EQUAZIONI DI LAGRANGE

In questo capitolo vogliamo scrivere la restrizione a TQ delle equazioni di Lagrange di I specie usando coordinate locali, ottenendo le "equazioni di Lagrange" propriamente dette. Il vantaggio sarà che in esse le reazioni vincolari non appariranno proprio, in accordo con il fatto che, essendo ortogonali a Q, non influenzano i moti su Q.

Parametrizzazione degli atti di moto: coordinate sul fibrato tangente

chiamate anche coordinate liftate / sollevate / fibrate in TQ

ripasso: vincolo — olonomo — ideale $\Phi(x,v) \perp T_xQ$

$\Rightarrow$ TQ è q-invariante per $M\ddot{x} = F(x,v) + \Phi_{id}(x,v)$

con $\Phi_{id} = -(\psi' M^{-1} \psi'^{t})^{-1}(Bv + \psi' M^{-1} F)$

con $B(x,v) = \frac{\partial}{\partial x}(\psi'(x)v)$ lineare in v $\Rightarrow$ termini quadratici in v

$TQ \subseteq \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$ q-inv. Vogliamo scrivere la restrizione di $M\ddot{x} = F(x,v) + \Phi_{id}(x,v)$ a TQ, ovvero trovare coord. locali su TQ.

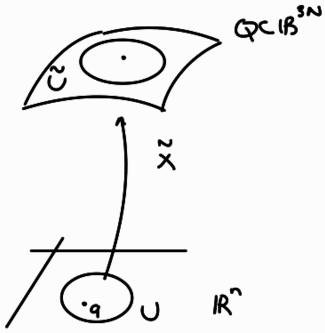
oss: se $Q = \mathbb{R}^{3N}$, $\psi: \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow \mathbb{R}^0 = \{0\}$ è banalmente sommersione e $\psi' = 0 \Rightarrow \Phi_{id} = 0$

$\Rightarrow M\ddot{x} = F(x,v)$ eq. di Newton di sistema libero

Dunque tratteremo, allo stesso tempo, i sistemi vincolati e quelli liberi.

Param. locale di Q: $\tilde{x}: U \longrightarrow \tilde{U} \subseteq Q \subseteq \mathbb{R}^{3N}$

$q \longmapsto (\tilde{x}_1(q), \dots, \tilde{x}_{3N}(q))$



Sollevamento tangente: $T\tilde{x}: TU = U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow T\tilde{U} \subseteq TQ \subseteq \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$

$(q,v) \longmapsto (\tilde{x}(q), \tilde{x}'(q)v)$

Ci chiediamo se $T\tilde{x}$ è parametrizzazione per $T\tilde{U} = \{(x,v) : x \in \tilde{U}, v \in T_xQ\}$

$\Rightarrow$ param.:

- è immersione: $(T\tilde{x})' = \begin{pmatrix} \tilde{x}' & 0 \\ * & \tilde{x}' \end{pmatrix}$ ha rango $2n = \dim TQ$
- è iniettiva: $q \longmapsto \tilde{x}(q)$ iniettiva perché $\tilde{x}$ param.

  $\forall q$, $v \longmapsto \tilde{x}'(q)v$ è iniettiva perché $\tilde{x}'(q)$ è iniettiva

• è suriettiva in $T\tilde U$: sia $(X,V)\in T\tilde U$. $X\in\tilde U \Rightarrow \exists\, q\in U$ t.c. $X=\tilde X(q)$

dato $q\in U$ $\exists\, v\in\mathbb R^n : V=\tilde X'(q)\,v$?

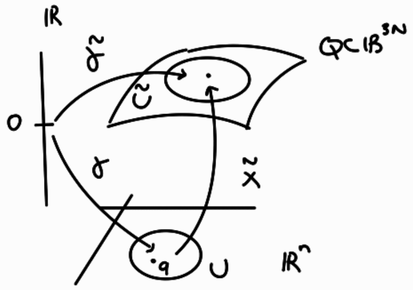
$V=\tilde\gamma'(0)$ con $\tilde\gamma:\mathbb R\longrightarrow Q$ t.c. $\tilde\gamma(0)=\tilde X(q)$

perché $\tilde X$ biunivoca

$\Rightarrow \exists\, \gamma:\mathbb R\longrightarrow U$ t.c. $\tilde\gamma=\tilde X\circ\gamma$, $\gamma(0)=q$

$\Rightarrow \tilde\gamma'(0)=\tilde X'(q)\,\gamma'(0)$, $\gamma'(0)\in\mathbb R^n$

$\shortparallel$
v



Vogliamo capire come è fatta la parametrizzazione:

$$\underset{Q\times\mathbb R^n}{(q,v)} \longmapsto (\tilde X(q),\ \tilde X'(q)\,v)\in T\tilde U$$

$$\tilde X'(q)=\Big[\underbrace{\frac{\partial\tilde X}{\partial q_1}(q),\dots,\frac{\partial\tilde X}{\partial q_n}(q)}_{n \text{ colonne}}\Big]\ \Big\}\ 3N \text{ righe}$$

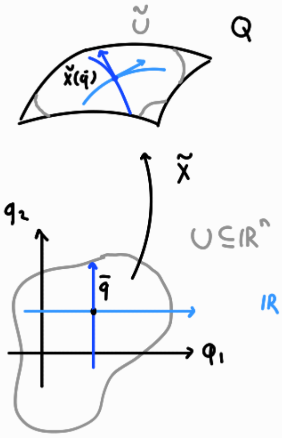
$$\tilde X'(q)\,v=\sum_{j=1}^n \frac{\partial\tilde X}{\partial q_j}(q)\,v_j$$

perché $\operatorname{rk}\tilde X'(q)=n$

$\underset{\tilde X'(q)e_1}{\frac{\partial\tilde X}{\partial q_1}(q)},\dots,\underset{\tilde X'(q)e_n}{\frac{\partial\tilde X}{\partial q_n}(q)}$ sono vettori tangenti a Q in $\tilde X(q)$ linearmente indip.

$\Rightarrow$ è base per $T_{\tilde X(q)}Q$, detta **BASE NATURALE** indotta da $\tilde X$

$\Rightarrow$ $\forall$ punto di Q ci stiamo scegliendo una base per lo spazio tangente:



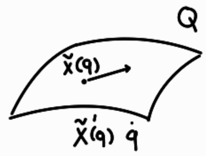
$\lambda\longmapsto\tilde X(\bar q+\lambda e_1)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{d}{d\lambda}\tilde X(\bar q+\lambda e_1)\Big|_{\lambda=0}\in T_{\tilde X(\bar q)}Q$

$(\bar q_1+\lambda,\bar q_2,\dots,\bar q_n)$

$\mathbb R\ni\lambda\longmapsto\bar q+\lambda e_1$

Le immagini delle curve parallele agli assi coordinati si chiamano **CURVE COORDINATE**.

L'inversa di $T\tilde X: TU\longrightarrow T\tilde U$ dà delle coordinate locali su $T\tilde U\subseteq TQ$, dette "**coordinate (locali) Lagrangiane**" su TQ, indicate con $(q,\dot q)=(q_1,\dots,q_n,\dot q_1,\dots,\dot q_n)$



L'atto di moto di coordinate Lagrangiane $(q,\dot q)\in\mathbb R^n\times\mathbb R^n$ è $(\overset{Q}{\tilde X(q)},\ \overset{T_{\tilde X(q)}Q}{\underbrace{\tilde X'(q)\dot q}_{\tilde w(q,\dot q)}})$

$$\tilde w(q,\dot q)=\tilde X'(q)\dot q=\sum_{j=1}^n\dot q_j\frac{\partial\tilde X}{\partial q_j}(q)\ \text{“=”}\ \underbrace{\frac{d}{dt}}_{\text{derivata lungo le curve}}\tilde X(q)$$

$\shortparallel$

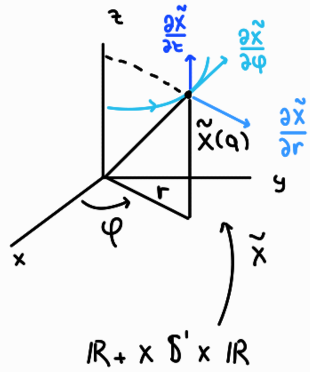
$(\tilde w_1(q,\dot q),\dots,\tilde w_N(q,\dot q))$ con $\tilde w_\alpha(q,\dot q)$ è la velocità di P_α nell'atto di moto di coord. $(q,\dot q)$

$$\vec w_\alpha(q,\dot q)=\tilde X'_\alpha(q)\,\dot q$$

esempio $N=1$, libero

$\mathbb{R}^3$ coord. cilindriche

$\tilde{X}(r,\varphi,z) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)$

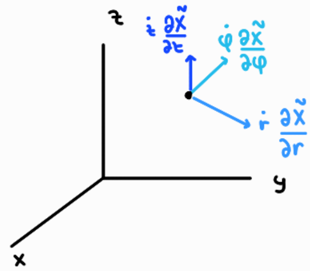


base naturale / curve coord:

$$\frac{\partial\tilde{X}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\tilde{X}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Atto di moto di coord $(r,\varphi,z,\dot r,\dot\varphi,\dot z)$ è

$$\left(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z,\ \underbrace{\dot r\frac{\partial\tilde{X}}{\partial r}(r,\varphi,z)+\dot\varphi\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\varphi}(r,\varphi,z)+\dot z\frac{\partial\tilde{X}}{\partial z}(r,\varphi,z)}_{\begin{pmatrix} \dot r\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\varphi \\ \dot r\sin\varphi + r\dot\varphi\cos\varphi \\ \dot z \end{pmatrix}}\right)$$

modo più facile (derivando lungo le curve)
$$\frac{d}{dt}X(r,\varphi,z) = \frac{d}{dt}(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z) = \begin{pmatrix} \dot r\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\varphi \\ \dot r\sin\varphi + r\dot\varphi\cos\varphi \\ \dot z \end{pmatrix}$$

esercizio Fare lo stesso per le coord. sferiche

$\tilde{X}(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta)$

$$\frac{\partial\tilde{X}}{\partial r}(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\varphi}(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\theta}(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta \\ -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot r\frac{\partial\tilde{X}}{\partial r} + \dot\varphi\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\varphi} + \dot\theta\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} \dot r\cos\varphi\sin\theta - \dot\varphi r\sin\varphi\sin\theta + \dot\theta r\cos\varphi\cos\theta \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

(derivando lungo le curve viene uguale)

Energia cinetica in atto di moto vincolato di coord $(q,\dot q)$

ricordo energia cinetica in sist. mecc. (libero) $\tilde T(x,\dot x) = \frac{1}{2}\dot x\cdot M\dot x$

$$T(q,\dot q) := \tilde T(\tilde X(q), \tilde X'(q)\dot q)$$

$$= \frac{1}{2}\tilde X'(q)\dot q \cdot M\tilde X'(q)\dot q$$

$$= \frac{1}{2}\dot q\cdot \underbrace{\tilde X'(q)^t M \tilde X'(q)}_{A(q)}\dot q$$

$$\begin{tikzcd} & T\mathbb{R}^{3N} \ni (x,\dot x) \arrow[dl, "\tilde T"'] \\ \mathbb{R} & \\ & T\mathbb{R}^n \ni (q,\dot q) \arrow[uu, "\tilde X"'] \arrow[ul, "T"] \end{tikzcd}$$

$A(q)$ **MATRICE CINETICA** $(n\times n)$ (del sist. vincolato) scritta nelle coord q

$$T(q,\dot q) := \frac{1}{2}\dot q\cdot A(q)\dot q$$

prop $\forall q$, $A(q)$ è simmetrica e definita positiva

dim $\cdot$ $A^t = (\tilde X'^t M\tilde X')^t = \tilde X'^t \underset{\overset{\parallel}{M}}{M^t} \tilde X' = A$

$\cdot$ $v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$: $Av\cdot v = (\tilde X'^t M\tilde X')v\cdot v = M(\tilde X'v)\cdot(\tilde X'v) > 0$

perché M è def. positiva e se $v\neq 0 \Rightarrow \underbrace{\tilde X'(q)}_{\text{iniettiva}}v\neq 0$ $\square$

esempio 1) $N=1$, coord. sferiche

$$\tilde X(r,\varphi,\theta) = (\dots,\dots,\dots)$$

$$\tilde x(r,\varphi,\theta) =: x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$\tilde y(r,\varphi,\theta) =: y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$\tilde z(r,\varphi,\theta) =: z = r\cos\theta$$

$$\tilde T(r,\varphi,\theta,\dot r,\dot\varphi,\dot\theta) = \frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)\Big|_{\substack{\dot x=\dots\\ \dot y=\dots\\ \dot z=\dots}}$$

velocità nell'atto di moto di coord $(r,\varphi,\theta,\dot r,\dot\varphi,\dot\theta)$

potrei usare l'espressione della matrice Jacobiana, ma è più facile derivare lungo le curve

$$\begin{cases} \dot x = \dot r\sin\theta\cos\varphi + r\dot\theta\cos\theta\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\theta\sin\varphi \\ \dot y = \dot r\sin\theta\sin\varphi + r\dot\theta\cos\theta\sin\varphi + r\dot\varphi\sin\theta\cos\varphi \\ \dot z = \dot r\cos\theta - r\dot\theta\sin\theta \end{cases}$$

$$T(\dots) = \dots = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\dot\varphi^2\sin^2\theta)$$

tengo fuori 1/2

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot r\\ \dot\theta\\ \dot\varphi\end{pmatrix} A(r,\theta,\varphi)\begin{pmatrix}\dot r\\ \dot\theta\\ \dot\varphi\end{pmatrix}$$

$$A(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} m & 0 & 0\\ 0 & mr^2 & 0\\ 0 & 0 & mr^2\sin^2\theta\end{pmatrix}$$ è diagonale, perché?

termine nuovo lungo un meridiano

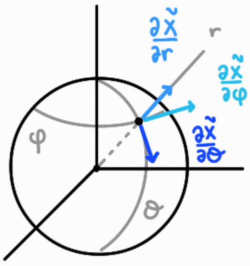
termine nuovo lungo un parallelo (raggio $= r\sin\theta$)

Ciò è legato ad una proprietà della base naturale $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial r}, \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \theta}$. La velocità è:

$$\dot{X} = \dot{r}\frac{\partial \tilde{x}}{\partial r} + \dot{\varphi}\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varphi} + \dot{\theta}\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \theta}$$

allora

$$\|\dot{X}\| = \dot{r}^2 \left\|\frac{\partial \tilde{x}}{\partial r}\right\|^2 + \dot{\varphi}^2 \left\|\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varphi}\right\| + \dot{\theta}^2 \left\|\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \theta}\right\| \cancel{+ 2\dot{r}\dot{\varphi}\frac{\partial \tilde{x}}{\partial r}\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varphi} + \dots}$$



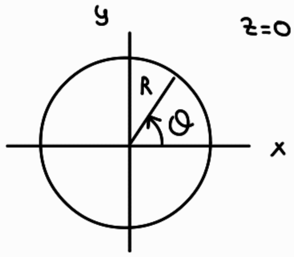
i 3 doppi prodotti si cancellano perché i tre vettori sono ortogonali.

Per questo motivo la matrice cinetica è diagonale

oss/def "coordinate ortogonali" se $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{x}}{\partial q_n}$ ovunque ortogonali

2) $N=1$ vincolato a cerchio ($R=\text{cost}$)

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -R\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = R\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

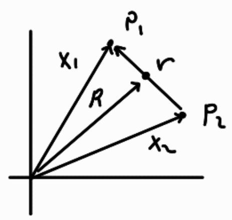


$$T(\cancel{\theta}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$$

non vi dipende

se sono più distante, vado più veloce

3) $N=2$ libero



$X_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$m = m_1 + m_2$

$$X(x_1, x_2) \longmapsto \left(R = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{2},\ r = x_1 - x_2\right)$$

Inverso:

$$\begin{cases} x_1 = R + \frac{m_2}{m} r \\ x_2 = R - \frac{m_1}{m} r \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{R} + \frac{m_2}{m}\dot{r} \\ \dot{x}_2 = \dot{R} - \frac{m_1}{m}\dot{r} \end{cases}$$

$$T(R, r, \dot{R}, \dot{r}) = \frac{1}{2} m_1 \|\dot{x}_1\|^2 + \frac{1}{2} m_2 \|\dot{x}_2\|^2 \Bigg|_{\substack{\dot{x}_1 = \dots \\ \dot{x}_2 = \dots}}$$

velocità nell'atto di moto vincolato

$$= \frac{1}{2} m_1 \left(\|\dot{R}\|^2 + \left(\frac{m_2}{m}\right)^2 \|\dot{r}\|^2 + 2 \frac{m_2}{m} \dot{R} \cdot \dot{r} \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\|\dot{R}\|^2 + \frac{m_1^2}{m^2} \|\dot{r}\|^2 - 2 \frac{m_1}{m} \dot{R} \cdot \dot{r} \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \|\dot{R}\|^2 + \frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2} \|\dot{r}\|^2$$

$$= \frac{1}{2} m \|\dot{R}\|^2 + \underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}_{\text{MASSA RIDOTTA!}} \|\dot{r}\|^2 = \frac{1}{2} m \|\dot{R}\|^2 + \frac{1}{2} \mu \|\dot{r}\|^2$$

ripasso

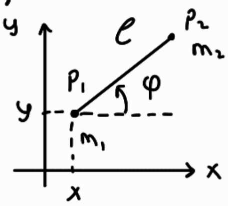
$$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q} \cdot A(q) \dot{q}$$ A matrice $n \times n$ simmetrica e det. pos.

$$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \|\dot{x}_\alpha\|^2 \Big|_{\dot{x}_\alpha = \frac{d}{dt} \tilde{x}_\alpha(q)}$$

modo migliore per gli esercizi

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N)$$

4) (manubrio vincolato ad un piano)



$N = 2$

$Q \simeq \mathbb{R}^2 \times S^1 \,, \quad z = 0$

$m_1 = m_2 =: m$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y \\ z_1 = 0 \\ x_2 = x + \ell\cos\varphi \\ y_2 = y + \ell\sin\varphi \\ z_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} \\ \dot{y}_1 = \dot{y} \\ \dot{z}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = \dot{x} - \ell\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y}_2 = \dot{y} + \ell\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{z}_2 = 0 \end{cases}$$

$$T(x,y,\varphi,\dot{x},\dot{y},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) \Big|_{\substack{\dot{x}_1 = \dots \\ \dots}}$$

$$= \frac{1}{2} m (2\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 + \ell^2 \dot{\varphi}^2 - 2\ell \dot{x} \dot{\varphi} \sin\varphi + 2\ell \dot{y} \dot{\varphi} \cos\varphi)$$

è forma quadratica. Scriviamo la matrice cinetica (in questo caso non è diagonale):

$$A(x,y,\varphi) = \begin{pmatrix} 2m & 0 & -m\ell\sin\varphi \\ 0 & 2m & m\ell\cos\varphi \\ -m\ell\sin\varphi & m\ell\cos\varphi & m\ell^2 \end{pmatrix}$$

derivata lungo le curve o totale

$$\text{"}\frac{d}{dt}\text{"} \underset{\substack{\shortparallel \\ q(t)}}{f(q)} = f'(q)\dot{q}$$

Siano U un aperto di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$

1. Chiamiamo "derivata lungo le curve" o "derivata totale" la mappa

$$\frac{d}{dt} : C^\infty(\overset{U\times\mathbb{R}}{U;\mathbb{R}^k}) \longrightarrow C^\infty(\overset{U\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}}{\underset{\text{"}TU}{U\times\mathbb{R}^n},\mathbb{R}^k})$$

$$g \longmapsto \frac{dg}{dt}$$

$$\underbrace{g(q)}_{\text{funzione di } q} \longmapsto \frac{dg}{dt}\underbrace{(q,\dot{q})}_{\text{funzione di } q \text{ e } \dot{q}} := g'(q)\dot{q}$$

$$g(q,t) \longmapsto \frac{d}{dt}g(q,\dot{q},t) = g'(q,t)\dot{q} + \frac{\partial g}{\partial t}(q,t)$$

proprietà: $\forall$ curva $t \longmapsto \gamma(t) = q(t)$

$$\frac{dg}{dt}(\gamma(t),\gamma'(t)) = \frac{d}{dt}\big(g(\gamma(t))\big) \quad = g'(\gamma(t))\gamma'(t)$$

$$\frac{dg}{dt}(\gamma(t),\gamma'(t),t) = \frac{d}{dt}\big(g(\gamma(t),t)\big) = g'(\gamma(t),t)\,\gamma'(t)$$

2. $$\frac{d}{dt} : C^\infty(\overset{U\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}}{\overset{TU}{\underset{q\ \ \ \dot q}{U\times\mathbb{R}^n}}};\mathbb{R}^k) \longrightarrow C^\infty(\overset{U\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}}{U\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n};\mathbb{R}^k) \qquad \neq T(U\times\mathbb{R}^n)$$

$$g(q,\dot{q}) \longmapsto \frac{dg}{dt}(q,\dot{q},\ddot{q}) = \frac{\partial g}{\partial q}(q,\dot{q})\dot{q} + \frac{\partial g}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q})\ddot{q}$$

$$g(q,\dot{q},t) \longmapsto \frac{dg}{dt}(q,\dot{q},\ddot{q},t) = \frac{\partial g}{\partial q}(q,\dot{q},t)\dot{q} + \frac{\partial g}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q},t)\ddot{q} + \frac{\partial g}{\partial t}(q,\dot{q},t)$$

proprietà: $$\frac{dg}{dt}(\gamma(t),\gamma'(t),\gamma''(t)) = \frac{d}{dt}\big(g(\gamma(t),\gamma'(t))\big)$$

Equazioni di Lagrange

vincoli olonomi + ideali : eq. di Lagrange di prima specie

Q varietà delle configurazioni

(I_1) $\quad M\ddot{x} = F(x,\dot{x}) + \underline{\Phi}_{id}(x,\dot{x}) \qquad x \in \mathbb{R}^{3N}$

(I_1) $\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = M^{-1} F(x,v) + M^{-1}\underline{\Phi}_{id}(x,v) \end{cases}$, $(x,v) \in \mathbb{R}^{6N}$

TQ invariante , $\quad \tilde{x} : U \longrightarrow Q$, $\qquad T\tilde{x} : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TQ$

$q \longmapsto \tilde{x}(q) \qquad\qquad (q,\dot{q}) \longmapsto (\tilde{x}(q), \underbrace{\tilde{x}'(q)\dot{q}}_{= \tilde{w}(q,\dot{q})})$

componenti delle forze lungo la "base naturale"

def $\quad Q_i(q,\dot{q}) := F(\tilde{x}(q), \tilde{x}'(q)\dot{q}) \cdot \dfrac{\partial \tilde{x}}{\partial q_i}(q)$ (in $\mathbb{R}^{3N}$) sono le "forze generalizzate"

oppure le "componenti lagrangiane delle forze attive"
(sollecitazioni)

prop (eq. di Lagrange) scritte in coord $(q,\dot{q})$ la restrizione di (I_1) a TQ è equivalente al (=ha le stesse soluzioni del) sistema

$$\left(\underbrace{\frac{d}{dt}}_{\text{derivata totale}} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)(q,\dot{q},\ddot{q}) - \frac{\partial T}{\partial q_i}(q,\dot{q}) = Q_i(q,\dot{q}) \qquad i=1,\dots,n$$

Sono eq. del secondo ordine in $q \in Q$ che possono essere messe in forma normale.

oss (*) $\quad \dfrac{dg}{dt}(q,\dot{q},\ddot{q}) = \dfrac{\partial g}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q})\,\ddot{q} + \dfrac{\partial g}{\partial q}(q,\dot{q})\,\dot{q} = \displaystyle\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{q}_h}\ddot{q}_h + \frac{\partial g}{\partial q_h}\dot{q}_h\right)$

Troviamo la forma esplicita delle equazioni di Lagrange:

forma bilineare (fattore una regione)

$$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}\cdot A(q)\dot{q} = \frac{1}{2}\sum_{h,k} A_{hk}(q)\,\dot{q}_h \cdot \dot{q}_k \qquad \begin{cases} i\neq h,k & 0 \\ i=h & \dot{q}_k \\ i=k & \dot{q}_h \end{cases}$$

■ $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = [A(q)\dot{q}]_i = \displaystyle\sum_k A_{ik}(q)\dot{q}_k \Longleftarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}\sum_{h,k} A_{hk}(q)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(\dot{q}_h\cdot\dot{q}_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}(q)\dot{q}_k + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n} A_{hi}(q)\dot{q}_h$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{ik}(q)\dot{q}_k \in \mathbb{R}$

$A(q)$ simmetrica: $A_{ik} = A_{ki}$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}(q,\dot{q},\ddot{q}) \overset{(*)}{=} \sum_{h=1}^{n}\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)}_{A_{ih}}\ddot{q}_h + \frac{\partial}{\partial q_h}\Big(\underbrace{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}}_{=\sum_{k=1}^{n} A_{ik}(q)\dot{q}_k}\Big)\dot{q}_h\right)$$

$$\Longleftarrow \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}\left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}(q)\dot{q}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(q)\underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}(\dot{q}_k)}_{=\delta_{hk}} = A_{ih}(q)$$

$$= \sum_h \left(A_{ih}\ddot{q}_h + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ik}}{\partial q_h}\dot{q}_k\dot{q}_h\right)$$

$$\overset{\sum_{h=1}^{n} A_{ih}\ddot{q}_h}{=}\left[A(q)\ddot{q}\right]_i + \overset{\sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_h}\dot{q}_k\dot{q}_h}{\sum_{h,k} \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_h}\dot{q}_h\dot{q}_k}$$

■ $$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\sum_{hk} \frac{\partial A_{hk}}{\partial q_i}\dot{q}_h\dot{q}_k$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\left[A(q)\ddot{q}\right]_i + \sum_{h,k}\left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial q_h} - \frac{1}{2}\frac{\partial A_{hk}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_h\dot{q}_k = Q_i(q,\dot{q}) \qquad i=1,\dots,n}$$

oss

- Questo prova che le equazioni di Lagrange sono equazioni del secondo ordine che possono essere messe in forma normale, infatti si ha $A(q)\ddot{q}$ = qualcosa.

  Siccome A è definita positiva, e' invertibile e allora si può riscrivere l'equazione come

  $\ddot{q} = A(q)^{-1}$(qualcosa)

⊙ compaiono termini quadratici nelle velocità

dim (cenno)

- $t \longmapsto X(t) \in Q \ \forall t$ soluzione eq. di Lagrange I specie

$$M\ddot{X}(t) - F(X(t),\dot{X}(t)) - \Phi_{id}(X(t),\dot{X}(t)) = 0$$

- $\exists \ t \longmapsto q(t)$ tc $X(t) = \tilde{X}(q(t))$ con $(q,\dot{q})$ coordinate locali

$$\dot{X}(t) = \frac{d}{dt}\tilde{X}(q(t)) = \tilde{X}'(q(t))\,\dot{q}(t) =: \tilde{w}(q(t),\dot{q}(t))$$

$$\ddot{X}(t) = \frac{d}{dt}\tilde{w}(q(t),\dot{q}(t)) = \left(\frac{d\tilde{w}}{dt}\right)(q(t),\dot{q}(t),\ddot{q}(t))$$

$$\Longrightarrow \quad M\frac{d\tilde{w}}{dt} - F(\tilde{X}(q),\tilde{w}(q,\dot{q})) - \Phi_{id}(\tilde{X}(q),\tilde{w}(q,\dot{q})) = 0$$

- vincolo olonomo fisso e ideale: la reazione vincolare nei punti di Q è ortogonale a Q.

  idea prendere l'eq. e moltiplicarla scalarmente con i vettori della base naturale

$$\frac{\partial\tilde{X}}{\partial q_i}(q)\cdot\left[M\frac{d\tilde{w}}{dt} - F(\tilde{X}(q),\tilde{w}(q,\dot{q})) - \cancel{\Phi_{id}(\tilde{X}(q),\tilde{w}(q,\dot{q}))}\right] = 0 \qquad i=1,\dots,n$$

- $$\underbrace{\frac{\partial\tilde{X}}{\partial q_i}(q)\cdot M\frac{d\tilde{w}}{dt}(q,\dot{q},\ddot{q})}_{(*)} = Q(q,\dot{q})$$

- Rimane da verificare che $(*) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}$ □

esempio $N=1$, $f(x,\dot{x})$

$m\ddot{x} = f(x,\dot{x}) \qquad x\in\mathbb{R}^3$

Uso coord. cilindriche (in $\mathbb{R}^3 \setminus$ asse z) : $\tilde{X}(r,\varphi,z) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)$

$$Q_r(r,\varphi,z) = f \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial r}\Big|_{X=\tilde{X}(r,\varphi,z)}$$

$$= \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = f_x\cos\varphi + f_y \sin\varphi$$

Stessa cosa per Q_φ e Q_z.

Scriviamo l'energia cinetica e calcoliamone le derivate

$$T(r,z,\varphi,\dot{r},\dot{z},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right)$$

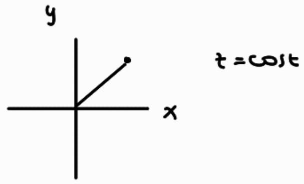
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\ddot{r} \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 \qquad \Rightarrow \qquad m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = Q_r$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{\varphi}\dot{r} \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} = Q_\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) = m\ddot{z} \qquad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m\ddot{z} = Q_z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = Q_r \\ mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} = Q_\varphi \\ m\ddot{z} = Q_z \end{cases}$$

oss Supponiamo f centrale : $f(x) = \mathcal{F}(x)\dfrac{x}{\|x\|}$



$$Q_\varphi = f(x)\cdot\frac{\partial \tilde{X}}{\partial \varphi} = \mathcal{F}(x)\frac{x}{\|x\|}\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ la seconda eq. può essere scritta come $0 = \dfrac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi})$

$\Rightarrow$ $mr^2\dot{\varphi}$ è integrale primo!

$$\overset{\shortparallel}{(\text{MomAng})_z} = m(x\dot{y} - y\dot{x})\Big|_{c.c.} = mr c(\cancel{\dot{r}} s + r\dot{\varphi}c - rs(\cancel{\dot{r}} c - r\dot{\varphi}s)) = mr^2\dot{\varphi}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}c - r\dot{\varphi}s \\ \dot{y} = \dot{r}s + r\dot{\varphi}c \end{cases}$$

ripasso $\quad Q \subseteq \mathbb{R}^{3N} \qquad \tilde{X}: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow Q$

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right)_i - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q,\dot q) \qquad i=1,\dots,n \qquad (*)$$

$$Q_i(q,\dot q) := F(\tilde X(q), \tilde X'(q)\dot q)\ \frac{\partial \tilde X}{\partial q_i}(q)$$

Forze attive conservative

definita sulle coord. lagrangiane $q, \dot q$: è forza generalizzata

def 1) Q è posizionale se non dipende dalle $\dot q$

2) Q è conservativa se è posizionale ed $\exists\ V: U \longrightarrow \mathbb{R}$ energia potenziale tale che

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad \forall i=1,\dots,n$$

prop se Q è conservativa con en. pot. V, allora le eq. di Lagrange $(*)$ si scrivono anche

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i=1,\dots,n$$

con $L(q,\dot q) := T(q,\dot q) - V(q,\dot q)$ $\quad (L: TQ \longrightarrow \mathbb{R})$

detta LAGRANGIANA del sistema vincolato.

la derivata rispetto a $\dot q$ di V è 0, perché V è funzione solo di q.

dim $$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-\cancel{V})}{\partial \dot q} - \frac{\partial(T-V)}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q} - \frac{\partial T}{\partial q} - Q \qquad \square$$

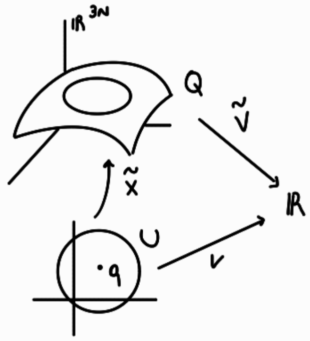
prop se F (forza attiva che agisce sul sistema libero non vincolato) è conservativa

$$F(x) = -\nabla \tilde V(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^{3N}$$

allora anche Q è conservativa con energia potenziale

$$V = \tilde V|_Q \circ \tilde X$$

cioè $V(q) = \tilde V(\tilde X(q))$.



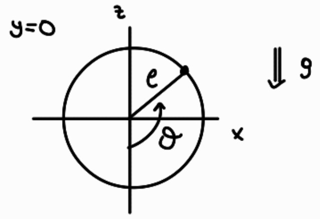
dim $$\frac{\partial V}{\partial q_i}(q) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\tilde V \circ \tilde X(q)\right] = \left[\tilde V'(\tilde X(q))\ \tilde X'(q)\right]_i$$

$$= \sum_{j=1}^{3N} \underbrace{\frac{\partial \tilde V}{\partial x_j}(\tilde X(q))}_{-F_j(\tilde X(q))} \frac{\partial \tilde X_j}{\partial q_i}(q)$$

$$= -F(\tilde X(q)) \cdot \frac{\partial \tilde X}{\partial q_i}(q) = -Q_i(q) \qquad \square$$

esempio 1) (pendolo)

param : $\tilde{X}(\theta) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(\theta) \\ \tilde{y}(\theta) \\ \tilde{z}(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$



$$(*) \begin{cases} x = e\sin\theta \\ y = 0 \\ z = -e\cos\theta \end{cases} \qquad (**) \begin{cases} \dot{x} = e\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = e\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

oss L'atto di moto vincolato di coordinate Lagrangiane $(\theta, \dot{\theta})$ è $(*)$ e $(**)$

e osserviamo che $X \cdot \dot{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e\sin\theta \\ 0 \\ -e\cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \\ e\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix} = 0$

(è come dev'essere, dato che ci stiamo muovendo lungo una circonferenza).

$$T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\Big|_{(**)} = \frac{1}{2}me^2\dot{\theta}^2$$

$$\tilde{V}(x,y,z) = mgz$$

$$V(\theta) = mgz\Big|_{(*)} = -mge\cos\theta$$

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}me^2\dot{\theta}^2 + mge\cos\theta$$

equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}(me^2\dot{\theta}) = me^2\ddot{\theta}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mge\sin\theta$$

$$\Rightarrow \cancel{m}e^{\cancel{2}}\ddot{\theta} + \cancel{m}g\cancel{e}\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{e}\sin\theta = 0, \quad \theta \in S^1$$

oss Q è un cerchio, $\theta \in S^1$ (varietà delle configurazioni è compatta)

$L : TS^1 \longrightarrow \mathbb{R}$

oss $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (kL)}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial (kL)}{\partial q} = 0 = k\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\right] = 0 \qquad k > 0$$

Possiamo moltiplicare la Lagrangiana per una costante > 0 e

ciò non cambia le eq. di Lagrange.

Nel caso del pendolo potevamo dividere da subito la Lagrangiana per me^2

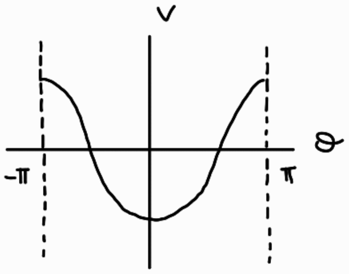
e usare $L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{e}\cos\theta$

$\Rightarrow$ la dinamica dipende da un'unico parametro : $\frac{g}{e}$

oss $L \longrightarrow L + \text{cost}$ non cambia le eq. di Lagrange.

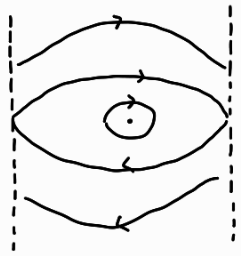
Ha senso, perché l'energia potenziale non è mai unica: è definita a meno di una costante additiva.

ricordo Il ritratto in fase del pendolo

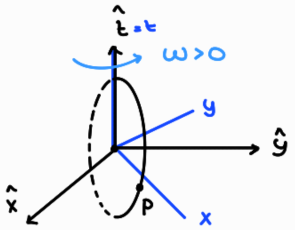


$V = -mg\ell\cos\theta$

$V = -\frac{g}{\ell}\cos\theta$



2) (pendolo rotante) $\hat{\Sigma} = \{O; \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$



$N = 1$, $\quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

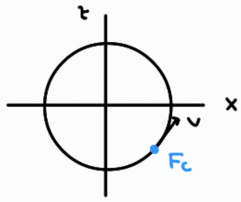
Possiamo studiare il pendolo rotante (con vincolo mobile) in un sistema di riferimento solidale con il cerchio. $\Sigma = \{O; x, y, z\}$

Nel riferimento rotante, $Q = S^1$ e le forze che agiscono nel sistema sono la forza peso e delle forze di inerzia

- Coriolis $\quad -2m\Omega \wedge v$
- trascinamento
  - $\dot{\Omega} = 0$
  - accelerazione dell'origine di un sdr rispetto all'altro $= 0$
  - forza centrifuga: conservativa con $V(x) = -\frac{1}{2}m\|\Omega \wedge x\|^2$ en. pot.

Forze attive:

- peso $\quad V_p(x,y,z) = mgz$
- centrifuga $\quad V_c(x,y,z) = -\frac{1}{2}m\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\|^2 = -\frac{1}{2}m\left\|\begin{pmatrix} -\omega y \\ -\omega x \\ 0 \end{pmatrix}\right\|^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$
- Coriolis non è posizionale né conservativa, ma è $\perp$ velocità (c'è potenza nulla).



Siccome la varietà delle configurazioni è 1-dim, $F_c \perp T_p S^1$

(in dim maggiori non è detto). Allora $Q_{cor} = \underbrace{F_c}_{\perp \partial Q} \cdot \underbrace{\frac{\partial \tilde{x}}{\partial q}}_{tg\, \partial Q} = 0 \Rightarrow$ possiamo ignorarla

$L(\theta,\dot\theta) = T - V_{peso} - V_{cent}$

$T(\theta,\dot\theta) = \frac{1}{2} m e^2 \dot\theta^2$

$V_{peso}(\theta) = mgz\Big|_{\substack{x = e\sin\theta \\ y=0 \\ z=-e\cos\theta}} = -mge\cos\theta$

$V_{cent}(\theta) = -\frac{1}{2} m\omega^2 (x^2+y^2)\Big|_{param} = -\frac{1}{2} m\omega^2 e^2 \sin^2\theta$

$\Rightarrow L(\theta,\dot\theta) = \frac{1}{2} m e^2 \dot\theta^2 + mge\cos\theta + \frac{1}{2} m\omega^2 e^2 \sin^2\theta \quad , \theta \in S^1$

Vogliamo fare il ritratto in fase.

$L(\theta,\dot\theta) = \frac{1}{2}\dot\theta^2 + \overset{=:k^2}{\frac{g}{e}}\cos\theta + \underbrace{\frac{1}{2}\omega^2 \sin^2\theta}_{=\text{ ho pendolo normale}}$

Immagino k dato e vario $\omega \geq 0$

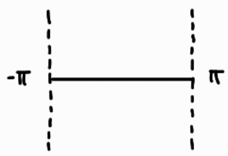
<u>oss</u> $L(q,\dot q) = \frac{1}{2} m\dot q^2 - V(q)$, $q \in \mathbb{R}$ oppure S^1

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = m\ddot q \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -V'(q)$

eq. di Lagrange: $m\ddot q + V'(q) = 0$ con $q \in \mathbb{R}$ o S^1

$L(\theta,\dot\theta) = \frac{1}{2}\dot\theta^2 - \left[-k^2\cos\theta - \frac{\omega^2}{2}\sin^2\theta\right]$

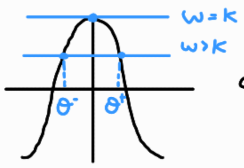
$V(\theta) = -k^2\cos\theta - \frac{1}{2}\omega^2\sin^2\theta \quad , \theta \in S^1$



$V'(\theta) = k^2\sin\theta - \omega^2\sin\theta\cos\theta$

$= \underbrace{(k^2 - \omega^2\cos\theta)}\sin\theta$

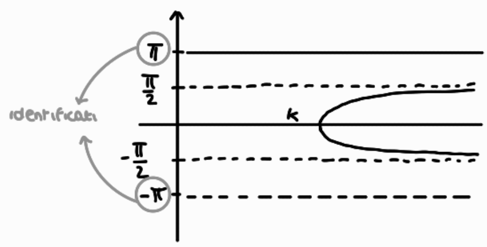
$\hookrightarrow \theta = 0, \pi \quad \forall \omega, k$



$\cos\theta = \left(\frac{k}{\omega}\right)^2$ ha soluzione $\Leftrightarrow \omega \geq k$

Se $\omega > k$ abbiamo $\theta_+ = -\theta_-$, che dipendono da ω

Faccio il diagramma di biforcazione di $\theta_\pm(\omega)$ con anche $0, \pi$:

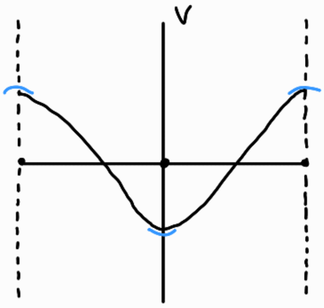


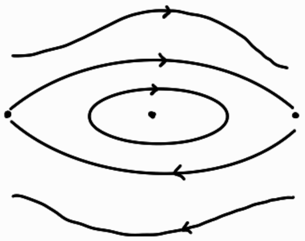
$V''(\theta) = (k^2 - \omega^2\cos\theta)\cos\theta + \omega^2\sin^2\theta$

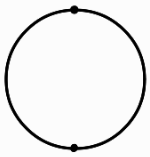
$V''(0) = k^2 - \omega^2 \begin{cases} >0 & \text{se } \omega < k \\ =0 & \text{se } \omega = k \\ <0 & \text{se } \omega > k \end{cases}$

$V''(\pi) = -(k^2+\omega^2) < 0 \quad \forall \; \omega, k$

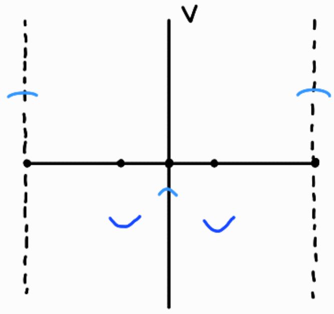
$\omega < k$





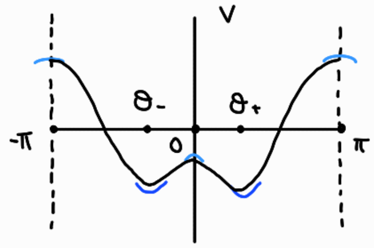


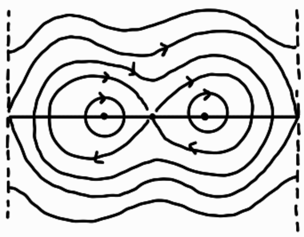
$\omega > k$



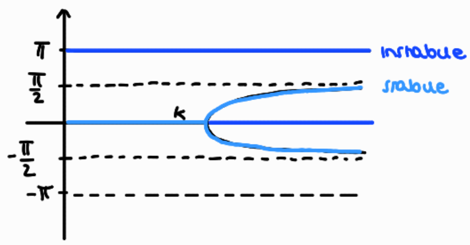
$\Rightarrow$ ci rimane da capire quale massimo è più alto fra quello in 0 e quello in π

$V(0) = -k^2 < V(\pi) = k^2$

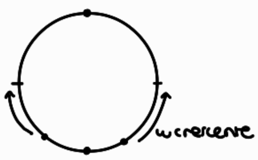




Dunque abbiamo una biforcazione a forcone:



Se $\omega > k$, al crescere di ω, $\theta_\pm \to \pm\frac{\pi}{2}$, dunque il pendolo oscilla attorno a posizioni inclinate (non più verticali), che arrivano ad essere al massimo orizzontali.



<u>oss</u> $\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ Lagrangiana di un sistema soggetto a vincoli olonomi fissi e forze conservative

$L(q,\dot q) = T(q,\dot q) - V(q)$

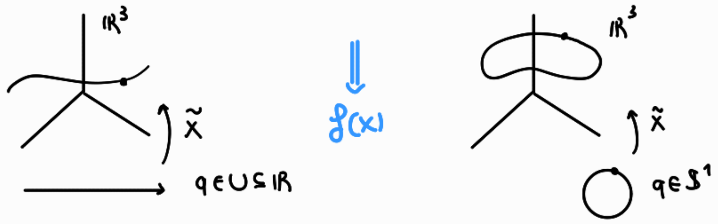
$T(q,\dot q) = \frac{1}{2}\dot x \cdot M \dot x \,\Big|_{\dot x = \tilde x'(q)\dot q}$

$V(q) = \tilde V \circ \tilde x$ con $\tilde x$ parametrizzazione delle coord. di Q

⇒ la lagrangiana è la lagrangiana del sistema libero ristretta alla varietà vincolare e agli atti di moto vincolati

$$L = \tilde{L} \circ T\tilde{X}$$

<u>esempio</u> 1) $N=1$ vincolato ad una curva + relazione con eq. Newton 1-dim



$f(x) = -\nabla \tilde{U}(x)$

Lagrangiana: $L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}\cdot \underbrace{A(q)}_{\substack{\text{è numero perché} \\ \#\text{gradi di libertà} = 1}}\dot{q} - V(q) = \frac{1}{2}\underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}}}{a(q)}\,\dot{q}^2 - V(q)$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}a(q)\dot{q} = a(q)\ddot{q} + a'(q)\dot{q}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{1}{2}a'(q)\dot{q}^2 - V'(q)$$

termine quadratico nelle velocità

eq. di Lagrange: $a(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}a'(q)\dot{q}^2 + V'(q) = 0$

Parametrizziamo con parametro d'arco: $s \longmapsto \tilde{X}(s)$ tc $\|\tilde{X}'(s)\| = 1 \ \forall s$

$T = \frac{1}{2}m\,\dot{x}\cdot\dot{x} = \frac{1}{2}m\|\dot{x}\|^2 = \frac{1}{2}m\|\underbrace{\tilde{X}'(s)}_{1}\dot{s}\|^2 = \frac{1}{2}m\dot{s}^2$ nel caso di un sistema con $N=1$

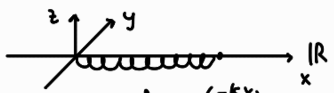
Lagrangiana: $L(s,\dot{s}) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - V(s)$

$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} &= \frac{d}{dt}m\dot{s} = m\ddot{s} \\ \frac{\partial L}{\partial s} &= -V'(s)\end{aligned}\right\}$

eq. di Lagrange: $m\ddot{s} + V'(s) = 0$ è l'eq. di Newton 1-dim!!

<u>oss</u> l'eq. di Newton 1-dim modellizza tutti i sistemi con $N=1$ soggetti a vincoli olonomi fissi, con parametrizzazione a velocità unitaria

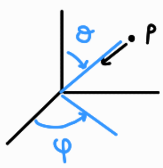
1.1) (OA)



$f(x) = \begin{pmatrix} -kx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

2) (Kepler spaziale) $N = 1$



$f(x) = -\frac{GMm}{\|x\|^3}\,x$

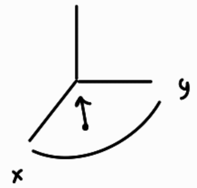
$\tilde{U}(x) = -\frac{GMm}{\|x\|}$

Usiamo coord. lagrangiane $x \in \mathbb{R}^3$: $L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\|\dot{x}\|^2 + \frac{GMm}{\|x\|}$

Usiamo coord. sferiche (ρ, φ, θ) : a riporre calcolo a te

$$(*)\quad L(\rho, \varphi, \theta, \dot\rho, \dot\varphi, \dot\theta) = \dots = \frac{1}{2}m\left(\dot\rho^2 + (\rho^2 \sin^2\theta)\dot\varphi^2 + \rho^2\dot\theta^2\right) + \frac{GMm}{\rho}$$

3) (Kepler piano) $N=1$ vincolato al piano xy $(\{z=0\})$



$$f(x) = -\frac{GMm}{\|x\|^3}x \qquad \tilde U = -\frac{GMm}{\|x\|}$$

Usiamo coordinate polari :

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot x = \dot r\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot\varphi \\ \dot y = \dot r\sin\varphi + r\dot\varphi\cos\varphi \\ \dot z = 0 \end{cases}$$

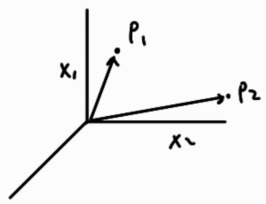
$$T(r,\varphi,\dot r,\dot\varphi) = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)\Big|_{\substack{\dot x = \dots \\ \dot y = \dots \\ \dot z = \dots}} = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2)$$

$$(*)\quad L(r,\varphi,\dot r,\dot\varphi) = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + \frac{GMm}{\|x\|}\Big|_{\substack{x = \dots \\ y = \dots \\ z = \dots}} = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + \frac{GMm}{r}$$

<u>oss</u> se valuto $(*)$ sul piano xy: $\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ \dot\theta = 0 \end{cases}$, trovo esattamente $(*)$!!!

Questo è proprio un esempio del fatto che $L = \tilde L \circ T\tilde X$, ovvero che la lagrangiana vincolata è uguale alla lagrangiana libera ristretta al fibrato tangente della varietà vincolare.

4) (problema dei 2 corpi)



$N = 2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^6$

$$U(x_1,x_2) = -\frac{Gm_1m_2}{\|x_1 - x_2\|}$$

$$L(x_1,x_2,\dot x_1,\dot x_2) = \frac{1}{2}m_1\|\dot x_1\|^2 + \frac{1}{2}m_2\|\dot x_2\|^2 + \frac{Gm_1m_2}{\|x_1-x_2\|}$$

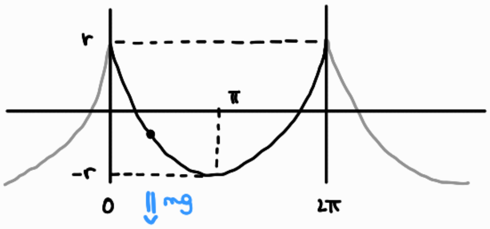
usiamo ora coord. $(R,r) = \left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1+m_2}, x_1 - x_2\right)$:

$$L(R,r,\dot R,\dot r) = \frac{1}{2}m\|\dot R\|^2 + \frac{1}{2}\mu\|\dot r\|^2 + \frac{Gm_1m_2}{r}$$

<u>eserciuo</u> eq. di Lagrange : $\begin{cases} m\ddot R = 0 \Rightarrow \text{il centro di massa va a velocità costante} \\ \ddot r = -\frac{Gm_1m_2}{\|r\|^3}r \end{cases}$

5) Pendolo cicloidale

Param. della cicloide:



$$\begin{cases} \tilde{x}(q) = r(q - \sin q) \\ \tilde{y}(q) = 0 \\ \tilde{z}(q) = r\cos q \end{cases}$$

$r > 0$, $q \in (0, 2\pi)$

$$\begin{cases} \dot{x} = r(1-\cos q)\dot{q} \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -r\dot{q}\sin q \end{cases}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2r^2\dot{q}^2(1-\cos q)$$

$$V = mgz\Big|_{z=\dots} = mgr\cos q$$

$$L(q,\dot{q}) = mr^2\dot{q}^2(1-\cos q) - mgr\cos q$$

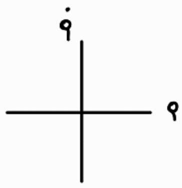
$$\rightsquigarrow \quad L(q,\dot{q}) = \dot{q}^2\underbrace{(1-\cos q)}_{\frac{1}{2}a(q)} - \frac{g}{r}\cos q \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(1-\cos q) = a(q) > 0 \quad \forall q \in (0, 2\pi)$$

eq. del moto: $a(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}a'(q)\dot{q}^2 + \frac{g}{r}\cos q = 0$

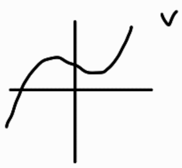
Vediamo come fare il ritratto in fase di $L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - V(q)$, $q \in \mathbb{R}$ o S^1

$E(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) + V(q) = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 + V(q)$ è I.P. (esercizio)

pagina 286 ⇒ Dobbiamo disegnare le curve di livello di E sul piano $q,\dot{q}$

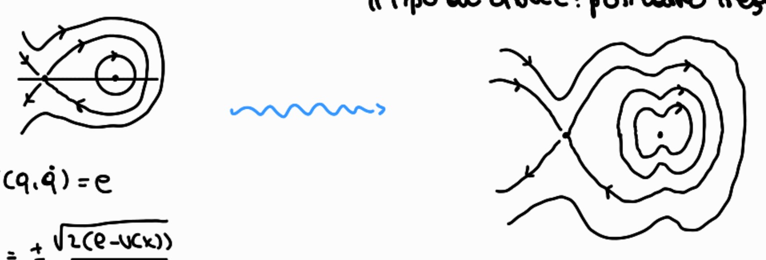


$a(q) = \text{cost}$



$a(q) > 0$ non costante

Il termine $a(q)$ non costante distorce il ritratto in fase, ma questo non cambia gli equilibri o il tipo di orbite: possiamo fregarcene

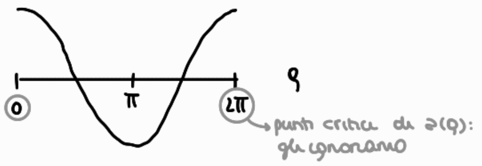


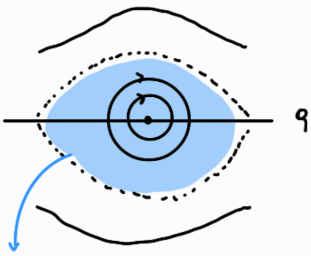
$E(q,\dot{q}) = e$

$$\Rightarrow \quad \dot{q} = \pm\frac{\sqrt{2(e - V(x))}}{\sqrt{a(q)}}$$

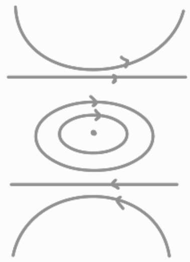
oss potrebbe essere che negli estremi dell'intervallo $I \ni q$, $A(q) \longrightarrow 0$ o $\pm\infty$, dunque il grafico ottenuto non è più fedele, ma noi escludiamo il bordo di I

Dunque possiamo fare il ritratto in fase come al solito con $V(q) = \frac{g}{r}\cos q$





~~> il vero ritratto in fase è questo



Vorremmo ora capire che periodo hanno le orbite periodiche.

Possiamo usare un parametro d'arco s, invece di q, per ottenere $a(q) = \text{cost}$.

$$s(q) = \int_{\pi}^{q} \sqrt{\tilde{x}'(q)^2 + \tilde{y}'(q)^2 + \tilde{z}'(q)^2}\, dq$$

potrebbero esserci dei coeff. sbagliati

$$= \int_{\pi}^{q} \sqrt{2}\, r \underbrace{\sqrt{1-\cos q}}_{=\sqrt{2\sin^2\frac{q}{2}}}\, dq = \dots = -4r\cos\frac{q}{2}$$

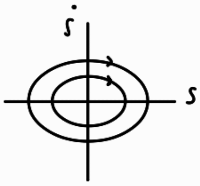
$$\cos\frac{q}{2} = -\frac{s}{4r}$$

possiamo ignorarlo perché è una costante

$$V(s) = \frac{g}{r}\cos q = \frac{g}{r}\left(\cos\frac{q}{2}^2 - \cancel{1}\right) = \frac{2g}{r}\frac{s^2}{(4r)^2} = \frac{1}{2}ks^2 \text{ con } k>0$$

La lagrangiana con parametro d'arco è quella dell'oscillatore armonico:

$$L(s,\dot{s}) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - \frac{1}{2}ks^2$$



L'oscillatore armonico è isocrono, i.e. le sue orbite hanno tutte periodo uguale.

Dunque anche il pendolo cicloidale lo è

Estensione
- vincoli mobili
- coordinate dipendenti dal tempo
- forze attive che dipendono dal tempo

→ pagina 222

def vincolo mobile è una sottovarietà che dipende da t

$t \longmapsto Q_t$ con $Q_t \underset{\text{diffeo}}{\simeq} Q_0$ $\forall t$. Un modo per dirlo è:

$\underset{\mathbb{R}^{3N}\ \ \mathbb{R}}{\psi(X,t)} \in \mathbb{R}^{3N-n}$ è sottov. di dim n se $\forall t$ $X \longmapsto \overset{\psi_t(X)}{\overset{\parallel}{\psi(X,t)}}$ è sommersione

oss velocità di curve $\in Q_t$

$t \longmapsto \gamma(t) \in Q_t$ $\forall t$

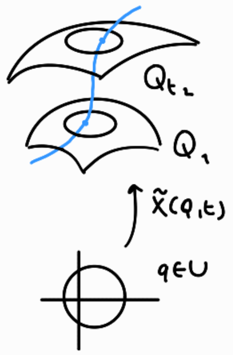
In generale, $\gamma'(t) \notin T_{\gamma(t)} Q$

Si vede anche usando la sommersione: $\psi(\overset{X}{\overset{\parallel}{\gamma(t)}},t) = 0$ $\forall t$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X}(\gamma(t),t)\,\gamma'(t) + \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial t}(\gamma(t),t)}_{\text{suppongo } \neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma'(t) \in \ker \frac{\partial \psi}{\partial X} = T_{\gamma(t)} Q$$

def
- $T_X Q_t$
- $V_X Q_t = \left\{ v \in T_X \mathbb{R}^{3N} : \frac{\partial \psi}{\partial X}(X,t)v + \frac{\partial \psi}{\partial t}(X,t) = 0 \right\}$
- parametrizzazione: $(q,t) \longmapsto \tilde{X}(q,t) \in Q_t \subseteq \mathbb{R}^{3N}$
- "atto di moto $(q,\dot{q})$ all'istante t"

$$\left(\tilde{X}(q,t)\ ,\ \underbrace{\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q,t)\dot{q}}_{\in T_{\tilde{X}(q,t)} Q_t} + \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t}(q,t)\right)$$



$\Phi \perp T_X Q$
$\Downarrow$

def Idealità di $\Phi(X,\dot{X},t)$: $\exists\,(!)$ R.V. ideale tc $\forall\, t_0$, $\forall\, X_0 \in Q_{t_0}$, $\forall\, V_0 \in V_{X_0} Q_{t_0}$

la corrispondente soluzione di $M\ddot{X} = F(X,\dot{X}) + \Phi_{id}(X,\dot{X},t)$, $t \longmapsto X(t) \in Q_t$ $\forall t$

→ pagina 243

Parametrizzo Q_t con $\tilde{X}(q,t)$.

def "Energia cinetica" nell'atto di moto di coord $(q,\dot{q})$ all'istante t è

$$T(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t}\right) \cdot M \left(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\, \dot{q} \cdot \underset{\parallel}{A(q,t)}\, \dot{q} + \dot{q}\left(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}\right)^t M \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} \cdot M \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t}$$

$$= \underbrace{T_2(q,\dot{q},t)}_{\text{termine quadratico nelle velocità}} + \underbrace{b(q,t)\dot{q}}_{\text{termine lineare nelle velocità}} + \underbrace{T_0(q,t)}_{\text{termine indipendente dalle velocità}}$$

con $A(q,t)$ matrice simmetrica e def positiva $\forall\, q,t$.

Si dimostra che, scritti in coordinate, i moti delle eq. di Lagrange di prima specie sono soluzioni delle equazioni di Lagrange nella forma

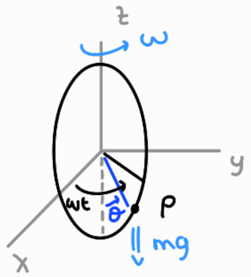
$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right)(q,\dot q,\ddot q,t) - \frac{\partial T}{\partial q_i}(q,\dot q,t) = Q_i \qquad i=1,\dots,n$$

dove $Q_i(q,\dot q,t) = \frac{\partial \tilde x}{\partial q_i}(q,t)\cdot F\left(\tilde x(q,t), \frac{\partial \tilde x}{\partial q}(q,t)\,\dot q + \frac{\partial \tilde x}{\partial t}(q,t)\right)$

<u>def</u> • Dico che $Q(q,t)$ posizionale ammette "energia potenziale dipendente da t" se $\exists\, V(q,t)$ t.c. $Q_i(q,t) = -\frac{\partial V}{\partial q_i}(q,t)$ $\quad i=1,\dots,n$

• $L := T - V$ lagrangiana

<u>esercizio</u> (pendolo rotante)



$Q_t = S^1$ mobile, $q = \theta$

$(q,t) \longmapsto \tilde x(q,t)$

$$P: \begin{cases} \tilde x(\theta,t) = \ell \sin\theta \cos(\omega t) \\ \tilde y(\theta,t) = \ell \sin\theta \sin(\omega t) \\ \tilde z(\theta,t) = -\ell\cos\theta \end{cases}$$

Scriviamo la lagrangiana:

- energia cinetica

velocità nell'atto di moto $(\theta,\dot\theta)$ all'istante t

$$\begin{cases} \dot x = \ell\dot\theta\cos\theta\cos(\omega t) - \ell\omega\sin\theta\sin(\omega t) \\ \dot y = \ell\dot\theta\cos\theta\sin(\omega t) + \ell\omega\sin\theta\cos(\omega t) \\ \dot z = \ell\dot\theta\sin\theta \end{cases}$$

$$\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2 = \ell^2\dot\theta^2 + \ell^2\omega^2\sin^2\theta$$

$$T(\theta,\dot\theta,t) = \underbrace{\frac12 m\,\ell^2\dot\theta^2}_{T_2} + \underbrace{\frac12 m\,\ell^2\omega^2\sin^2\theta}_{T_0}$$

- energia potenziale:

$$V(\theta,t) = mgz\Big|_{z=\tilde z(\theta,t)} = -mg\ell\cos\theta$$

$$L(\theta,\dot\theta,t) = \frac12 m\ell^2\dot\theta^2 + \frac12 m\ell^2\omega^2\sin^2\theta + mg\ell\cos\theta$$

<u>oss</u> La lagrangiana calcolata è uguale a quella calcolata la volta scorsa

con: $$L(\theta,\dot\theta,t) = \underbrace{\frac12 m\ell^2\dot\theta^2}_{T} + \underbrace{\frac12 m\ell^2\omega^2\sin^2\theta}_{-V_{centrifuga}} + \underbrace{mg\ell\cos\theta}_{-V_{peso}}$$

Forze che ammettono potenziale dipendente dalle velocità

Abbiamo visto:

- $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

- $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \text{se} \quad Q(q,t) = -\nabla V(q,t) \quad \text{con} \quad L(q,\dot q,t) = T(q,\dot q,t) - V(q,t)$$

In casi molto speciali, questo vale anche per forze Q dipendenti dalle velocità.

oss Non è possibile avere $Q_i(q,\dot q,t) = -\frac{\partial V}{\partial q_i} V(q,\dot q,t)$, infatti:

se fosse possibile, allora si avrebbe $L(q,\dot q,t) = T(q,\dot q,t) - V(q,\dot q,t)$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q} - \frac{\partial T}{\partial q} - \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot q}}_{\Uparrow} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q}}_{= -Q}$$

è di troppo! (se V dipende da $\dot q$, in generale è $\neq 0$)

def $Q(q,\dot q,t)$ ammette "potenziale dipendente dalle velocità" se $\exists\ V(q,\dot q,t)$ t.c.

$$Q_i(q,\dot q,t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad \forall i,\ \forall q,\dot q,t$$

In questo caso, le equazioni di Lagrange si scrivono nella forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

con $L(q,\dot q,t) = T(q,\dot q,t) - V(q,\dot q,t)$.

Vogliamo capire quando succede

V dipende da $q,\dot q,t \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \dot q_i}$ dipende da $q,\dot q,t \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot q_i}$ dipende da $q,\dot q,\ddot q,t$

questa dipendenza è di troppo ...

$$Q_i(q,\dot q,t) = \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot q_i}\right)(q,\dot q,\ddot q,t) - \frac{\partial V}{\partial q_i}(q,\dot q,t)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial \dot q_j \partial \dot q_i}\ddot q_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial \dot q_i}\dot q_j + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \dot q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

$$\overset{\shortparallel}{0} \iff \frac{\partial^2 V}{\partial \dot q_j \partial \dot q_i} = 0 \quad \forall i,j \quad \forall q,\dot q,t$$

$$\iff \frac{\partial^2 V}{\partial \dot q\, \partial \dot q}(q,\dot q,t) = 0 \quad \forall q,\dot q,t$$

prop Q ammette "potenziale dipendente da t" $V(q,\dot q,t)$

1. V è affine nelle $\dot q$

$$V(q,\dot q,t) = \underbrace{V_0(q,t)}_{\text{indipendente da } \dot q} + \underbrace{V_1(q,\dot q,t)}_{\text{lineare in } \dot q}$$

2. Se, inoltre, $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ $\left(\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} = 0\right)$, allora

$$Q(q,\dot q,t) = -\nabla V_0(q) + \Psi(q)\dot q$$

con $\Psi(q)$ matrice $n \times n$ antisimmetrica $(\Psi(q) = -\Psi(q)^t)$

dim 1. $\frac{\partial V}{\partial \dot q}$ non dipende da $\dot q$

$$\frac{\partial V}{\partial \dot q} = \beta(q,t) \in \mathbb{R}^n$$

Integro: $V(q,\dot q,t) = \beta(q,t)\cdot \dot q + V_0(q,t)$

$$= V_1(q,\dot q,t) + V_0(q,t)$$

2. $$Q_i = \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial \dot q_i} \dot q_j}_{\sum_{j=1}^n \beta_j \dot q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \dot q_i} = \beta_i$

sostituisco $V = \beta(q)\dot q + V_0(q)$, $\frac{\partial V}{\partial \dot q} = \beta$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial V}{\partial \dot q_i}\dot q_j - \frac{\partial}{\partial q_i}(\beta \dot q + V_0)$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \beta_i}{\partial q_j}\dot q_j - \frac{\partial}{\partial q_i}\sum_{j=1}^n \beta_j \dot q_j - \frac{\partial V_0}{\partial q_i}$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial q_j}\dot q_j - \frac{\partial \beta_j}{\partial q_i}\dot q_j\right) - \frac{\partial V_0}{\partial q_i}$$

$$= \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\frac{\partial \beta_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \beta_j}{\partial q_i}\right)}_{\Psi_{ij} = -\Psi_{ji}} \dot q_j - \frac{\partial V_0}{\partial q_i}$$

$$= [\Psi \dot q]_i - \frac{\partial V_0}{\partial q_i}$$ □

Guardiamo la potenza di Q.

$Q(q,\dot q)\cdot \dot q = \Psi(q)\dot q \cdot \dot q = 0$ $\forall q,\dot q$ perché Ψ è antisimmetrica

la parte conservativa non contribuisce

esempio Coriolis è forza dipendente dalle velocità a potenza nulla

(anche forza di Lorentz)

→ pagina 50

<u>oss</u> La parte dipendente dalle velocità di $Q = \Psi(q)\dot{q}$.

Se $n=3$ si ha un caso speciale.

Sia $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

Considero operatore lineare $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$u \longmapsto w \wedge u = \underbrace{\hat{w}}_{\text{matrice } 3\times3} u$$

$$= \begin{pmatrix} w_2u_3 - w_3u_2 \\ w_3u_1 - w_1u_3 \\ w_1u_2 - w_2u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

si ha $\hat{w} = -\hat{w}^t$ matrice antisimmetrica.

$\forall$ matrice $W \in \underbrace{\text{Skew}}_{\text{matrici antisimmetriche}}(3,\mathbb{R})$ $\exists!$ $w \in \mathbb{R}^3$ tc $W = \hat{w}$

Dunque in $\mathbb{R}^3$ $Q = \Psi(q)\dot{q} = y(q) \times \dot{q}$

<u>oss</u>

- $\text{Skew}(3,\mathbb{R})$ è sp. vett. di dim 3

  $\mathbb{R}^3$ è sp. vett. di dim 3

  $\wedge : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \text{Skew}(3,\mathbb{R})$ è mappa lineare e invertibile $\Rightarrow$ è isomorfismo

- le matrici possono anche essere moltiplicate, dunque $\text{Skew}(3,\mathbb{R})$ forma anche un'algebra. Sia $\text{Skew}(3,\mathbb{R}) = S_3$:

  commutatore : $[\ ,\ ] : S_3 \times S_3 \longrightarrow S_3$

  $$(A, B) \longmapsto [A,B] = AB - BA$$

  - $(AB-BA)^t = B^tA^t - A^tB^t = BA - AB \Rightarrow [A,B] \in S_3$
  - prodotto antisimmetrico $[A,B] = -[B,A]$
  - vale l'"identità di Jacobi": $\forall A,B,C \in S_3$

    $$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$$

  ALGEBRA DI LIE

- $(\mathbb{R}^3, \wedge)$

  $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è antisimmetrica e soddisfa l'identità di Jacobi

  <u>esercizio</u> $\widehat{u \times v} = \hat{u}\hat{v} - \hat{v}\hat{u} = [\hat{u},\hat{v}]$

  ma allora $\wedge$ è isomorfismo non solo di sp. vett. ma anche come algebre esempio (forza di Coriolis) $N=1$, $x \in \mathbb{R}^3$, $\omega \in \mathbb{R}^3$

$$f_{cor}(x,\dot{x}) = -2m\,\omega \wedge \dot{x}$$

Ammette potenziale dip. dalle velocità? Sì

Candidato: $$U_{cor}(x,\dot{x}) = -m\,\underbrace{x \wedge \dot{x}}_{\text{momento angolare del punto}} \cdot \underbrace{\omega}_{\text{velocità angolare del riferimento}}$$

verifica: $$\frac{\partial U_{cor}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-m\, x \cdot \dot{x}\wedge\omega\right) = -m(\dot{x}\wedge\omega)_i$$

$$\frac{\partial U_{cor}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(-m\,\omega\wedge x\cdot\dot{x}\right) -m(\omega\wedge x)_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U_{cor}}{\partial \dot{x}_i}\right) = -m(\omega\wedge\dot{x})_i$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U_{cor}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial U_{cor}}{\partial x_i} = -m(\omega\wedge\dot{x}) + m(\dot{x}\wedge\omega) = -2m(\omega\wedge\dot{x})$$
$$= f_{cor}(x,\dot{x})$$

oss Supponiamo $F(x,\dot{x},t)$ ammetta potenziale dipendente da velocità $\tilde{U}(x,\dot{x},t)$, ovvero si abbia $$F = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial\tilde{U}}{\partial x}.$$
Vincolo con coord. Lagr $(q,\dot{q})$. Allora anche $Q(q,\dot{q},t)$ ammette pot. dip. da velocità

$$V(q,\dot{q},t) = \tilde{U}\left(\tilde{X}(q,t),\ \frac{\partial\tilde{X}}{\partial q}(q,t)\,\dot{q} + \frac{\partial\tilde{X}}{\partial t}(q,t),\ t\right)$$