Teoremi di punto fisso

def Sia (X,d) SM. Diciamo che una funzione $T: X \to X$ è una **CONTRAZIONE** se $\exists\, \lambda \in [0,1)$ tale che

$$d(Tx,Ty) \leq \lambda\, d(x,y) \quad \forall x,y \in X \quad (*)$$

TEOREMA (Punto fisso di Banach). Sia X uno SM completo e sia $T: X \to X$ una contrazione. Allora esiste unico $x \in X$ tc

$$Tx = x$$

dim Sia $x_0 \in X$ fissato a piacere. Per $n \in \mathbb{N}$ definisco

$$x_n = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n \text{ fattori}}(x_0) = T^n(x_0)$$

Per mostrare che conv. è sufficiente provare che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in (X,d).

Siano $n, p \in \mathbb{N}$ e stimo

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &= d(T^n(x_0), T^{n+p}(x_0)) \\ &\leq \sum_{i=0}^{p-1} d(T^{n+i}(x_0), T^{n+i+1}(x_0)) \\ &\overset{\text{hp di contrazione: uso } n+i \text{ volte } (*)}{\leq} \sum_{i=0}^{p-1} \lambda^{n+i}\, d(x_0, Tx_0) \\ &\leq \underbrace{\lambda^n}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} d(x_0,Tx_0) \underbrace{\sum_{i=0}^{p-1} \lambda^i}_{< \infty \ \forall p \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ tc $\forall n \geq \bar{n}$ e $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\leq \varepsilon.$$

Ora siccome X completo $\exists\, x \in X$ tc $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} x$.

Dimostro che x è un punto fisso.

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} T^{n+1}(x_0) \\ &= \lim_{n\to\infty} T(T^n(x_0)) \overset{T \text{ è cont.}}{=} T\big(\lim_{n\to\infty} \underbrace{T^n(x_0)}_{x_n}\big) = T(x) \end{aligned}$$

Provo che il punto fisso è unico.

Sia $\bar{x} \in X$ un altro p. fisso.

$$d(x,\bar{x}) = d(Tx, T\bar{x}) \leq \lambda\, d(x,\bar{x}) \qquad \lambda \in [0,1)$$

$$\Rightarrow d(x,\bar{x}) = 0$$

$$\Rightarrow x = \bar{x}.$$

$\square$

corollario X SM completo, $T: X \to X$. Supponiamo che $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tc $T^n : X \to X$ sia una contrazione. Allora T ha un unico punto fisso.

dim Per Banach: $\exists\ x \in X$ tc

$$T^n x = x$$

Ora:

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &= d(T^n x, T T^n x) \\ &= d(T^n x, T^n T x) \\ &\leq \alpha\, d(x, Tx) \qquad \alpha \in [0,1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad d(x, Tx) = 0 \quad \Rightarrow Tx = x.$

Manca l'unicità (esercizio). $\square$

esercizi 1 Sia $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$, $n \geq 1$ e $x_0 \in B$ con $|x_0| \leq \frac{1}{12}$.

Provare che il sistema di equazioni

$$-\frac{3}{4}x + \frac{1}{9}|x|^2 x + x_0 = 0 \quad , \quad x \in B$$

ha un'unica soluzione $x \in B$.

Riscrivo e definisco $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$T(x) := \frac{1}{4}x + \frac{1}{9}|x|^2 x + x_0 = x \quad , \qquad x \in B$$

Osservo che $B \subset \mathbb{R}^n$ completo e B chiuso: se considero una succ di Cauchy, questa converge perché $\mathbb{R}^n$ completo e converge ad un elemento di B perché B chiuso. Dunque B è SM completo.

Vorrei che:

1) $T : B \longrightarrow B$

per $x \in B$: $$\begin{aligned} |T(x)| &= \left|\frac{1}{4}x + \frac{1}{9}|x|^2 x + x_0\right| \\ &\leq \frac{1}{4}|x| + \frac{1}{9}|x|^3 + |x_0| \\ &\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} < 1 \end{aligned}$$ ✓

2) T è una contrazione

<u>caso facile</u> $n = 1$.

$$Tx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{9}x^3 + x_0$$

Vorrei $|Tx - Ty| \leq \alpha\,|x-y| \quad \exists\, \alpha \in [0,1) \quad \forall\, x,y \in [-1,1]$

Per Lagrange:

$$|T(x)-T(y)| = |T'(\xi)|\,|(x-y)|$$
$$\underset{[x,y]}{\xi}$$

dove $T'(x) = \frac{1}{4}+\frac{1}{3}x^2$

e si ha

$$|T'(x)| = \left|\frac{1}{4}+\frac{1}{3}x^2\right| \leq \frac{1}{4}+\frac{1}{3}x^2 \leq \frac{1}{4}+\frac{1}{3} = \frac{7}{12} < 1$$ ✓

<u>caso n generale</u>

$$|Tx - Ty| = \left|\frac{1}{4}x + \frac{1}{9}|x|^2x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{9}|y|^2 y\right|$$
$$\leq \frac{1}{4}|x-y| + \frac{1}{9}\underbrace{||x|^2x - |y|^2y|}_{\wedge}$$
$$||x|^2x - |x|^2y| + ||x|^2y - |y|^2y|$$
$$=$$
$$\underset{\overset{\wedge}{1}}{|x|^2}|x-y| + \underbrace{||x|^2-|y|^2|}_{||x|-|y||\,||x|+|y||}\underset{\overset{\wedge}{1}}{|y|}$$
$$||x|-|y|| \leq |x-y|, \quad ||x|+|y|| \leq 2$$
$$\leq \frac{1}{4}|x-y| + \frac{1}{9}(|x-y| + 2|x-y|)$$
$$\leq |x-y|\,\frac{7}{12}$$

$\Rightarrow T$ è contrazione

2 Sia $h \in C([0,1])$ fissata. Provare che esiste un'unica $f \in C([0,1])$ tale che $f(x) = h(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\int_0^x f(t)\,dt \quad \forall x \in [0,1]$.

$X = C([0,1])$ con $\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]}|f(x)|$ è uno spazio di Banach.

Sia $T: X \to X$ tc

$$T(f)(x) = h(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\int_0^x f(t)\,dt \qquad x \in [0,1]$$

è ben definita e continua.

Devo controllare che $\exists\ \alpha \in (0,1)$ tale che

$$\|T(f)-T(g)\|_\infty \leq \alpha\|f-g\|_\infty \qquad \forall f,g \in X$$

Fisso $x \in [0,1]$.

$$|Tf(x) - Tg(x)| = \left|\frac{1}{2}\underset{\overset{\vee}{1}}{\sin(x)}\right|\left|\int_0^x (f(t)-g(t))\,dt\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^x \underset{\overset{\wedge}{\|f-g\|_\infty}}{|f(t)-g(t)|}\,dt$$
$$\leq \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty \qquad \forall x \in [0,1]$$

$$\overset{\sup \text{ per } x\in[0,1]}{\Rightarrow} \|Tf - Tg\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty$$

$\Rightarrow T: X \to X$ contrazione

3 [4.5] Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tc $\text{Lip}(f) = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} < 1$.

i) Provare che $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = (x+f(y),\ y+f(x)) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

è suriettiva e iniettiva

ii) Provare che $F^{-1}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è lipschitziana.

i) Dato $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ voglio risolvere

$$\begin{cases} x + f(y) = \xi \\ y + f(x) = \eta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \xi - f(y) \\ y = \eta - f(x) \end{cases}$$

Considero $G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tc $G(x,y) = (\xi - f(y) ; \eta - f(x))$

(continua perché f continua). Se è contrazione, allora

$$(x,y) = G(x,y)$$

ha soluzione unica e finisco.

Mostro che G è contrazione rispetto alla distanza standard.

Siano $(x,y), (\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^2$

$$|G(x,y) - G(\bar{x},\bar{y})| = \sqrt{\underbrace{(f(y)-f(\bar{y}))^2}_{\overset{\wedge}{L^2|y-\bar{y}|^2}} + \underbrace{(f(x)-f(\bar{x}))^2}_{\overset{\wedge}{L^2|x-\bar{x}|^2}}}$$

$$\leq L\sqrt{|x-\bar{x}|^2 + |y-\bar{y}|^2} = \underset{\overset{\wedge}{1}}{L}\, |(x,y) - (\bar{x},\bar{y})|$$

$\Rightarrow$ G è contrazione

$\Rightarrow$ il sistema ammette soluzione (suriettività) ed è unica (iniettività).

ii) <u>idea</u> $\exists\ m > 0$ tc $|F(x,y) - F(\bar{x},\bar{y})| \geq m\,|(x,y) - (\bar{x},\bar{y})|$

<u>prop</u> Sia X uno SM compatto e sia $T: X \to X$ tc

$$d(Tx,Ty) < d(x,y) \qquad \forall\ x,y \in X$$

Provare che $\exists!\ x \in X$ tc $Tx = x$.

TEOREMA (Brouwer). Siano $B \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, una palla chiusa e $T : B \longrightarrow B$ continua. Allora esiste $x \in B$ t.c. $Tx = x$.

TEOREMA (Schauder). Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach, $K \subset X$ un insieme convesso chiuso e $T: K \longrightarrow K$ tale che

i) T è continua

ii) $\overline{T(K)} \subset K$ compatto

Allora esiste $x \in K$ t.c. $Tx = x$.

Equivalenza fra norme in $\mathbb{R}^n$

prop Due norme $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ in $\mathbb{R}^n$ sono fra loro equivalenti. Ovvero $\exists: \; 0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ tali che

regola sp. di dim finita le norme sono fra loro sempre equivalenti

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

dim WLOG $\|x\|_1 = |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Considero $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ compatto.

Sia poi $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|_2$. Mostro che è continua.

$$|f(x+h) - f(x)| = |\underset{\|x\|_2 + \|h\|_2}{\underset{\wedge}{\|x+h\|_2}} - \|x\|_2|$$

$$\leq \|h\|_2 \quad (*)$$

Fisso la b.o.n. standard in $\mathbb{R}^n$. Sia $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$

$$\overset{(*)}{\leq} \sum_{i=1}^n \|h_i e_i\|_2$$

$$\leq \sum_{i=1}^n |h_i| \, \|e_i\|_2 \xrightarrow{|h| \to 0} 0 .$$

Per Weierstrass esistono

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{è un punto sulla sfera}}}{0 <} C_1 = \min_K f \qquad e \qquad C_2 = \max_K f < \infty$$

ovvero

$$C_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \qquad \forall \; x \in K$$

Ma allora $\frac{x}{|x|} \in K$

$$C_1 \leq \left\| \frac{x}{|x|} \right\|_2 \leq C_2$$

$$\Rightarrow \qquad C_1 |x| \leq \|x\|_2 \leq C_2 |x| \qquad \square$$

CAPITOLO 4

Teoremi di punto fisso, Ascoli-Arzelà e Stone-Weierstrass

1. Teoremi di punto fisso

Sia X un insieme e sia $T : X \to X$ una funzione da X in se stesso. Siamo interessati all'esistenza di soluzioni $x \in X$ dell'equazione $T(x) = x$. Un simile elemento $x \in X$ si dice *punto fisso* di T.

1.1. Teorema delle contrazioni.

Definizione 4.1.1 (Contrazione). Sia (X, d) uno spazio metrico. Un'applicazione $T : X \to X$ è una *contrazione* se esiste un numero $0 < \lambda < 1$ tale che $d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$.

Le contrazioni sono Lipschitziane e dunque uniformemente continue.

Teorema 4.1.2 (Banach). Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $T : X \to X$ una contrazione. Allora esiste un unico punto $x \in X$ tale che $x = T(x)$.

Dim. Sia $x_0 \in X$ un qualsiasi punto e si definisca la successione $x_n = T^n(x_0) = T \circ \ldots \circ T(x_0)$, n-volte. Proviamo che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Infatti, per la disuguaglianza triangolare si ha per ogni $n, k \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
d(x_{n+k}, x_n) &\leq \sum_{h=1}^{k} d(x_{n+h}, x_{n+h-1}) = \sum_{h=1}^{k} d(T^{n+h}(x_0), T^{n+h-1}(x_0)) \\
&\leq d(T(x_0), x_0) \sum_{h=1}^{k} \lambda^{n+h-1} \leq \lambda^n d(T(x_0), x_0) \sum_{h=1}^{\infty} \lambda^{h-1}.
\end{aligned}
$$

La serie converge e $\lambda^n \to 0$ per $n \to \infty$, dal momento che $\lambda < 1$. Poichè X è completo, esiste un punto $x \in X$ tale che $x = \lim_{n\to\infty} T^n(x_0)$.

Proviamo che $x = T(x)$. La funzione $T : X \to X$ è continua e quindi abbiamo

$$x = \lim_{n\to\infty} T^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} T(T^{n-1}(x_0)) = T(\lim_{n\to\infty} T^{n-1}(x_0)) = T(x).$$

Proviamo infine che il punto fisso è unico. Sia $\bar{x} \in X$ tale che $\bar{x} = T(\bar{x})$. Allora abbiamo

$$d(x, \bar{x}) = d(T(x), T(\bar{x})) \leq \lambda d(x, \bar{x}) \quad \Rightarrow \quad d(x, \bar{x}) = 0,$$

perchè $\lambda < 1$, e quindi $x = \bar{x}$. $\square$

La dimostrazione del Teorema di Banach è costruttiva e può essere implementata in un calcolatore.

Teorema 4.1.3. Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $T : X \to X$ un'applicazione tale che per qualche $n \in \mathbb{N}$ l'iterazione T^n è una contrazione. Allora esiste un unico $x \in X$ tale che $x = T(x)$.

Dim. Per il Teorema di Banach esiste un unico $x \in X$ tale che $T^n(x) = x$. Allora, per qualche $0 \leq \lambda < 1$, si ha

$$d(x, T(x)) = d(T^n(x), T(T^n(x))) = d(T^n(x), T^n(T(x))) \leq \lambda d(x, T(x)),$$

e quindi $d(x, T(x)) = 0$, che è equivalente a $T(x) = x$.

Supponiamo che esista un secondo punto fisso $y \in X$, con $y = T(y)$. Allora si ha anche $y = T^n(y)$ e pertanto $x = y$, dall'unicità del punto fisso di T^n. □

1.2. Teoremi di Brouwer e di Schauder.

Teorema 4.1.4 (Brouwer). Sia $K \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, una palla chiusa e sia $T : K \to K$ continua. Allora esiste $x \in K$ tale che $T(x) = x$.

In questi casi, il punto fisso tipicamente non è unico. Per $n = 1$ il teorema precedente ha una dimostrazione elementare. Per $n = 2$, la dimostrazione migliore è si basa sulla nozione di omotopia. Per $n \geq 3$, esistono dimostrazioni basate sull'omologia. Per una dimostrazione analitica, si veda Evans, *Partial Differential Equations*, p.441. Il Teorema di Brouwer si estende alla dimensione infinita.

Teorema 4.1.5 (Schauder). Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach e sia $K \subset X$ un insieme non-vuoto, chiuso e convesso. Sia $T : K \to K$ un'applicazione tale che:

i) T è continua;
ii) $\overline{T(K)} \subset K$ è compatto.

Allora esiste $x \in K$ tale che $T(x) = x$.

Per una dimostrazione, si veda Evans, *Partial Differential Equations*, p.502.

2. Teorema di Ascoli-Arzelà

Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e sia $C(X)$ lo spazio delle funzioni continue a valori reali con la norma

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \max_{x \in X} |f(x)|. \tag{4.2.5}$$

Sappiamo che $C(X)$ è uno spazio di Banach. In questa sezione caratterizziamo gli insiemi compatti di $C(X)$.

Definizione 4.2.1. Un insieme $K \subset C(X)$ si dice *equilimitato* se esiste una costante $M \geq 0$ tale che

$$\sup_{f \in K} \|f\| \leq M.$$

L'insieme K si dice *equicontinuo* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$d(x, y) \leq \delta \quad \Rightarrow \sup_{f \in K} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Teorema 4.2.2 (Ascoli-Arzelà). Siano (X, d) uno spazio metrico compatto e $K \subset C(X)$. Sono equivalenti:

A) K è compatto;
B) K è chiuso, equicontinuo ed equilimitato.

PROPOSIZIONE 3.2.2. Due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ su $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti. Ovvero, esistono due costanti $0 < C_1 \le C_2 < \infty$ tali che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$C_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C_2\|x\|_1. \tag{3.2.2}$$

DIM. Senza perdere di generalità, possiamo supporre che

$$\|x\|_1 = |x| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Affermiamo che la funzione $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, $f(x) = \|x\|_2$, è continua rispetto alla distanza standard di $\mathbb{R}^n$. Infatti, dalla subadditività della norma segue segue

$$|f(x+h) - f(x)| = \big|\|x+h\|_2 - \|x\|_2\big| \le \|h\|_2, \quad x, h \in \mathbb{R}^n.$$

D'altra parte, indicando con $\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$, si ha

$$\|h\|_2 = \Big\|\sum_{i=1}^n h_i \mathrm{e}_i\Big\|_2 \le \sum_{i=1}^n |h_i|\|\mathrm{e}_i\|_2 \le M\sum_{i=1}^n |h_i|,$$

con $M = \max\{\|\mathrm{e}_1\|_2, \dots, \|\mathrm{e}_n\|_2\}$. Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|h| < \delta$ implica $\|h\|_2 < \varepsilon$, e quindi anche $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$. In effetti abbiamo provato che f è uniformemente continua.

La sfera unitaria $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ è un insieme compatto, e quindi per il Teorema di Weierstrass la funzione $f : K \to [0,\infty)$ ammette massimo e minimo: esistono $y, z \in K$ tali che

$$0 < C_1 = \|y\|_2 \le \|x\|_2 \le \|z\|_2 = C_2 < \infty, \quad x \in K.$$

La disuguaglianza generale (3.2.2) segue per omogeneità. □

Dal fatto che $\mathbb{R}^n$ è completo per la distanza standard segue che tutti gli spazi normati finito-dimensionali sono completi.

2.1. Funzioni continue su un compatto. Siano X un insieme ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione. La "sup-norma" verifica le seguenti proprietà elementari:

1) Si ha $\|f\|_\infty < \infty$ se e solo se f è limitata su X.
2) Vale la subadditività:

$$\begin{aligned}\|f+g\|_\infty &= \sup_{x\in X}|f(x)+g(x)| \le \sup_{x\in X}|f(x)|+|g(x)| \\ &\le \sup_{x\in X}|f(x)| + \sup_{x\in X}|g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.\end{aligned}$$

3) Sia K uno spazio metrico compatto e sia $f \in C(K)$ una funzione continua. Per il Teorema di Weierstrass, la funzione $x \mapsto |f(x)|$ assume massimo su K. Dunque, nella definizione di sup-norma il sup può essere sostituito con un max:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in K}|f(x)| = \max_{x\in K}|f(x)|.$$

È immediato controllare che lo spazio vettoriale $C(K)$ è normato da $\|\cdot\|_\infty$.

Teorema di Ascoli-Arzelà

Sia (X,d) uno SM compatto. Sia poi $C(X) = \{f: X \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$ completo rispetto a $\|f\| = \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Voglio capire come sono fatti i compatti di $C(X)$.

def • Diciamo che $K \subset C(X)$ è **EQUILIMITATO** se

$$\sup_{f\in K} \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty$$

ovvero $\|f\|_\infty \leq C < \infty \quad \forall f \in K$

• Diciamo che $K \subset C(X)$ è **EQUICONTINUO** se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall f \in K.$$

↳ δ non dipende da f !

esempio $X = [0,1]$. $K = \{\sin(nx) : n \in \mathbb{N}\}$. Non è equicontinuo

TEOREMA DI ASCOLI-ARZELÀ

X SM compatto e sia $K \subset C(X)$. Sono equivalenti:

A) K è compatto

B) K è chiuso, equilimitato e equicontinuo

dim **A) ⇒ B)**. Provo che K è equicontinuo.

K compatto $\Rightarrow$ K è tot. limitato ovvero

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists f_1, \dots, f_N \in K$, tale che $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(f_i, \varepsilon)$

$f_i : X \to \mathbb{R}$ è continua su un compatto $\forall i$ $\Rightarrow$ f_i è unif. cont. su X ovvero

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_i > 0$ tc $d(x,y) < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$.

Sia $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_N\} > 0$.

Sia ora $f \in K \Rightarrow \exists i = 1, \dots, N$ tc $\|f - f_i\| < \varepsilon$.

Ora per $d(x,y) < \delta$ $\|f - f_i\| < \varepsilon$

$$|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f_i(x)|}_{<\varepsilon \text{ tot. limitatezza}} + \underbrace{|f_i(x) - f_i(y)|}_{<\varepsilon \text{ unif. continuità}} + \underbrace{|f_i(y) - f(y)|}_{<\varepsilon \text{ tot. limitatezza}} < 3\varepsilon$$

B) ⇒ A). Provo che K è seq. compatto.

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in K.

X compatto $\Rightarrow \exists X_0 \subset X$ numerabile e denso : $\overline{X_0} = X$

Sia $X_0 = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Osservo che $f_n(x_1) \in \mathbb{R}$ è limitata

$\overset{BW}{\Longrightarrow} \exists$ ss. $(f_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ tc $f_n^1(x_1) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} \alpha_1 \in \mathbb{R}$

Osservo $f_n^1(x_2) \in \mathbb{R}$ è limitata

$\overset{BW}{\Longrightarrow} \exists$ ss. $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ tc $f_n^2(x_2) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Per induzione

$\forall k \in \mathbb{N} \ \exists \ f_n^k$ ss di f_n^{k-1} tale che

$$f_n^k(x_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha_k \in \mathbb{R} \qquad \exists\, \alpha_k$$

e, di più:

$$f_n^k(x_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha_i \quad \forall i = 1,\dots,k \qquad \exists\, \alpha_i$$

$$\begin{array}{ccccc}
f_1^1 & f_1^2 & \cdots & f_1^k & \cdots \\
f_2^1 & f_2^2 & \cdots & f_2^k & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
f_n^1 & f_n^2 & \cdots & f_n^k & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Per selezione diagonale di Cantor definisco la sottosuccessione di $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\bar{f}_n = f_n^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Ora $\bar{f}_n(x_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Ricordo che $C(X)$ con $\|\cdot\|_\infty$ è uno SB.

Affermo che $(\bar{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\|\cdot\|_\infty$.

Fisso $\varepsilon > 0$ e provo che $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n,m \geq \bar{n}$ si ha $\|\bar{f}_n - \bar{f}_m\|_\infty \leq \varepsilon$.

Per la equicontinuità

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 \ : \ d(x,y) < \delta \Rightarrow |\bar{f}_n(x) - \bar{f}_n(y)| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Per densità $\bar{X}_0 = X$ avremo che

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k, \delta)$$

$\overset{X \text{ compatto}}{\Longrightarrow} \exists\, N$ tc

$$X = \bigcup_{k=1}^{N} B(x_k, \delta).$$

Prendo $x \in X$ ed $\exists\, k \in \{1,\dots,N\}$ tc $x \in B(x_k, \delta)$ (ovvero $d(x,x_k) < \delta$).

Considero

è di Cauchy perché converge a x_k

$$|\bar f_n(x) - \bar f_m(x)| \le \underbrace{|\bar f_n(x) - \bar f_n(x_k)|}_{\hat\varepsilon\ \forall n} + \underbrace{|\boxed{\bar f_n(x_k)} - \bar f_m(x_k)|}_{\hat\varepsilon\ \forall n,m>\bar n} + \underbrace{|\bar f_m(x_k) - \bar f_m(x)|}_{\hat\varepsilon\ \forall m}$$

$\exists \bar n$ indipendente da k (perché $k \in \{1, \dots, N\}$ insieme finito).

$$\le 3\varepsilon \quad \forall n,m \geq \bar n$$

$$\forall \varepsilon \quad \exists \bar n$$

Col sup su x trovo:

$$\|\bar f_n - \bar f_m\|_\infty \le 3\varepsilon \quad \forall n,m \geq \bar n.$$

<u>corollario</u> Ipotesi precedenti. Sia $f_n \in C(X)$, $n \in \mathbb{N}$, equilim. ed equicont. Allora $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una s.s. che conv. unif. ad una $f \in C(X)$.

<u>esercizio</u> 1 [5.4] Sia l'insieme di tutte le $f \in C([0,2\pi])$ della forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \quad \text{con} \quad |a_n| \le \frac{1}{n^3} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Provare che $V \subset C([0,2\pi])$ con $\|\cdot\|_\infty$ è compatto.

Per il criterio di Weierstrass:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \sin nx| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$$

dunque $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ conv. unif. su $[0,2\pi]$ e f continua.

Devo verificare che:

i) V chiuso (per casa)

ii) V equilimitato

$$|f(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty \quad \forall x \text{ e } \forall f \in V \quad ✓$$

iii) V equicontinuo

calcolo la derivata: se esiste, deve avere questa forma

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \sum a_n \sin(nx) = \sum a_n n \cos(nx)$$

Nuovamente, per il C(W):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n |\cos(nx)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

la serie conv. unif. dunque la derivata esiste ed è continua.

$$\Rightarrow \quad f \in C^1([0,2\pi]) \quad \Leftrightarrow$$

$$|f'(x)| \leq L := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \qquad \forall x \in [0,2\pi] \quad \forall f \in U$$

Per Lagrange

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)|\,|x-y| \leq L\,|x-y| \qquad \xi \in (x,y)$$

f è lipschitziana di costante L $\Rightarrow$ U è equi-lipschitziano

$\Rightarrow$ U è equicontinuo.

2 [5.6] $X = C([0,1])$

$K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

Def. $T : X \longrightarrow X$ tc $(Tf)(s) := \int_0^1 K(s,t) f(t)\, dt$, $s \in [0,1]$

1) Provare che $s \mapsto (Tf)(s)$ è continua

2) Provare che $T \in \mathcal{L}(X,X)$ lineare e limitata

3) Dare condizioni su K affinché T sia una contrazione.

4) Sia $K \subset X$ limitato. Considerare

$$\overline{T(K)} \subset X$$

È vero che è compatto?

5) Studiare l'equazione

$$T(f) = f$$

1) $|(Tf)(s) - (Tf)(\sigma)| = \left| \int_0^1 (K(s,t) - K(\sigma,t)) f(t)\, dt \right|$

Fisso $\varepsilon > 0$. K è unif. cont. nel quadrato:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad$ tc $\quad |(s,t) - (\sigma,\tilde{t})| < \delta \Rightarrow |K(s,t) - K(\sigma,\tilde{t})| < \varepsilon$

$$\leq \int_0^1 \underbrace{|K(s,t) - K(\sigma,t)|}_{\leq\, \varepsilon}\, \underbrace{|f(t)|}_{\leq\, \|f\|_\infty}\, dt$$

$$\leq \varepsilon \|f\|_\infty$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tc per $|s - \sigma| < \delta \Rightarrow |(Tf)(s) - (Tf)(\sigma)| < \varepsilon \|f\|_\infty$

2) È lineare per linearità dell'integrale.

$$|(Tf)(s)| \leq \int_0^1 \underbrace{|K(s,t)|}_{\leq\, \|K\|_\infty}\, \underbrace{|f(t)|}_{\leq\, \|f\|_\infty}\, dt \leq \|K\|_\infty \|f\|_\infty$$

il max nel quadrato

Facendo il sup su S: $\|Tf\|_\infty \leq \|k\|_\infty \|f\|_\infty \quad \forall f \quad (*)$

$$\|T\| := \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|Tf\|_\infty \leq \|k\|_\infty$$

3) se $\|k\|_\infty < 1 \Rightarrow T$ è contrazione

(dovrei fare tutti i conti con Tf e Tg, ma T è lineare, dunque mi basta la stima $(*)$).

4) $T(K) \subset X$. Voglio usare AA.

$|(Tf)(s)| \leq \int_0^1 |k(s,t)||f(t)|dt \leq \|k\|_\infty \|f\|_\infty \overset{f \in K \text{ limitato}}{\leq} c < \infty \quad \forall f \in K \quad \forall s.$

$\Rightarrow T(K)$ è equilimitato.

Per l'equicontinuità vedere il punto 1):

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. per $|s-\sigma| < \delta \Rightarrow |(Tf)(s) - (Tf)(\sigma)| < \varepsilon \|f\|_\infty \leq \varepsilon c < \infty$

5) voglio risolvere $T(f) = f$.

X è completo

se $\|k\|_\infty < 1 \Rightarrow T$ contrazione $\overset{B}{\Longrightarrow} \exists! f \in X$ t.c. $Tf = f$

e si ha che tale $f = 0$ (T lineare).

se $\|k\|_\infty \leq 1 \overset{SCH}{\Longrightarrow} \exists$ p.to fisso, ma è sempre 0

Dim. Per il Teorema di Banach esiste un unico $x \in X$ tale che $T^n(x) = x$. Allora, per qualche $0 \le \lambda < 1$, si ha

$$d(x, T(x)) = d(T^n(x), T(T^n(x))) = d(T^n(x), T^n(T(x))) \le \lambda d(x, T(x)),$$

e quindi $d(x, T(x)) = 0$, che è equivalente a $T(x) = x$.

Supponiamo che esista un secondo punto fisso $y \in X$, con $y = T(y)$. Allora si ha anche $y = T^n(y)$ e pertanto $x = y$, dall'unicità del punto fisso di T^n. □

1.2. Teoremi di Brouwer e di Schauder.

Teorema 4.1.4 (Brouwer). Sia $K \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, una palla chiusa e sia $T : K \to K$ continua. Allora esiste $x \in K$ tale che $T(x) = x$.

In questi casi, il punto fisso tipicamente non è unico. Per $n = 1$ il teorema precedente ha una dimostrazione elementare. Per $n = 2$, la dimostrazione migliore è si basa sulla nozione di omotopia. Per $n \ge 3$, esistono dimostrazioni basate sull'omologia. Per una dimostrazione analitica, si veda Evans, *Partial Differential Equations*, p.441. Il Teorema di Brouwer si estende alla dimensione infinita.

Teorema 4.1.5 (Schauder). Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach e sia $K \subset X$ un insieme non-vuoto, chiuso e convesso. Sia $T : K \to K$ un'applicazione tale che:

i) T è continua;
ii) $\overline{T(K)} \subset K$ è compatto.

Allora esiste $x \in K$ tale che $T(x) = x$.

Per una dimostrazione, si veda Evans, *Partial Differential Equations*, p.502.

2. Teorema di Ascoli-Arzelà

Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e sia $C(X)$ lo spazio delle funzioni continue a valori reali con la norma

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \max_{x \in X} |f(x)|. \tag{4.2.5}$$

Sappiamo che $C(X)$ è uno spazio di Banach. In questa sezione caratterizziamo gli insiemi compatti di $C(X)$.

Definizione 4.2.1. Un insieme $K \subset C(X)$ si dice *equilimitato* se esiste una costante $M \ge 0$ tale che

$$\sup_{f \in K} \|f\| \le M.$$

L'insieme K si dice *equicontinuo* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$d(x, y) \le \delta \quad \Rightarrow \sup_{f \in K} |f(x) - f(y)| \le \varepsilon.$$

Teorema 4.2.2 (Ascoli-Arzelà). Siano (X, d) uno spazio metrico compatto e $K \subset C(X)$. Sono equivalenti:

A) K è compatto;
B) K è chiuso, equicontinuo ed equilimitato.

Dim. A)⇒B) Se K è compatto allora è sicuramente chiuso. Inoltre per la caratterizzazione degli spazi metrici compatti, K è totalmente limitato, e dunque è a maggior ragione equilimitato. Rimane da provare che K è equicontinuo.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Dalla totale limitatezza di K segue che esistono $f_1, \dots, f_n \in K$ tali che $K \subset \bigcup_{i=1}^n B(f_i, \varepsilon)$, con palle nella distanza di $C(X)$. Poichè ogni f_i è continua su X che è compatto, allora è anche uniformemente continua. È dunque possibile trovare $\delta > 0$ tale che per ogni $i = 1, \dots, n$ si abbia

$$d(x, y) \le \delta \ \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| \le \varepsilon.$$

Data $f \in K$ risulterà $f \in B(f_i, \varepsilon)$ per un qualche $i \in \{1, \dots, n\}$. Dunque, se $d(x, y) \le \delta$

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| \le 3\varepsilon.$$

Questo prova la equicontinuità di K.

B)⇒A) Data una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K, vogliamo estrarre una sottosuccessione convergente in K.

Poichè X è compatto, allora è separabile (Esercizio 4.4.26), e dunque esiste $X_0 = \{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$ tale che $\overline{X}_0 = X$. Poichè $\sup_{f\in K} |f(x_1)| \le M$ si possono trovare $\alpha_1 \in \mathbb{N}$ ed una sottosuccessione $(f_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ tali che $f_n^1(x_1) \to \alpha_1 \in \mathbb{R}$. Analogamente $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n^1(x_2)| \le M$ e dunque si può estrarre da f_n^1 una sottosuccessione f_n^2 tale che $f_n^2(x_2) \to \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Per induzione su k, si può estrerre da $(f_n^{k-1})_{n\in\mathbb{N}}$ una sottosuccessione $(f_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $f_n^k(x_k) \to \alpha_k \in \mathbb{R}$. In effetti, per ogni $i = 1, \dots, k$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n^k(x_i) = \alpha_i.$$

Con il procedimento di selezione diagonale si definisce la successione $\bar{f}_n = f_n^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dunque, $\bar{f}_n$ è definitivamente una sottosuccessione di ogni f_n^k, e pertanto per ogni $i \in \mathbb{N}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \bar{f}_n(x_i) = \alpha_i.$$

Estendiamo la convergenza da X_0 su tutto X utilizzando la continuità uniforme. Mostreremo che la successione $(\bar{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $C(X)$ e dunque converge uniformemente ad una funzione (continua) $f \in K$ (infatti K è chiuso).

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per la equicontinuità esiste $\delta > 0$ tale che $|\bar{f}_n(x) - \bar{f}_n(y)| \le \varepsilon$ per $d(x, y) \le \delta$ uniformemente in $n \in \mathbb{N}$. Dal momento che $X = \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, \delta)$, per compattezza è possibile trovare un numero finito di centri $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^k B(\bar{x}_i, \delta).$$

Per $\bar{x}_i$ fissato, le successioni numeriche $\bar{f}_n(\bar{x}_i)$ convergono, e dunque sono di Cauchy. Poichè ve ne sono un numero finito è possibile trovare $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|\bar{f}_n(\bar{x}_i) - \bar{f}_m(\bar{x}_i)| \le \varepsilon \quad \text{per ogni } n, m \ge \bar{n} \text{ e per ogni } i = 1, \dots, k.$$

Sia ora $x \in X$ arbitrario. Esiste $\bar{x}_i$ tale che $x \in B(\bar{x}_i, \delta)$, e dunque

$$|\bar{f}_n(x) - \bar{f}_m(x)| \le |\bar{f}_n(x) - \bar{f}_n(\bar{x}_i)| + |\bar{f}_n(\bar{x}_i) - \bar{f}_m(\bar{x}_i)| + |\bar{f}_m(\bar{x}_i) - \bar{f}_m(x)| \le 3\varepsilon,$$

pur di prendere $m, n \geq \bar{n}$. Poichè la scelta di $\bar{n}$ non dipende da x questo prova che

$$\|\bar{f}_n - \bar{f}_m\| \leq 3\varepsilon \quad \text{per ogni } n, m \geq \bar{n}.$$

Con questo la dimostrazione del Teorema di Ascoli-Arzelà è terminata. □

Corollario 4.2.3. Siano (X, d) uno spazio metrico compatto ed $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni in $C(X)$ equicontinue ed equilimitate. Allora esistono $f \in C(X)$ ed una sottosuccessione $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tale che $f_{k_j} \to f$ uniformemente in X.

Dim. E' facile verificare che, se $A \subset C(X)$ è una famiglia di funzioni equicontinue ed equilimitate, allora la sua chiusura (nello spazio $C(X)$) $\overline{A}$ è ancora equicontinua ed equilimitata. E' allora sufficiente applicare il teorema di Ascoli-Arzelà (unitamente alla caratterizzazione degli spazi metrici compatti) alla chiusura di $A := \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$. □

3. Teoremi di approssimazione di Stone-Weierstrass

In questa sezione studiamo il problema di approssimare le funzioni continue su un compatto con funzioni speciali. Nel caso di un intervallo vorremmo approssimare una funzione continua con polinomi oppure con funzioni trigonometriche.

Il prossimo teorema, che riportiamo per il suo interesse storico, è un caso speciale del Teorema di Stone-Weierstrass.

Teorema 4.3.1 (Weierstrass I). L'insieme delle funzioni polinomiali sull'intervallo $[0, 1]$ è denso rispetto alla convergenza uniforme nello spazio $C([0, 1])$ delle funzioni continue.

Dim. Sia $f \in C([0, 1])$. È sufficiente provare che esiste una successione di polinomi che converge uniformemente ad f su $[\eta, 1-\eta]$ per $\eta \in (0, 1/2)$. Per riscalamento e traslazione, infatti, ci si riconduce a questo caso.

Per $n \in \mathbb{N}$ sia $\varphi_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $\varphi_n(x) = \alpha(n)(1 - x^2)^n$, dove la costante $\alpha(n)$ è fissata dalla condizione

$$\alpha(n) \int_0^1 (1 - x^2)^n \, dx = 1.$$

Per il punto (iii) dell'Esercizio 4.4.40 risulta

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} \vartheta \, d\vartheta \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}}. \tag{4.3.6}$$

Per $x \in [0, 1]$ definiamo

$$f_n(x) = \int_0^1 f(\xi)\varphi_n(x - \xi) \, d\xi.$$

La funzione $f_n(x)$ è un polinomio di grado $2n$ nella variabile x.

Fissato $\varepsilon > 0$, mostriamo che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$\sup_{x\in[\eta,1-\eta]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \tag{4.3.7}$$