SOTTOSPAZI

def (X, τ_X) ST, $S \subseteq X$ sottoinsieme. La TOPOLOGIA INDOTTA da τ_X su S è la topologia indotta su S da $i: S \hookrightarrow X$, cioè la topologia i cui aperti sono gli insiemi

$$i^{-1}(A) = S \cap A \quad \text{dove} \quad A \subseteq X \text{ è aperto}$$

Considerato come s.t. con la top. indotta, S si chiama SOTTOSPAZIO TOPOLOGICO.

prop Se $T \subseteq S$ e $S \subseteq X$ allora la topologia su T indotta da X e la topologia su T indotta da S coincidono.

prop (1) Se $\mathcal{B}$ è base di τ_X su X e $S \subseteq X$ allora la famiglia

$$\mathcal{B} \cap S = \{B \cap S \mid B \in \mathcal{B}\}$$

è una base della topologia τ_S di S.

((X, τ_X) ST, $S \subseteq X$ sottoinsieme τ_S top indotta su S da X).

dim Devo mostrare che ogni aperto di τ_S è unione di elementi di $\mathcal{B} \cap S$. Se $A \in \tau_S$, $\exists\, B \in \tau_X$ tc $A = B \cap S$, ma $B = \bigcup_{B_i \in \mathcal{B}} B_i$ dunque

$$A = \bigcup_i (B_i \cap S)$$

(2) Se $x \in S$, sia $\mathcal{N}_S(x)$ il filtro degli intorni di x nella top. τ_S e $\mathcal{N}_X(x)$ il filtro degli intorni di x nella top τ_X.

Allora $N \in \mathcal{N}_S(x) \iff \exists\, M \in \mathcal{N}_X(x)$ tc $N = M \cap S$.

dim Fisso N. Sia $A \subseteq N$, $x \in A$. $A \subseteq S$ aperto, $A \in \tau_S$.

Sia $B \in \tau_X$ tc $A = S \cap B$; notare che $x \in B$. Sia $M = B \cup N$.

Poiché $x \in B$, $B \in \tau_X \implies M \in \mathcal{N}_X(x)$.

Inoltre $M \cap S = (B \cup N) \cap S$

$$= (B \cap S) \cup (N \cap S)$$

$$= A \cup N = N$$

Viceversa, basta mostrare che $N = M \cap S$ appartiene a $\mathcal{N}_S(x)$.

Infatti, $M \in \mathcal{N}_X(x) \implies \exists\, B \in \tau_X$, $x \in B \subseteq M$

$\implies B \cap S = A \in \tau_S$ e $A \subseteq M \cap S = N$ e $x \in A$.

(3) $S \subseteq X$ aperto $\iff$ $i : S \hookrightarrow X$, $s \mapsto s$ è aperto

dim (*) Infatti, $i : S \hookrightarrow X$ aperta $\iff$ $\forall A \subseteq S$ aperto, $i(A) = A \subseteq X$ aperto

$\iff$ $\forall B \subseteq X$ aperto, $A = \underbrace{B \cap S}_{\text{S aperto}} \subseteq X$ aperto

Dunque $i : S \hookrightarrow X$ è aperta $\iff$ per ogni aperto $B \in \tau_X$, $B \cap S$ è unione di aperti in τ_X. Osserviamo che quest'ultima condizione è equivalente a chiedere che $S \in \tau_X$. Infatti se S è aperto $B \cap S$ è aperto, viceversa se $B \cap S$ è aperto $\forall B \in \tau_X$, allora $S \cap X = S \in \tau_X$ perché $X \in \tau_X$.

(4) $C \subseteq X$ chiuso $\iff$ $i : C \hookrightarrow X$, $c \mapsto c$ è chiuso (esercizio)

def Sia $f : X \to Y$ continua, $i : S \subset X$ inclusione. La RESTRIZIONE di f a S, $f|_S$, è $f|_S = f \circ i : S \xhookrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y$. Viceversa, se $g : S \to Y$ è continua e $f : X \to Y$ continua t.c. $f|_S = g$, f è detta ESTENSIONE di g se

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ S \arrow[u, hook, "i"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

def $f : X \to Y$ continua è detta INCLUSIONE CONTINUA se è un omeomorfismo sull'immagine, i.e. $f : X \to f(X) \subseteq Y$ è un omeomorfismo, se dotato $f(X) \subseteq Y$ della top. indotta da Y su $f(X)$

prop $f : X \to Y$ omeomorfismo, $S \subseteq X$ sottospazio topologico. Allora $f|_S$ è inclusione continua

↳ su S considero la top. indotta da i ed X τ_S

dim Poiché $i : S \hookrightarrow X$ continua (per def di τ_S) allora $f|_S$ continua ed ammette inversa $(f|_S)^{-1} : f(S) \to S$ perché $S \hookrightarrow X$ iniettiva.

Per mostrare che è continua basta mostrare che $f|_S$ è aperta.

Sia $A \subseteq S$ aperto: allora $\exists\, B \subseteq X$ aperto t.c. $A = B \cap S$.

Ora $f(B)$ è aperto (in Y), perché $f : X \to Y$ è omeomorfismo (f omeom $\iff$ f aperta)

e $f(A) = f(B \cap S) = \underbrace{f(B)}_{\text{aperto in } Y} \cap \underbrace{f(S)}_{\text{aperto in } f(S)}$, dunque $f(A)$ è aperto in $f(S)$ $\square$

vedo $f(S)$ come sottospazio topologico di Y

per def di $f(S) \subseteq Y$ sottospazio top.

Esempi

(1) $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ inclusione continua, chiusa

$I^n = \underbrace{I \times \dots \times I}_{n \text{ volte}} \subseteq \mathbb{R}^n$ inclusione continua, chiusa.

$\overline{B(0,1)}$
$\shortparallel$

(2) $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ inclusione continua chiusa

$S^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ sfera n-dimensionale di $\mathbb{R}^{n+1}$ è inclusione continua chiusa

$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x-y\| < r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ è inclusione continua aperta

(3) Due intervalli di $\mathbb{R}$, limitati o meno, sono tra loro omeomorfi nei seguenti casi (che non sono fra loro omeomorfi, basta guardare i derivati):

se fossero omeomorfi avrebbero gli stessi derivati

(1) Entrambi aperti da entrambi gli estremi

(2) Entrambi chiusi da entrambi gli estremi

(3) Entrambi hanno un estremo chiuso e l'altro aperto

<u>dim</u> • Dati $[a,b]$, $[c,d]$, $a<b$, $c<d$ ho un omeomorfismo

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto c + \frac{d-c}{d-a}(x-a)$$

Per restrizione, ottengo omeomorfismi

$[a,b] \xrightarrow{\cong} [c,d]$ $\qquad$ $[a,b) \xrightarrow{\cong} [c,d)$

$(a,b) \xrightarrow{\cong} (c,d)$

• Inoltre $f : [a,b) \to [0,\infty)$ è omeomorfismo

$$x \mapsto \frac{x-a}{b-x}$$

perché continua, biiettiva e con inversa continua $t \mapsto \frac{bt+a}{t+1}$.

Per restrizione ho anche un omeomorfismo

$$(a,b) \xrightarrow{\cong} (0,\infty)$$

• Similmente $(a,b] \xrightarrow{\cong} (-\infty,0]$ omeomorfismo

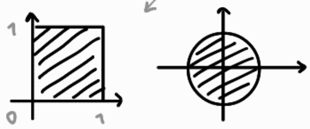
$$x \mapsto \frac{x-b}{x-a}$$

• $[-1,1) \xrightarrow{\cong} (-1,1]$

$$t \mapsto -t$$

$\square$

(4) Il quadrato (chiuso) è omeomorfo al disco chiuso: $I^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^2 = \overline{B(0,1)} \subseteq \mathbb{R}^2$

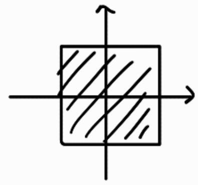


dim Per prima cosa noto che $I^2 \xrightarrow{\sim} Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\}$

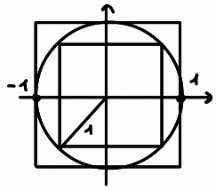
tramite traslazione: $(x,y) \mapsto (2x-1, 2y-1)$

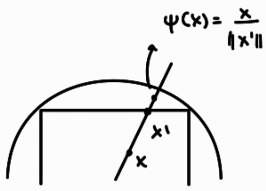
Poi definisco $\psi : Q' \longrightarrow \mathbb{D}^2$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{x}{\|x'\|} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$



dove $Q' = \frac{1}{\sqrt{2}} Q$ e x' è p.to di intersezione tra $Fr(Q)$ e la semiretta per 0 e x





Allora ψ è continua (verifica) biettiva con inversa continua

$$\mathbb{D}^2 \xrightarrow{\psi} Q'$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \|x'\| x & x \neq 0 \end{cases}$$

Componendo $I^2 \xrightarrow{\sim} Q \xrightarrow{\simeq} Q' \xrightarrow{\simeq} \mathbb{D}$ è omeomorfismo $\square$

(*) **dim** $A \subseteq X$ aperto $\overset{\text{def di topologia}}{\Longrightarrow} \forall B \subseteq X$ aperto $B \cap A \subseteq X$ aperto

$\overset{\text{top. generata da } i}{\Longrightarrow} \forall S \subseteq A$ aperto $\exists B \subseteq X$ aperto tc $S = B \cap A \subseteq X$ aperto

$\Longrightarrow i : A \hookrightarrow X$ aperta

Viceversa,

$i : A \hookrightarrow X$ aperta $\overset{i \text{ aperta}}{\Longrightarrow} \forall S \subseteq A$ aperto $S \subseteq X$ aperto (1)

$\overset{\text{continuità x def top. gen. da } i}{\Longrightarrow} \forall B \subseteq X$ aperto $B \cap A \subseteq A$ aperto $\overset{(1)}{\Longrightarrow} B \cap A \subseteq X$ aperto

$\overset{B = X}{\Longrightarrow} X \cap A = A \subseteq X$ aperto

(5) PROIEZIONE STEREOGRAFICA

Fisso un punto $c \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ e un iperpiano $H \subseteq \mathbb{R}^n$, $c \notin H$.

H_c = iperpiano parallelo a H e passante per c. Definisco

$$\pi_{c,H} : \mathbb{R}^n \setminus \{H_c\} \longrightarrow H$$

$$x \longmapsto H \cap (\text{retta per } c \text{ e } x)$$

è proiezione di centro C su H. Notiamo che è continua

A meno di affinità, posso assumere

$$C = N = (0, \dots, 0, 1)$$

$$H : \quad x_n = 0$$

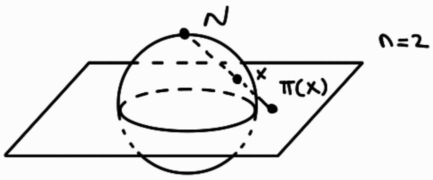
$$H_C : \quad x_n = 1$$

perciò $\pi_{N,H}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{1-x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{1-x_n}, 0 \right)$ (verifica) mi implica la continuità

Definisco la proiezione stereografica come la restrizione

$$\pi : S^{n-1} \setminus \{N\} \longrightarrow H$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (\text{retta per } N \text{ e } x) \cap H$$



E' un omeomorfismo con inversa

$$\pi^{-1} : H \longrightarrow S^{n-1} \setminus \{N\}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + 1}, \dots, \frac{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - 1}{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + 1} \right)$$

(verificare π e π^{-1} inverse una dell'altra).

(6) **ESPONENZIALE E LOGARITMO COMPLESSI**

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z = x + iy \mapsto e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$\log : \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \longrightarrow B = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im}(z) < 2\pi\}$$

$$w \longmapsto \log|w| + i \sin(\underset{\in (0,2\pi)}{\arg(w)})$$

Allora $\exp : B \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ e' un omeomorfismo.

"semipiano complesso superiore"

(7) $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$, $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Allora

$$\mathcal{H} \xrightarrow{\sim} D$$

$$z \longmapsto \frac{z - i}{z + i}$$

(8) **GRUPPI DI MATRICI**

$K = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$

(•) $M_{n\times n}(K) \xrightarrow[\substack{\text{iso}\\ K\text{-s.v.}}]{\sim} K^{n^2}$

$$(a_{ij}) \longmapsto e_{i,j}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{nn})$$

(•) $GL_n(K) = \{ A \in M_{n\times n}(K) \mid \det(A) \neq 0 \}$

È aperto di $M_{n\times n}(K)$ in quanto $GL_n(K) = \det^{-1}(K \setminus \{0\})$, det è continuo.

(•) $SL_n(K) = \{ A \in GL_n(K) \mid \det(A) = +1 \}$

È chiuso in $GL_n(K)$ e in $M_{n\times n}(K)$, perchè è sempre $\det^{-1}(\{1\})$ (vedo $\{1\}$ come chiuso di $K \setminus \{0\}$ e K rispettiv.).

$$\begin{tikzcd} SL_n(K) \arrow[r, hook, "\text{chiuso}"] \arrow[dr, "\text{chiuso}"'] & GL_n(K) \arrow[d, hook, "\text{aperto}"] \\ & M_{n\times n}(K) \end{tikzcd}$$

(•) $O_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_{n\times n}(K) \mid A^t A = I \}$ gruppo ortogonale, delle isometrie di $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ rispetto al prodotto scalare standard.

È chiuso in $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $GL_n(\mathbb{R})$ (esercizio)

↳ vanno esplicitate le cose a livello polinomiale

(•) $U_n(\mathbb{C}) = \{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid \bar{A}^t A = I \}$ gruppo unitario.

È chiuso (esercizio).

(•) $J_g = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_g \\ -\mathbb{I}_g & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{I}_g = \left.\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right\} g$ (with $\underbrace{\quad}_{g}$ columns)

$Sp(g, K) = \{ A \in M_{n\times n}(K) \mid A^t J_g A = J_g \}$ gruppo simplettico.

È chiuso (esercizio)

PRODOTTI

def $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ st e sia $X = X_1 \times X_2$ (prodotto cartesiano).
Definisco la TOPOLOGIA PRODOTTO su X come quella che ha
per base $\mathcal{B} = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2\}$

oss (1) $\mathcal{B}$, in effetti, è base per una topologia. Infatti:

(•) $X_1 \times X_2 \in \mathcal{B}$

(•) se $A_1 \times A_2 \in \mathcal{B}$ e $B_1 \times B_2 \in \mathcal{B}$, allora
$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in \mathcal{B}$, perché
$A_1 \cap B_1 \in \tau_1$ e $A_2 \cap B_2 \in \tau_2$

(2) $N \in \mathcal{N}_X((x_1, x_2)) \iff \exists\, N_1 \in \mathcal{N}_{X_1}(x_1), N_2 \in \mathcal{N}_{X_2}(x_2)$ tali che $N \supseteq N_1 \times N_2$.

dim ($\Leftarrow$) Infatti: suppongo che $\exists\, N_i \in \mathcal{N}_{X_i}(x_i)$ per $i = 1,2$
con $N \supseteq N_1 \times N_2$. Voglio mostrare che $N \in \mathcal{N}_X((x_1, x_2))$.
Infatti, siano $A_1 \in \tau_1$ con $N_1 \supseteq A_1 \ni x_1$
$A_2 \in \tau_2$ con $N_2 \supseteq A_2 \ni x_2$
Allora $A_1 \times A_2 \subseteq N_1 \times N_2 \subseteq N$ e $(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$
$\Rightarrow N \in \mathcal{N}_X((x_1, x_2))$.

($\Rightarrow$) Viceversa, se $N \in \mathcal{N}_X((x_1, x_2))$, allora $\exists\, U \subseteq N$, U aperto
e $(x_1, x_2) \in U$. Ma $\mathcal{B}$ è base, dunque $\exists\, A_1 \times A_2 \subseteq U$ aperti
$x_i \in A_i \in \tau_i$
$\Rightarrow N_1 = A_1$ e $N_2 = A_2$ funzionano

(3) se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono basi della top. di X_1 e X_2 rispettiv., allora
$\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$ è base della top. prodotto su $X = X_1 \times X_2$

dim Che $\mathcal{B}$ sia una base per una top. su X è chiaro, infatti:

1) lo st si scrive come unione di elementi della base
2) intersezione di el. della base è ancora el. della base

$$X_1 = \bigcup_{B_1 \in \mathcal{B}_1} B_1 \;, \quad X_2 = \bigcup_{B_2 \in \mathcal{B}_2} B_2$$

dunque ogni $x = (x_1, x_2)$ appartiene ad un $B_1 \times B_2$
per qualche B_1 e B_2 $\Rightarrow \bigcup_{\substack{B_1 \in \mathcal{B}_1 \\ B_2 \in \mathcal{B}_2}} B_1 \times B_2 = X$

Inoltre, $(B_1 \times B_2) \cap (B_1' \times B_2') = (\underbrace{B_1 \cap B_1'}_{\supseteq \mathcal{B}_1}) \times (\underbrace{B_2 \cap B_2'}_{\uparrow \mathcal{B}_2}) \in \mathcal{B}$

Poiché B_1 e B_2 sono aperti di X_1 e X_2, allora

$$\{B_1 \times B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}_1 \ , \ B_2 \in \mathcal{B}_2\} \subseteq \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{T}_1, A_2 \in \mathcal{T}_2\}$$

La topologia di cui $\mathcal{B}$ è base è meno fine della top. prodotto.

Per mostrare che coincidono, basta mostrare che ogni $A_1 \times A_2$ è aperto nella top. generata da $\mathcal{B}$.

Sia $A_1 = \bigcup_i B_{1,i} \quad , B_{1,i} \in \mathcal{B}_1$

$A_2 = \bigcup_j B_{2,j} \quad , B_{2,j} \in \mathcal{B}_2$

$$\Rightarrow A_1 \times A_2 = \bigcup_i B_{1,i} \times \bigcup_j B_{2,j} = \bigcup_{i,j} B_{1,i} \times B_{2,j} \qquad \square$$

(4) Siano $S_1 \subseteq X_1$ e $S_2 \subseteq X_2$ due sottospazi top. Allora la top. prodotto su $S_1 \times S_2$ dove ciascun S_i è dotato della topologia di sottospazio indotta da X_i coincide con la top. di sottospazio indotta su $S_1 \times S_2$ dalla top. prodotto di $X_1 \times X_2$ (esercizio).

(5) Per ogni $x_1 \in X_1$ $\{x_1\} \times X_2 \subseteq X_1 \times X_2$ sottospazio è omeomorfo a X_2.
(stessa cosa $X_1 \xrightarrow[\text{omeo}]{\sim} X_1 \times \{x_2\}$).

__dim__ Infatti, gli aperti di $\{x_1\} \times X_2$ sono gli insiemi della forma $\{x_1\} \times A$ con $A \subseteq X_2$ aperto (usare (4)). Perciò la mappa

$$X_2 \longrightarrow \{x_1\} \times X_2$$
$$x_2 \longmapsto (x_1, x_2)$$

continua, biettiva, con inversa continua

$$\{x_1\} \times X_2 \longrightarrow X_2$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto x_2$$

__def__ chiamo PROIEZIONI p_1, p_2 le funzioni

$p_1 : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_1$ $\qquad$ $p_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_2$

$(x_1, x_2) \longmapsto x_1$ $\qquad$ $(x_1, x_2) \longmapsto x_2$

__prop__ La topologia prodotto su $X_1 \times X_2$ è la meno fine su $X = X_1 \times X_2$ che rendono continue p_1 e p_2.

__dim__ Mostro che p_1 e p_2 sono continue se X ha la top prodotto.

Se $A \subseteq X_1$ è aperto $p_1^{-1}(A) = A \times X_2$ che è aperto $\Rightarrow p_1$ continua

Analogo per p_2.

Mostro che se una topologia τ rende continue p_1 e p_2, allora τ contiene una base della topologia prodotto. Se $A \subseteq X_1$ e $B \subseteq X_2$ sono aperti, allora $p_1^{-1}(A) = A \times X_2$ e $p_2^{-1}(A) = X_1 \times B$ sono aperti nella topologia τ, dunque $(A \times X_2) \cap (X_1 \times B) = A \times B$ è aperto di τ. Ma una base della top. prodotto di $X_1 \times X_2$ è formata da $A \times B$ $\square$

prop Le p_1 e p_2 sono mappe aperte.

dim Sia $U \subseteq X_1 \times X_2$ aperto. Scrivo $U = \bigcup_j A_j \times B_j$ con $A_j \subseteq X_1$, $B_j \subseteq X_2$ aperti. Allora $p_1(U) = p_1\left(\bigcup_j A_j \times B_j\right) = \bigcup_j A_j$ è aperto.
Analogo $p_2(U) = p_2\left(\bigcup_j A_j \times B_j\right) = \bigcup_j B_j$ è aperto. $\square$

prop (Proprietà universale della topologia prodotto). X_1, X_2, Y s.t. Una funzione $f: Y \longrightarrow X_1 \times X_2$ ($X_1 \times X_2$ dotato della top. prodotto) è continua in $y \in Y$ se e solo se lo sono

$$f_1 : Y \longrightarrow X_1 \times X_2 \xrightarrow{p_1} X_1$$
$$f_2 : Y \longrightarrow X_1 \times X_2 \xrightarrow{p_2} X_2$$

dim Se f è continua (in Y), anche le $f_i = p_i \circ f$ lo sono (in Y) perché p_i sono continue.
Suppongo viceversa che f_1, f_2 sono continue (in Y), e mostro che f lo è.
Fisso $A \subseteq X_1 \times X_2$ aperto e scelgo $A_1 \subseteq X_1$ aperto, $A_2 \subseteq X_2$ aperto con $A_1 \times A_2 \subseteq A$, $f(y) \in A$ e, se $f(y) = (x_1, x_2)$, $x_1 \in A_1$ e $x_2 \in A_2$.
Siano U_1 e U_2 aperti di Y t.c. $f_1(U_1) \subseteq A_1$, $f_2(U_2) \subseteq A_2$, che esistono per la continuità di p_1 e p_2. Allora $U = U_1 \cap U_2$ è un aperto di Y che contiene y. Inoltre

$$\begin{aligned} f(U) = f(U_1 \cap U_2) &\subseteq f_1(U_1 \cap U_2) \times f_2(U_1 \cap U_2) \\ &\subseteq A_1 \times A_2 \\ &\subseteq A \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ è continua in Y. $\square$

oss $f: X_1\times X_2 \longrightarrow Y$ è continua in (x_1,x_2) se e solo se $\forall N \in \mathcal{N}_Y(f(x_1,x_2))$ esistono $N_1\in\mathcal{N}_{X_1}(x_1)$ e $N_2 \in \mathcal{N}_{X_2}(x_2)$ tali che $f(N_1\times N_2)\subseteq N$

dim Noto che $M \in \mathcal{N}_{X_1\times X_2}((x_1,x_2)) \iff \exists\, U \subseteq X_1\times X_2$ con $(x_1,x_2)\in U\subseteq M$ $\iff \exists\, U_1\subseteq X_1,\ U_2\subseteq X_2$ $U_1\times U_2\subseteq M$, $(x_1,x_2)\in U_1\times U_2$

Perciò se f è continua esistono $U_1\subseteq X_1$ e $U_2 \subseteq X_2$ aperti tali che $f(U_1\times U_2)\subseteq N$ per ogni $N\in\mathcal{N}_Y(f(x_1,x_2))$.

Ma $U_1\in \mathcal{N}_{X_1}(x_1)$ e $U_2\in\mathcal{N}_{X_2}(x_2)$. Perciò, posto $N_1=U_1$, $N_2=U_2$, ho che $f(N_1\times N_2)\subseteq N$.

Viceversa per esercizio. □

oss (1) La topologia prodotto su $\mathbb{R}^n$ coincide con la topologia euclidea $\mathcal{E}$.

Chiamo una base della top. prodotto su $\mathbb{R}^n$ data dai rettangoli

$$R(a,b) = \{y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_i<y_i<b_i\}$$

dove $a=(a_1,\dots,a_n)$ $b=(b_1,\dots,b_n)$, entrambi in $\mathbb{R}^n$ con $a_i<b_i$ $\forall i$.

È facile vedere che

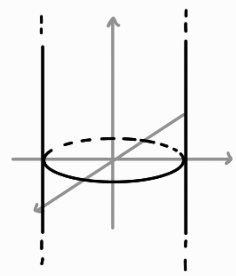
$$\{R(a,b) \mid a,b \text{ come sopra}\}$$

formano una base per la top. euclidea di $\mathbb{R}^n$. (Ciascun rettangolo contiene ed è contenuto in un disco aperto e viceversa i dischi formano una base per la top. la cui base sono i $R(a,b)$).

(2) CILINDRO

$X\subseteq \mathbb{R}^m$ sottospazio, $n\geq m$ intero. Definisco

$$C_X = X\times\mathbb{R}^{n-m}\subseteq \mathbb{R}^n$$



Ad esempio, $X = S^1$, $n=3$.

La top. prodotto su C_X è quella di sottospazio.

(3) TORO

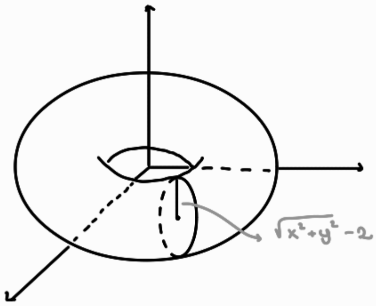
$$\mathbb{T}_n = \underbrace{S^1\times\dots\times S^1}_{n \text{ volte}} \subseteq \underbrace{\mathbb{R}^2\times\dots\times\mathbb{R}^2}_{n\text{ volte}} \cong \mathbb{R}^{2n}$$

Come prima, $\mathbb{T}_n$ è dotato della top prodotto o sottospazio.

Per $n=2$, $S^1\times S^1\subseteq\mathbb{R}^4$. Quindi:

(*) $\mathbb{T} \xrightarrow[\text{omeo}]{} \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1^2+x_2^2=1,\ x_3^2+x_4^2=1\} = X$

(°) $\mathbb{T} \xrightarrow[\text{omeo}]{h} \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1\} = Y$



Infatti $h(x_1,x_2,x_3,x_4) = ((x_1+2)x_3, (x_1+2)x_4, x_2)$

stabilisce un omeomorfismo tra i due ST $h: X \longrightarrow Y$.

Infatti $h(X) \subseteq Y$

$$\left(\sqrt{[(x_1+2)x_3]^2+[(x_1+2)x_4]^2}-2\right)+x_2^2 =$$

$$= \left(\sqrt{(x_1+2)^2\underbrace{(x_3^2+x_4^2)}_{1}}-2\right)^2+x_2^2 =$$

$$= (x_1+2-2)^2+x_2^2 = x_1^2+x_2^2 = 1$$

e h ammette inversa continua

$$k(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2}-2,\ z,\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

(esercizio $h\circ k = k\circ h = id$).

Usando le coordinate polari:

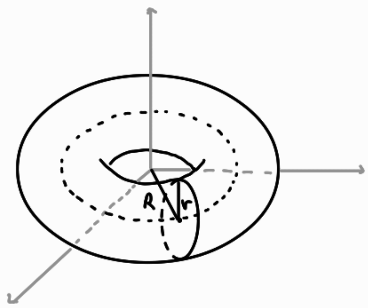
$$\mathbb{T} \xrightarrow[\text{omeo}]{} \{((2+\cos\theta)\cos\varphi,\ (2+\cos\theta)\sin\varphi,\ \sin\theta) \mid \theta,\varphi\in[0,2\pi]\}$$

Infatti

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-2 = \cos\theta \\ z = \sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = (2+\cos\theta)^2 \\ z = \sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (2+\cos\theta)\cos\varphi \\ y = (2+\cos\theta)\sin\varphi \\ z = \sin\theta \end{cases}$$



Se $0<r<R$, applicando affinità ho $\mathbb{T}_2$ è omeomorfo a

$$((R+r\cos\theta)\cos\varphi,\ (R+r\cos\theta)\sin\varphi,\ r\sin\theta)$$

Generalizzazione a prodotti qualunque

S insieme (di indici)

$\forall s \in S$, sia (X_s, τ_s) uno ST

$$X = \prod_{s\in S} X_s = \{ f : S \longrightarrow \bigcup_{s \in S} X_s \mid f(x) \in X_s, \forall s \in S \}$$

definizione un po' stravagante, ad esempio: $A = A_1 \times A_2$, $S = \{1,2\}$
$A_1 = \{a_{11}, a_{12}\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}\}$

$A = A_1 \times A_2 = \{(a_{11}, a_{21}), (a_{11}, a_{22}), (a_{12}, a_{21}), (a_{12}, a_{22})\}$
$= \{ f : \{1,2\} \longrightarrow A_1 \cup A_2 \mid \dots \}$

$f_0(1) = a_{11}$ $f_0(2) = a_{21} \longleftrightarrow (a_{11}, a_{21})$
$f_1(1) = a_{11}$ $f_1(2) = a_{22} \longleftrightarrow (a_{11}, a_{22})$
$f_2(1) = a_{12}$ $f_2(2) = a_{21} \longleftrightarrow (a_{12}, a_{21})$
$f_3(1) = a_{12}$ $f_3(2) = a_{22} \longleftrightarrow (a_{12}, a_{22})$

$\forall s \in S$, sia $p_s : X \longrightarrow X_s$ proiezione s-esima.
$$f \longmapsto f(s) \quad \text{(s-esima coordinata)}$$

def La top. prodotto su X è quella che ha per base $\mathcal{B}$ gli insiemi
$$p_{s_1}^{-1}(U_{s_1}) \cap \dots \cap p_{s_n}^{-1}(U_{s_n})$$
al variare di $\{s_1, \dots, s_n\} \subseteq S$ sottoinsieme finito e $\forall s_i$, $U_{s_i} \subseteq X_{s_i}$ aperto ($n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$).

oss (1) $\mathcal{B}$ è base per una topologia

(2) $\mathcal{B}$ è la meno fine delle top. che rendono continue tutte le p_i. Infatti, se $n=1$, $s = s_1$, sono aperti tutti gli $p_s^{-1}(U)$, $U \subseteq X_s$, aperto, dunque anche tutte le loro intersezioni finite

prop $\forall s \in S$, $p_s : X \longrightarrow X_s$ aperta.

dim Fisso un aperto $U \subseteq X$ e mostro che $p_s(U) \subseteq X_s$ è aperto.

Mostro che $p_s(U)$ è intorno di ogni suo punto.

Fisso $a \in p_s(U)$ e sia $f \in U$ tc $p_s(f) = a$. Poiché U è aperto, contiene un aperto di base che contiene f, dunque $\exists s_1, \dots, s_n$ e $U_{s_i} \subseteq X_{s_i}$ aperti tc
$$f \in V = p_{s_1}^{-1}(U_{s_1}) \cap \dots \cap p_{s_n}^{-1}(U_{s_n}) \subseteq U$$

Dunque $a \in p_s(V)$ e si ha
$$p_s(V) = \begin{cases} X_s & \text{se } s \notin \{s_1, \dots, s_n\} \\ U_{s_i} & \text{se } s = s_i,\ \exists i \end{cases}$$

Dunque $p_s(V)$ è aperto in ogni caso e $p_s(V) \subseteq p_s(U)$ e $a \in p_s(V)$.

Pertanto $p_s(U)$ è intorno di ogni suo punto. $\square$

prop (Proprietà universale). Y ST, $g: Y \longrightarrow X$ continua se e solo se sono tutte le $g_s = p_s \circ g : Y \longrightarrow X_s$.

dim $(\Rightarrow)$ Ovvia: composizione di continue è continua.

$(\Leftarrow)$ Basta mostrare che $g^{-1}(p_s^{-1}(U_s))$ sono aperti $\forall s \in S$, $\forall U_s \subseteq X_s$ aperto.

Ma quello è chiaro: $g^{-1}(p_s^{-1}(U_s)) = (p_s \circ g)^{-1}(U_s) = g_s^{-1}(U_s)$

che è aperto perché g_s è continua. $\square$

esercizi (1) (•) $\overline{S_1 \times S_2} = \overline{S_1} \times \overline{S_2}$

(•) $\mathrm{Int}(S_1 \times S_2) = \mathrm{Int}(S_1) \times \mathrm{Int}(S_2)$

(•) $\mathrm{Fr}(S_1 \times S_2) = (\mathrm{Fr}(S_1) \times \overline{S_2}) \cup (\overline{S_1} \times \mathrm{Fr}(S_2))$

esempi (2) $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ SM

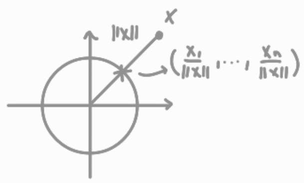
$X_1 \times X_2$ con la top. prodotto è metrico, con metrica

$$d((\underset{X_1}{x_1}, \underset{X_2}{x_2}), (\underset{X_1}{y_1}, \underset{X_2}{y_2})) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

(3) $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\text{omeo}} S^n \times \mathbb{R}$

$$x = (x_0, \dots, x_n) \longmapsto \left(\left(\frac{x_0}{\|x\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x\|}\right), \|x\|\right)$$

$n = 1 \Rightarrow$  $\cong$ $S^1 \times \mathbb{R}$



posso identificare il piano "bucato" con un punto sulla circonferenza e una lunghezza

(4) CORONA CIRCOLARE

scelti $0 < a < b$, $C_{a,b} = \{z \in \mathbb{C} \mid a \leq |z| \leq b\}$ è omeomorfa a $I \times S^1$

tramite $C_{a,b} \longrightarrow I \times S_1$

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \longmapsto \left(\frac{\rho - a}{b - a}, (\cos\theta, \sin\theta)\right)$$

$$((b-a)x + a)(\cos\theta + i\sin\theta) \longleftarrow (x, \theta)$$

QUOZIENTI

<u>def</u> (X,τ) ST, Y un insieme, $p: X \longrightarrow Y$ funzione suriettiva (di insiemi).
La **TOPOLOGIA QUOZIENTE** su Y è la più fine delle topologie su Y che rendono continua p, cioè $\tau_p = \{U \subseteq Y \mid p^{-1}(U) \subseteq X \text{ aperto}\}$

<u>def</u> $(X,\tau_X), (Y,\tau_Y)$ ST e $p: X \longrightarrow Y$ suriettiva e continua è detta **IDENTIFICAZIONE** se Y è dotato della topologia quoziente τ_p.

<u>def</u> $p: X \longrightarrow Y$ funzione tra due insiemi. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ è detto **SATURO** (rispetto a p) se $A = p^{-1}(p(A))$

<u>prop</u> $p: X \longrightarrow Y$ identificazione. Ci sono biezioni naturali di insiemi:

$$\{A \subseteq X \text{ aperto saturo}\} \xleftrightarrow{1:1} \{B \subseteq Y \text{ aperto}\}$$
$$\{C \subseteq X \text{ chiuso saturo}\} \xleftrightarrow{1:1} \{D \subseteq Y \text{ chiuso}\}$$

<u>dim</u> Costruisco

$\Phi : \{\text{aperti saturi } A \subseteq X\} \longrightarrow \{\text{aperti } B \subseteq Y\}$

Noto che $\{\text{aperti } B \subseteq Y\} = \{B \subseteq Y \text{ sottoinsieme tc } p^{-1}(B) \subseteq X \text{ aperto}\}$

Se $A \subseteq X$ è aperto saturo, allora $A = p^{-1}(p(A)) \Rightarrow p(A) \subseteq Y$ aperto

Quindi ho

$$\begin{aligned} \{A \subseteq X \text{ aperto saturo}\} &\longrightarrow \{B \subseteq Y \text{ aperto}\} \\ A &\longmapsto p(A) \end{aligned}$$

Questa funzione è suriettiva. Se $B \subseteq Y$ aperto, $p^{-1}(B) \subseteq X$ aperto ed è saturo : $p^{-1}(p(p^{-1}(B))) = p^{-1}(B)$. Poi è iniettiva: se A_1 e A_2 sono aperti saturi tc $p(A_1) = p(A_2)$, ho che $A_1 = p^{-1}(p(A_1)) = p^{-1}(p(A_2)) = A_2$.

Per i chiusi: osservo che $C \subseteq X$ è chiuso saturo $\Leftrightarrow X \setminus C$ è aperto saturo. Infatti: $p^{-1}(p(C)) = C \Leftrightarrow X \setminus p^{-1}(p(C)) = X \setminus C$
$\Leftrightarrow p^{-1}(p(X \setminus C)) = X \setminus C$
$\Leftrightarrow A = X \setminus C$ è aperto saturo

Perciò ho una mappa $C \mapsto p(C)$ sui chiusi saturi, che è biiettiva.

$$\begin{tikzcd}
\left\{\begin{matrix} A\subseteq X \\ \text{aperto} \\ \text{saturo}\end{matrix}\right\} \arrow[r, leftrightarrow, "1:1"] \arrow[d, leftrightarrow, "1:1"] & \left\{\begin{matrix} B\subseteq Y \\ \text{aperto}\end{matrix}\right\} \arrow[d, leftrightarrow, "1:1"] \\
\left\{\begin{matrix} C\subseteq X \\ \text{chiuso} \\ \text{saturo}\end{matrix}\right\} \arrow[r, dashed] & \left\{\begin{matrix} D\subseteq Y \\ \text{chiuso}\end{matrix}\right\}
\end{tikzcd}$$

$A \longmapsto p(A)$, $A \mapsto X\setminus A$, $B \mapsto Y\setminus B$, $C \longmapsto p(C)$

prop (criterio degli aperti saturi) $p: X \to Y$ suriettiva e continua è identificazione se e solo se $\forall A \subseteq X$ aperto saturo, $p(A) \subseteq Y$ aperto

dim ($\Rightarrow$) vedi sopra.

($\Leftarrow$) voglio mostrare p identificazione. Se $B \subseteq Y$ tc $p^{-1}(B)$ aperto, allora (non necessariamente aperto)

$B = p(p^{-1}(B))$ è aperto perché $p^{-1}(B)$ aperto saturo. Ne segue, (perché p funzione suriettiva!)

tenuto conto della continuità di p, che gli aperti di Y sono i sottoinsiemi

B tc $p^{-1}(B)$ sia aperto, dunque Y dotato della top. quoziente $\square$

prop $p: X \longrightarrow Y$ continua e suriettiva. Se p è aperta o chiusa, allora è un'identificazione.

dim Se p è aperta, in particolare manda aperti saturi in aperti, dunque uso il criterio degli aperti saturi.

Se p è chiusa e A un aperto saturo, allora noto che

$p(A) = Y \setminus p(X\setminus A)$. Infatti $A = p(p^{-1}(A))$

$\Rightarrow X\setminus A = X \setminus p(p^{-1}(A))$

passo all'immagine $\Rightarrow p(X\setminus A) = \underset{\substack{\shortparallel \\ Y}}{p(X)} - p(A)$

faccio il complementare $\Rightarrow Y \setminus p(X\setminus A) = p(A)$

Poiché $X\setminus A$ è chiuso, $p(X\setminus A)$ è chiuso (p è chiusa), quindi

$Y \setminus p(X\setminus A) = p(A)$ è aperto $\square$

esempio $p: [0,1] \longrightarrow S^1$

$t \longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$

è un'identificazione.

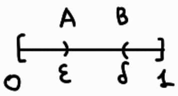
Continua e suriettiva è ovvio. Verifico il criterio degli aperti saturi.

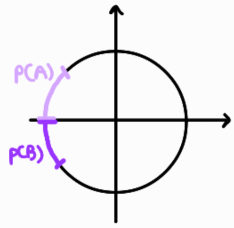
Se $U \subseteq (0,1)$ aperto, allora $p(U)$ è aperto.

Se U è aperto saturo e $0 \in U$ allora anche $1 \in U$ (hanno stessa immagine). Dunque U sarà della forma

$$U = [0,\varepsilon) \cup (\delta, 1] \cup V$$

con $V \subseteq (0,1)$ aperto. Basta mostrare che





$$p([0,\varepsilon) \cup (\delta, 1]) \subseteq S^1 \text{ aperto}$$

ma questo è chiaro perché

$$p([0,\varepsilon) \cup (\delta,1]) = C_{\theta_1,\theta_2} = \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid \theta_1 < 0 < \theta < \theta_2 < 2\pi\}$$

Relazioni di equivalenza

Un modo per definire un'identificazione è:

Dato uno ST (X,τ) e data una relazione di equivalenza (sull'insieme) X, denotata $\sim, \rho, R$, indico con $X/_\sim$, $X/_\rho$, $X/_R$ l'insieme delle classi di equivalenza

$$p: X \twoheadrightarrow X/_\rho = Y$$
$$x \longmapsto [x]_\sim$$

una mappa suriettiva e posso dotare $Y = X/_\sim$ della top. quoziente rispetto a p.

__def__ Un **QUOZIENTE** di uno ST X è $Y = X/_\sim$ dotato della top. quoziente, per qualche relazione di equivalenza $\sim$.

__def__ S, T insiemi; ρ = relazione di equivalenza su S. Dico che $f: S \to T$ è **COMPATIBILE** con ρ se $f(s_1) = f(s_2)$ $\forall\, s_1 \sim s_2$ ($= (s_1, s_2) \in \rho$).

__prop__ X ST, ρ = rel. d'eq. su X, Y s.t. Allora c'è biezione canonica

$$\left\{ \begin{matrix} \text{funzioni continue} \\ f: X/_\sim \to Y \end{matrix} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{matrix} \text{funzioni continue} \\ F: X \to Y \\ \text{compatibili con } \rho \end{matrix} \right\}$$

__dim__ Se $p: X \to X/_\sim$ definisco

$$\{ \underset{\text{continue}}{f: X/_\sim \to Y} \} \longrightarrow \{ \underset{\substack{\text{continue} \\ \text{compatibili}}}{F: X \to Y} \}$$
$$f \longmapsto f \circ p : X \xrightarrow{p} X/_\sim \xrightarrow{f} Y$$
$$F^* \longleftarrow F$$

dove $F^*([x]_\sim) = F(x)$, ben definita perché se $[x]_\sim = [y]_\sim$

$F(x) = F(y)$ perché F è compatibile. (verificare continuità)
↳ pagina 75 del Sernesi

<u>def</u> $S \subseteq X$ sottoinsieme. Definisco una relazione d'eq. ρ_S, $\sim_S$ in questo modo: $x_1 \sim_S x_2 \iff x_1 = x_2$ oppure $x_1 \in S$ e $x_2 \in S$

$X/_{\rho_S}$ è detto SPAZIO OTTENUTO IDENTIFICANDO S AD UN PUNTO

↳ le classi di equivalenza sono S e i punti di $X \setminus S$

Esempi

(1) $[0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$

$t \longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$

è ottenuto identificando $\{0,1\} = S$ ad un punto

(2) Generalizzo l'esempio (1). Sia $n \geq 2$. Ricordo

$$\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

$$\mathbb{S}^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \|x\| = 1\}$$

Allora $\mathbb{S}^n$ è ottenuto da $\mathbb{D}^n$ identificando $\mathbb{S}^{n-1}$ ad un punto.

<u>oss</u> Se $n=1$, $\mathbb{S}^1$ è ottenuta da $\mathbb{D}^1 = [0,1]$ identificando $\mathbb{S}^0 = \{0,1\}$ ad un punto

<u>oss</u> $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{D}^n$

Definisco un'identificazione $p: \mathbb{D}^n \twoheadrightarrow \mathbb{S}^n$ a cui sia associata la relazione di equivalenza $\rho_{\mathbb{S}^{n-1}}$

(•) Definisco $p: \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ con

$$p(x_1,\dots,x_n) = (2x_1\sqrt{1-\|x\|^2},\dots, 2x_n\sqrt{1-\|x\|^2}, 2\|x\|^2-1)$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$$

(•) Noto che $p(x_1,\dots,x_n) \subseteq \mathbb{S}^n$, infatti

$$4x_1^2(1-\|x\|^2),\dots, 4x_n^2(1-\|x\|^2) + 4\|x\|^4 - 4\|x\|^2 + 1 =$$

$$= (1-\|x\|^2)(4(x_1^2+\dots+x_n^2)) + 4\|x\|^4 + 1 - 4\|x\|^2 = 1$$

(•) p è suriettiva:

$$p(0,\dots,0,1) = (0,\dots,0,1)$$

Se $(y_1,\dots,y_n,y_{n+1}) \neq (0,\dots,0,1)$ allora $y_{n+1} \neq 1$ e pongo

$$x_1 = \frac{y_1}{2\sqrt{\frac{1-y_{n+1}}{2}}}, \dots, x_n = \frac{y_n}{2\sqrt{\frac{1-y_{n+1}}{2}}}$$

verificare che $p(x_1,\dots,x_n) = (y_1,\dots,y_{n+1})$ (*)

(•) $p|_{\mathbb{D}^n - \mathbb{S}^{n-1}} : \mathbb{D}^n - \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{(0,\dots,0,1)\}$

p è omeomorfismo la cui inversa è (*)

(•) $p(S^{n-1}) = \{(0,\dots,0,1)\}$

quindi come insiemi, ho una mappa biettiva $\mathbb{D}^n/_{\sim_{S^{n-1}}} \longrightarrow S^n$

Resta da verificare che è anche identificazione, cioè che S^n sia dotato della top. quoziente

(•) Definisco preliminarmente

$F = \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \mid x_1^2+\dots+x_n^2+(x_{n+1}-1)^2 = 1\} \cap \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} \leq 1\}$

(emisfero inferiore della sfera di centro $(0,\dots,0,1)$ e raggio 1 in $\mathbb{R}^{n+1}$)

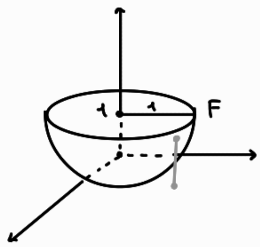
$\Sigma = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_1^2+\dots+x_n^2+(x_{n+1}-1/2)^2 = \frac{1}{4}\}$

(sfera di centro $(0,\dots,0,1/2)$ e raggio $1/2$ in $\mathbb{R}^{n+1}$)

Definisco ora due mappe

$\xi : F \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) \longmapsto (x_1,\dots,x_n)$

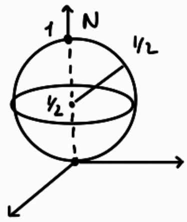


allora ξ induce un omeomorfismo $\xi : F \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Sia ora

$\omega : F \longrightarrow \Sigma$

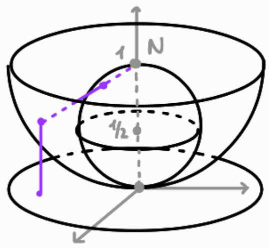
$x=(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) \longmapsto \begin{cases} N=(0,\dots,0,1) & \text{se } x_{n+1}=1 \\ \cap \text{ di } \Sigma \text{ con la retta } r(x,N) & \text{se } x_{n+1}\neq 1 \end{cases}$



Infine definisco $\tau : \Sigma \longrightarrow S^n$

$(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) \longmapsto (-2x_1,\dots,-2x_n,-2(x_{n+1}-1/2))$

che è omeom. perché affinità.



Allora noto che p è fatta così: $p = \tau \circ \omega \circ \xi^{-1}$

$\mathbb{D}^n \xrightarrow[\text{omeo}]{\xi^{-1}} F \xrightarrow{\omega} \Sigma \xrightarrow[\text{omeo}]{\tau} S^n$

Per verificare che la mappa p sia identificazione è quindi sufficiente verificare che lo sia ω.

ξ^{-1} e τ sono omeomorfismi, dunque identificazioni.
Infatti: f omeomorfismo $\iff$ f continua, biettiva, con inversa continua
f continua e biettiva è omeomorfismo $\iff$ f aperta
Allora f omeomorfismo $\Rightarrow$ f continua, biettiva e aperta
$\Rightarrow$ f identificazione per il criterio degli aperti saturi

composizione di identificazioni è ancora identificazione

$\omega : F \longrightarrow \Sigma$

Sia $K = \omega^{-1}(N)$, $N=(0,\dots,0,1)$

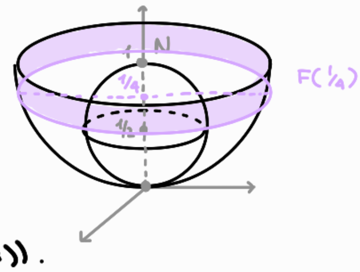
$\omega : F\setminus K \longrightarrow \Sigma - \{N\}$ è omeomorfismo

se $A \subseteq F$ aperto saturo, $A \cap K = \emptyset$, allora $\omega(A)$ aperto. Se invece $A \cap K \neq \emptyset$ allora $K \subseteq A$ perché A è saturo.

Poiché $K = \omega^{-1}(N)$, N chiuso, K chiuso $\Rightarrow A \setminus K$ aperto

$\Rightarrow \omega(A\setminus K)$ è aperto

Per verificare che $\omega(A) = \omega(A \setminus K) \cup \{N\}$ è aperto, basta dunque $N \in \mathrm{Int}(\omega(A))$. Poiché $A \supseteq K$, A aperto, $\exists\, r>0$



$F(r) = F \cap \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_{n+1} > 1-r\}$ con $F(r) \subseteq A$.

Allora $\omega(A) \supseteq \omega(F(r))$ disco di centro N

$\Rightarrow \omega(A)$ contiene un aperto che contiene $N \Rightarrow N \in \mathrm{Int}(\omega(A))$.

(3) ESPONENZIALE COMPLESSA

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$
$$t \longmapsto e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)$$

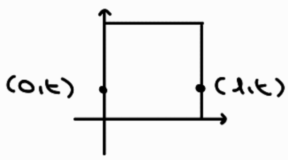
è identificazione, ottenuta identificando $S = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ad un punto.

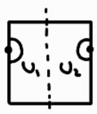
Ho dunque un omeomorfismo $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow S^1$ dove $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ indica $\mathbb{R}/\sim_{\mathbb{Z}}$

↳ a dire anche che S^1 è gruppo!

(4) CILINDRO

$I^2/\sim \ \xrightarrow[\text{omeo}]{\sim} S^1 \times I$, dove $I = [0,1]$ e la rel. di equivalenza è definita nel seguente modo. Le classi che non consistono in un unico punto sono formate da due punti distinti che sono: $\{(1,t),(0,t)\}$ al variare di t, cioè $(1,t) \sim (0,t)$.

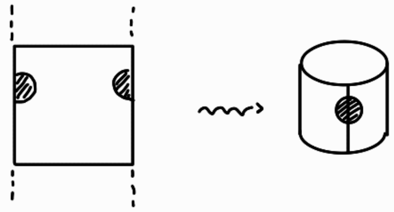


Infatti, definisco $f : I^2 \longrightarrow S^1 \times I$
$$(s,t) \longmapsto (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), t)$$
è continua e suriettiva. Con il criterio degli aperti saturi verifico che è identificazione. Se $A \subseteq I^2$ è aperto saturo e $A \cap (\partial(I^2)) = \emptyset$, allora $f(A)$ è omeomorfo ad A, dunque aperto. Se invece $A \cap (\partial(I^2)) \neq \emptyset$, allora noto che, essendo A saturo, A contiene un aperto $U = U_1 \cup U_2$ fatti così: 

ovvero, simmetrici rispetto alla retta $x = 1/2$. Infatti, A è aperto e se $x \in A \cap \partial(I^2)$, allora $A \cap \partial(I^2)$ contiene $\{(0,y),(1,y)\}$ perché A è saturo ($x = (0,y)$ oppure $x = (1,y)$). Per def di sottospazio topologico, esistono due aperti B_1 e B_2, con $(0,y)\in B_1$ e $(1,y)\in B_2$ t.c. $(B_1\cup B_2)\cap I^2 = A\cap I^2$.

Poiché le palle sono una base della topologia, trovo U_1, U_2 simmetrici rispetto a $x=1/2$ con $U_1\subseteq B_1\cap I^2$ e $U_2\subseteq B_2\cap I^2$.

$$I^2 \xrightarrow{f} \mathbb{S}\times I$$
$$(s,t) \longmapsto (e^{i2\pi s}, t)$$

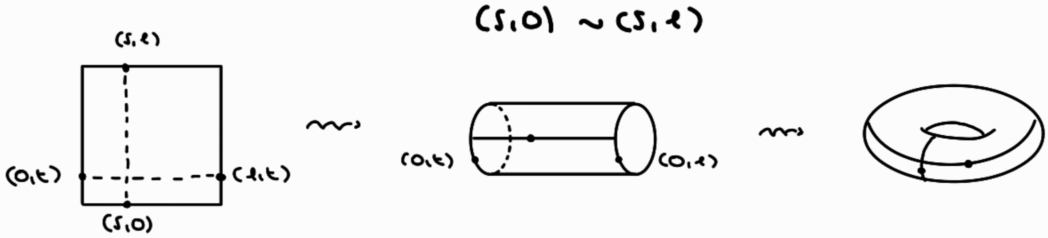


(5) TORO

$$I^2/_\sim \xrightarrow{p} \mathbb{T}_2$$

Le classi con più di un punto sono $(0,t)\sim(1,t)$

$(s,0)\sim(s,1)$



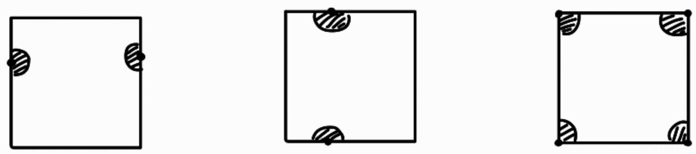
L'identificazione p è data da $p: I^2 \longrightarrow \mathbb{T}_2$

$$(s,t)\longmapsto ((2+\cos(2\pi s))\cos(2\pi t), (2+\cos(2\pi s))\sin(2\pi t), \sin(2\pi s))$$

$p(0,t) = p(1,t)$

$p(s,1) = p(s,0)$

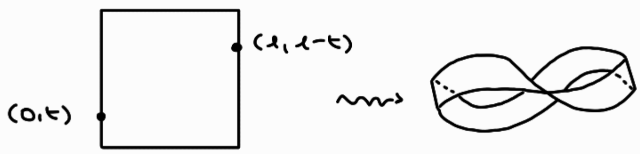
dunque p è compatibile con la relazione di equivalenza. Per il criterio degli aperti saturi è identificazione, infatti gli aperti saturi A con $A\cap\partial(I^2)\neq\emptyset$ sono



In ogni caso $p(A)$ è aperto (completare con il calcolo).

(6) NASTRO DI MOEBIUS

$I^2/_\sim$ con $(0,t)\sim(1,1-t)$



$$I^2/_\sim \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(s,t)\longmapsto (\cos(2\pi s)+(t-1/2)\sin(\pi s)\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)+(t-1/2)\sin(\pi s)\sin(2\pi s), (t-1/2)\cos(\pi s))$$

(7) **SPAZI PROIETTIVI**

Fisso $n > 0$, $K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{C}$.

denotiamo con $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la proiezione canonica rispetto alla relazione $\sim$

$$\mathbb{P}^n(K) = \frac{K^{n+1} \setminus \{(0,\dots,0)\}}{\sim}, \quad x \sim y \text{ se } x = \lambda y \ \exists \lambda \neq 0$$

$\mathbb{P}^n(K)$ è dotato della top. quoziente di $K^n \setminus \{(0,\dots,0)\} \underset{\text{sottospazio}}{\subseteq} K^n$, dove su K^n consideriamo la topologia euclidea.

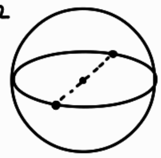
(8) **SPAZI PROIETTIVI REALI** abbiamo def due top. in modo diverso, non è chiaro che siano la stessa

Posso anche ottenere $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tramite l'identificazione antipodale

$$\mathbb{S}^n(\mathbb{R})/_\sim \xrightarrow[\text{omeo}]{} \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

dove $\sim$ è detta antipodismo ed è definita da $x \sim y \iff x = \pm y$

$n=2$



Ho una chiara mappa $\tilde{\mu} : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,\dots,0)\} \longrightarrow \mathbb{S}^n$

$$x \longmapsto \frac{x}{\|x\|}$$

è continua ed induce una mappa (i.e. è compatibile con la relazione $x \sim y \iff x = \lambda y$) $\bar{\mu} : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{S}^n/_\sim$ in questo modo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,\dots,0)\} \arrow[r, "\tilde{\mu}"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{S}^n \arrow[r, "\tau"] & \mathbb{S}^n/_\sim \\
& \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \arrow[ur, "\bar{\mu}"'] &
\end{tikzcd}$$

Infatti se $x = \lambda y$, $\tilde{\mu}(x) = \frac{\lambda y}{\|\lambda y\|} = \pm \tilde{\mu}(y)$

Mostro che $\bar{\mu}$ induce un omeomorfismo. Certamente è continua e biunivoca (facile). Basta mostrare che è aperta. Noto che $\tau : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n/_\sim$ è aperta e chiusa: infatti, se $S \subseteq \mathbb{S}^n/_\sim$ è un qualunque sottoinsieme, $\tau^{-1}(S) = S \cup (-S)$, $-S = \{-s \mid s \in S\}$. Fisso un aperto $A \subseteq \mathbb{S}^n$ e voglio mostrare che $\tau(A)$ è aperto. Ma gli aperti di $\mathbb{S}^n/_\sim$ sono le immagini di $B \cup (-B)$ con $B \subseteq \mathbb{S}^n$ aperto, ma $\tau(A) = \tau(A \cup (-A))$ e poiché $\tau(A \cup (-A))$ è aperto di $\mathbb{S}^n/_\sim$, anche $\tau(A)$ è aperto.

Ora noto che per $A \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ aperto si ha che $\bar{\mu}(A)$ è aperto ($\Rightarrow \bar{\mu}$ omeom), infatti $\bar{\mu}(A) = \mu(\pi^{-1}(A)) = \tau(\tilde{\mu}(\pi^{-1}(A))) = \tau(\underbrace{\mathbb{S}^n \cap \pi^{-1}(A)}_{\text{aperto } \mathbb{S}^n})$ aperto perché τ aperta

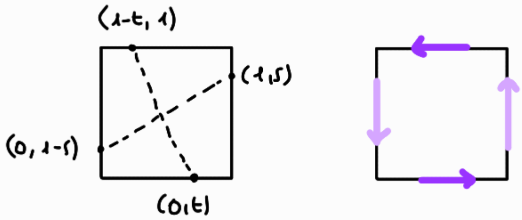
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,\dots,0)\} \arrow[r, "\tilde{\mu}"] \arrow[rr, bend right, "\mu"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{S}^n \arrow[r, "\tau"] & \mathbb{S}^n/_\sim \\
& \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \arrow[ur, "\bar{\mu}"'] &
\end{tikzcd}$$

In particolare, ottengo che $S^n/\sim \xrightarrow[\text{omeo}]{\sim} S^n_+/\sim$ dove

$S^n_+ = \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} \geq 0\}$

Se $n=2$: $S^2_+/\sim \xrightarrow[\text{omeo}]{\varphi} I^2/\sim$
$(0,t)\sim(1,1-t)$
$(s,0)\sim(1-s,s)$

dove φ è indotto dalla proiezione canonica $(x,y,z) \mapsto (x,y)$ composta con l'omeomorfismo $D^2 \xrightarrow[\text{omeo}]{\sim} I^2$. Dunque $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$



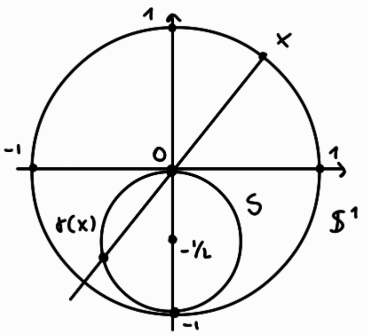
(9) $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \xrightarrow[\text{omeo}]{\sim} S^1$

Costruzione simile alle precedenti. Definisco $\gamma : S^1 \longrightarrow S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}\}$

circonferenza di raggio 1/2 e centro $(0,-1/2)$

$$\gamma((x_1,x_2)) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x_1,x_2)=(\pm1,0) \\ \left(-\frac{x_1x_2}{\|x\|^2}, \frac{-x_2^2}{\|x\|^2}\right) & \text{se } x_2\neq 0 \end{cases}$$

Geometricamente se $x\neq(\pm1,0)$, $\gamma(x) = (S\setminus\{(0,0)\}) \cap \text{retta}(x,0)$



Noto che $\gamma(x)\in S$, perché $\frac{x_1^2x_2^2}{x_1^2+x_2^2} + \left(\frac{-x_2^2}{x_1^2+x_2^2}+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Noto che $\gamma(x)=\gamma(y) \iff x=\pm y$ dunque γ induce un omeomorfismo

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = S^1/\sim \xrightarrow[\text{omeo}]{\sim} S$, ma $S \xrightarrow[\text{omeo}]{\sim} S^1$ tramite trasl. e affinità, dunque concludo $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \xrightarrow[\text{omeo}]{\sim} S^1$

(10) SFERA DI RIEMANN

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \xrightarrow[\text{omeo}]{\sim} S^2$

retta complessa ⟷ sfera reale

Ho il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} S^2 \setminus \{(0,0,1)\} & \xrightarrow[\text{proiezione stereografica}]{\text{omeo}} & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ (x,y,z) & \longmapsto & \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) & & & & \\ & & (x,y) & \longmapsto & z = x+iy & \longmapsto & [z:1] \end{array}$$

↳ iperpiano affine

componendo ottengo una mappa

$$\varphi : S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$
$$(x,y,z) \longmapsto \left[\frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z} : 1\right] = [x+iy : 1-z]$$

Definisco $\Phi : S^2 \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ come

- $\Phi(P) = \varphi(P)$ se $P \neq N = (0,0,1)$
- $\Phi(N) = [1:0]$

Chiaro che Φ è biiettiva come mappa di insiemi. Devo mostrare che Φ è omeo, cioè continua e aperta. Mostro che $U \subseteq \mathbb{P}^2$ aperto $\iff$ $\Phi(U) \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ aperto.

Se $N \notin U$, allora l'affermazione è conseguenza del fatto che φ è ottenuta componendo la proiezione stereografica con degli omeomorfismi

(esercizio: $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{omeo}} \mathbb{C} \xrightarrow{\text{omeo}} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus [1:0]$)

$(x,y) \longmapsto x+iy$

$z \longmapsto [z:1]$

e inoltre la proiezione stereografica è omeomorfismo.

Mostro che gli aperti U che contengono N sono in biezione con gli aperti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ che contengono $\Phi(N) = [1:0]$. Lo mostro su una base di aperti.

Una base di aperti di S^2 che contengono $N = (0,0,1)$ è data da $S^2 \cap \{(x_1,x_2,x_3) : x_3 > \delta,\ 0<\delta<1\}$ e la proiezione stereografica induce una biezione con la famiglia $C_r = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| > r,\ \exists r>0\}$.

D'altra parte, una base di intorni aperti di $[1:0]$ in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è data dagli intorni $A \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ t.c. $\pi^{-1}(A)$ è aperto con

$$\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

Ciascuno di questi aperti contiene un aperto del tipo

$$U_{\delta,\varepsilon} = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \cap \left(\{\|z_1 - 1\| < \delta\} \times \{\|z_2\| \leq \varepsilon\}\right)$$

La mappa $\mathbb{C}^2 \setminus \{(\alpha,0) \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(z_1,z_2) \longmapsto z_1/z_2$$

induce una biiezione tra gli insiemi $U_{\delta,\varepsilon}$ e gli insiemi C_r sopra

Ho dunque

$$\begin{tikzcd} S^2\setminus\{(0,0,1)\} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rrr, bend right, "\text{proiezione stereografica}"'] & \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus(1:0) \arrow[r, leftrightarrow, "1:1"] & \mathbb{C}^2\setminus\{(\alpha,0)\} \arrow[r] & \mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

<u>oss</u> se $(z_1,z_2)\in U_{\delta,\varepsilon} \Rightarrow \left| z_1/z_2 \right| \in C_r$

(12) $p: X \longrightarrow Y$ ident. $D\subseteq X$ denso $\Rightarrow p(D)$ denso in Y

<u>dim</u> se $A\subseteq Y$ aperto, devo mostrare $p(D)\cap A\neq\emptyset$. Poiché $A\subseteq Y$ aperto, p continua, $p^{-1}(A)\neq\emptyset$ (p suriettiva), perciò $D\cap p^{-1}(A)\neq\emptyset$ da cui $A\cap p(A)\neq\emptyset$.

(basta continua e suriettiva)

$\Uparrow$

dicendo identificazione, perché la top. quoziente è la minima che rende p continua