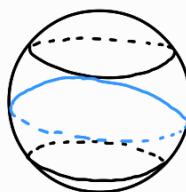
fermato il sistema di coord. vedo che gli archi di circonferenze sono geodetiche: potremmo già fermarci qui.

Penso un qualunque cerchio minimo e posso apporrei coordinate sì trova che esso è geodetica.





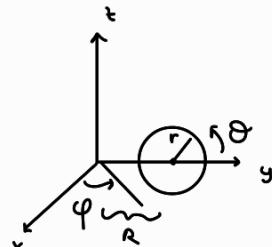
Negli altri casi cosa succede? Se si calcola il periodo con cui l'orologio (a "farce alta") è uguale al periodo di φ , dunque si ottengono ancora circlometri.



Esempio (geodetico del toro)



$$\begin{cases} x = (R + r \cos \theta) \cos \varphi \\ y = (R + r \cos \theta) \sin \varphi \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{x} = \dots \\ \dot{y} = \dots \\ \dot{z} = \dots \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (R + r \cos \theta)^2 \dot{\varphi}^2$$

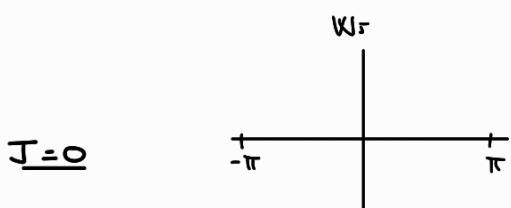
$$(\varphi, \theta) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \Rightarrow p_\varphi = (R + r \cos \theta)^2 \dot{\varphi} = J \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{J}{(R + r \cos \theta)^2}$$

osserviamo che la matrice cartesica è diagonale, dunque la base naturale è ortogonale

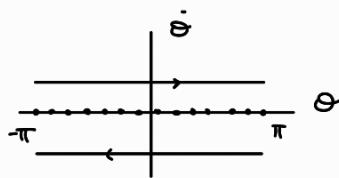
$$\begin{aligned} L_J^R(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} (R + r \cos \theta)^2 \dot{\varphi}^2 \Big|_{\dot{\varphi}} = \\ &= \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{J^2}{(R + r \cos \theta)^2} \right)}_{\omega_J^2(\theta)} \end{aligned}$$

$\omega_J^2(\theta)$ $J=0$ $J \neq 0$



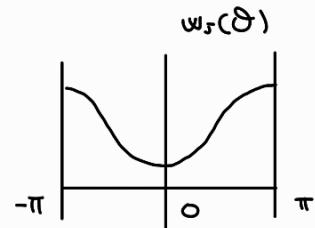
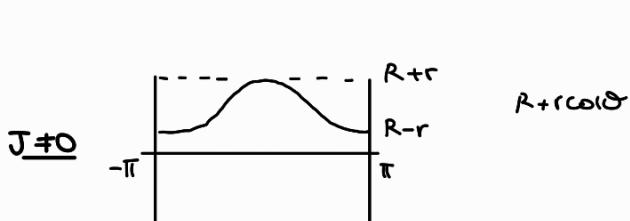
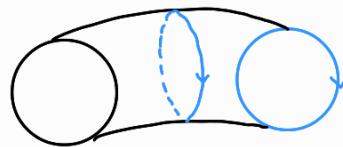
$$\theta \in \mathbb{S}^1$$

$$L_0^R(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}^2, \quad \dot{\theta} = 0$$

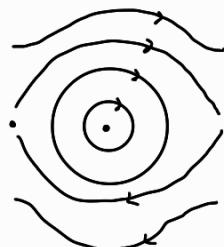


$$t \mapsto \theta_0 + t\dot{\theta}_0 \pmod{2\pi}$$

$$\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow t \mapsto \varphi(t) = \varphi_0 \pmod{2\pi}$$



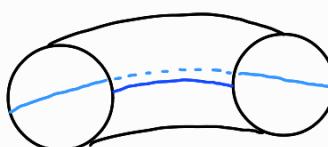
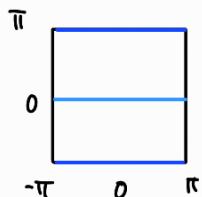
$$t \mapsto \varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \frac{J}{\sin \theta(\tau)} d\tau \quad \text{out}$$



e' pendolo!

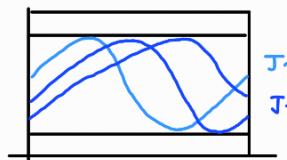
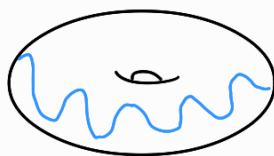
- ap. simpl. ridotto: $\theta = 0, \varphi(t) = \varphi_0 + \frac{J}{(R+r)^2} t$

$$\theta = \pi, \varphi(t) = \varphi_0 + \frac{J}{(R+r)^2} t$$

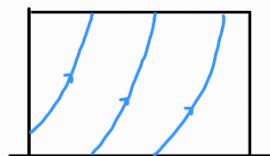


eq. esterno c'è geodetica
eq. esterno c'è geodetica

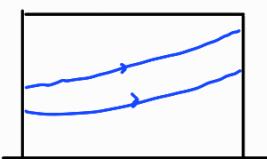
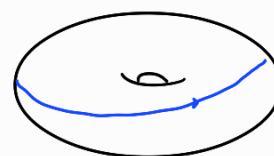
- altri punti:



mot. dirottore



mot. energet. più alta regressiva



regressiva

Metriche "Riemanniane" su rotazioni

$Q \subseteq \mathbb{R}^m$, alora $Q = \mathbb{R}^n$

Una metrica Riemanniana è un'assegnazione di P.S. in ogni $T_x Q$, $x \in Q$

$$\forall x \in Q \quad G_x: T_x Q \times T_x Q \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{dipendente in modo diff da } x$$

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) \mapsto G_x(\tilde{u}, \tilde{v})$$

- bilineare
- simmetrica
- def. pos.

oss le metriche ci permettono di definire la lunghezza di vettori tangent. a Q e di curve in Q :

- $\tilde{u} \in T_x Q$, $\sqrt{G_x(\tilde{u}, \tilde{u})}$
- $\tilde{e}_G(\tilde{r}) := \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{G_{\dot{r}(t)}(\tilde{r}'(t), \tilde{r}'(t))} dt$

esempi 1) metrica euclidea (indotta dalla metrica di \mathbb{R}^m) Q)

$$G_x(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{u} \cdot \tilde{v} = \sum_{i=1}^n \tilde{u}_i \tilde{v}_i$$

prodotto scalare euclideo in \mathbb{R}^n

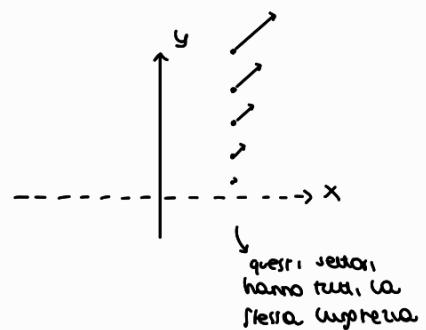
2) (metrica di Poincaré e Lobachevskij)

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$$

$$u = (u_1, u_2)$$

$$v = (v_1, v_2)$$

$$G_{(x,y)}(u,v) := \frac{u \cdot v}{y^2} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{y^2}$$



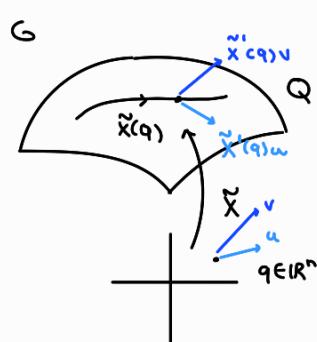
3) metrica currica di un sistema dinamico

L'energia cinetica $T_L = \frac{1}{2} \dot{q} \cdot A(q) \dot{q}$ induce metrica sullo spazio delle configurazioni

Q soluzioni, G metrica

Vogliamo calcolare le geodetiche

$$(q, \dot{q}) \mapsto (\tilde{x}(q), \tilde{x}'(q) \dot{q})$$



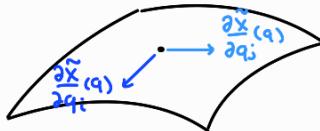
$\forall q \in \mathbb{R}^n, u, v \in T_q \mathbb{R}^n$

$$G_{\tilde{X}(q)}(\tilde{X}'(q)u, \tilde{X}'(q)v) = G_{\tilde{X}(q)}\left(\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}(q), \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_j}(q)\right)$$

vedon delle
bzre naturali dello
spazio tangente

$$= \sum_{i,j=1}^n u_i v_j G_{\tilde{X}(q)}\left(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}(q), \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_j}(q)\right)$$

g_{ij}



\Rightarrow definiamo una matrice $n \times n$ $g(q)$ simmetrica e definita positiva di componenti $g_{ij}(q)$:
è la matrice della metrica G su Q relativa alla param. \tilde{X}

$$= u \cdot g(q) v$$

Geodetiche su (Q, G)

$$\tilde{f} = \tilde{X} \circ f$$

$$\begin{aligned}\tilde{e}_G[\tilde{f}] &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{G_{\tilde{f}(t)}(\tilde{f}'(t), \tilde{f}'(t))} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{r'(t) \cdot g(f(t)) r'(t)} dt =: e[f]\end{aligned}$$

Dunque se $\tilde{\gamma}(q, \dot{q}) = \dot{q} \cdot g(q) \dot{q}$, le geodetiche sono $\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial q} = 0$

Esercizio (geodetiche semiplano PL)

$$Q = \{(x, y) : y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\text{Coord. } (x, y) \quad \frac{1}{y} \cdot \frac{d}{dt}$$

$$G_{(x,y)}(u, v) = \frac{u \cdot v}{y^2} = u \cdot \overbrace{g(x, y)}^1 v$$

$$\tilde{\gamma}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2y^2}$$

dividiamo per 2
per semplificare i conti

La coord. x è iperbolica $\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial x} = 0$ (ha senso, dato che il P.S. di per sé
solo dall' estesa).

terza studiare l'insieme ridotto e poi ricorrere per trovare le geodetiche

Vediamo un altro modo di farlo.

Consideriamo l'azione di \mathbb{R} su Q data da $\varphi_d(x,y) = (e^d x, e^d y)$ "dilatazione" $= e^d \cdot \mathbb{1}$

- $\forall d, \varphi_d : Q \rightarrow Q$ diff
- $\varphi_0(x,y) = (x,y) \quad \forall (x,y)$
- $\varphi_{d+p}(x,y) = \varphi_d \circ \varphi_p(x,y)$

Ci chiediamo se \mathcal{E} sia φ -invariante.

$$\begin{aligned} \varphi_d^{TQ}((x,y), (\dot{x}, \dot{y})) &= (\varphi_d(x,y), \varphi'_d(x,y) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}) \\ &= (e^d x, e^d y, e^d \dot{x}, e^d \dot{y}) \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}(e^d x, e^d y, e^d \dot{x}, e^d \dot{y}) = \dots = \mathcal{E}(x,y, \dot{x}, \dot{y})$$

$\Rightarrow \mathcal{E}$ è invariante sotto l'azione φ_d .

Noether $I(x,y) = \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t(x,y)) \cdot (p_x, p_y)$

$$\bullet \text{ generatore infinitesimo: } \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t(x,y)) = \left. \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}(x,y) \right|_{t=0} = (x,y)$$

$$\bullet \text{ momento: } p_x = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{y^2}, \quad p_y = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{y^2}$$

$$\Rightarrow I(x,y) = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{y^2}$$

Abbiamo inoltre $p_x(x,y) = \frac{\dot{x}}{y^2}$ e l'interprete di Jacobi (la legr. è indipendente dal tempo) $\Xi = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}$

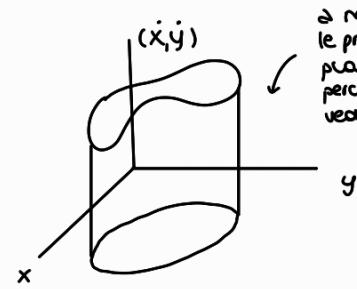
$$\left\{ \begin{array}{l} I = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{y^2} \\ p_x = \frac{\dot{x}}{y^2} \\ \Xi = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2} \end{array} \right.$$

Poss (n.r.indip. (non facciamo ulcato)) e . Loro insiem di livello sono le orbite

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Escludo gli equatori: posso porre $c_1 > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E} = \frac{1}{2} c_1 \\ p_x = c_2 \\ I = c_3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x\dot{x} + y\dot{y} = y^2 c_3 \\ \dot{x} = y^2 c_2 \\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = y^2 c_1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow c_2 x \dot{y} + y \dot{y} = c_3 y^2$$



a noi interessa le proiezioni nel piano (x,y) perché vogliamo vedere le geodetiche

$$\begin{cases} \dot{y} = c_3 y - c_2 x y = (c_3 - c_2 x) y \\ c_2^2 y'^2 + (c_3 - c_2 x)^2 y^2 = c_1 y^2 \\ \dot{x} = c_2 y \end{cases} \quad \begin{cases} c_2^2 y'^2 + (c_3 - c_2 x)^2 = c_1, & (c_1 > 0) \end{cases}$$

↳ a cui come è fatta la traiettoria in xy
(le altre due ep. si dicono la retta e la parabola)

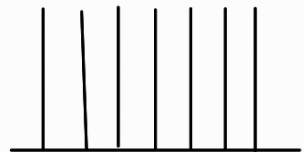
$c_2 \neq 0$ è semicirconferenza di raggio $\frac{\sqrt{c_1}}{c_2}$ e centro $(\frac{c_3}{c_2}, 0)$



$c_1 = 0$ $x = \text{costante}$

$\Rightarrow t \mapsto (x(t), y(t))$ con

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = c_3 y \\ c_3^2 = c_1 \end{cases}$$



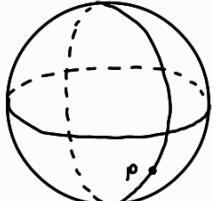
$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 \\ y(t) = e^{tc_3} y(0) \end{cases}$$

Studio del flusso geodetico per superficie di rivolto: $n=2$, c'è invarianto per rotazioni, dunque il piano è riducibile e sempre integrabile.

Geometrie non euclidean

rep $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$

rete := geodetica



non 3 parallele

