SUPERFICI DIFFERENZIABILI IN $\mathbb{R}^N$

Definizioni

def Una SUPERFICIE DIFFERENZ. in $\mathbb{R}^N$ è un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}^N$ che sia una sottovarietà differenziabile di dim 2. Abbiamo 2 condizioni equiv:

- $\forall x_0 \in S \ \exists \ x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto e $F: U \longrightarrow \mathbb{R}^{N-2}$ funzione C^∞ con $rg(JF(x)) = N-2 \ \ \forall x \in U$ e $S \cap U = F^{-1}(0)$.
- $\forall x_0 \in S \ \exists \ x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, $V \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $\varphi: V \longrightarrow U \cap S$ parametrizzazione regolare, cioè φ verifica:
  - (i) $\varphi: V \longrightarrow U \cap S$ è biettiva
  - (ii) $\varphi: V \longrightarrow U \cap S \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^N$ è C^∞
  - (iii) $\forall t \in V \ \ rg(J\varphi(t)) = 2$
  - (iv) φ è un omeomorfismo tra V e $U \cap S$

oss se $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Allora $\varphi(u,v) = (x_1(u,v), \dots, x_N(u,v))$ con x_i funzioni C^∞ su V

$$\text{Allora } J\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x_1}{\partial v}(u,v) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x_N}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \in M_{N\times 2}(\mathbb{R})$$

chiamiamo
$$\varphi_u(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(u,v) \\ \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

$$\varphi_v(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial v}(u,v) \\ \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

In particolare, se φ è param. regolare, $\varphi_u(u,v)$ e $\varphi_v(u,v)$ sono lin. indipendenti

def • $S \subseteq \mathbb{R}^N$ una sup. diff. in $\mathbb{R}^N$, $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione continua.

Allora $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ è funzione C^∞ se vale una delle seguenti 2 condizioni equivalenti:

- (i) $\forall \ p \in S \ \exists \ p \in U \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto e $\tilde{f}: U \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione C^∞ tc $f|_{U \cap S} = \tilde{f}|_{U\cap S}: U \cap S \longrightarrow \mathbb{R}$

  è "estendibile" ad una funzione C^∞

- (ii) $\forall \ p \in S \ \exists \ \varphi: \underset{\subseteq \mathbb{R}^2}{V} \longrightarrow U \cap S \subseteq S$ param. regolare di S tc $f \circ \varphi: V \longrightarrow \mathbb{R}$ è C^∞

esercizio Dimostrare che se $S \subseteq \mathbb{R}^N$ è sup. diff. di $\mathbb{R}^N$, $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, allora (i) $\Longleftrightarrow$ (ii)

- Siano $S \subseteq \mathbb{R}^N$ e $T \subseteq \mathbb{R}^M$ due superfici diff, una funzione continua $F: S \longrightarrow T$ è detta C^∞ (oppure differenziabile) se $\forall\, p \in S$ esiste una parametrizzazione regolare $\varphi: \underset{\mathbb{R}^2}{\overset{\cap}{V}} \longrightarrow \underset{S}{\overset{\cap}{U \cap S}} \ni p$ tc $F \circ \varphi: V \longrightarrow S \longrightarrow T \subseteq \mathbb{R}^N$ è una funzione C^∞
- Siano $S \subseteq \mathbb{R}^N$, $T \subseteq \mathbb{R}^M$ due superfici diff, allora $F: S \longrightarrow T$ è un diffeomorfismo se F è biettiva, C^∞ e $F^{-1}: T \longrightarrow S$ è C^∞.

<u>esempi</u> 1) $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto è una superficie diff in $\mathbb{R}^2$

<u>esercizio</u> Ogni sup. diff. in $\mathbb{R}^2$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$

2) $H \subseteq \mathbb{R}^n$ sottosp. affine di dim 2 è sup. diff.

$H = P_0 + \langle w_1, w_2 \rangle$, w_1, w_2 lin. indip.

param. regolare: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow H$

$$(t_1, t_2) \longmapsto P_0 + t_1 w_1 + t_2 w_2$$

- è C^∞
- $J = (w_1 , w_2)$
- è omeomorfismo

3) $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ è sup. diff.

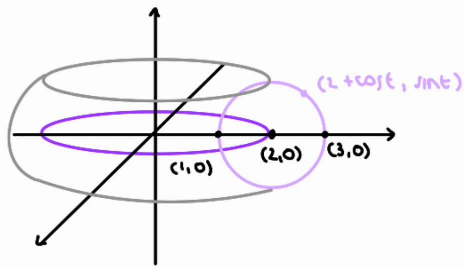
param. regolare: quelle che vanno dai dischi nelle calotte sferiche

4) $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è varietà astratta, ma non sappiamo se e come $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^N$ $\exists N$.

vedremo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^4$, ma $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \not\subseteq \mathbb{R}^3$.

5) (toro)

Ruotiamo i punti $(2+\cos t, \sin t)$ intorno all'asse z



$(t, s) \longmapsto ((2+\cos t)\cos s, (2+\cos t)\sin s, \sin t)$

$\Phi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Allora $\Phi(\mathbb{R}^2) = S \subseteq \mathbb{R}^3$ è una sup. diff di $\mathbb{R}^3$:

$\forall (t_0, s_0)$ $\quad \Phi|_{(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\times(s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon)} : U \longrightarrow \Phi(U)$ è una param. regolare

<u>attenzione</u> se $\Phi: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^N$ è una funzione iniettiva, C^∞, con $\operatorname{rg}(J\Phi) = m$ ovunque, non è detto che sia una param regolare di $\Phi(\mathbb{R}^m)$.

Per esempio abbiamo visto: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad \infty$

$t \longmapsto (\cos(2t), \sin t)$

6) $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Allora $X = S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^4$ è una sup. diff.

Consideriamo : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow X \subseteq \mathbb{R}^4$ è C^∞

$$(t,s) \longmapsto (\cos t, \sin t, \cos s, \sin s)$$

Allora (i) $\Phi(\mathbb{R}^2) = X$

(ii) $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow X$ è aperta

(iii) $rg(J\Phi(t,s)) = 2 \quad \forall (t,s) \in \mathbb{R}^2$

(iv) $\Phi|_{(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\times(s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon)}$ è param. regolare

esercizio mostrare che X è diffeomorfa al toro, cioè definire

$S^1 \times S^1 \longrightarrow T \subseteq \mathbb{R}^3$ diffeomorfismo

7) $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ funzione C^∞, allora $\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in U, z = f(x,y)\}$

è una superficie diff.

Una param. regolare è la mappa $\varphi : U \longrightarrow \Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^3$

$$(x,y) \longmapsto (x,y,f(x,y))$$

con inversa $\pi : \Gamma_f \longrightarrow U$

$$(x,y,z) \longmapsto (x,y)$$

8) sia $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^M$, $U \subseteq \mathbb{R}^N$ con $M < N$, F di classe C^∞

Chiamiamo PUNTI CRITICI i punti $p \in U$ tc $rg(JF(p)) < M$

VALORI CRITICI i punti di $F(U)$ immagini di punti critici

VALORI REGOLARI i punti di $F(U)$ che non sono valori critici

se $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^{N-2}$, $U \subseteq \mathbb{R}^N$ funz. C^∞. se $c \in F(U) \subseteq \mathbb{R}^{N-2}$ è valore regolare,

allora $F^{-1}(c) \subseteq \mathbb{R}^N$ è una sup. diff.

In particolare, se $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^3$ una funz. C^∞, allora i punti critici

sono i punti $p \in U$ tc $\nabla f(p) = (0,0,0)$ e $F^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^3$ è

una sup. diff se c è un valore regolare.

esercizio consideriamo in $\mathbb{R}^3$ $Q(x,y,z)$ polinomio di grado 2.

$Q(x,y,z) = 0$ è l'eq. di una quadrica affine

se $Q(x,y,z)$ è quadrica non degenere,

$supp(Q) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : Q(x,y,z) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ è sup. diff.

Spazio tangente e cambiamento di coordinate

def Sia $S \subseteq \mathbb{R}^N$ una superficie diff. in $\mathbb{R}^N$ e $p \in S$.

Lo SPAZIO TANGENTE a S in p è l'insieme

$$\mathbb{R}^N \supseteq T_pS = \{v \in \mathbb{R}^N \mid \exists\, \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^N \text{ curva parametrica } C^\infty$$
$$\text{con } \alpha(0) = p \text{ e } \alpha'(0) = v\}$$

prop Sia $\varphi : V \longrightarrow U \subseteq S$ una param. regolare di S e sia $p = \varphi(u_0, v_0)$ con $(u_0, v_0) \in V$.

Allora $T_pS = \langle \varphi_u(u_0, v_0), \varphi_v(u_0, v_0) \rangle \subset \mathbb{R}^N$. $T_pS = \operatorname{Im} d\varphi(u_0, v_0)$

(In particolare, T_pS è sottosp. vett. di dim 2.)

dim
- Mostriamo $\langle \varphi_u(u_0, v_0), \varphi_v(u_0, v_0) \rangle \subseteq T_pS$.

  Sia $w = \lambda \varphi_u(u_0, v_0) + \mu \varphi_v(u_0, v_0)$.

  Consideriamo $\alpha : t \longmapsto \varphi(u_0 + t\lambda, v_0 + t\mu) \in S$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

  ($\varepsilon > 0$ "abbastanza piccolo" t.c. $(u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon) \times (v_0 - \varepsilon, v_0 + \varepsilon) \subseteq V$)

  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(u_0 + t\lambda, v_0 + t\mu) = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0 + t\lambda) + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial v}(v_0 + t\mu)$

  $\alpha'(0) = \lambda \varphi_u(u_0, v_0) + \mu \varphi_v(u_0, v_0) \in T_pS$

- Viceversa, sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^N$ C^∞ con $\alpha(0) = p$.

  Sia $w = \alpha'(0) \in T_pS$. Senza restrizioni possiamo supporre che

  $(0,0) \in V$, $\varphi(0,0) = p$ e che $\alpha((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq U$.

  Poiché $\varphi^{-1} : U \longrightarrow V$ è funzione C^∞, allora $\beta = \varphi^{-1} \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^2$

  è curva C^∞ con $\beta(0) = \varphi^{-1}(p) = (0,0) \in V \subseteq \mathbb{R}^2$.

  $\alpha = \varphi \circ \beta \implies \beta'(0) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

  $w = \alpha'(0) = J\varphi(0,0) \cdot \beta'(0) = (\varphi_u(0,0) \,,\, \varphi_v(0,0)) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \beta_1 \varphi_u(0,0) + \beta_2 \varphi_v(0,0)$

idea: se fisso $v = v_0$, allora ottengo
$\gamma(u) = \varphi(u, v_0)$ curva diff. param. su S
$\gamma'(u) = \varphi_u(u, v_0)$
$\implies \gamma'(u_0) = \varphi_u(u_0, v_0) \in T_pS$

$\square$

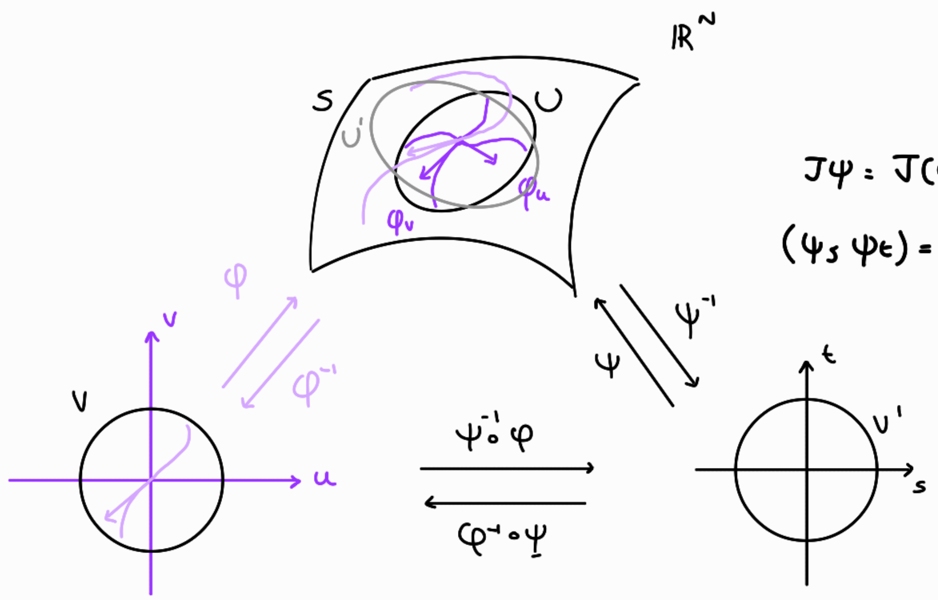
corollario T_pS è sp. vett. di dim 2 in $\mathbb{R}^N$

corollario Se $\varphi : V \longrightarrow U \subseteq S$ e $\psi : V' \longrightarrow U' \subseteq S$ sono due parametrizzazioni regolari di S con $\varphi(0,0) = \psi(0,0) = p \in U \cap U'$. Allora $(u,v) \in V$, $(u',v') \in V'$

$\langle \varphi_u(0,0), \varphi_v(0,0) \rangle = \langle \psi_{u'}(0,0), \psi_{v'}(0,0) \rangle$

Scriviamo la matrice di cambiamento di base

ricordiamo $\mathbb{E} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathbb{F} = (f_1, \dots, f_n)$ basi di V $\implies \mathbb{F} = \mathbb{E}P$ con $P \in GL_n(\mathbb{R})$



$J\psi = J(\varphi)\cdot J(\varphi^{-1}\cdot\psi)$

$(\psi_s\ \psi_t) = (\varphi_u\ \varphi_v)\ \boxed{J(\varphi^{-1}\cdot\psi)}$ matrice di cambiamento di base

$p \in U\cap U'$, $\quad \underset{(u_0,v_0)}{\varphi^{-1}(p)} \in V\cap\varphi^{-1}(U')$, $\quad \underset{(u_0',v_0')}{\psi^{-1}(p)} \in V'\cap\psi^{-1}(U)$

sarebbe $U'\cap U$

$h = \psi^{-1}\circ\varphi \ : \ V\cap\varphi^{-1}(U') \longrightarrow V'\cap\psi^{-1}(U)$

$(u,v) \longmapsto (u',v') = h(u,v) = (u'(u,v), v'(u,v))$

$p = \varphi(u_0,v_0) = \psi(u_0',v_0')$, $\varphi = \psi\circ h$

$$Jh = \begin{pmatrix} \frac{\partial u'}{\partial u} & \frac{\partial u'}{\partial v} \\ \frac{\partial v'}{\partial u} & \frac{\partial v'}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$\varphi(u,v) = \psi(u'(u,v), v'(u,v))$

prodotto di matrici

$$\Rightarrow \quad J\varphi(u_0,v_0) = J\psi(h(u_0,v_0))\cdot Jh(u_0,v_0)$$
$$= J\psi(u_0',v_0')\cdot Jh(u_0,v_0)$$
$$= (\psi_{u'}\ \ \psi_{v'})\, Jh(u_0,v_0)$$
$$E = F \cdot P$$

$P \in GL_n(\mathbb{R})$, matrice di cambiamento di base

esempi 1) $S^2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2+z^2=1\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$p = (0,0,1)$ $\qquad U = S^2 \cap \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z>0\}$

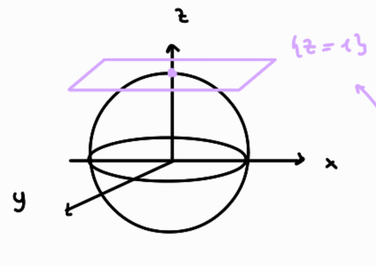
- param. regolare : $\varphi : (s,t) \longmapsto (s,t,\sqrt{1-s^2-t^2}) \in S^2$

$$D_1(0) \longrightarrow U$$

$$\varphi_s(s,t) = \left(1,\ 0,\ -\frac{s}{\sqrt{1-s^2-t^2}}\right)$$

$$\varphi_t(s,t) = \left(0,\ 1,\ -\frac{t}{\sqrt{1-s^2-t^2}}\right)$$

sono lin. indipendenti $\Rightarrow$ $T_pS = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$



$\underbrace{T_pS : z=0}_{\text{spazio VETTORIALE tangente}}$ $\neq$ spazio AFFINE tangente

- usiamo le proiezioni stereografiche

$\psi^{-1} : S^2 \setminus \{\overset{q}{(0,0,-1)}\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ proiez. stereografica

$P_0 = (x_0,y_0,z_0) \longmapsto L(P_0, (0,0,-1)) \cap \{z=0\}$

$L(P_0,(0,0,-1)) = \{(tx_0, ty_0, -1+t(z_0+1)) : t\in\mathbb{R}\}$

$\underset{\shortparallel}{L(P_0,(0,0,-1)) \cap \{z=0\}} \rightsquigarrow t = \frac{1}{z_0+1}$

$\Rightarrow \left(\frac{x_0}{z_0+1}, \frac{y_0}{z_0+1}, 0\right)$

$\psi^{-1}(x_0,y_0,z_0) = \left(\frac{x_0}{z_0+1}, \frac{y_0}{z_0+1}, 0\right) \rightsquigarrow \psi^{-1}(x_0,y_0,z_0) = \left(\frac{x_0}{z_0+1}, \frac{y_0}{z_0+1}\right)\in\mathbb{R}^2$

$\psi : (s,t) \longmapsto L((s,t),(0,0,-1)) \cap S^2 =$

$= \{(ds, dt, d-1) : d\in\mathbb{R} \text{ e } d^2s^2+d^2t^2+(d-1)^2=1\}$

$d(ds^2+dt^2+d-2)=0$ escludo $d=0$ (da' $(0,0,-1)$) e ottengo

$d(s^2+t^2+1)=2$

$\Rightarrow \psi(s,t) \longmapsto \left(\frac{2s}{s^2+t^2+1}, \frac{2t}{s^2+t^2+1}, \frac{1-s^2-t^2}{s^2+t^2+1}\right)$

$\varphi_s(0,0)=(2,0,0) \qquad \varphi_t(0,0)=(0,2,0)$

$T_qS = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = \{z=0\}$ (come prima)

esercizio scrivere esplicitamente $\psi^{-1}(\varphi(s,t))$ e $\varphi^{-1}(\psi(s,t))$

e la matrice Jacobiana $J(\psi^{-1}\circ\varphi)$ e $J(\varphi^{-1}\circ\psi)$

2) • $T = S^1\times S^1 \subseteq \mathbb{R}^4$

$\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T$

$(s,t) \longmapsto (\cos s, \sin s, \cos t, \sin t)$

sappiamo $\varphi = \Phi|_{(s_0-\varepsilon,s_0+\varepsilon)\times(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)} : \ldots \longrightarrow U\subseteq T$ e' param. regolare

$\varphi_s = (-\sin s, \cos s, 0, 0)$

$\varphi_t = (0, 0, -\sin t, \cos t)$

sono lin. indipendenti

• S toro in $\mathbb{R}^3$

$\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S\subset\mathbb{R}^3$

$(s,t) \longmapsto ((2+\cos t)\cos s, (2+\cos t)\sin s, \sin t)$

$S = \Psi(\mathbb{R}^2)$

basta $\varepsilon<\pi$

sappiamo $\psi : \Psi|_{(s_0-\varepsilon,s_0+\varepsilon)\times(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)}$ e' param. regolare per S

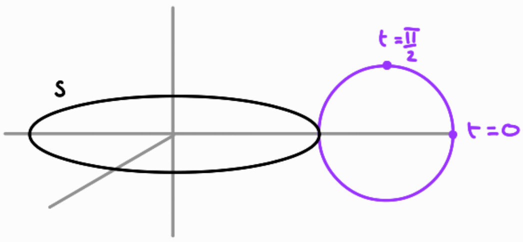
$$\psi_s = ((2+\cos t)(-\sin s),\ (2+\cos t)\cos s,\ 0)$$

$$\psi_t = ((-\sin t)\cos s,\ (-\sin t)(\sin s),\ \cos t)$$

sono lin. indipendenti

$$t=\frac{\pi}{2}: \quad T_p(S) = \left\langle \begin{pmatrix} -2\sin s \\ 2\cos s \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cos s \\ -\sin s \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \{t=0\}$$

$$t=0: \quad T_p(S) = \left\langle \begin{pmatrix} -3\sin s \\ 3\cos s \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \{x+y=0\}$$



<u>esercizio</u> Costruire un diffeomorfismo

$$S^1 \times S^1 \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$

$$(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) \longmapsto ((2+\cos\theta)\cos\varphi,\ (2+\cos\theta)\sin\varphi,\ \sin\theta)$$

si offerci

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{id} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Psi \\ S^1 \times S^1 & \longrightarrow & S \end{array}$$

Differenziale

def Sia $F : S \longrightarrow T$ ($S \subseteq \mathbb{R}^n$, $T \subseteq \mathbb{R}^m$) una mappa C^∞ tra due superfici differenziabili.

Il **DIFFERENZIALE** di F in $p \in S$ è la mappa

$$d_pF : T_pS \longrightarrow T_{F(p)}T$$
$$\omega = \alpha'(0) \longmapsto (F\circ\alpha)'(0)$$

Questa mappa è ben definita e lineare. (non dipende dalla scelta di α)

dim • Sia $\beta : (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow S$ curva tc $\beta'(0) = \omega = \alpha'(0)$ e $\beta(0) = p$

sia $\varphi : U \longrightarrow S$ ($U \subseteq \mathbb{R}^2$) una param. locale centrata in $p\in S$ ($\varphi(0,0)=p$)

$\tilde\alpha = \varphi^{-1}\circ\alpha \;:\; (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow U$

$\tilde\beta = \varphi^{-1}\circ\beta \;:\; (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow U$

$\tilde F = F\circ\varphi \;:\; U \longrightarrow T$

$F\circ\alpha = \tilde F\circ\tilde\alpha$

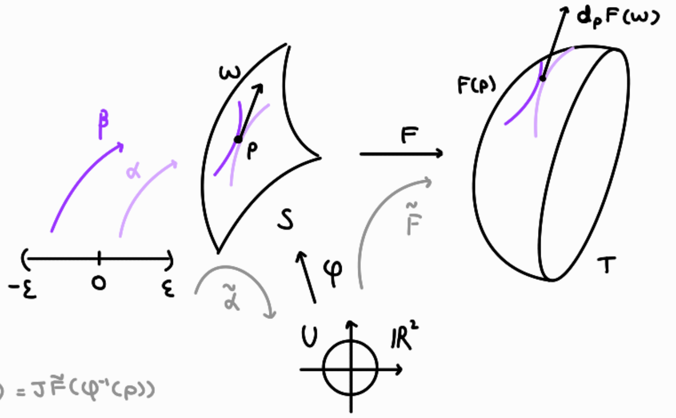
$F\circ\beta = \tilde F\circ\tilde\beta$ $\quad J\tilde F(\tilde\alpha(0)) = J\tilde F(\varphi^{-1}\circ\alpha(0)) = J\tilde F(\varphi^{-1}(p))$

$(F\circ\alpha)'(0) = (\tilde F\circ\tilde\alpha)'(0) = (J\tilde F(0,0))\cdot\tilde\alpha'(0)$

$(F\circ\beta)'(0) = (\tilde F\circ\tilde\beta)'(0) = (J\tilde F(0,0))\cdot\tilde\beta'(0)$

$\alpha'(0) = \beta'(0) \Rightarrow \tilde\alpha'(0) = \tilde\beta'(0)$ $\quad \tilde\alpha'(0) = (\varphi^{-1}\circ\alpha)'(0) = ((\varphi^{-1})'(\alpha(0)))\,\alpha'(0) = ((\varphi^{-1})'(\beta(0)))\,\beta'(0) = \tilde\beta'(0)$

$\Rightarrow (d_pF)\,\omega = (F\circ\alpha)'(0) = (F\circ\beta)'(0)$



• $T_pS = \langle \varphi_u(0,0), \varphi_v(0,0)\rangle$

$\varphi_u(0,0) = \alpha'(0)$ dove $\alpha(t) = \varphi(t,0)$

$\varphi_v(0,0) = \beta'(0)$ dove $\beta(t) = \varphi(0,t)$

Quindi $(F\circ\alpha)'(0) = \frac{d}{dt}(F(\varphi(t,0)))\Big|_0 = \frac{d}{dt}(\tilde F(t,0))\Big|_0 = (J\tilde F(0,0))\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\tilde F \overset{def}{=} F\circ\varphi$

e analog: $(F\circ\beta)'(0) = \frac{d}{dt}(F(\varphi(0,t))) = \frac{d}{dt}(\tilde F(0,t)) = (J\tilde F(0,0))\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow (J\tilde F(0,0)) \in M_{m\times 2}(\mathbb{R})$ e rappresenta $T_pS \xrightarrow{d_pF} T_{F(p)}T \subseteq \mathbb{R}^m$

$\tilde F = F\circ\varphi : U \longrightarrow S \longrightarrow T \subseteq \mathbb{R}^m$ con $\tilde F(u,v) = F\circ\varphi(u,v) = (y_1(u,v),\dots,y_m(u,v))$

$(d_pF)(\varphi_u(u_0,v_0)) = \begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial u}(u_0,v_0)\\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial u}(u_0,v_0)\end{pmatrix}$ $\quad p = \varphi(u_0,v_0)$ $\qquad (d_pF)(\varphi_v(u_0,v_0)) = \begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial v}(u_0,v_0)\\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial v}(u_0,v_0)\end{pmatrix}$

$\Rightarrow (d_pF)(\lambda\varphi_u(u_0,v_0) + \mu\varphi_v(u_0,v_0)) = \lambda\, d_pF(\varphi_u(u_0,v_0)) + \mu\, d_pF(\varphi_v(u_0,v_0))$.

oss 1 Se $S \xrightarrow{F} T \xrightarrow{G} Z$, allora si ha

$$\begin{tikzcd} T_pS \arrow[r, "d_pF"] \arrow[rr, bend right] & T_{F(p)}T \arrow[r, "d_{F(p)}G"] & T_{G(F(p))}Z \end{tikzcd}$$

dunque per costruzione $d_p(G\circ F) = d_{F(p)}G \circ d_pF$

oss 2 Se $F : S \longrightarrow T$ è un diffeo, allora $d_pF : T_pS \longrightarrow T_{F(p)}T$ è un'applicazione lineare invertibile

Il differenziale di $F: S \longrightarrow T$ si può calcolare nelle basi date da parametrizzazioni per S e T.

Considero

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "F"] & T \\ U \arrow[u, "\varphi"] & V \arrow[u, "\psi"'] \\ (u,v) \arrow[u, phantom, "\in" rotate] & (r,s) \arrow[u, phantom, "\in"] \end{tikzcd}$$

con $\varphi(0,0) = p$, $\psi(0,0) = F(p)$

base $\mathbb{E} = (\varphi_u(0,0), \varphi_v(0,0))$ di T_pS

base $\mathbb{F} = (\psi_r(0,0), \psi_s(0,0))$ di $T_{F(p)}T$

Siccome ψ è localmente invertibile, posso considerare la composizione:

$\tilde{\tilde{F}} = \psi^{-1}\circ F \circ \varphi$: aperto di $(0,0) \subseteq U \longrightarrow$ aperto di $(0,0) \subseteq V$

$$\begin{tikzcd} \varphi_u & \varphi_v & T_pS \arrow[r, "d_pF"] & T_{F(p)}T & \varphi_r & \varphi_s \\ \binom{1}{0} \arrow[u] & \binom{0}{1} \arrow[u] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\cong"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\cong"'] & \binom{1}{0} \arrow[u] & \binom{0}{1} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $J\tilde{\tilde{F}}(0,0) \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ è la matrice di d_pF nelle basi $\mathbb{E} = (\varphi_u, \varphi_v)$ e $\mathbb{F} = (\psi_r, \psi_s)$

<u>esempio</u>

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \arrow[r, "F"] & \mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}^2 \supseteq U \arrow[u, bend right, "\varphi"'] & \mathbb{R}^2 \supseteq W \arrow[u, bend left, "\psi"] \end{tikzcd}$$

$(\cos u, \sin u, \cos v, \sin v) \longmapsto ((2+\cos u)\cos v, (2+\cos u)\sin v, \sin u)$

$(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$

$\mathbb{R}^2 \ni (s,t) \mapsto ((2+\cos s)\cos t, (2+\cos s)\sin t, \sin s)$

in un certo intorno U (ad esempio $(0,2\pi)\times(0,2\pi)$) è invertibile $\Rightarrow$ param locale

param locale ristretta ad un opportuno aperto

$\tilde{\tilde{F}} = \psi^{-1}\circ F\circ\varphi : (u,v) \longmapsto (u,v)$ $\Rightarrow J\tilde{\tilde{F}}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

base di $T_p(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ $\rightsquigarrow$ base di $T_{\psi(s,t)}\mathbb{T}$

$$\mathbb{E} = \Big\langle \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\varphi_u}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin v \\ \cos v \end{pmatrix}}_{\varphi_v} \Big\rangle \rightsquigarrow \mathbb{F} = \Big\langle \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}}_{\psi_u}, \underbrace{\begin{pmatrix} (2+\cos u)(-\sin v) \\ (2+\cos u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix}}_{\psi_v} \Big\rangle$$

nelle basi $\mathbb{E}$ ed $\mathbb{F}$ $\quad d_pF$ ha matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

e $\quad d_pF(\varphi_u) = \psi_u \quad , d_pF(\varphi_v) = \psi_v$

<u>oss</u> Dato un diffeo. la sua composizione con una param. è ancora param.

Prima forma fondamentale

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^N$ sup. diff. $p \in S$, $T_pS \subseteq \mathbb{R}^N$

Il prodotto scalare standard $\cdot : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ si restringe ad un prodotto scalare $I_p : T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$ detto PRIMA FORMA FONDAMENTALE di S in $p \in S$.

Consideriamo $\varphi : V \longrightarrow U \subseteq S$ param. regolare con $p \in U$, allora otteniamo una base $\mathcal{E} = (\varphi_u, \varphi_v)$ per lo sp. tangente T_pS.

Allora se $\omega_1 = \mathcal{E}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \underline{d}$, $\omega_2 = \mathcal{E}\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \underline{\mu}$ due vettori in T_pS, avremo

$$I_p(\omega_1, \omega_2) = I_p(\mathcal{E}\underline{d}, \mathcal{E}\underline{\mu}) = {}^t\underline{d} A \underline{\mu}, \quad A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

prodotto scalare standard

dove $E = \varphi_u \cdot \varphi_u > 0$, $G = \varphi_v \cdot \varphi_v > 0$, $F = \varphi_u \cdot \varphi_u$.

$\det(A) = EG - F^2 > 0$ (perché è forma bil. def. pos.)

<u>oss</u>

- Al variare di $p \in U \subseteq S$ varia I_p e varia la matrice $A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ di I_p in base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$. Se chiamiamo $(u,v) \in V \subseteq \mathbb{R}^2$ abbiamo $\varphi_u(u,v), \varphi_v(u,v) \in \mathbb{R}^N$ e dunque le funzioni reali

$$E(u,v) = \varphi_u(u,v) \cdot \varphi_u(u,v)$$

$$F(u,v) = \varphi_u(u,v) \cdot \varphi_v(u,v)$$

$$G(u,v) = \varphi_v(u,v) \cdot \varphi_v(u,v)$$

$$A(u,v) = \begin{pmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{pmatrix}$$ è la matrice di $I_p : T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$

nel punto $p = \varphi(u,v)$ nella base $\{\varphi_u(u,v), \varphi_v(u,v)\}$ di T_pS.

- La forma bilineare $I_p : T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$ non dipende dalla parametrizz. $\varphi : V \longrightarrow U \subseteq S$, ma la base $\{\varphi_u(u,v), \varphi_v(u,v)\}$ sì, quindi anche $E, F, G : V \longrightarrow \mathbb{R}$ dipendono da φ (e sono funzioni C^∞).
- La forma I_p permette di calcolare lunghezze, aree, etc.

<u>def</u>

- Sia $S \subseteq \mathbb{R}^N$ una sup. diff., $p_1, p_2 \in S$. La DISTANZA INTRINSECA tra p_1 e p_2 come

$$\rho(p_1, p_2) := \inf \left\{ L(\alpha, [t_1, t_2]) \ : \ \begin{array}{l} \alpha : I \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^N \text{ curva param. } C^\infty \\ \text{con } \alpha(t_1) = p_1 \text{ e } \alpha(t_2) = p_2 \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^{\geq 0}$$

- Un'ISOMETRIA tra sup. diff. $S \subseteq \mathbb{R}^N$ e $\tilde{S} \subseteq \mathbb{R}^M$ è un diffeomorfismo $F : S \longrightarrow \tilde{S}$ t.c. $\forall p \in S$ $d_pS : T_pS \longrightarrow T_{F(p)}\tilde{S}$ è un'isometria, cioè $\forall p \in S$, $\forall v, w \in T_pS$, $I_p(v,w) \underset{(*)}{=} I_{F(p)}(d_pFv, d_pFw)$

prop Sia $F: S \longrightarrow \tilde{S}$ un diffeomorfismo. Allora F è un'isometria se e solo se $\forall \alpha: I \longrightarrow S$ curva diff. param., $\forall [t_1, t_2] \subseteq I$, si ha
$L(\alpha, [t_1,t_2]) = L(F \circ \alpha, [t_1,t_2])$

dim ($\Rightarrow$) Supponiamo che $\forall p \in S$, $d_pF: T_pS \longrightarrow T_{F(p)}\tilde{S}$ isometria

denotiamo con I_p anche la forma quadratica $I_p(v) = I_p(v,v)$

sia $\alpha: I \longrightarrow S$, allora

$$L(\alpha, [t_1,t_2]) = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t))} \, dt = (*)$$

$$L(F\circ\alpha, [t_1,t_2]) = \int_{t_1}^{t_2} \|(F\circ\alpha)'(s)\| \, ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{I_{F(\alpha(s))}(\underbrace{(F\circ\alpha)'(s)}_{(d_{\alpha(s)}F)(\alpha'(s))})} \, ds$$

$$\overset{(*)}{=} \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{I_{\alpha(s)}(\alpha'(s))} \, ds = (*)$$

($\Leftarrow$) Supponiamo la lunghezza di α e $F\circ\alpha$ coincida $\forall \alpha: I \longrightarrow S$ curva, $\forall [t_1,t_2] \subset I$. $F: S \longrightarrow \tilde{S}$ diffeomorfismo

sia $p \in S$, $v \in T_pS$ $v \neq 0$. $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$ con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$.

Fissiamo $\varepsilon_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e consideriamo $\ell(t) = \int_{\varepsilon_0}^{t} \|\alpha'(s)\| \, ds$.

Allora $\frac{d}{dt}\ell(t)\Big|_{t=0} = \|\alpha'(0)\| = \sqrt{I_{\alpha(0)}(\alpha'(0))} = \sqrt{I_p(v)}$

Per ipotesi si ha $\ell(t) = \int_{\varepsilon_0}^{t} \|(F\circ\alpha)'(s)\| \, ds = \int_{\varepsilon_0}^{t} \sqrt{I_{F(\alpha(s))}(d_{\alpha(s)}F(\alpha'(s)))} \, ds$

$$\frac{d}{dt}\ell(t)\Big|_{t=0} = \sqrt{I_{F(\alpha(0))}(d_{\alpha(0)}F \cdot \alpha'(0))} = \sqrt{I_{F(p)}(d_pF(v))} = \sqrt{I_p(v)} \quad \square$$

corollario se $F: S \longrightarrow \tilde{S}$ è un'isometria, allora $\forall p_1, p_2 \in S$, $\rho_S(p_1,p_2) = \rho_{\tilde{S}}(F(p_1), F(p_2))$

Cerchiamo quelle proprietà geometriche che non dipendono da una particolare immersione in $\mathbb{R}^n$.

def Le proprietà di superficie che non cambiano in superfici isometriche vengono chiamate **INVARIANTI METRICI**

esempio Abbiamo appena verificato che la lunghezza di curve su una superficie e la distanza intrinseca sono invarianti per isometrie di superficie.

esempi i) $S = \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$, $(u,v) \longmapsto (u,v)$ $\quad (\varphi = id_{\mathbb{R}^2})$

$\varphi_u(u,v) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \varphi_v(u,v) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \forall\ p = \varphi(u,v) \in S$

$\forall p \in S$ $\quad I_p$ ha matrice $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ in base $(\varphi_u\ \varphi_v)$

ii) (piani) $\pi \subset \mathbb{R}^N$ piano affine

$\pi = P_0 + \langle w_1, w_2 \rangle \subset \mathbb{R}^N$ con $w_1, w_2 \subset \mathbb{R}^N$ lin. indip.

param regolare : $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \pi$

$$(u,v) \longmapsto u w_1 + v w_2$$

$\varphi_u(u,v) = w_1$, $\varphi_v(u,v) = w_2$ $\forall\, p = \varphi(u,v) \in S$

$I_p = \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot w_2 \\ w_1 \cdot w_2 & w_2 \cdot w_2 \end{pmatrix}$ in base $(\varphi_u \ \varphi_v)$

iii) (cilindro) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1\} \subset \mathbb{R}^3$

$\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ è suriettiva

$(u,v) \longmapsto (\cos u, \sin u, v)$

param. locale: $\varphi = \Phi \big|_{(u_0-\pi, u_0+\pi) \times \mathbb{R}}$

$\varphi_u(u,v) = (-\sin u, \cos u, 0)$, $\varphi_v(u,v) = (0,0,1)$

$\Rightarrow E(u,v) = \varphi_u \cdot \varphi_u = 1$

$F(u,v) = \varphi_u \cdot \varphi_v = 0$

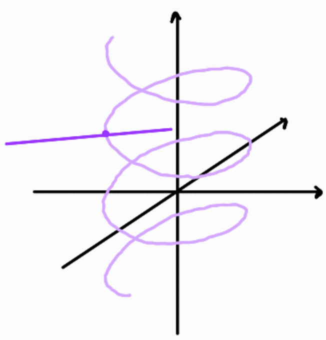
$G(u,v) = \varphi_v \cdot \varphi_v = 1$

$\Rightarrow I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in base $(\varphi_u \ \varphi_v)$

oss I_p in ogni punto ha la stessa forma fondamentale di $\mathbb{R}^2$

Questo concorda con l'idea intuitiva che un cilindro possa essere ottenuto dal piano

iv) (curva elicoidale con rette orizzontali)



$a \neq 0 \Rightarrow \varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(u,v) \longmapsto (v\cos u, v\sen u, au)$

esercizio verificare che $\varphi(\mathbb{R}^2) = S \subset \mathbb{R}^3$

è una superficie differenziabile

e φ una parametrizzazione

$\varphi_u = (-v\sin u, v\cos u, a)$, $\varphi_v = (\cos u, \sen u, 0)$

$\Rightarrow E = a^2+v^2$, $F = 0$, $G = 1$

$\Rightarrow I_p = \begin{pmatrix} a^2+v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $w = \lambda\varphi_u + \mu\varphi_v \in T_pS$ $I_p(w) = (v^2+a^2)\lambda^2 + \mu^2$

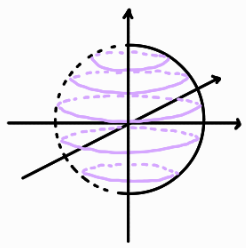
v) (Sfere) $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

- Possiamo costruirla tramite rotazione di una semicirconferenza attorno all'asse delle z

$\varphi: V \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$

coord. polari

$(u,v) \longmapsto (\sin u \cos v,\ \sin u \sin v,\ \cos u)$



$V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0<u<\pi,\ 0<v<2\pi\}$

$\varphi_u = (\cos u \cos v\ ,\ \cos u \sin v\ ,\ -\sin u)$

$\varphi_v = (-\sin u \sin v,\ \sin u \cos v,\ 0)$

$E = \varphi_u \cdot \varphi_u = \cos^2 u + \sin^2 u = 1$

$F = \varphi_u \cdot \varphi_v = 0$

$G = \sin^2 u(\sin^2 v + \cos^2 v) = \sin^2 u$

$\Rightarrow \quad I_p(\lambda\varphi_u + \mu\varphi_v) = \lambda^2 + \sin^2 u\, \mu^2$

- Possiamo considerare la parametrizzazione di una calotta

$\psi: D \longrightarrow S^2$

$(s,t) \longmapsto (s,t,\ \sqrt{1-s^2-t^2})$

- $\psi_s = (1,0,\ -\dfrac{s}{\sqrt{1-s^2-t^2}})$ $\qquad \psi_t = (0,1,-\dfrac{t}{\sqrt{1-s^2-t^2}})$

$$\tilde{E} = 1 + \frac{s^2}{1-s^2-t^2} = \frac{1-t^2}{1-s^2-t^2}$$

$$\tilde{F} = \frac{st}{1-s^2-t^2}$$

$$\tilde{G} = 1 + \frac{t^2}{1-s^2-t^2} = \frac{1-s^2}{1-s^2-t^2}$$

- chi è la funzione di c.c. $h = \psi^{-1} \circ \varphi$?

$\psi^{-1}: S^2 \cap \{(x,y,z) \mid z>0\} \longrightarrow D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$

$(x,y,z) \longmapsto (x,y)$

$h = \psi^{-1} \circ \varphi : (u,v) \longmapsto (\underbrace{\sin u \cos v}_{s(u,v)},\ \underbrace{\sin u \sin v}_{t(u,v)})$

$V \cap \varphi^{-1}(\psi(D)) \longrightarrow D \setminus \{(s,0) \mid s \in [0,1]\} = \psi^{-1}(\varphi(V))$

$$Jh = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ \cos u \sin v & \sin v \cos u \end{pmatrix} = H$$

$$\left(\psi_s(h(u,v))\ \ \psi_t(h(u,v))\right)\cdot Jh(u,v)$$

$$J\varphi(u,v) = J(\psi(\underbrace{\psi^{-1}\circ\varphi}_{h}))(u,v) = J\psi(h(u,v))\cdot Jh(u,v)$$

$$= (\psi_s\ \ \psi_t)\, H$$

$$I_p(\lambda\varphi_u+\mu\varphi_v) = I_p\left((\varphi_u\ \ \varphi_v)\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}\right) = (\lambda\ \ \mu)\begin{pmatrix}E & F\\ G & H\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$$

$$= I_p\left((\psi_s\ \ \psi_t)\, H\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}\right) =$$

$$= (\lambda\ \ \mu)\ {}^tH\begin{pmatrix}\tilde E & \tilde F\\ \tilde F & \tilde G\end{pmatrix}H\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix} = {}^tH\begin{pmatrix}\tilde E & \tilde F\\ \tilde F & \tilde G\end{pmatrix}H$$

<u>esercizio</u> verificare che

$$\begin{pmatrix}\cos u\cos v & \cos u\sin v\\ -\sin u\sin v & \sin u\cos v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1-t^2}{1-t^2-s^2} & \frac{st}{1-s^2-t^2}\\ \frac{st}{1-s^2-t^2} & \frac{1-s^2}{1-s^2-t^2}\end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{s=\sin u\cos v\\ t=\sin u\sin v}}\begin{pmatrix}\cos u\cos v & -\sin u\sin v\\ \cos u\sin v & \sin u\cos v\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sin^2 u\end{pmatrix}$$

Aree di superfici

Per curve parametriche : $L = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(s)\| \, ds$

def $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da $\varphi : U \longrightarrow S$, $U \subseteq \mathbb{R}^3$, allora l'AREA di S è

$$\boxed{A(S) = \int_U \underbrace{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}_{\text{la norma del prodotto vettoriale è l'area del parallelogramma}} \, du \, dv}$$ (integrale doppio)

In generale, l'identità (*) di Lagrange ci dice: $v, w \in \mathbb{R}^3$

$$\|v \wedge w\|^2 + (v \cdot w)^2 = \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$$

$$\Rightarrow \|v \wedge w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - (v \cdot w)^2$$

$$\Rightarrow A(S) = \int_U \sqrt{\|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 - (\varphi_u \cdot \varphi_v)^2} \, du \, dv = \int_U \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$$

$$\boxed{A(S) = \int_U \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv}$$

prop $A(S)$ non dipende dalla parametrizzazione scelta

dim Consideriamo $h : \underset{(s,t)}{V} \longrightarrow \underset{(u,v)}{U}$ diffeo, $V \subseteq \mathbb{R}^2$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ e

$\psi := \varphi \circ h : V \xrightarrow{h} U \xrightarrow{\varphi} S$ allora

cambio di variabili in integrali multipli

$$\int_V F(u(s,t), v(s,t)) \cdot |\det J(h(s,t))| \, ds \, dt = \int_{h(V)} F(u,v) \, du \, dv$$

$$\Rightarrow \int_{U = h(V)} \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, du \, dv = \int_V \|\varphi_u \wedge \varphi_v (u(s,t), v(s,t))\| \cdot |\det Jh(s,t)| \, ds \, dt$$

$$= \int_V \|\det Jh(s,t) \cdot (\varphi_u \wedge \varphi_v (u(s,t), v(s,t)))\| \, ds \, dt$$

$$(\psi_s \ \ \psi_t) = (\varphi_u \ \ \varphi_v)(Jh(s,t))$$

$$\Rightarrow \psi_s \wedge \psi_t = (\det Jh(s,t)) \cdot \varphi_u \wedge \varphi_v$$

$$= \int_V \|\psi_s \wedge \psi_t\| \, ds \, dt$$ $\square$

$$(\psi_s \ \ \psi_t) = (\varphi_u \ \ \varphi_v)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \psi_s = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v \\ \psi_t = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v \end{cases}$$

$$\psi_s \wedge \psi_t = (a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v) \wedge (a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v)$$

$$= (a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v) \wedge a_{12}\varphi_u + (a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v) \wedge a_{22}\varphi_v$$

$$= a_{21}a_{12} \, \varphi_v \wedge \varphi_u + a_{11}a_{22} \, \varphi_u \wedge \varphi_v$$

$$= \varphi_u \wedge \varphi_v \cdot (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

prop $A(S)$ è un invariante metrico di superfici in $\mathbb{R}^3$

esempio calcoliamo l'area del toro parametrizzato da

$$\varphi(u,v) = ((a+r\cos u)\cos v, (a+r\cos u)\sin v, r\sin u)$$

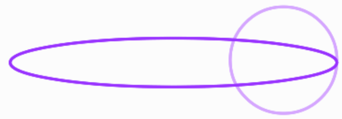
$$\Rightarrow E = r^2, F=0, G=(a+r\cos u)^2 \Rightarrow \sqrt{EG-F^2} = r(a+r\cos u)$$

$$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(a+r\cos u)\, du\, dv = 2\pi\int_0^{2\pi} r(a+r\cos u)\, du =$$

$$= \left[2\pi r^2 \sin u\right]_0^{2\pi} + \left[2\pi r a u\right]_0^{2\pi} = 4\pi^2 ra$$

oss la parametrizzazione φ non è definita su tutta la superficie (per $\varphi|_{(0,2\pi)\times(0,2\pi)}$

la superficie è quella del toro meno due circonferenze (lilla e viola)



Più precisamente, si considera $\varphi_\varepsilon : \overline{U}_\varepsilon \longrightarrow S$,

$$\overline{U}_\varepsilon = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : \varepsilon \leq u \leq 2\pi-\varepsilon, \ \varepsilon \leq v \leq 2\pi - \varepsilon\}$$

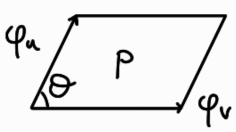
$$\bigcup_{\varepsilon>0} \varphi(\overline{U}_\varepsilon) = S \setminus \{((a+r)\cos v, (a+r)\sin v, 0) : v\in\mathbb{R}\} \cup \{(a+r\cos u, 0, r\sin u) : u\in\mathbb{R}\}$$

e si ha $\lim_{\varepsilon\to 0} A(U_\varepsilon) = A(S)$

(*) IDENTITÀ DI LAGRANGE $a,b\in\mathbb{R}^n$ $\|a\|^2\|b\|^2 = \sum_{1\leq i\leq j\leq n}(a_ib_j - a_jb_i)^2 + (a\cdot b)^2$

dim
- $\|a\|^2\|b\|^2 = (a_1^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+\dots+b_n^2)$
$$= \sum_{i=1}^n a_i^2b_i^2 + \sum_{1\leq i\leq j\leq n}(a_i^2b_j^2 + a_j^2b_i^2)$$
- $(a\cdot b)^2 = (a_1b_1+\dots+a_nb_n)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2b_i^2 + \sum_{1\leq i\leq j\leq n} 2a_ib_ia_jb_j$
- $(a_ib_j - a_jb_i)^2 = a_i^2b_j^2 + a_j^2b_i^2 - 2a_ib_ia_jb_j$
- In $\mathbb{R}^3$: $\|a\times b\|^2 = \sum_{1\leq i\leq j\leq 3}(a_ib_j - a_jb_i)^2$ $\square$

$A(P) = \|\varphi_u\|\|\varphi_v\|\sin\theta$



$A(P)^2 = \|\varphi_u\|^2\|\varphi_v\|^2(1-\cos^2\theta)$

CS : $|a\cdot b| \leq \|a\|\,\|b\| \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{a\cdot b}{\|a\|\,\|b\|}$

$$\Rightarrow A(P)^2 = \|\varphi_u\|^2\|\varphi_v\|^2 - \varphi_u\cdot\varphi_v = EG - F^2$$

oss Mentre il prodotto vettoriale $\varphi_u \wedge \varphi_v$ ha senso solo se $\varphi_u(u,v), \varphi_v(u,v) \in \mathbb{R}^3$, ed è un vettore la cui norma è uguale all'area del parallelogramma sotteso da φ_u e φ_v, dati in generale due vettori $\varphi_u, \varphi_v \in \mathbb{R}^N$, l'espressione $\|\varphi_u\|^2 \cdot \|\varphi_v\|^2 - (\varphi_u \cdot \varphi_v)^2$ esprime comunque il quadrato dell'area del parallelogramma sotteso da φ_u, φ_v.

Quindi possiamo definire in $\mathbb{R}^N$ per $S = \mathrm{Im}(\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n)$ superficie parametrica

$$A(S) = \int_U \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

esempi

i) (sfera) $S = \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, $V = (0,\pi) \times (0, 2\pi)$

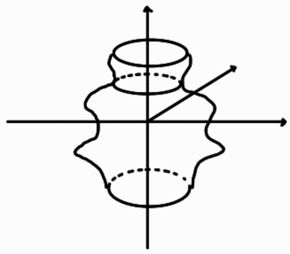
$\varphi : V \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ $\quad (u,v) \longmapsto (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$

$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \sin^2 u \quad \Rightarrow A(\mathbb{S}^2) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 u}\, du\, dv = 4\pi$

(sfera di raggio r) $S = r \cdot \mathbb{S}^2$, $\varphi(u,v) = r(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$

$E = r^2, \ F = 0, \ G = r^2 \sin^2 u \quad \Rightarrow A(r\mathbb{S}^2) = 4\pi r^2$

ii) (superficie di rotazione) sia curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ contenuta in $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y = 0\}$. $\alpha(t) = (x(t), 0, z(t))$, $x(t) > 0 \ \forall t \in I$



$\varphi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow S$

$(t, s) \longmapsto (x(t) \cos s, x(t) \sin s, z(t))$

$\varphi(I \times \mathbb{R}) = S$ è superficie differenziabile detta superficie di rotazione

Dalle restrizioni $\varphi|_{I \times (s_0 - \pi, s_0 + \pi)}$ che sono parametrizzazioni si ottiene:

$\varphi_t = (x'(t) \cos s, x'(t) \sin s, z'(t))$

$\varphi_s = (-x(t) \sin s, x(t) \cos s, 0)$

$E = (x'(t))^2 + (z'(t))^2 = \|\alpha'(t)\|^2, \ F = 0, \ G = x(t)^2$

se $\|\alpha'(t)\| = 1$, $A(S) = \int_0^{2\pi} ds \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x(t)^2}\, dt = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, dt$

iii) (superficie rigate). Sia curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrica, $W : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ campo vettoriale su α con $W(t) \neq 0 \ \forall t \in I$.

$\varphi(u,v) = \alpha(u) - v\, W(u)$ definita in un aperto di $I \times \mathbb{R}$

Sia φ param. regolare: $\varphi_u = \alpha'(u) + v W'(u)$

$\varphi_v = W(u)$

sia $\|w(u)\| = 1 \ \forall u$ e $\|\alpha'(t)\| = 1$, allora

$E = 1 + 2v\,\alpha'(u) \cdot w'(u) + v^2 \|w'(u)\|^2$

$F = \alpha'(u) \cdot w(u)$

$G = 1$

iv) (parametrizzazioni di $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$)

$D = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s^2 + t^2 = 1\}$

ψ

$(x,y) \longmapsto (x, y, \pm\sqrt{1-x^2-y^2})$

$(x,z) \longmapsto (x, \pm\sqrt{1-x^2-z^2}, z)$

$(y,z) \longmapsto (\pm\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z)$

hanno inversa $(x,y,z) \longmapsto (x,y)$ e stesse proiezioni

Orientabilità

def Sia $S \subseteq \mathbb{R}^N$ una superficie differenziabile, diciamo che S è **ORIENTABILE** se $\exists$ una famiglia di parametrizzazioni regolari $\{\varphi_i : V_i \longrightarrow U_i \subseteq S\}$ (con $V_i \subseteq \mathbb{R}^2$) tali che

i) $\bigcup_i U_i = \bigcup_i \varphi_i(V_i) = S$

ii) $\forall i,j$ tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\det(J(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i)(p)) > 0 \quad \forall p \in \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$

se l'aperto non è vuoto, con

$$\varphi_{ji} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : \underset{\underset{V_i \subseteq \mathbb{R}^2}{\cap}}{\varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j)} \xrightarrow{\varphi_i} U_i \cap U_j \xrightarrow{\varphi_j^{-1}} \underset{\subseteq V_j \subseteq \mathbb{R}^2}{\varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)}$$

S non è orientabile se non $\exists$ una famiglia di parametrizzazioni con queste proprietà.

oss Una superficie differenziabile descritta da una sola param. regolare / carta locale, è equiorientata con se stessa, dunque non c'è nulla da dire

esempio (sfera). $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\} \subset \mathbb{R}^3$

- $\psi^{-1} : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,-1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \longmapsto \underbrace{L(P_0, (0,0,-1)) \cap [z=0]}_{\{(tx_0, ty_0, -1+t(z_0+1)) \Rightarrow t = \frac{1}{z_0+1}\}} = \left(\frac{x_0}{z_0+1}, \frac{y_0}{z_0+1}, 0\right)$$

$$\psi : \underset{\mathbb{R}^2}{(s,t)} \longmapsto L((s,t,0),(0,0,-1)) \cap \mathbb{S}^2 = \left(\frac{2s}{s^2+t^2+1}, \frac{2t}{s^2+t^2+1}, \frac{1-s^2-t^2}{s^2+t^2+1}\right)$$

$\Rightarrow$ cerco $(ds, dt, d-1)$ tc $d^2s^2+d^2t^2+(d-1)^2=1$
$\Rightarrow d(s^2+t^2+1)=2$

- $\varphi^{-1} : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x_0, y_0, z_0) \longmapsto L((x_0,y_0,z_0),(0,0,1)) \cap [z=0] = \left(\frac{x_0}{z_0-1}, \frac{y_0}{z_0-1}, 0\right)$$

$$\varphi : (u,v) \longmapsto \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$$

- $$(u,v) \overset{\varphi}{\longmapsto} \left(\underset{x_0}{\frac{2u}{u^2+v^2+1}}, \underset{y_0}{\frac{2v}{u^2+v^2+1}}, \underset{z_0}{\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}}\right) \overset{\psi^{-1}}{\longmapsto} \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}, 0\right)$$

$= \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\right) \in \mathbb{R}^2$

con $z_0 + 1 = \dfrac{u^2+v^2-1+u^2+v^2+1}{u^2+v^2+1} = \dfrac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+1}$

dunque $\psi^{-1} \circ \varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\rho e^{2\pi i \theta} \longmapsto \frac{1}{\rho} e^{2\pi i \theta}$$

$$J(\psi^{-1}\circ\varphi)=\begin{pmatrix}\frac{u^2+v^2-2u^2}{(u^2+v^2)^2} & \frac{-2uv}{(u^2+v^2)^2}\\ \frac{-2uv}{(u^2+v^2)^2} & \frac{u^2+v^2-2v^2}{(u^2+v^2)^2}\end{pmatrix}=\frac{1}{(u^2+v^2)^2}\begin{pmatrix}-u^2+v^2 & -2uv\\ -2uv & -v^2+u^2\end{pmatrix}$$

$$\det(J(\psi^{-1}\circ\varphi)) = \frac{1}{(u^2+v^2)^4}\left(-(u^4+v^4-2u^2v^2)-4(u^2v^2)\right)$$
$$= \frac{1}{(u^2+v^2)^4}\left(-(u^2+v^2)^2\right)<0$$

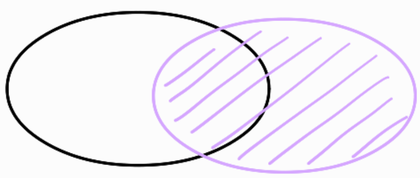
Osserviamo che $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}=\varphi^{-1}(S^2\setminus\{(0,0,1),(0,0,-1)\})$ è un aperto connesso dove $\det(J(\psi^{-1}\circ\varphi))<0$, quindi componendo con un'altra parametrizzazione regolare, per esempio $\tilde\varphi(u,v)=\varphi(v,u)=\varphi(\sigma(u,v))$ con $\sigma(u,v)=(v,u)$, si ha

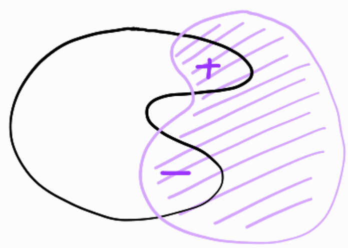
$$\det(J(\psi^{-1}\circ\tilde\varphi)) = \det(J(\psi^{-1}\circ\varphi\circ\sigma))$$
$$=\det(J(\psi^{-1}\circ\varphi)\cdot J(\sigma))$$
$$=-\det(J(\psi^{-1}\circ\varphi)(v,u))>0$$

dove $J(\psi^{-1}\circ\varphi)\cdot J(\sigma)=\underbrace{J(\psi^{-1}\circ\varphi)(\sigma(u,v))}_{<0}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}_{-1}>0 \Rightarrow S^2$ è orientabile

prop Sia $S\subseteq\mathbb{R}^N$ superficie diff. Supponiamo che $S=U_1\cup U_2$ con $\varphi_1:V_1\longrightarrow U_1$ e $\varphi_2:V_2\longrightarrow U_2$ 2 parametrizz. regolari. Se $U_1\cap U_2$ è connesso, allora S è orientabile.

oss Perché è importante che sia connesso: se inverto la parametrizzazione, inverto anche i segni sulle 2 componenti connesse





prop (criterio di orientabilità) $S\subseteq\mathbb{R}^3$ una superficie differenziabile. Allora S è orientabile se e solo se $\exists$ un campo $\nu:S\longrightarrow\mathbb{R}^3$ di versori normali, cioè un'applicazione C^∞ $\nu:S\longrightarrow\mathbb{R}^3$ t.c. $\forall p\in S$ $\nu(p)$ verifica $\|\nu(p)\|=1$ e $\nu(p)\in(T_pS)^\perp$.

dim ($\Rightarrow$) $\forall\varphi_i:V_i\longrightarrow U_i\subseteq S$ param. regolare, sia $p=\varphi_i(q)$ e consideriamo

$$\nu_i(p)=\frac{\frac{\partial}{\partial u}\varphi_i(q)\wedge\frac{\partial}{\partial v}\varphi_i(q)}{\left\|\frac{\partial}{\partial u}\varphi_i(q)\wedge\frac{\partial}{\partial v}\varphi_i(q)\right\|}$$

costruiamo quello $\nu_i(p)$ $\forall \varphi_i$ parametrizzazione regolare della famiglia delle parametrizzazioni equiorientate.

Se $p \in U_i \cap U_j$, poiché φ_i e φ_j sono equiorientate, $\nu_i(p) = \nu_j(p)$, infatti:

$\left\{ \frac{\partial}{\partial u} \varphi_i(p), \frac{\partial}{\partial v} \varphi_i(p) \right\}, \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \varphi_j(p), \frac{\partial}{\partial u} \varphi_j(p) \right\}$ basi di T_pS e sono in particolare equiorientate.

$\Rightarrow \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \varphi_i(p) \wedge \frac{\partial}{\partial v} \varphi_i(p) \right\}$ e $\left\{ \frac{\partial}{\partial u} \varphi_j(p) \wedge \frac{\partial}{\partial v} \varphi_j(p) \right\}$ sono basi per $T_pS^\perp$ equiorientate perché passate per prodotto vettoriale.

$\Rightarrow \nu_i(p) = \nu_j(p)$.

Abbiamo $\nu_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^3$ funzione C^∞.

$\forall\, U_i \cap U_j \qquad \nu_i|_{U_i \cap U_j} = \nu_j|_{U_i \cap U_j} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathbb{R}^3$

dunque $\exists\, \nu : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tc $\nu|_{U_i} = \nu_i$

$\Rightarrow \nu$ è funzione C^∞ e verifica le condizioni richieste

($\Leftarrow$) Supponiamo che esista $\nu : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$, campo di vettori normale. Sia $\varphi : V \longrightarrow U \subseteq S$ una parametrizzazione regolare, $p = \varphi(q) \in S$,

consideriamo $\dfrac{\varphi_u(q) \wedge \varphi_v(q)}{\|\varphi_u(q) \wedge \varphi_v(q)\|} = \nu(p)$ oppure $-\nu(p)$.

Inoltre, se U è connesso, il segno è $=$ su tutti i $p \in U$.

Se poi componiamo con $\sigma(u,v) = (v,u)$ il segno cambia.

Scegliamo dunque una famiglia di parametrizzazioni regolari $\varphi_i : V_i \longrightarrow U_i \subseteq S$ tali che U_i siano connessi e tc

$$\frac{\frac{\partial}{\partial u}\varphi_i \wedge \frac{\partial}{\partial v}\varphi_i}{\left\| \frac{\partial}{\partial u}\varphi_i \wedge \frac{\partial}{\partial v}\varphi_i \right\|} = +\nu(p)$$

Allora le $\{\varphi_i : V_i \longrightarrow U_i\}$ sono tutte equiorientate:

$$\underbrace{\begin{array}{l} \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\varphi_i(q), \frac{\partial}{\partial v}\varphi_i(q) \right\} = (a) \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\varphi_j(q), \frac{\partial}{\partial v}\varphi_j(q) \right\} = (b) \end{array}}_{\text{basi di } T_pS} \qquad \underbrace{\begin{array}{l} \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\varphi_i(q) \wedge \frac{\partial}{\partial v}\varphi_i(q) \right\} = (c) \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\varphi_j(q) \wedge \frac{\partial}{\partial v}\varphi_j(q) \right\} = (d) \end{array}}_{\text{basi di } T_pS^\perp}$$

e poiché $\dfrac{\frac{\partial}{\partial u}\varphi_i(q) \wedge \frac{\partial}{\partial v}\varphi_i(q)}{\| \cdots \|} = \dfrac{\frac{\partial}{\partial u}\varphi_j(q) \wedge \frac{\partial}{\partial v}\varphi_j(q)}{\| \cdots \|}$

$\Rightarrow$ ⓒ e ⓓ sono equiorientate

$\Rightarrow$ ⓐ e ⓑ sono anch'esse equiorientate $\square$

<u>corollario</u> Sia $U \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto, $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione C^∞, $a \in \mathbb{R}$ un valore regolare di f, cioè $\forall p_0 \in f^{-1}(a)$ $Df(p_0) \neq (0,0,0)$.

Allora $S = f^{-1}(a) \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^3$ è orientabile

<u>dim</u> consideriamo $S \xrightarrow{N} \mathbb{R}^3$, $p \longmapsto \dfrac{Df(p)}{\|Df(p)\|}$ e mostriamo che N è un campo di versori normali ad S.

Considero $\alpha: I \longrightarrow S$ curva diff. e $f(\alpha(t)) = a$, $\forall t$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt}(f \circ \alpha) \equiv 0 \Rightarrow Df(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = 0$

$\Rightarrow Df(p) \in T_pS^\perp$ $\square$

<u>esempi</u> ① $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$

② $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : d((x,y,z), S^1) = r\}$ è orientabile

③ le quadriche non degeneri sono tutte orientabili

<u>TEOREMA</u> Ogni superficie chiusa di $\mathbb{R}^3$ è orientabile.

il nastro di Moebius è aperto (non c'è il bordo), dunque non è orientabile. se prendessimo la chiusura, allora il nastro non sarebbe più una superficie differenziale.

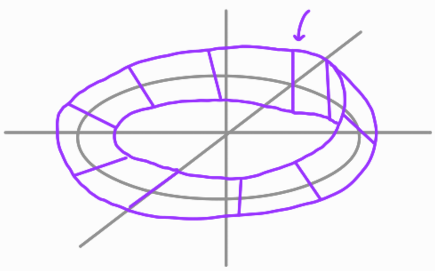
<u>esempio</u> (Nastro di Möbius)

$\Phi(u,v) = (2\sin u, 2\cos u, 0) + v\left(-\sin\frac{u}{2}\sin u, -\sin\frac{u}{2}\cos u, \cos\frac{u}{2}\right)$

$= \left(\left(2 - v\sin\frac{u}{2}\right)\sin u, \left(2 - v\sin\frac{u}{2}\right)\cos u, \cos\frac{u}{2}\right)$

Considero $S = \Phi(\mathbb{R} \times (-1,1))$

$\Phi({0}\times(-1,1))$



$\Phi: \mathbb{R} \times (-1,1) \longrightarrow S$ è suriettiva e aperta.

$\varphi = \Phi|_{(0,2\pi)\times(-1,1)}$ è param. regolare di S.

$\varphi((0,2\pi) \times (-1,1)) = S \setminus \Phi(\{0\} \times (-1,1))$

consideriamo 2 parametrizzazioni regolari

$\varphi = \Phi|_{(0,2\pi)\times(-1,1)} : (0,2\pi) \times (-1,1) \longrightarrow U_1 \subseteq S$

$\psi = \Phi_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times(-1,1)} : (-\varepsilon,\varepsilon) \times (-1,1) \longrightarrow U_2 \subseteq S$

$\varphi^{-1}(U_1 \cap U_2) = ((0,\varepsilon) \times (-1,1)) \cup ((2\pi - \varepsilon, 2\pi) \times (-1,1))$

Supponiamo PA che S sia orientabile, allora $\exists\ N: S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ campo di versori normali. Allora consideriamo $\dfrac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(u,v)$ con $(u,v) \in (0,2\pi) \times (-1,1)$.

Per ogni (u,v) abbiamo $\dfrac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(u,v) = \pm N(\varphi(u,v))$.

Supponiamo $+$: consideriamo $(u,v) \in (0,\varepsilon) \times (-1,1)$

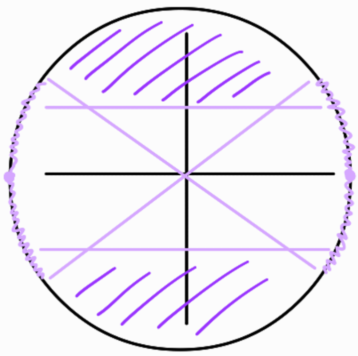
$$\frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(u,v) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(u,v) = N(\varphi(u,v))$$

Però se $(u,v) \in (-\varepsilon,0) \times (-1,1)$

$$\frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(u,v) = -\frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(2\pi-u, v) = -N(\varphi(u,v)) \quad \lightning$$

$\Rightarrow$ il nastro di Moebius non è orientabile $\square$

<u>nota</u> Possiamo immaginare il nastro di Moebius come una striscia in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$: Non è possibile immergere $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ dentro $\mathbb{R}^3$, dunque S non è orientabile. Possiamo però immergere in $\mathbb{R}^3$ degli aperti di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (in questo modo si perdono delle informazioni).



Mappa di Gauss

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie orientabile

def Un'orientazione della superficie S è la scelta di una famiglia di parametrizzazioni regolari equiorientate che ricoprono S.

def Scegliere un'orientazione di S, equivale a dare un campo di versori normale a S

$N: S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ t.c. $\forall p \in S$ $\|N(p)\| = 1$ e $N(p) \in (T_pS)^\perp$

Allora possiamo vedere $N: S \longrightarrow \mathbb{S}^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ mappa C^∞

detta MAPPA DI GAUSS, con $N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$.

oss il differenziale è una mappa lineare $d_pN : T_pS \longrightarrow T_{N(p)}\mathbb{S}^2$

ma $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = \underbrace{(N(p))}_{\text{punto identificato da } N(p) \text{ sulla sfera (è un "raggio")}}{}^\perp = T_pS \subseteq \mathbb{R}^3$

Quindi $d_pN : T_pS \longrightarrow T_pS$ endomorfismo.

Dato $v \in T_pS$, cerchiamo $(d_pN)(v)$. Consideriamo $\alpha : I \longrightarrow S$ curva diff. con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v \in T_pS$. Allora $(d_pN)(v) = \frac{d}{dt}(N \circ \alpha)\Big|_{t=0}$.

$(d_pN)(v)$ misura come si muove il versore normale ad S, $N(p)$, lungo la curva α (lungo la direzione v).

prop $\forall p \in S$ $d_pN : T_pS \longrightarrow T_pS$ è autoaggiunto, cioè

$I_p(v, d_pN\, w) = I_p(d_pN\, v, w)$ $\forall v, w \in T_pS$.

oss Per verificare che d_pN è autoaggiunto basta verificare che

$I_p(v_1, d_pN\, v_2) = I_p(d_pN\, v_1, v_2)$ per v_1, v_2 linearmente indipendenti.

dim Consideriamo una param. regolare φ intorno a p e

$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) = \varphi_u(u,v)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = \varphi_v(u,v)$ base di T_pS.

$N(\varphi(u,v)) \cdot \varphi_u(u,v) = 0 = N(\varphi(u,v)) \cdot \varphi_v(u,v)$, deriviamo:

$$\frac{\partial}{\partial v}(N(\varphi(u,v)) \cdot \varphi_u(u,v)) = N_v \cdot \varphi_u(u,v) + N(\varphi(u,v)) \cdot \varphi_{uv}(u,v) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(N(\varphi(u,v)) \cdot \varphi_v(u,v)) = N_u \cdot \varphi_v(u,v) + N(\varphi(u,v)) \cdot \underset{\text{Schwarz}}{\varphi_{vu}(u,v)} = 0$$

$$\Rightarrow N_v \cdot \varphi_u = -N \cdot \varphi_{uv} = -N \cdot \varphi_{vu} = N_u \cdot \varphi_v$$

calcolo il diff. lungo la curva con $v = \text{cost}$.

$$T_pS \ni \underset{\substack{\| \\ (d_pN)(\varphi_u)}}{N_u} = \frac{d}{du}(N(\varphi(u,v))) = (d_{\varphi(u,v)}N)(\varphi_u(u,v)) \qquad \text{con } p = \varphi(u,v)$$

Analog. $\quad N_v = (d_pN)(\varphi_v) \in T_pS$

$$\Rightarrow \quad I_p((d_pN)\varphi_v, \varphi_u) = I_p((d_pN)(\varphi_u), \varphi_v) \qquad \square$$

<u>corollario</u> $\quad d_pN$ è diagonalizzabile e ammette 2 autovalori reali (eventualmente coincidenti).

<u>corollario</u> $\quad$ la forma bilineare $\beta(v,w) = I_p(d_pNv, w)$ è simmetrica

<u>def</u> $\quad$ Chiamiamo la forma quadratica (e la corrispondente forma bilineare simmetrica) $-\beta(v,v) = -I_p(d_pNv, w)$ la SECONDA FORMA FONDAMENTALE della superficie S nel punto $p \in S$, denotata con $\mathrm{II}_p(v)$.

Cioè $\mathrm{II}_p(v) = -((d_pN)(v)) \cdot v \quad$ e $\quad \mathrm{II}_p(v,w) = -((d_pN)(v)) \cdot w$

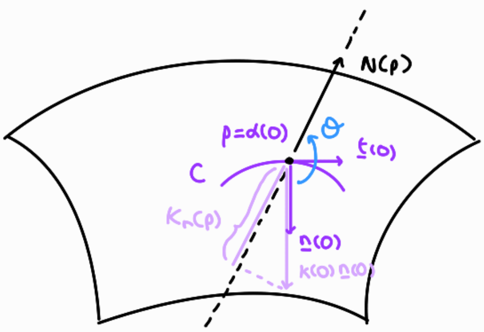
<u>def</u> $\quad$ Consideriamo $\alpha : I \longrightarrow \alpha(I) = C \subseteq S$ con $\alpha(0) = p$. Chiamiamo CURVATURA NORMALE $\underset{\substack{\| \\ k_c(p)}}{k_n(p)}$ di C in S nel punto p il valore $k(0)\,\underline{n}(0) \cdot N(p)$

con $\underline{n}(0)$ versore normale alla curva C nel punto p

$k(0)$ curvatura di C nel punto $p = \alpha(0)$

$N(p)$ versore normale alla superficie S

$\underset{\substack{\| \\ k_c(p)}}{k_n(p)} = k(0)\,\underline{n}(0) \cdot N(p) = k(0)\cos\theta \quad$ dove θ è l'angolo tra il versore normale alla curva C e il versore normale alla superficie S.



$\cos\theta = \underline{n}(0) \cdot N(p)$

$k_n(p) = k(0)\,\underline{n}(0) \cdot N(p)$
curvatura normale di C in S nel punto p.

<u>oss</u> $\quad$ la curvatura normale non dipende dalla parametrizzazione $\alpha : I \longrightarrow C \subseteq S$.

Sia $I = (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow C \quad$ e osserviamo che $\underline{n}(0)$ rimane uguale per param con stessa orient.

per def di $\underline{n}(0)$

Poniamo $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(-t) \Rightarrow \tilde{\alpha}(0) = \alpha(0) = p, \quad \tilde{\alpha}(I) = C$.

ora vediamo quando cambia orientamento

$\tilde{\alpha}'(t) = -\alpha'(-t)$, $\tilde{\alpha}''(t) = \alpha''(-t)$ $\Rightarrow \tilde{t}(t) = -\underline{t}(-t)$

$\tilde{t}(0) = -\underline{t}(0)$, $\tilde{b}(0) = \dfrac{\tilde{\alpha}'(0) \wedge \tilde{\alpha}''(0)}{\|\tilde{\alpha}'(0) \wedge \tilde{\alpha}''(0)\|} = -\underline{b}(0)$, $\tilde{n}(0) = \underline{n}(0)$

$\underline{t}'(t) = k(t)\,\underline{n}(t)$

$\tilde{t}'(t) = \tilde{k}(t)\,\tilde{n}(t)$

$\tilde{t}(t) = -\underline{t}(t) \Rightarrow \tilde{t}' = \frac{d}{dt}(-\underline{t}(-t)) = \underline{t}'(-t) = k(t)\,\underline{n}(-t)$

$\Rightarrow \tilde{k}(0) = k(0)$. Dunque $k(0)\,\underline{n}(0) = \tilde{k}(0)\,\tilde{n}(0)$. $\square$

oss Il segno di $k_C(p)$ non dipende dalla parametrizzazione né dall'orientazione di $C \subseteq S$, ma dipende dall'orientazione di S.

prop Se $\alpha: I \longrightarrow S$ curva a velocità unitaria con $\alpha(0) = p$. Allora $II_p(\alpha'(0)) = k_C(p)$

oss Se α ha velocità unitaria, allora $\alpha'(0) = \underline{t}(0)$ e, anzi, $\forall t \in I$ $\alpha'(t) = \underline{t}(t)$

$\Rightarrow \alpha''(0) = \frac{d}{dt}(\alpha'(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\underline{t}(t))\Big|_{t=0} = k(0)\,\underline{n}(0)$

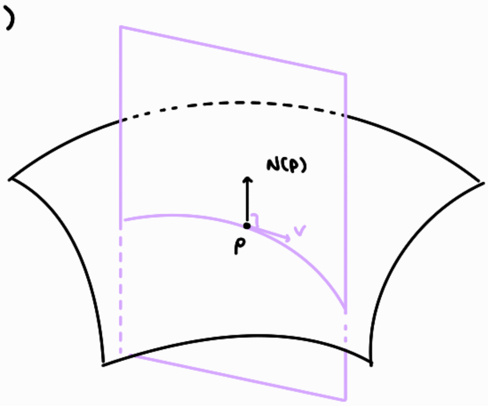
dim Sia $N(t) = N(\alpha(t))$ versore normale a S in $q = \alpha(t)$.

$N(t) \cdot \alpha'(t) = 0 \quad \forall t$, deriviamo: $N'(t) \cdot \alpha'(t) = -N(t) \cdot \alpha''(t)$

ma $N'(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}((N \circ \alpha)(t))\Big|_{t=0} \Rightarrow N'(0) = (d_pN)(\alpha'(0))$

$$II_p(\alpha'(0)) = -(d_pN(\alpha'(0))) \cdot \alpha'(0) = -\frac{d}{dt}(N \circ \alpha)\Big|_{t=0} \cdot \alpha'(0)$$
$$= -N(t) \cdot \alpha''(t)\Big|_{t=0} = N(0) \cdot \underbrace{\alpha''(0)}_{k(0)\,\underline{n}(0)} = k_C(p) \qquad \square$$

corollario Sia $p \in S$, $N = N(p)$ = versore normale a S in p. Sia $v \in T_pS$ con $\|v\| = 1$. Sia $\pi = p + \langle v, N \rangle$ piano per p con direzioni v e N. Allora in un intorno di p, $C = S \cap \pi$ è una curva parametrica con vettore tangente v e curvatura normale $k_C(p) = II_p(v)$



dim In un intorno di p (in $\mathbb{R}^3$) S ha equazione $f(x,y,z)=0$ con $\nabla f(p) \neq 0$ e $N = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$, $0 \neq v \in N^\perp$.

Restringendo l'equazione $f(x,y,z)=0$ ai punti del piano π si ottiene un'equazione di una curva in un certo intorno di p (intorno nel piano π). L'equazione che si ottiene nelle coordinate del piano è $C: F(\lambda,\mu) = f(p+\lambda v + \mu N)=0$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}\Big|_p = \nabla f(p)\cdot v = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}\Big|_p = \nabla f(p)\cdot N \neq 0 \Rightarrow \nabla F \neq 0 \text{ in un intorno di } p$$

th funzione implicita

$\Rightarrow$ F definisce una curva param. regolare intorno a p.

La curva C è detta SEZIONE NORMALE di S in p lungo v

C è contenuta in S e in π per costruzione.

$\Rightarrow$ il suo spazio tangente è $\langle v \rangle$

Possiamo scegliere una param. con lunghezza d'arco $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow S$ della curva C con $\alpha'(0)=v$.

$\Rightarrow$ la curvatura normale di C in S nel punto p è $k_c(p) = \mathrm{II}_p(v)$

$\square$

FORME QUADRATICHE/OPERATORI AUTOAGGIUNTI/DIAGONALIZZ.

$V=\mathbb{R}^n$, $v\cdot w$ prodotto scalare standard, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

A può essere interpretata come

- un'applicazione lineare $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \varphi(x) = Ax$ endom: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
- un'applicazione bilineare $(x,y) \longmapsto \beta(x,y) = {}^t x A y$

A simmetrica $\iff$ $A = (a_{jk})$ $a_{jk} = a_{kj}$

$\iff$ l'applicazione bilineare verifica $\beta(x,y) = \beta(y,x)$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$

$\iff$ l'endomorfismo φ è autoaggiunto rispetto al prodotto $\cdot$, cioè $\varphi(x)\cdot y = x \cdot \varphi(y)$

(perché $x\cdot\varphi(y) = {}^t x \cdot \varphi(y) = {}^t x A y = \beta(x,y)$)

In generale : (V,h), V = sp. vett $/\mathbb{R}$, h = forma bil. simmetrica non degenere

$\varphi: V \longrightarrow V$ endomorfismo induce la forma bilineare

$$\beta: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v,w) \longmapsto h(v, \varphi(w))$$

e, data $\beta: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bilineare, β induce l'endomorfismo

$$\varphi: V \longrightarrow V$$
$$v \longmapsto w \text{ tc } \forall x\in V \quad \beta(x,v) = h(x,w)$$

φ è autoaggiunto $\iff h(x,\varphi(y)) = h(\varphi(x),y)$

$\iff \beta$ è simmetrica

Diagonalizzazione: V = sp vett $/\mathbb{R}$, $\cdot: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ prodotto scalare, $\varphi: V \longrightarrow V$ endomorf.

φ è diagonalizzabile $\iff \exists$ base di autovettori

$\iff$ data una base E di V e la matrice A di φ in base E

$\exists\ P\in GL_n(\mathbb{R})$ tc $P^{-1}AP = D$

$\beta: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ con matrice A in base E

β è diagonale $\iff \exists$ base di vettori 2 a 2 β-ortogonali

$\iff \exists\ P\in GL_n(\mathbb{R})$ tale che ${}^tPAP = D$ diagonale

$\varphi: V \longrightarrow V$ è autoaggiunto $\iff \exists$ b.o.n. di autovettori

Se φ ha matrice A in base E ortonormale, allora

φ autoaggiunto $\iff \exists\ P\in O(n)$ tc $\underset{\overset{\parallel}{{}^tPAP}}{P^{-1}AP}$ = diagonale

Se φ è autoaggiunto e $\beta: (v,w) \longmapsto v\cdot\varphi(w)$, allora $\exists$ una base ortonormale dove φ e β sono diagonali.

Ora sia V = sp. vett $/\mathbb{R}$ $\dim V = 2$, prodotto scalare $\cdot$. Sia $S^1 = \{v\in V \text{ tc } v\cdot v = 1\} \subset V$.

$\varphi: V \longrightarrow V$ operatore autoaggiunto con autovalori $d_1 \leq d_2 \in \mathbb{R}$.

Sia $\beta: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bil. simm., $q: V \longrightarrow \mathbb{R}$

$(v,w) \longmapsto v\cdot\varphi(w)$ $\qquad\qquad v \longmapsto \beta(v,v)$

$q|_{S^1} : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ assume massimo λ_2 in v autovettore per λ_2 con $v \cdot v = 1$

minimo λ_1 in w autovettore per λ_1 con $w \cdot w = 1$.

Infatti: $\exists$ b.o.n. di autovettori $\{e_1, e_2\}$ con $\varphi(e_1) = \lambda_1 e_1$, $\varphi(e_2) = \lambda_2 e_2$. Se $v = \gamma e_1 + \delta e_2$

$$q\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \frac{1}{\gamma^2+\delta^2} q(\gamma e_1 + \delta e_2) = \frac{1}{\gamma^2+\delta^2} (\gamma e_1 + \delta e_2) \cdot (\gamma \lambda_1 e_1 + \delta \lambda_2 e_2)$$

$$= \frac{\gamma^2}{\gamma^2+\delta^2} \lambda_1 + \frac{\delta^2}{\gamma^2+\delta^2} \lambda_2 = \underbrace{\frac{\gamma^2}{\gamma^2+\delta^2}}_{\text{assume valori fra 0 e 1}} \lambda_1 + \left(1 - \frac{\gamma^2}{\gamma^2+\delta^2}\right) \lambda_2$$

assume sempre valori fra λ_1 e λ_2 $\Rightarrow$ min per $\delta = 0$ e max per $\gamma = 0$

(si può ottenere anche con $\frac{v}{\|v\|} = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2 \Rightarrow q\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \lambda_1 \cos^2\theta + \lambda_2 \sin^2\theta$

Applichiamo a $-d_pN : T_pS \longrightarrow T_pS$

ci sono 2 autovalori λ_1, λ_2 con $\lambda_1 \leq \lambda_2$ e 2 vettori ortonormali e_1 e $e_2 \in T_pS$ tc

$\mathrm{II}_p(e_1) = \lambda_1 = \min \mathrm{II}_p|_{S^1}$ e $\mathrm{II}_p(e_2) = \lambda_2 = \max \mathrm{II}_p|_{S^1}$

def Gli autovalori di $-d_pN$ sono detti CURVATURE PRINCIPALI di S nel punto p

Gli autovettori (unitari) di $-d_pN$ sono detti le DIREZIONI PRINCIPALI di S nel punto p

oss Non abbiamo escluso il caso $\lambda_1 = \lambda_2$ (in questo caso tutti i vettori unitari sono direzioni principali).

def
- Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, allora $-d_pN = \lambda \, \mathrm{Id}$ e p è detto PUNTO OMBELICALE di S
- Chiamiamo $K(p) := \det(d_pN) \overset{\det(-d_pN)}{=}$ CURVATURA GAUSSIANA di S in p

  $H(p) := \dfrac{-\mathrm{Tr}(d_pN)}{2} \overset{\mathrm{Tr}(-d_pN)}{=}$ CURVATURA MEDIA di S in p

oss Se λ_1, λ_2 sono gli autovalori di d_pN, allora $K(p) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ e $H(p) = \dfrac{-\lambda_1 - \lambda_2}{2}$

def Un punto $p \in S$ è detto:

- ELLITTICO se $K(p) > 0$
- IPERBOLICO se $K(p) < 0$
- PLANARE se $d_pN = 0$
- PARABOLICO se $K(p) = 0$ e $d_pN \neq 0$, cioè $K = 0, H \neq 0$

oss
- se p è planare, allora p è ombelicale
- se p è ombelicale, allora o è planare o è ellittico

def se $C \subset S$ è una curva parametrica in S tale che $\forall p \in C$ $T_pC \subset T_pS$ è generato da una direzione principale, C è detta LINEA DI CURVATURA di S

oss C è una linea di curvatura se $\forall$ param. regolare $\alpha: I \longrightarrow C \subset S$ $\forall t \in I$

deve essere un autovettore

$$N'(t) = \frac{d}{dt}(N(\alpha(t))) = d_{\alpha(t)}N \cdot \alpha'(t) = \underbrace{\lambda(t)}_{\substack{\in \mathbb{R} \\ \text{dipendente da } t}} \alpha'(t) \quad \exists \lambda \in C^{\infty}(I)$$

esempi

1) (piano) $N \equiv C \in \mathbb{R}^3$ costante $\Rightarrow d_pN = 0$ $\forall p \in$ piano

$\Rightarrow$ ogni punto $p \in$ piano è planare

2) (sfera) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = r\}$

$N: S \longrightarrow \mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto \frac{1}{r}(x,y,z)$

$v \longmapsto \frac{1}{r}v$

$d_pN = \frac{1}{r} Id$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{r}$; $K = \frac{1}{r^2}$, $H = -\frac{1}{r}$

$\Rightarrow$ ogni punto $p \in S$ è ombelicale

3) (grafico di una funzione)

$S = \{(x,y,z) \mid z - xy = 0\} = \Gamma_f \in \mathbb{R}^3$

$F(x,y,z) = z - xy$ $\quad \nabla F = (-y, -x, 1) \neq 0$

$N(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}(-y, -x, 1)$

$\varphi: (x,y) \longmapsto (x, y, xy)$ param regolare

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\simeq} S$

$\varphi_x = (1,0,y)$

$\varphi_y = (0,1,x)$

$p = (0,0,0) \overset{= \varphi(0,0)}{} \in S$ $\quad T_pS = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rangle : \underbrace{\{z = 0\}}_{\text{come sp. vettoriale}}$

$$(d_pN)(\varphi_x) = \frac{d}{dt}(N(\varphi(t,0)))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} N(t,0,0) = \frac{d}{dt}\left(0, \frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

$$= \left(0, \frac{-\sqrt{1+t^2}+t(\dots)}{(1+t^2)^2}, -t(1+t^2)^{-3/2}\right)\Big|_{t=0} = (0,-1,0) = -\varphi_y(0,0)$$

$$(d_pN)(\varphi_y) = \frac{d}{dt}(N(\varphi(0,t)))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}N(0,t,0)\Big|_{t=0} = (-1,0,0)$$

$$d_pN : T_pS \longrightarrow T_pS$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \longmapsto \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \longmapsto -\mu\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

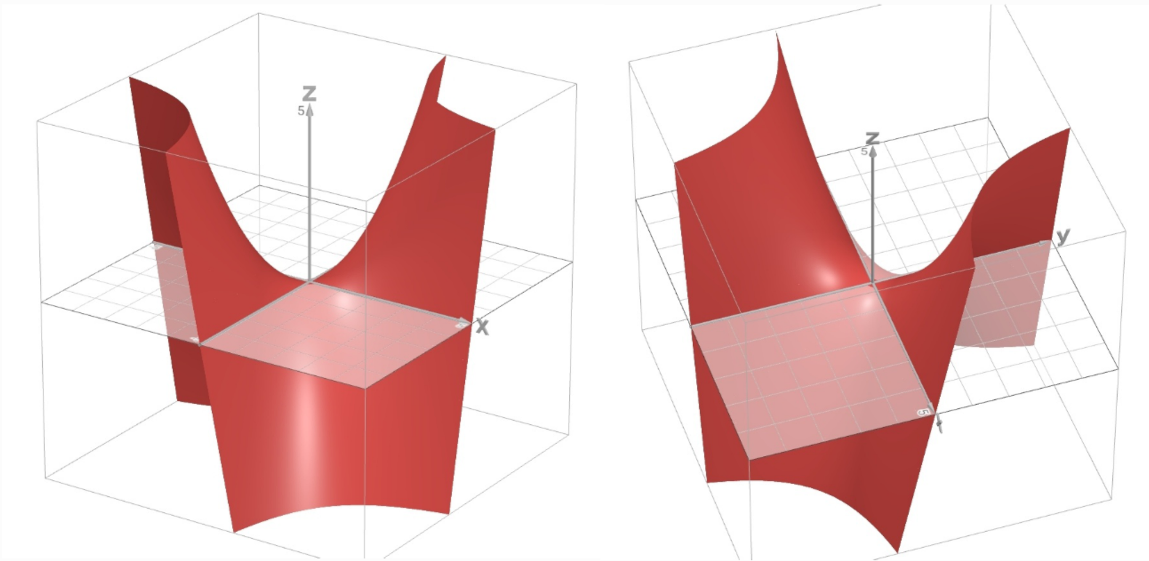
non bisogna farsi confondere dal fatto che i vettori abbiano 3 coordinate! infatti, lo sp. vett. ha sempre dimensione 2.

se ottengo $\varphi_x \longmapsto a\varphi_x + b\varphi_y$, $\varphi_y \longmapsto c\varphi_x + d\varphi_y$ allora $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $-d_pN : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ due autovalori $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$: $K(p) = -1$, $H(p) = 0$

$\Rightarrow$ p è p.to iperbolico



4) (monkey saddle) un punto planare "non piano"

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^3 - 3xy^2\}, \quad p = (0,0,0)$$

$$z = f(x,y)$$

$$F(x,y,z) = z - x^3 + 3xy^2 \qquad \nabla F = (-3x^2+3y^2 \quad 6xy \quad 1) \neq (0,0,0)$$

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$$

$$(x,y) \longmapsto (x, y, x^3 - 3xy^2)$$

$$\varphi_x(x,y) = (1, 0, 3x^2 - 3y^2) = (1, 0, f_x) \qquad \varphi_y(x,y) = (0, 1, -6xy) = (0, 1, f_y)$$

$$\varphi_x \wedge \varphi_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e_1 \\ 0 & 1 & e_2 \\ f_x & f_y & e_3 \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1), \quad h(x,y) = \frac{1}{\|\varphi_x \wedge \varphi_y\|} = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} > 0$$

$$N(x,y) = \frac{\varphi_x \wedge \varphi_y}{\|\varphi_x \wedge \varphi_y\|} = h(x,y)\,(-f_x, -f_y, 1)$$

$(d_pN)(\varphi_x) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\cdot(-f_x,-f_y,1) + h(x,y)(-f_{xx},-f_{yx},0)$

$(d_pN)(\varphi_y) = \frac{\partial N}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\cdot(-f_x,-f_y,1) + h(x,y)(-f_{xy},-f_{yy},0)$

$(d_pN)(\varphi_x) = \left(-\frac{\partial h}{\partial x} f_x - h f_{xx}\right)\varphi_x + \left(-\frac{\partial h}{\partial x} f_y - h f_{xy}\right)\varphi_y$

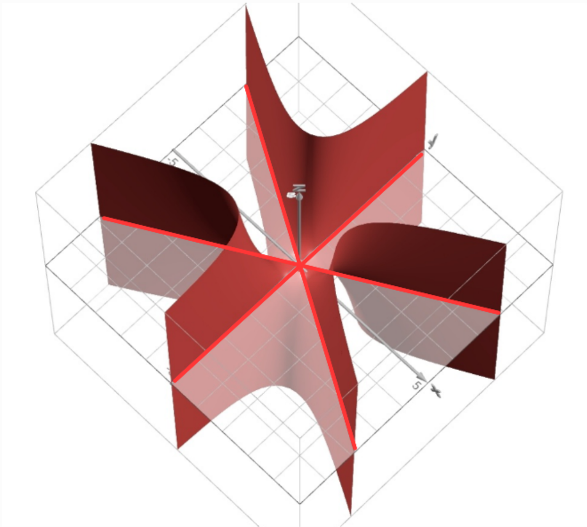
$(d_pN)(\varphi_y) = \left(-\frac{\partial h}{\partial y} f_y - h f_{xy}\right)\varphi_x + \left(-\frac{\partial h}{\partial y} f_y - h f_{yy}\right)\varphi_y$

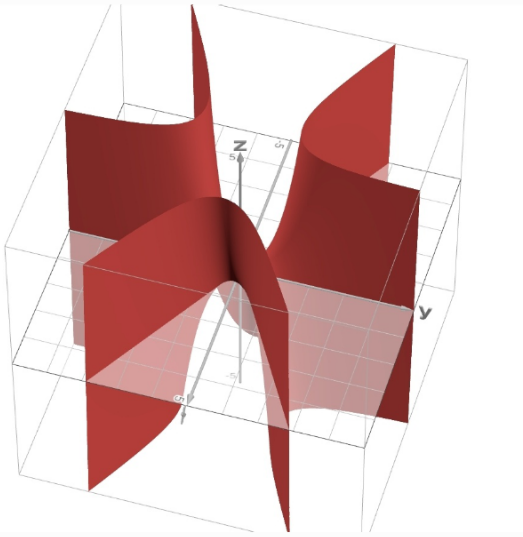
ho sistemato le prime due coordinate: la terza segue dato che φ_x e φ_y sono base

$p(0,0,0) = \varphi(0,0) \Rightarrow f_{xx}(0,0) = f_{xy}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 0 = f_x(0,0) = f_y(0,0)$

$\Rightarrow d_pN = 0 \Rightarrow p$ è punto planare

$S\cap[z=0] : \begin{cases} z-x^3+3xy^2=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ x(x^2-3y^2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ x(x-\sqrt{3}y)(x+\sqrt{3}y)=0 \end{cases}$ tre rette





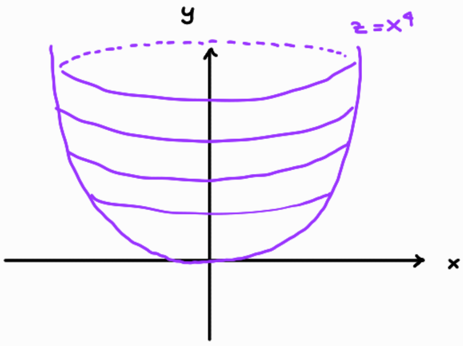
5) (superficie di rotazione) altri punti planari, ma senza rette

$z = (x^2+y^2)^2$

$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

In $p=(0,0,0)$ $f_x = f_y = f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = 0$

$\Rightarrow II_p(0) = 0$ e p è punto planare



S è contenuta interamente in $H = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ z\geq 0\}$

se S contiene rette, queste devono essere contenute in un piano orizzontale

e $S\cap[z=0] = \{(0,0,0)\}$, $S\cap[z=c]$ = circonferenza

$\Rightarrow T_pS\cap S = \{p\}$ per $p=(0,0,0)$ e S non contiene rette

TEOREMA $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientata (connessa) tale che ogni punto $p \in S$ è ombelicale, allora S è contenuta o in un piano o in una sfera.
In particolare, tutti i punti hanno la stessa curvatura gaussiana e sono o tutti planari o tutti ellittici

dim Osserviamo che un operatore autoaggiunto $\varphi: V \longrightarrow V$ che ha autovalori tutti uguali $\lambda \in \mathbb{R}$ è necessariamente λId_V, e in qualsiasi base ha matrice λI_n. Quindi se S ha punti tutti ombelicali, allora $\exists\, \lambda \in C^\infty(S, \mathbb{R})$ t.c. $d_pN = \lambda(p) Id_{T_pS}$

esercizio verificare che $\lambda \in C^\infty$ (usare una param. regolare)

consideriamo $\varphi: U \longrightarrow S$, con U aperto connesso, una param. regolare.
$q = \varphi(u,v) \in \varphi(U) \subseteq S$ e consideriamo la base $\{\varphi_u(u,v), \varphi_v(u,v)\}$ di T_qS. $N: S \longrightarrow S^2$ mappa di Gauss.

$N \circ \varphi : U \longrightarrow S^2$ è tale che

$$N_u = \frac{\partial}{\partial u}(N \circ \varphi) = (d_qN)\varphi_u \overset{hp}{=} \lambda(q)\varphi_u$$

$$N_v = \frac{\partial}{\partial v}(N \circ \varphi) = (d_qN)\varphi_v = \lambda(q)\varphi_v$$

$\lambda: U \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_u : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi_v : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sono C^∞.

sarebbe $\lambda \circ \varphi$

$$N_{uv} = \frac{\partial}{\partial v}\lambda\varphi_u = \lambda_v\varphi_u + \lambda\varphi_{uv}$$

$$\shortparallel$$

$$N_{vu} = \frac{\partial}{\partial u}\lambda\varphi_v = \lambda_u\varphi_v + \lambda\varphi_{vu}$$

$\Rightarrow \lambda_v\varphi_u - \lambda_u\varphi_v = 0$ comb. lineare

Poiché φ_u e φ_v sono lin. indipendenti, si ha $\lambda_u = \lambda_v = 0 \quad \forall q = \varphi(u,v)$
$\Rightarrow \lambda$ è costante

Poiché S è connessa, λ è costante su S.

1) $\lambda \equiv 0$, allora $N_u = N_v = 0$ in ogni $q(u,v) \in U$
$\Rightarrow N \equiv N_0$ è mappa costante su tutta S.
$\Rightarrow \varphi(u,v) \cdot N$ è funzione costante, infatti:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(\varphi(u,v) \cdot N) = \underbrace{\varphi_u \cdot N}_{0} + \varphi \cdot \underset{0}{N_u} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}(\varphi(u,v) \cdot N) = \dots = 0$$

$\Rightarrow \forall q = \varphi(u,v) \in \varphi(U) \subseteq S, \quad \varphi(u,v) \cdot N \equiv \text{cost}$
$\Rightarrow \varphi(U)$ è contenuta in un piano affine ortogonale a N, infatti:

se $q_1, q_2 \in \varphi(U)$, allora

$$(q_1 - q_2)\cdot N = \varphi(u_1,v_1)\cdot N - \varphi(u_2,v_2)\cdot N = 0$$

2) Supponiamo $d \neq 0$. Consideriamo il punto $\psi(u,v) = \varphi(u,v) - \frac{1}{d} N(u,v)$

allora $\frac{\partial \psi}{\partial u} = \varphi_u - \frac{1}{d} N_u = \varphi_u - \frac{1}{d}(d\varphi_u) = 0$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = \varphi_v - \frac{1}{d} N_v = \dots = 0$$

Quindi $\psi(u,v)$ è un punto fisso $q_0 \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \forall u,v \in U \quad \varphi(u,v) = q_0 + \frac{1}{d} N(u,v)$, ma $\|N(u,v)\| = 1$

$\Rightarrow \varphi(U)$ è contenuto nella sfera di centro q_0 e raggio $\frac{1}{|d|}$.

Rimane da dim che che $\forall$ param. regolare $\varphi : U \longrightarrow S$,

$\varphi(U)$ è contenuto nello stesso piano o nella stessa sfera.

1) Nel caso del piano ($d=0$)

$N \circ \varphi$ è costante $\forall \varphi$, cioè N è costante su ogni $\varphi(U) \subseteq S$

($\overset{S \text{ connessa}}{\Longrightarrow}$ N è costante su tutta S)

$\Rightarrow$ ogni $\varphi(U)$ è contenuto in un piano ortogonale a N

$\overset{S \text{ connessa}}{\Longrightarrow}$ ogni $\varphi(U)$ è contenuto nello stesso piano

2) Nel caso della sfera, consideriamo la funzione

$S \xrightarrow{\Psi} \mathbb{R}^3$, $q \longmapsto q - \frac{1}{d} N(q)$ è ben def e C^∞ su tutta S

e per ogni param regolare $\varphi : U \longrightarrow S$, Ψ è costante su $\varphi(U) \subseteq S$

$\overset{S \text{ connessa}}{\Longrightarrow}$ Ψ è costante su tutta la superficie S.

$\Rightarrow$ tutta S è contenuta nella sfera di centro $q_0 = \Psi(q)$ e

raggio $\frac{1}{|d|}$ $\square$

<u>lemma</u> (semplice connessione di S^2) Sia $F : S \longrightarrow S^2$ una mappa continua,

da S superficie compatta connessa e orientabile su nella su una sfera S^2.

Se F è un omeomorfismo locale, cioè se $\forall p \in S$ $\exists$ $p \in U_p \subseteq S$ intorno aperto

e $V_{F(p)} \subseteq S^2$ aperto tc $F|_{U_p} : U_p \longrightarrow V_{F(p)}$ omeomorfismo,

allora F è un omeomorfismo da S su S^2.

TEOREMA Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sup. diff. compatta connessa e orientabile, tale che la curvatura gaussiana $K(p)$ sia positiva in ogni punto $p \in S$. Allora S è diffeomorfa a una sfera.

dim Consideriamo $N: S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ mappa di Gauss e mostriamo che è un diffeomorfismo.

Poiché $K(p) = \det(d_pN) \neq 0$ $\forall p \in S$, applichiamo il teorema della funzione inversa alla mappa N: $\forall p \in S$ $\exists U_p \subseteq S, V_{N(p)} \subseteq \mathbb{S}^2$ intorni aperti di p e $N(p)$ tc $N|_{U_p}: U_p \longrightarrow V_{N(p)}$ è diffeomorfismo.

Allora in particolare N è una mappa aperta e anche una mappa chiusa (perché S è compatta).

Allora $Im(N) = N(S)^{\neq \emptyset}$ è un aperto e un chiuso in $\mathbb{S}^2$

$\overset{\mathbb{S}^2 \text{ connessa}}{\Longrightarrow}$ $N(S) = \mathbb{S}^2$, cioè N è suriettiva

Allora N è continua, suriettiva e omeomorfismo locale. (diffeo $\Rightarrow$ omeo)

Quindi N è un omeomorfismo da $S \longrightarrow \mathbb{S}^2$.

L'inversa N^{-1} è C^∞ perché N è un diffeomorfismo locale

esiste perché N omeomorfismo

$\Rightarrow N$ è diffeomorfismo. $\square$

oss L'iperboloide iperbolico ha curvatura Gaussiana negativa dappertutto e non è compatto.

def Una superficie è detta SUPERFICIE MINIMA se $\forall p$, $H(p) = 0$.

TEOREMA Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie diff. compatta orientata. Allora $\exists p \in S$ tc $K(p) > 0$.

corollario Non esistono superfici $S \subseteq \mathbb{R}^3$ compatte tc $K(p) \leq 0$ $\forall p \in S$.

In particolare in $\mathbb{R}^3$ non esistono superfici minime compatte.

dim (teorema). Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ compatta, consideriamo
$$\Phi: S \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \|x\|^2 = x \cdot x$$
sia $p \in S$ un p.to di massimo ($\exists$).

Sia $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$ sezione normale con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v \in T_pS$ (WLOG $\|v\| = 1$).

Sia $\varphi(t) = \Phi(\alpha(t)) = \alpha(t)\cdot\alpha(t)$; ha un massimo in $t=0$. Si ha

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\varphi\Big|_{t=0} = 2\alpha'(t)\cdot\alpha(t)\Big|_{t=0} = 2\alpha'(0)\cdot\alpha(0) = 2v\cdot p = 0 \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\varphi\Big|_{t=0} = 2\alpha'(0)\cdot\alpha'(0) + 2\alpha''(0)\cdot\alpha(0) = 2 + 2\alpha''(0)\cdot p \leq 0 \end{cases}$$

$\frac{p}{\|p\|}$ è versore $\perp v$ $\forall v \in T_pS \Rightarrow \frac{p}{\|p\|}$ è versore normale a S nel punto p

Inoltre $\alpha''(0)\cdot p \leq -1 \Rightarrow \left|\alpha''(0)\cdot\frac{p}{\|p\|}\right| = |k_n(p)| \geq \frac{1}{\|p\|} > 0$

Quindi $|\overset{= k_n(p)}{II_p(v)}| > 0$ $\forall v \in T_pS$, $\|v\| = 1 \Rightarrow K(p) > 0$. □

TEOREMA Ogni superficie differenziabile compatta in $\mathbb{R}^3$ è omeomorfa ad una superficie Σ_g con $g \geq 0$, dove $\Sigma_0 = S^2 \subset \mathbb{R}^2$, $\Sigma_g =$  toro con g buchi

Inoltre se una superficie diff. compatta è omeomorfa a Σ_g, allora è anche diffeomorfa a Σ_g.