CURVE E 1-FORME

def Una **CURVA** in $\mathbb{R}^n$ è una $\gamma : [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ cont.

γ è una **CURVA CHIUSA** se $\gamma(0) = \gamma(L)$

γ è una **CURVA SEMPLICE** se è iniettiva in $[0,L[$ e in $]0,L]$

Infine, il **SOSTEGNO (O SUPPORTO)** di γ è $\operatorname{spt}\gamma := \gamma([0,L])$

significa percorrere la stessa curva con velocità diverse

def $K : [0,M] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ si dice **RIPARAMETRIZZAZIONE** di $\gamma : [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se

$\exists\, \varphi : [0,M] \longrightarrow [0,L]$ continua e biiettiva (strett. crescente/decrescente) t.c. $K(s) = \gamma(\varphi(s))\ \forall\, s \in [0,M]$

φ è detta **CAMBIO DI PARAMETRO**.

esempio $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$K_1(s) = (\cos 2s, \sin 2s) \quad s \in [0, \pi]$

$K_2(s) = (\cos(-s^2), \sin(-s^2)) \quad s \in [0, \sqrt{2\pi}]$

oss 1 2 casi:

- $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(M) = L \implies \gamma$ e K hanno la **STESSA ORIENTAZIONE**
- $\varphi(0) = L$ e $\varphi(M) = 0 \implies \gamma$ e K hanno **ORIENTAZIONE OPPOSTA**

oss 2 $\operatorname{spt}(K) = \operatorname{spt}(\gamma)$

def $\gamma \in C^1([0,L], \mathbb{R}^n)$ si dice **REGOLARE** se $|\dot\gamma(t)| \neq 0 \quad \forall\, t \in [0,L]$

Il **CAMPO TANGENTE UNITARIO** è $T(t) := \dfrac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|}$, che non dipende dalla parametrizzazione (a parte il segno)

oss 1 $\operatorname{spt}(\gamma)$ non è necessariamente una sottovarietà 1-dim (potrebbero mancare iniettività e l'essere aperta)

oss 2 $\gamma(t) = (t,t)$ è curva regolare, $T(t) = \left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)$

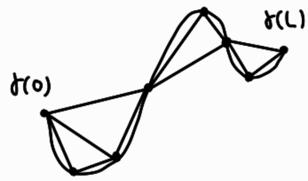
$K(t) = (t^3, t^3)$ non è curva regolare (è C^1, ma $\dot K(0) = (0,0)$)

$\implies$ è una proprietà della curva, non del supporto

def σ è una SUDDIVISIONE di $[0,L]$ se $\sigma=(t_0,t_1,\dots,t_k)$ con $0=t_0<t_1<\dots<t_k=L$.

def La LUNGHEZZA (o VARIAZIONE TOTALE) di $\gamma:[0,L]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ è

$$L(\gamma):=\sup\left\{\sum_{i=1}^{k}|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})| \ : \ \sigma \text{ suddivisione di } [0,L]\right\}$$



se $L(\gamma)<\infty$, γ si dice RETTIFICABILE.

oss $L(\gamma)$ non dipende dalla parametrizzazione

oss se γ è Lip. con $\lambda:=\mathrm{Lip}(\gamma)$ (cioè $|\gamma(t)-\gamma(s)|\le\lambda|t-s|$), allora γ è rettificabile e $L(\gamma)\le\lambda L$

$$L(\gamma)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{k}\underbrace{|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})|}_{\le\,\lambda(t_i-t_{i-1})}\right\}\le\sum_{i=1}^{k}\lambda(t_i-t_{i-1})\le\lambda L$$

In particolare, questo vale per $\gamma\in C^1([0,L],\mathbb{R}^n)$ con $\lambda:=\max_{[0,L]}|\dot\gamma|$

notazioni $f=(f_1,\dots,f_n):[0,L]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ scrivo $\int_0^L f(t)\,dt:=\left(\int_0^L f_1(t)\,dt,\dots,\int_0^L f_n(t)\,dt\right)$

oss $\left|\int_0^L f\right|\le\int_0^L|f|$

dim WLOG $\int_0^L f\neq0$ (altrimenti è banale)

Definisco $v:=\dfrac{\int_0^L f}{\left|\int_0^L f\right|}$

$$\Rightarrow \left|\int_0^L f\right|=\left\langle\int_0^L f, v\right\rangle=\int_0^L\langle f,v\rangle\le\int_0^L|f|\overset{1}{\overset{\shortparallel}{|v|}}=\int_0^L|f|$$

TEOREMA se $\gamma\in C^1([0,L],\mathbb{R}^n)$, allora γ è rettificabile e $L(\gamma)=\int_0^L|\dot\gamma(t)|\,dt$

dim ($\le$) $\forall\sigma$ suddivisione:

$$\sum_{i=1}^{k}|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})|=\sum_{i=1}^{k}\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i}\dot\gamma(t)\,dt\right|$$
$$\le\sum\int_{t_{i-1}}^{t_i}|\dot\gamma|=\int_0^L|\dot\gamma(t)|\,dt$$

($\ge$) Fisso $\varepsilon>0$:

γ C^1 su un compatto $\Rightarrow$ $\dot\gamma$ è unif. continua in $[0,L]$

$\Rightarrow \exists\delta>0$ tc $|\dot\gamma(t)-\dot\gamma(s)|<\varepsilon \quad \forall s,t\in[0,L]$ tc $|s-t|<\delta$

Fisso una suddivisione σ tc $\forall i$ $|t_i-t_{i-1}|<\delta$. Stimiamo:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i}|\dot\gamma(t)|\,dt\le\int_{t_{i-1}}^{t_i}|\dot\gamma(t)-\dot\gamma(t_{i-1})|\,dt+\int_{t_{i-1}}^{t_i}\overbrace{|\dot\gamma(t_{i-1})|}^{\text{costante}}\,dt$$
$$\le\varepsilon(t_i-t_{i-1})+\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i}\dot\gamma(t_{i-1})\,dt\right|$$

$$\leq \varepsilon(t_i - t_{i-1}) + \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} [\underbrace{\dot\gamma(t_{i-1}) - \dot\gamma(t)}_{|\cdots| \leq \varepsilon} - \dot\gamma(t)]\, dt\right|$$

$$\leq 2\varepsilon(t_i - t_{i-1}) + \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot\gamma(t)\, dt\right|$$

$$\leq 2\varepsilon(t_i - t_{i-1}) + |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$$

sommo su i :

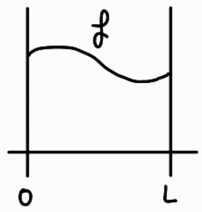
$$\int_0^L |\dot\gamma(t)|\, dt \leq 2\varepsilon L + \sum_{i=1}^{k} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$$

$$\leq 2\varepsilon L + L(\gamma)$$

□

<u>fatto</u> Il teorema vale anche per γ Lip.

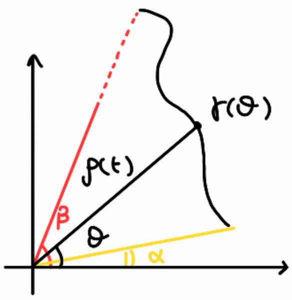
<u>esempi</u> 1. $\gamma(t) = (t, f(t))$ grafico di $f \in C^1$



$\dot\gamma(t) = (1, f'(t)) \Rightarrow \gamma$ è sempre regolare

$$L(\gamma) = \int_0^1 \underbrace{\sqrt{1 + f'(t)^2}}_{|\dot\gamma(t)|}\, dt$$

2. $\rho \in C^1([\alpha, \beta], [0, +\infty))$



$\gamma(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$

$\dot\gamma(\theta) = (\dot\rho\cos - \rho\sin, \dot\rho\sin + \rho\cos)$

$|\dot\gamma| = \sqrt{\rho^2 + \dot\rho^2}$

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot\rho(\theta)^2 + \rho(\theta)^2}\, d\theta$$

<u>oss</u> $\gamma(\theta)$ è regolare $\iff \rho^2 + \dot\rho^2 > 0$ in $[\alpha, \beta]$

<u>def</u> $\gamma : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è **PARAMETRIZZATA PER LUNGHEZZA D'ARCO** se

$$L(\gamma|_{[t_1, t_2]}) = t_2 - t_1 \quad \forall\, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq L$$

<u>oss 1</u> in tal caso $L(\gamma) = L$ ($\Rightarrow \gamma$ rettificabile)

<u>oss 2</u> $\gamma \in C^1$. Allora è parametrizzata per lunghezza d'arco

$\iff |\dot\gamma(t)| = 1 \quad \forall t \in [0, L]$

<u>dim</u> ($\Leftarrow$) $L(\gamma|_{[t_1, t_2]}) = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{|\dot\gamma(t)|}_{=1}\, dt = t_2 - t_1$

($\Rightarrow$) $\forall t \quad t = L(\gamma|_{[t_1, t_2]}) = \int_0^t |\dot\gamma(s)|\, ds$

th fond. del calcolo integrale $\Rightarrow$ derivando: $\forall t \quad 1 = |\dot\gamma(t)|$

TEOREMA Se $\gamma : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è curva rettificabile, allora possiede una riparametrizzazione per lunghezza d'arco.

__dim__ (solo nel caso $\gamma \in C^1$ e regolare)

Definisco $\psi(t) := L(\gamma|_{[0,t]}) = \int_0^t |\dot{\gamma}(s)|\, ds$

ψ è derivabile perché integrale di una funz. cont.

$\psi'(t) = |\dot{\gamma}(t)| > 0 \implies \psi$ è strett. crescente

$\overset{\psi \text{ invertib.}}{\implies} \exists\, \varphi := \psi^{-1} : [0, \underset{M = L(\gamma)}{\underbrace{\psi(L)}}] \longrightarrow [0, L]$

$\overset{\psi \text{ strett. crescente}}{\implies} \varphi$ strett. crescente e $\varphi'(s) = \dfrac{1}{\psi'(\varphi(s))} = \dfrac{1}{|\dot{\gamma}(\varphi(s))|}$

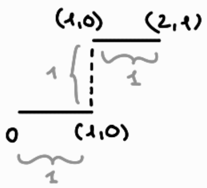
definisco $k := \gamma(\varphi(s))$ è riparam. di γ, è $C^1([0, M], \mathbb{R}^n)$ e

$|\dot{k}(s)| = |\dot{\gamma}(\varphi(s))\ \varphi'(s)| = |\dot{\gamma}(\varphi(s))| \dfrac{1}{|\dot{\gamma}(\varphi(s))|} = 1$

Concludo con l'oss 2. $\square$

__oss__ Nel caso generale: $\psi(t) = L(\gamma|_{[0,t]})$ è crescente ↪ ma in generale non strettamente

__esempi__ 1. $\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (t, 1) & \text{se } t \in (1, 2] \end{cases}$



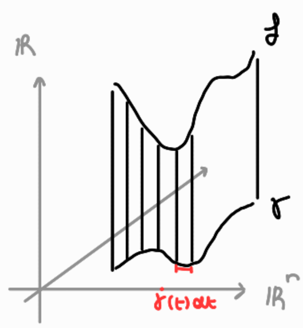
$\implies L(\gamma) = 3$

2. $\gamma(t) = \begin{cases} (t, t\cos(\frac{\pi}{t})) & t \in (0, 1] \\ (0, 0) & t = 0 \end{cases}$

è continua, ma non è rettificabile $(L(\gamma) = +\infty)$

__def__ $\gamma \in C^1([0, L], \mathbb{R}^n)$, $f : \operatorname{spt} \gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ cont. L'**INTEGRALE CURVILINEA** di f lungo γ è

$$\int_\gamma f\, ds := \int_0^L f(\gamma(t))\, |\dot{\gamma}(t)|\, dt$$



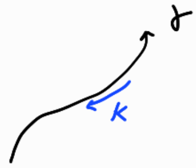
__oss__ $\int_\gamma 1\, ds = L(\gamma)$

prop L'integrale curvilineo è invariante per riparametrizzazioni C^1

dim $\varphi : [0,M] \longrightarrow [0,L]$ C^1, continua e biettiva

Allora o è crescente $(\varphi' \geq 0)$ oppure è decrescente $(\varphi' \leq 0)$

Supponiamo $\varphi' \leq 0$ (l'altro caso è simile).



Sia $K(\tau) := \gamma(\varphi(\tau))$

$$\int_K f\, ds = \int_0^M f(K(\tau))\, |\dot K(\tau)|\, d\tau$$

$$= \int_0^M f(\gamma(\varphi(\tau)))\, |\dot\gamma(\varphi(\tau))|\, \overbrace{|\dot\varphi'(\tau)|}^{-\varphi'(\tau)}\, d\tau$$

$$\underset{\substack{\varphi(0)=L \\ \varphi(M)=0}}{\overset{\substack{\varphi(\tau)=t \\ \varphi'(\tau)d\tau = dt}}{=\!=\!=}} - \int_L^0 f(\gamma(t))\, |\dot\gamma(t)|\, dt = \int_0^L f(\gamma(t))\, |\dot\gamma(t)|\, dt$$

$\square$

esempio (baricentro) Il baricentro $p = (p_1, \dots, p_n)$ di γ è

$$p_i = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma x_i \, ds$$

esempio $\gamma(t) = (-e + \cos t,\ 42 + \sin t)$

Il baricentro è $(-e, 42)$

esempio (lavoro) A aperto in $\mathbb{R}^n$, $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ cont, $\gamma : [0,L] \longrightarrow A$, C^1 regolare, $T = \frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}$ (tangente unitario alla curva)

Il lavoro di un campo F lungo γ è

$$\int_\gamma \langle F, T \rangle\, ds := \int_0^L \Big\langle F(\gamma(t)),\ \frac{\dot\gamma(t)}{\cancel{|\dot\gamma(t)|}} \Big\rangle\, \overbrace{\cancel{|\dot\gamma(t)|}}^{\text{spunta fuori dalla def di integrale curvilineo}}\, dt$$

oss cambia segno se cambio orientazione (⇒ non è invariante per riparam.)

duale di $e_1,\dots,e_n$
$dx_i(e_j) = \delta_{ij} \quad \forall i,j$
$dx_i(v) = v_i$

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = (\mathbb{R}^n)^* := \{L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ lineari}\}$ con base "standard" $dx_1, \dots, dx_n$

def $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Una 1-FORMA DIFFERENZIALE su A è una $\omega : \underset{\substack{\cup\!\shortmid \\ \mathbb{R}^n}}{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

vettore — funzione lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

cioè $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\, dx_i$, $x \in A$ per opportune $\omega_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

Diciamo che ω è continua se le ω_i sono continue $\quad (\omega \in \Omega(A))$

ω è C^1 se le ω_i sono C^1 $\quad (\omega \in \Omega^1(A))$

esempio $f \in C^1(A)$, allora df è la 1-forma continua

$$df(x) := \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}}_{=:\omega_i} dx_i$$

detta DIFFERENZIALE di f

oss La notazione è consistente: $dx_i = df$ per $f(x) = x_i$

def Una 1-forma continua si dice ESATTA se $\exists\, f \in C^1(A)$ tc $\omega = df$.
In tal caso, f si dice POTENZIALE di ω.

def ω 1-forma C^1 si dice CHIUSA se

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \quad \forall\, i,j = 1,\dots,n$$

prop ω 1-forma C^1 in A esatta $\Rightarrow$ è chiusa

dim $\exists$ potenziale f di ω : $\omega = df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i\, dx_i$

ω è C^1 $\Rightarrow$ le derivate di f sono C^1 $\Rightarrow$ f è C^2

$$\Rightarrow \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$$

fatto In generale chiusa $\not\Rightarrow$ esatta

oss $F_\omega(x) = (\omega_1(x), \dots, \omega_n(x))$ campo vettoriale associato ad ω $\quad (F_\omega : A \longrightarrow \mathbb{R}^n)$

$$\omega = df \iff F_\omega = \nabla f$$

$$\omega \text{ esatta} \iff F_\omega \text{ è CONSERVATIVO}$$

$F_\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$

$\mathbb{R}^n \supseteq A \xrightarrow{\omega_1} \mathbb{R}$, $\dots$, $A \xrightarrow{\omega_n} \mathbb{R}$

$\Rightarrow (\omega_1(x), \dots, \omega_n(x)) \in \mathbb{R}^n$, $\omega_1(x) \in \mathbb{R}$, $\omega_n(x) \in \mathbb{R}$

def ω 1-forma cont. in A, $\gamma \in C^1([0,L], A)$ regolare. L'**INTEGRALE** di ω lungo γ è $\int_\gamma \omega := \int_\gamma \omega(T)\, ds$.

Esplicitamente

$$\int_\gamma \omega = \int_0^L \omega_{\gamma(t)}\left(\frac{\dot\gamma(t)}{\cancel{|\dot\gamma(t)|}}\right) \cancel{|\dot\gamma(t)|}\, dt$$

$$= \int_0^L \left(\sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma(t))\, \dot\gamma_i(t)\right) dt$$

def ω 1-forma cont. in A, γ curva C^1 in A

$$\int_\gamma \omega := \int_0^L \sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma(t))\, \dot\gamma_i(t)\, dt$$

$$= \int_0^L \omega_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))\, dt$$

oss $\int_\gamma \omega$ dipende dall'orientazione, ovvero cambia segno se cambia orientazione

però $\int_\gamma \omega$ è indipendente dalla param. (a patto che conservi l'orientazione):

se $K(t) = \gamma(\varphi(t))$ con $\varphi' \geq 0$, $\varphi : [0,M] \to [0,L]$, allora

$$\int_K \omega = \int_\gamma \omega$$

Infatti: $\int_K \omega = \int_0^M \sum_i \omega_i(\gamma(\varphi(t)))\, \dot\gamma_i(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$

$$\overset{\varphi(t)=r}{=} \int_0^L \sum_i \omega_i(\gamma(r))\, \dot\gamma_i(r)\, dr = \int_\gamma \omega$$

def
- La **CURVA INVERSA** di $\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^n$ è $-\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^n$

  $-\gamma(t) := \gamma(L-t)$
- Se $K : [0,M] \to \mathbb{R}^n$ è t.c. $K(0) = \gamma(L)$, la **CONCATENAZIONE** di γ e K è

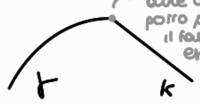
  $\gamma + K : [0, L+M] \to \mathbb{R}^n$

$$\gamma + K(t) := \begin{cases} \gamma(t), & t \in [0,L[\\ K(t-L), & t \in [L,M] \end{cases}$$

prop Se γ, K curve C^1 in A concatenabili e ω 1-forma cont. in A, allora

$$\int_{-\gamma} \omega = -\int_\gamma \omega$$

$$\int_{\gamma+K} \omega = \int_\gamma \omega + \int_K \omega$$



quando concateno due curve posso perdere il fatto di essere C^1

dim (facile).

a rigore, invece che scrivere C^1, bisognerebbe scrivere C^1 a tratti, ma è equivalente

TEOREMA $A \subseteq \mathbb{R}^n$, ω 1-forma continua in A. Allora sono equivalenti

(A) ω è esatta in A

(B) $\forall \gamma \in C^1([0,L], A)$, $\int_\gamma \omega$ dipende solo da $\gamma(0)$ e $\gamma(L)$

(C) $\forall \gamma \in C^1([0,L], A)$ chiusa, $\int_\gamma \omega = 0$

Inoltre $\int_\gamma \omega = f(\gamma(L)) - f(\gamma(0))$, dove f è un (qualunque) potenziale di ω $(\omega = df)$

dim (A) $\Rightarrow$ (B). Se $\omega = df$, f è C^1

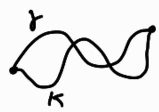
$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^n \int_0^L \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\, \dot\gamma_i(t)\, dt$$

$$= \int_0^L \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle\, dt \qquad \text{oss} \quad \omega(v) = \langle F_\omega, v \rangle$$

$$= \int_0^L (f(\gamma(t)))'\, dt = f(\gamma(L)) - f(\gamma(0))$$

(B) $\Rightarrow$ (C). Ovvio: se γ è chiusa, allora γ e $-\gamma$ hanno stessi punti iniziale e finale

$$\int_\gamma \omega \overset{(B)}{=} \int_{-\gamma} \omega = -\int_\gamma \omega \Rightarrow \int_\gamma \omega = 0$$



(C) $\Rightarrow$ (B). Se γ e k hanno gli stessi punti iniziale e finale allora $\gamma + (-k)$ è curva chiusa, dunque

$$0 \overset{(C)}{=} \int_{\gamma+(-k)} \omega = \int_\gamma \omega + \int_{-k} \omega = \int_\gamma \omega - \int_k \omega$$

oss In realtà la concatenazione non è C^1, dunque nell'hp (C) ci sarebbe da aggiustare ponendo C^1 a meno di 1 o 2 punti.

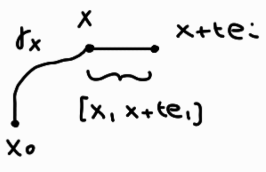
(B) $\Rightarrow$ (A). Posso supporre A connesso $\Rightarrow$ A connesso per archi.

Fisso $x_0 \in A$. Dato $x \in A$, allora $\exists\, \gamma_x$ curva C^1 da x_0 a x.

Definisco $f(x) = \int_{\gamma_x} \omega$, $x \in A$ (ben posta). Dico che $df = \omega$, cioè che se $\omega = \sum \omega_i(x)\, dx_i$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \omega_i(x)$ $\forall i = 1, \dots, n$ (da cui f è C^1)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(f(x + te_i) - f(x)\right)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(\int_{\gamma_x + [x, x+te_i]} \omega - \int_{\gamma_x} \omega\right)$$



$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\cancel{\int_{\gamma_x} \omega} + \int_{[x,x+te_i]} \omega - \cancel{\int_{\gamma_x} \omega}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t \underbrace{\omega(x+se_i)\,(0,0,\dots,\overset{i}{1},\dots,0)}_{= \omega_i(x+se_i)}\, ds \underset{\text{teorema fondamentale del calcolo}}{=} \omega_i(x) \qquad \square$$

vettore

corollario se A è un aperto connesso e $df = dg = \omega$, allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tc $f = g + c$

dim $\forall x \in A$ ($x_0 \in A$ fissato)

$$f(x) - f(x_0) = \int_{\gamma_x} \omega = g(x) - g(x_0)$$

oss esatta $\Rightarrow$ chiusa, ma non vale il viceversa:

$\omega := -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$ è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, infatti:

$$\partial_y\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \partial_x\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

ω non è esatta: $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin(t)}{1}\,dx + \frac{\cos(t)}{1}\,dy\right) \underbrace{(-\sin t, \cos t)}_{\text{vettore } \dot\gamma(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi \neq 0$$

def $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto si dice **CONTRAIBILE** se $\exists\, x_0 \in A$ ed $\exists\, H \in C^\infty(A \times [0,1]; A)$ tc

$\forall x \in A$ $\quad \underbrace{H(x,1) = x}_{\text{al tempo 1 la mappa è l'identità}}$ e $\underbrace{H(x,0) = x_0}_{\text{al tempo 0, A viene "schiacciato" ad un punto}}$

H si chiama **OMOTOPIA** di A ad un punto

esempio $B(0,1)$ è contraibile a 0 tramite $H(x,t) = tx$

oss Contraibile $\Rightarrow$ connesso per archi

Fissato $x \in A$, $t \longmapsto H(x,t)$ è curva (continua) tra x_0 e x.

def $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **STELLATO** rispetto a $x_0 \in A$ se $\forall x \in A$ $[x, x_0] \subseteq A$

oss convesso $\Rightarrow$ stellato ($\forall x_0 \in A$)

oss stellato $\Rightarrow$ contraibile

$$H(x,t) := x_0 + t(x - x_0)$$

TEOREMA (di Poincaré). $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto contraibile, ω 1-forma C^1 in A. Allora

ω è esatta $\iff$ ω è chiusa

dim è sufficiente $\Leftarrow$.

Dato $x \in A$, definisco $\gamma_x(t) := H(x,t)$, $t \in [0,1]$

$$\dot{\gamma}_x(t) = \frac{\partial H}{\partial t}(x,t)$$

Definisco $f(x) := \int_{\gamma_x} \omega = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(H(x,t)) \frac{\partial H_i}{\partial t}(x,t)\, dt$

Vorrei $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \omega_j$

Fatto: posso scambiare derivata con integrale

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left[\omega_i(H(x,t)) \frac{\partial^2 H_i}{\partial t \partial x_j}(x,t) + \frac{\partial H_i}{\partial t}(x,t) \sum_{k=1}^n \underset{\substack{\| \ \omega \text{ chiusa} \\ \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i}}}{\frac{\partial \omega_i}{\partial x_k}(H(x,t))} \frac{\partial H_k}{\partial x_j}(x,t)\right] dt$$

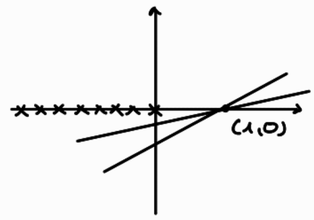
$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left[\omega_i(H) \frac{\partial^2 H_i}{\partial t \partial x_j}\right](x,t) + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial H_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial t}(\omega_k(H))\right](x,t)\, dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t}\left(\omega_i(H) \frac{\partial H_i}{\partial x_j}\right)(x,t)\, dt$$

$$= \sum_{i=1}^n \omega_i(\underset{\overset{\|}{x}}{H(x,1)}) \underset{\overset{\|}{\delta_{ij}}}{\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(x,1)} - \omega_i(\underset{\overset{\|}{x_0}}{H(x,0)}) \underset{\overset{\|}{0}}{\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(x,0)} = \omega(x) \qquad \square$$

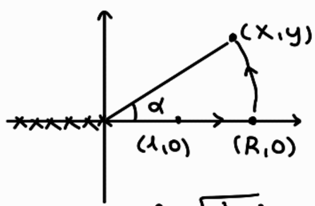
esempio $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \leq 0\}$ è stellato rispetto a $(1,0)$

$$\Rightarrow \omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy \text{ è esatta in } A$$



Cerchiamo il potenziale di f: è meglio integrare lungo la seguente curva (spezzata):

$$f(x,y) = \int_{\gamma_1+\gamma_2} \omega = \underset{\overset{\|}{0}}{\int_{\gamma_1} \omega} + \int_{\gamma_2} \omega$$



$R = \sqrt{x^2+y^2}$

sapendo che la 1-forma è esatta, non importa che la integri esattamente lungo l'omotopia $\gamma_x = H(x,t)$, ma mi basta integrare su curve "intelligenti", perché il risultato dipende solo da punto di partenza e punto finale

$\dot{\gamma}_1 = \binom{1}{0}$, $\gamma_1(t,0) = 0\,dx + \ldots + dy$

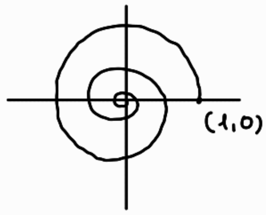
$$= \int_0^\alpha \left(-\frac{\cancel{R} \sin t}{R^{\cancel{2}}}\, dx + \frac{\cancel{R} \cos t}{R^{\cancel{2}}}\, dy\right)(-\cancel{R} \sin t, \cancel{R} \cos t)\, dt$$

$$= \alpha = \alpha(x,y)$$

$$= 2 \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right) \text{ è formula esplicita ben def in } A$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha}$$

Esercizi



1. (spirale logaritmica) $\rho = e^{-\theta}$

$\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$

è una spirale infinita, tuttavia percorre una lunghezza finita

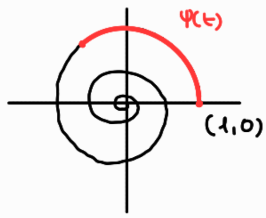
$$L(\gamma) = \int_0^{+\infty} |\dot\gamma(t)|\, dt \qquad t \in [0,\infty)$$

$$= \int_0^{+\infty} \sqrt{(-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t)^2 + (-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t} \sqrt{\cos^2 + \sin^2 + \cancel{2\sin\cos} + \sin^2 + \cos^2 - \cancel{2\sin\cos}}\, dt$$

$$= \sqrt2 \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \sqrt2$$

Proviamo ad usare la formula:



$$L(\gamma) = \int_0^{+\infty} \sqrt{\dot\rho^2(\theta) + \rho(\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{+\infty} \sqrt{(-e^{-\theta})^2 + (e^{-\theta})^2}\, d\theta$$

$$= \sqrt2 \int_0^{+\infty} e^{-\theta} = \sqrt2$$

Parametrizziamo per lunghezza d'arco:

$$\psi(t) := L(\gamma|_{[0,t]}) = \int_0^t |\dot\gamma(t)|\, dt = \int_0^t \sqrt2\, e^{-\tilde t}\, d\tilde t = \sqrt2\,(1 - e^{-t}) = s$$

inverto e ottengo

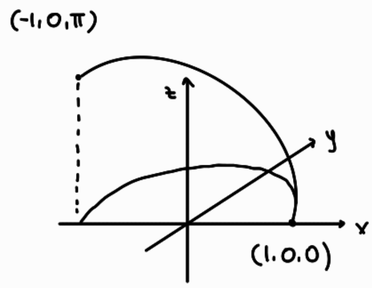
$$t = \psi^{-1}(s) = -\log\left(1 - \frac{s}{\sqrt2}\right)$$

$\Rightarrow$ la parametrizzazione per lunghezza d'arco è

$$k(s) = \gamma(\psi^{-1}(s)) = \left(\left(1 - \frac{s}{\sqrt2}\right)\cos\left(-\log\left(1 - \frac{s}{\sqrt2}\right)\right), \left(1 - \frac{s}{\sqrt2}\right)\sin\left(-\log\left(1 - \frac{s}{\sqrt2}\right)\right)\right),$$

$s \in [0, \sqrt2]$, $\quad k(s) = (0,0)$ per $s = \sqrt2$

2. $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$, $t \in [0,\pi]$



$\dot\gamma(t) = (-\sin t, \cos t, 2t) \qquad (\dot\gamma(t) \neq 0 \ \forall t)$

è regolare, $\quad |\dot\gamma| = \sqrt{1+4t^2}$

$$T(t) = \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|} = \left(\frac{-\sin t}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{\cos t}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\right)$$

$f(x,y,z) = \sqrt{|z|}$

$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^\pi f(\gamma(t))\, |\dot\gamma(t)|\, dt$$

$$= \int_0^\pi t\sqrt{1+4t^2}\, dt = \left[\frac{\cancel{2}}{3}\frac{(1+4t^2)^{3/2}}{\cancel{8}\,4}\right]_0^\pi = \frac{1}{12}\left((1+4\pi)^{3/2} - 1\right)$$

esercizio

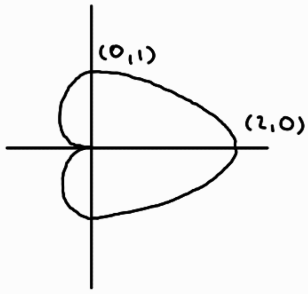
$\omega = \left(\log(x+y) + \frac{x}{x+y}\right) dx + \frac{x}{x+y}\, dy$

su $A = \{(x,y) : x+y>0\}$

Dimostrare che è esatta e trovare un potenziale

3. (cardioide) $\rho = 1+\cos\theta$, $\theta \in [0,2\pi)$

$\gamma(\theta) = ((1+\cos\theta)\cos\theta,\ (1+\cos\theta)\sin\theta)$



- È regolare? No: in $(0,0)$ c'è una cuspide

$|\dot\gamma(\theta)| = \sqrt{\rho^2+(\rho')^2} = 0$ per $\theta = \pi$

$\rho' = -\sin(\theta)$

- $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2+(\rho')^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos)^2+\sin^2}\, d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\underbrace{2+2\cos\theta}_{= 4\cos^2\frac{\theta}{2}}}\, d\theta = 2\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta$

$= 2\left(\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2} - \int_\pi^{2\pi} \cos\frac{\theta}{2}\right) = \dots = 4+4 = 8$

- Calcoliamo l'integrale su γ di $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$:

$\int_\gamma f\, ds = \int_0^{2\pi} f(\gamma(\theta))|\dot\gamma(\theta)|\, d\theta = \int_0^{2\pi} \underbrace{(1+\cos\theta)}_{= 2\cos^2\frac{\theta}{2} = (1-\sin^2\frac{\theta}{2})2}\, 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta$

$= 4\int_0^{2\pi} \left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta$

$= 4\left[2\sin\frac{\theta}{2} - 2\frac{\sin^3\theta/2}{3}\right]_0^{\pi} - 4\left[\dots\right]_\pi^{2\pi} = \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$

- Distanza "media" da $(0,0)$? $\frac{32/3}{8} = \frac{4}{3}$

4. $\gamma(t) = (a\cos^3 t,\ a\sin^3 t,\ b\cos 2t)$ $\quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Cercare una param. per lunghezza d'arco

$\varphi(t) = L(\gamma|_{[0,t]}) = \int_0^t |\dot\gamma(\tau)|\, d\tau$

$= \int_0^t |(3a\cos^2\tau\sin\tau,\ 3a\sin^2\tau\cos\tau,\ -2b\sin 2\tau)|\, d\tau$

$= \int_0^t \sqrt{9a^2\sin^2\cos^2\underbrace{(\cos^2+\sin^2)}_{=1} + 4b^2\underbrace{\sin^2 2\tau}_{=(2\sin\tau\cos\tau)^2}}\, d\tau$

$= \int_0^t \sqrt{9a^2+16b^2}\, \underbrace{|\sin\tau\cos\tau|}_{\geq 0 \text{ per } t\in[0,\pi/2]} = \int_0^t \underbrace{\sqrt{9a^2+16b^2}}_{= c}(\sin\tau\cos\tau)\, d\tau$

$$= \int_0^t c\, \frac{\sin 2\tau}{2}\, d\tau = -c\, \frac{\cos(2\tau)}{4}\Big|_0^t = \frac{c}{4}(1-\cos 2t) = \frac{c}{2}\sin^2 t$$

$$\left(\Rightarrow L(\gamma) = \frac{c}{2}\right)$$

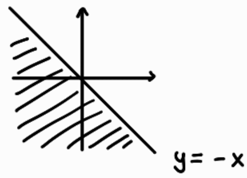
$s=\psi(t) = \frac{c}{2}\sin^2 t \quad \rightsquigarrow \quad \sin^2 t = \frac{2s}{c}$

La param. per lunghezza d'arco è

$$k(s) = \gamma(\underbrace{\psi^{-1}(s)}_{t}) \left(a\left(1-\frac{2s}{c}\right)^{3/2}, a\left(\frac{2s}{c}\right)^{3/2}, b\left(\underbrace{1-\frac{4s}{c}}_{\cos 2t \,=\, 1-2\sin^2 t}\right)\right)$$

5. $\omega(x,y) = \left(\log(x+y) + \frac{x}{x+y}\right)dx + \frac{x}{x+y}\,dy$

definita su $D=\{(x,y):\ x+y>0\}$

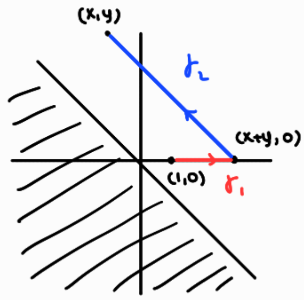


- è chiusa: $\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{1}{x+y} - \frac{x}{(x+y)^2} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}$

D è semipiano $\Rightarrow$ convesso $\Rightarrow$ stellato $\Rightarrow$ contraibile

Quindi ω è esatta su D perché 1-forma chiusa su un dominio contraibile

- Trovare il potenziale. Integriamo su:



$\gamma_1(t) = (t,0)$, $t\in[1, x+y]$, $\dot\gamma_1 = (1,0)$

$\gamma_2(t) = (x+y-t, t)$, $t\in[0,y]$, $\dot\gamma_2(-1,1)$

$f(x,y) = \int_{\gamma_1+\gamma_2}\omega = \int_{\gamma_1}\omega + \int_{\gamma_2}\omega$

$$= \int_1^{x+y}\left(\left(\log(t+0) + \frac{t}{t+0}\right)dx + \frac{t}{t+0}\,dy\right)(1,0)\,dt$$

$$+ \int_0^y \left(\left(-\log(\overbrace{x+y}^{\text{costante}}) - \cancel{\frac{x+y-t}{x+y}}\right) + \cancel{\frac{x+y-t}{x+y}}\right)dt$$

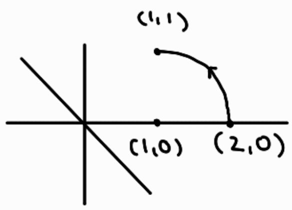
$$= \int_1^{x+y}(\log(t)+1)\,dt - y\log(x+y) = t\log(t)\Big|_1^{x+y} - y\log(x+y)$$

$$= (x+y)\log(x+y) - y\log(x+y) = x\log(x+y)$$

oss $\quad Df = (\omega_1, \omega_2)$

I potenziali (dato che D è connesso) sono tutti della forma $x\log(x+y)+c$

- $\int_\gamma \omega = f(1,1) - f(2,0) = \log 2 + \cancel{c} - (2\log 2) - \cancel{c} = -\log 2$



6. $\omega(x,y,z) = y\sin z\, dx + x\sin z\, dy + xy\cos z\, dz$

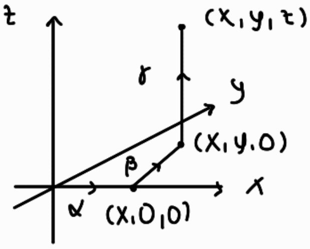
- È chiusa in $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ è esatta. Verifichiamo che è chiusa:

$$\partial_2 \omega_1 = \sin z = \partial_1 \omega_2$$

$$\partial_3 \omega_1 = y\cos z = \partial_1 \omega_3$$

$$\partial_3 \omega_2 = x\cos z = \partial_2 \omega_3$$

- $f(x,y,z)$ potenziale (si trova ad occhio: $xy\sin z$, ma calcoliamolo formalmente)



$$f(x,y,z) = \int_\alpha \omega + \int_\beta \omega + \int_\gamma \omega =$$

$$= \int_0^x 0 \cdot \sin 0\, dt + \int_0^y x\sin 0 + \int_0^z xy\cos t\, dt$$

$\dot\alpha = (1,0,0)$ $\quad\dot\beta = (0,1,0)$ $\quad\dot\gamma = (0,0,1)$

$\alpha(t) = (t,0,0)$ $\quad\beta(t) = (x,t,0)$ $\quad\gamma(t) = (x,y,t)$

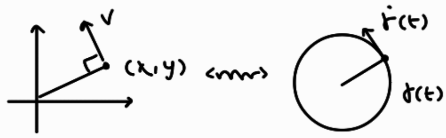
$$= xy\sin z$$

7. (forma chiusa ed esatta, ma su un dominio non contraibile)

$$\omega(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\, dx + \frac{y}{x^2+y^2}\, dy$$

- È chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: $\partial_y \omega_1 = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \partial_x \omega_2$

È esatta? Possiamo cercare un potenziale.



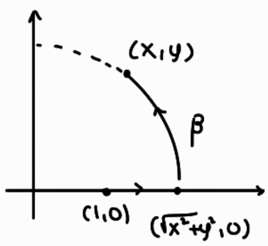
- Noto che $v \perp (x,y) \xRightarrow{v_1 x + v_2 y = 0} \omega(x,y)(v) = 0$.

Questo suggerisce: se $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $t \in [a,b]$, $\dot\gamma(t) \in \ker \omega(\gamma(t))$

Dunque mi aspetto: $\displaystyle\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\, dt = 0$, infatti:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \cancel{\frac{R\cos}{R^2}(-R\sin)} + \cancel{\frac{R\sin}{R^2}(R\cos)}\, dt = 0$$

- Per trovare un potenziale potrebbe aver senso integrare su un cammino di questo tipo:



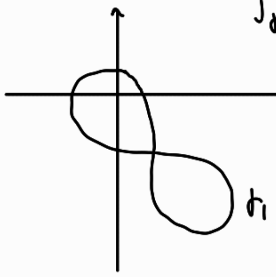
β arco di circonferenza

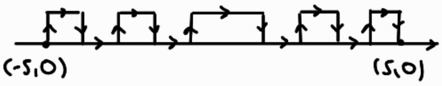
$\alpha(t) = (t,0)$, $t \in [1, \sqrt{x^2+y^2}]$

$$f(x,y) = \int_\alpha \omega + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\int_\beta \omega}} = \int_1^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{t}{t^2+0^2}\, dt = \log\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\log x^2+y^2$$

è un potenziale! Infatti $f_x = \omega_1$ e $f_y = \omega_2$ (verifica necessaria)

$\int_{\gamma_1} \omega = 0$





$\int_{\gamma_2} \omega = f(5,0) - f(-5,0) = \frac{1}{2}\log 25 - \frac{1}{2}\log(25) = 0$

8. Dimostrare che $\forall$ curva $C^1([0,1],\mathbb{R}^2)$ chiusa $\int_\gamma x\,dy = -\int_\gamma y\,dx$

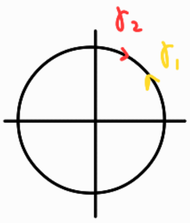
$$\int_\gamma \underbrace{x\,dy + y\,dx}_{=\, df} = 0 \qquad f(x,y) = xy$$

$\Uparrow$

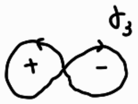
chiusa +

$\Rightarrow \int_\gamma x\,dy = -\int_\gamma y\,dx = \frac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx)$ purché γ chiusa

Fatto: ciascuno di questi integrali dà l'area (con segno) racchiusa da γ

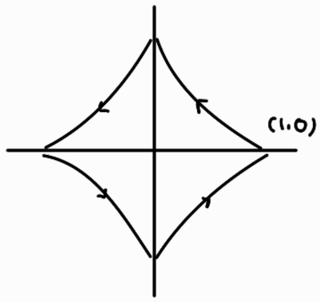


$\int_{\gamma_1} x\,dy = \pi$ $\qquad$ $\int_{\gamma_2} x\,dy = -\pi$



$\int_{\gamma_3} x\,dy = 0$

9. (astroide o asteroide) $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$



- Area $= \frac{1}{2}\int_\gamma x\,dy - y\,dx =$ $\qquad \dot{\gamma} = (-3\cos^2 \sin, 3\sin^2 \cos)$

$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos^3 \; 3\sin^2 \cos + \sin^3 \; 3\cos^2 \sin)\,dt$

$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2\cos^2}_{=\,\frac{1}{4}\sin^2 2t \,=\, \frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right)} = \dots = \frac{3}{8}\pi$

- $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} 3\sqrt{\sin^2 \cos^2 (\sin^2 + \cos^2)}\,dt$

$= 3\int_0^{2\pi} |\sin t \cos t|\,dt$

$= 3 \cdot 4 \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin t \cos t}_{=\,\frac{\sin 2t}{2}}\,dt = 6$

- Baricentro $= (x_0, y_0)$

$x_0 = \frac{1}{L(\gamma)}\int_\gamma x\,ds = \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} \cos^3 t\, |\dot{\gamma}(t)|\,dt = \dots = 0$

<u>esercizio</u> Trovare il baricentro di $\gamma|_{[0,\pi/2]}$