MISURA E INTEGRALE DI LEBESGUE

Misure esterne e misure

<u>def</u> $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0,+\infty]$ è una **MISURA ESTERNA** se

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonia)

(iii) $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad \forall A_i \subseteq \mathbb{R}^n$ (subadditività numerabile)

<u>def</u> Una famiglia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ si dice **σ-ALGEBRA** se

(i) $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$

stabile per passaggio al complementare

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{A}$

stabile per unioni numerabili

(iii) $A_i \in \mathcal{A},\ i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

<u>oss</u> Anche $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, infatti $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}^n \setminus A_i \right)$

<u>esempi</u> $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

$\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R}^n : A \text{ al più numerabile}\} \cup \{B \subseteq \mathbb{R}^n : \mathbb{R}^n \setminus B \text{ al più numerabile}\}$

<u>def</u> $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ σ-algebra. $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,+\infty]$ è una **MISURA** se

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall A_i \in \mathcal{A},\ i \in \mathbb{N}$, a 2 a 2 disgiunti

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

(additività numerabile o σ-additività)

<u>esempio</u> 1) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $\mu = \#$ cardinalità

2) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $\mu = \delta_0$

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \in A \\ 0 & \text{se } 0 \notin A \end{cases}$$

3) $\mathcal{A} = \{\text{numerabili}\} \cup \{\text{co-numerabili}\}$

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } \#A \leq \#\mathbb{N} \\ 1 & \text{se } \#A^c \leq \#\mathbb{N} \end{cases}$$

oss μ misura e $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ $\Rightarrow$ μ misura esterna

(i) ovvio

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(B) = \underbrace{\mu(A \cap B)}_{= \mu(A)} + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu(B)$

(iii) analogo

esercizio L'unica misura μ su $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tc

- $\mu([0,1]) < \infty$
- $\mu(A + x) = \mu(A) \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}$

è $\mu \equiv 0$.

Definiamo la relazione $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$

Assioma di scelta: $\exists A \subseteq [0,1]$ tc $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists !\, a \in A$ tc $x \sim a$

ogni elemento del gruppo quoziente interseca $[0,1]$: banalmente, $\forall x \in \mathbb{R}$ è sufficiente considerare $\lfloor x \rfloor \in [0,1)$.

$A \subsetneq [0,1)$, dato che $\mathbb{Q} \cap [0,1)$ appartiene alla stessa classe di equivalenza

seleziono da ogni classe di equivalenza un elemento e definisco l'insieme A come l'unione di tali rappresentanti

A è detto **INSIEME DI VITALI**.

Supponiamo $\mu(A) > 0$; allora

$$[0,1] \subseteq \underbrace{\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (A + q)}_{\text{unione numerabile di insiemi a 2 a 2 disgiunti}} \subseteq [-1, 2]$$

$\forall x \in [0,1)$ $\exists$ $y \in A \subset [0,1)$ tc $x \sim y$
$\Rightarrow \exists\, q \in \mathbb{Q}$ con $|q| \leq 1$ tc $x - y = q$
$\Rightarrow x \in A + q$

facile: $\forall a \in A$
$0 \leq a \leq 1 \Rightarrow -1 \leq a + q \leq 1$

$A + q_1 \cap A + q_2 \neq \emptyset$?

PA $\quad a + q_1 = b + q_2 \Rightarrow a - b = q_2 - q_1 \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1] \Rightarrow a \sim b$

(con $a \in A + q_1$, $b \in A + q_2$)

$$\Rightarrow \mu([-1,2]) \geq \mu\Big(\bigcup_{\dots} (A+q)\Big) \overset{\mu \text{ misura}}{=} \sum_{\dots} \mu(A+q) = +\infty$$

$\mu(A + x) = \mu(A) \ \forall x \in \mathbb{R}$, $\mu(A) > 0$

ma $\mu([-1,2]) = \mu([-1,0) \cup [0,1] \cup (1,2])$

$$\leq 3\, \underbrace{\mu([0,1])}_{< \infty \text{ (hp)}} < +\infty \qquad \lightning$$

ma allora $\mu(A) = 0$.

$$\mu(\mathbb{R}) = \mu\Big(\underbrace{\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A + q}_{\text{unione numerabile di insiemi a 2 a 2 disgiunti}}\Big) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \underbrace{\mu(A + q)}_{= \mu(A) = 0} = 0 \overset{\text{monotonia}}{\Longrightarrow} \mu \equiv 0$$

def $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, +\infty]$ misura esterna

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **μ-MISURABILE** se $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(\underbrace{E \setminus A}_{= E \cap A^c})$

oss 1 $\leq$ sempre vero (subadditività)

oss 2 $\mu(A) = 0 \Rightarrow A$ è μ-misurabile

$$\mu(E) \geq \mu(E \cap A^c) = \mu(E \cap A^c) + \underbrace{\mu(E \cap A)}_{\overset{\text{monotonia}}{=} 0 \ \leq\ \mu(A) = 0}$$

def $(\mathcal{A},\mu)$ è **COMPLETA** se $\forall A\in\mathcal{A}$, $\mu(A)=0 \Rightarrow \forall B\subseteq A$, $B\in\mathcal{A}$

↖ se ogni sottoinsieme di ogni insieme di misura nulla è misurabile

TEOREMA (**Caratheodory**) μ misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}:=\{A\subset\mathbb{R}^n : A\ \mu\text{-misurabile}\}$

Allora $\mathcal{A}$ è una σ-algebra e $\mu:\mathcal{A}\longrightarrow[0,+\infty]$ è una misura completa.

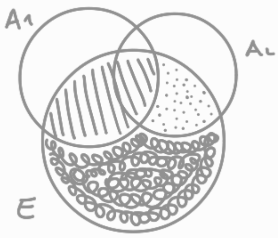
dim ■ (i) $\emptyset,\mathbb{R}^n\in\mathcal{A}$

(ii) A μ-misurabile $\Rightarrow$ A^c è μ-misurabile

$$\mu(E)=\mu(E\cap A)+\mu(E\cap A^c)=\mu(E\cap(A^c)^c)+\mu(E\cap A^c)$$

(iii) Dati $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ μ-misurabili, vorrei $\underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}_{=A}$ μ-misurabile

Dato $E\subseteq\mathbb{R}^n$:



$$\mu(E)=\mu(E\cap A_1)+\mu(E\cap A_1^c)$$

$$=\mu(E\cap A_1)+\mu(E\cap A_1^c\cap A_2)+\mu(E\cap A_1^c\cap A_2^c)$$

$$=\ \text{''}\ +\ \text{''}\ +\mu(E\cap A_1^c\cap A_2^c\cap A_3)+\mu(E\cap A_1^c+\cap A_2^c\cap A_3^c)$$

per induzione + de Morgan $\longrightarrow$
$$=\sum_{i=1}^{k}\mu(E\cap A_i\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j)+\mu(E\cap(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{k}A_i}_{\subseteq A})^c)$$

$\Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)^c\supseteq A^c$

$$\geq\sum_{i=1}^{k}\mu(E\cap A_i\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j)+\mu(E\cap A^c)$$

per $k\longrightarrow\infty$
$$\mu(E)\geq\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E\cap A_i\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j)+\mu(E\cap A^c)\qquad(*)$$

subadditività $\longrightarrow$
$$\geq\mu(E\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j))+\mu(E\cap A^c)$$

$$=\mu(E\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)+\mu(E\cap A^c)$$

$$=\mu(E\cap A)+\mu(E\cap A^c)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{disuguaglianza}\\ \text{banale}}}{\geq}\mu(E)$$

$\Rightarrow$ A è μ-misurabile (e in particolare quelle scritte sopra sono tutte uguaglianze)

■ Manca dimostrare che $\mu|_{\mathcal{A}}$ è misura:

(i) $\mu(\emptyset)=0$

(ii) Siano $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{A}$ a due a due disgiunti. Vorrei che $A:=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$

verificare $\mu(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$.

Uso $(*)$ con $E=A$ (ora sappiamo che è uguaglianza).

$$\mu(A)=\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(\underbrace{A\cap\underbrace{A_i\setminus\bigcup_{j=1}^{j-1}A_j}_{=A_i}}_{=A_i})}_{=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)}+\underbrace{\mu(A\cap A^c)}_{=0}$$

$$\mu(A)=\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)$$

■ Se $\mu(A)=0$ e $B \subseteq A$, A è μ-misurabile ($A \in \mathcal{A}$), allora $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mu(E) \leq \mu(E\cap B) + \mu(E\cap B^c)$$
$$\leq \mu(E\cap A) + \mu(E\cap B^c)$$
$$\leq \mu(A) + \mu(E) = \mu(E)$$

$\Rightarrow$ $\mu(E) = \mu(E\cap B) + \mu(E\cap B^c)$
$\Rightarrow$ B è μ-misurabile □

TEOREMA (monotonia) μ misura esterna su $\mathbb{R}^n$.

(i) Se $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è succ. crescente ($A_i \subseteq A_{i+1}$) di insiemi μ-misurabili allora $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to+\infty} \mu(A_i)$

(ii) Se $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è succ. decrescente ($A_i \supseteq A_{i+1}$) di insiemi μ-misurabili e $\mu(A_1)<\infty$, allora $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$

dim (i)
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{\big(A_i \setminus \overbrace{\textstyle\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j}^{A_{i-1}}\big)}_{\text{misurabili, a 2 a 2 disgiunti}}\Big) \underset{\sigma\text{ additività}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right)$$

posso usarla perché μ è misura esterna e $\{A_i\}$ μ-misurabile $\Rightarrow$ μ misura su $\{A_i\}$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu\left(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right) \underset{\text{additività finita}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}\left(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right)\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

(ii) Uso (i) con $B_i := A_1 \setminus A_i$ successione crescente ($B_i \subseteq B_{i+1}$) e misurabile

Allora
$$\lim_{i\to\infty} \mu(B_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$
$$\lim_{i\to\infty} \mu(A_1\setminus A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_1\setminus A_i\right)$$
$$\cancel{\mu(A_1)} - \lim_{i\to\infty}\mu(A_i) \qquad \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_i A_i\right)$$
$$= \cancel{\mu(A_1)} - \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$ □

per cancellare $\mu(A_1)$ da entrambi i membri serve $\mu(A_1) < +\infty$.

OSS 1 In (ii) è sufficiente che $\exists\, \bar{\imath}$ tc $\mu(A_{\bar{\imath}}) < +\infty$

OSS 2 $\mu(A_{\bar{\imath}})$ serve davvero, ad esempio consideriamo:

μ = cardinalità oppure $\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_k = \#(A\cap\mathbb{N})$ oppure $\mathcal{L}^1$

$A_i = (i, +\infty)$

$\forall i$ A_i ha misura infinita, però $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu(\emptyset) = 0$

Misura di Lebesgue

def
- Un PLURI-INTERVALLO è $I := [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R}^n$, $a_i < b_i$
- $mis(I) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$
- la MISURA ESTERNA DI LEBESGUE $\mathcal{L}^n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, +\infty]$ è

$$\mathcal{L}^n(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} mis(I_k) : (I_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ pluri-intervalli tali che } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}$$

prop $\mathcal{L}^n$ è misura esterna.

dim $\mathcal{L}^n(\emptyset) = 0$ e monotonia sono ovvi. Manca la sub-additività numerabile

$$\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(A_i)$$

Fisso $\varepsilon > 0$. $\forall i \in \mathbb{N}$ $\exists (I_k^i)_k$ tc $A_i \subseteq \bigcup_k I_k^i$ e $\sum_{k=1}^{\infty} mis(I_k^i) \leq \mathcal{L}^n(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$

$(I_k^i)_{k,i \in \mathbb{N}}$ è ricoprimento numerabile di $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

$$\Rightarrow \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \underset{def}{\leq} \sum_{i,k=1}^{\infty} mis(I_k^i) = \sum_i \sum_k mis(I_k^i)$$

$$= \sum_i \left(\mathcal{L}^n(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) = \sum_i \mathcal{L}^n(A_i) + 2\varepsilon \qquad \square$$

$$\sum_i \mathcal{L}^n(A_i) + \varepsilon \underbrace{\sum_i \frac{1}{2^i}}_{2}$$

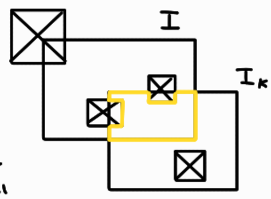
esercizio $\forall I, J$ pluri-intervallo si ha

$$mis(I) \overset{①}{=} \mathcal{L}^n(I) \overset{②}{=} \mathcal{L}^n(I \cap J) + \mathcal{L}^n(I \setminus J)$$

① $\geq$ per definizione di Lebesgue

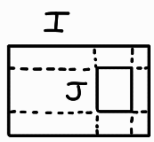
$\leq$ dato $I \subseteq \bigcup_k I_k$, allora $I = \bigcup_k \underbrace{\left((I \cap I_k) \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} I_j\right)}$

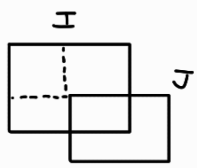
si può scrivere come unione di pluri-intervalli disgiunti (importante che sono chiusi da un lato e aperti dall'altro)



sottoesercizio se $I = \bigcup_k \tilde{I}_k$ pluri-intervalli disgiunti, allora $mis\ I = \sum_k mis(I_k)$

② $\leq$ subadditività





$\geq$ $I \setminus J = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ pluri-intervalli disgiunti

$$\Rightarrow \mathcal{L}^n(I) = mis(I) \underset{\uparrow}{=} mis(I \cap J) + \sum_k mis(I_k)$$

sottoesercizio
+ I = unione disgiunta di $\tilde{I}_k$ e J

$$\underset{def}{\geq} \mathcal{L}^n(I \cap J) + \mathcal{L}^n(I \setminus J)$$

def La **MISURA DI LEBESGUE** è $\mathcal{L}^n : \overset{!!}{\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow [0, +\infty]$ (è σ-additiva per Carathéodory)

σ-algebra degli insiemi $\mathcal{L}^n$-misurabili

oss $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (Vitali)

n=1 $\mathcal{L}^1([0,1]) = 1 < \infty$, $\mathcal{L}^n(A + x) = \mathcal{L}^n(A)$

lemma $\forall\ I \subseteq \mathbb{R}^n$ pluri-intervallo è $\mathcal{L}^n$-misurabile $(I \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n))$

dim Devo dimostrare che $\forall\ E \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n(E) \geq \mathcal{L}^n(E \cap I) + \mathcal{L}^n(E \setminus I)$

voglio dim ≥, ma ≤ è banale

Posso supporre $\mathcal{L}^n(E) < \infty \Rightarrow \exists\ (I_k)_k$ tc

$$\mathcal{L}^n(E) + \varepsilon \geq \sum_k \overset{\mathcal{L}^n}{\overset{\shortparallel}{mis}}(I_k) \overset{②}{=} \sum_k \mathcal{L}^n(\underbrace{I_k \cap I}_{\text{ricopre } E \cap I}) + \mathcal{L}^n(\underbrace{I_k \setminus I}_{\text{ricopre } E \setminus I})$$

$$\geq \mathcal{L}^n(E \cap I) + \mathcal{L}^n(E \setminus I)$$

su pluri-intervalli $\mathcal{L}^n$ coincide con mis

$\varepsilon \to 0$ e si ottiene la tesi. □

corollario 1 Gli aperti sono $\mathcal{L}^n$-misurabili

dim (vedi pg. 37 delle dispense) Ogni aperto è unione numerabile di pluri intervalli

corollario 1.1 I chiusi sono $\mathcal{L}^n$-misurabili

def La **σ-ALGEBRA DEI BORELIANI** (o **INSIEMI DI BOREL**) in $\mathbb{R}^n$ è la σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ generata dagli aperti.

Una misura si dice **MISURA DI BOREL** se è una misura definita su $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

terminologia La σ-algebra generata da una famiglia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ è la più piccola σ-algebra che contiene $\mathcal{F}$, cioè $\bigcap_{\substack{\mathcal{A}\ \sigma\text{-algebra} \\ \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)}} \mathcal{A}$

esercizio $\bigcap$ di σ-algebre è σ-algebra

corollario 2 I Boreliani sono misurabili: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$

In particolare, $\mathcal{L}^n$ è una misura di Borel.

fatto $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, anzi $\#\mathcal{B} = \#\mathbb{R}$, $\#\mathcal{A} = \#\mathcal{P}(\mathbb{R})$

TEOREMA (regolarità di $\mathcal{L}^n$). $\mathcal{L}^n$ è una misura di Borel finita sui limitati e

(i) $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $\mathcal{L}^n(A) = \sup\{\mathcal{L}^n(K) : K \subseteq A \text{ compatto}\}$

(ii) $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad \mathcal{L}^n(E) = \inf\{\mathcal{L}^n(A) : E \subseteq A \text{ aperto}\}$

dim
- $\mathcal{L}^n$ misura di Borel: lo abbiamo già visto.
- Se E è limitato, allora $E \subseteq [-R, R[^n$.

  $\Rightarrow \mathcal{L}^n(E) \leq \mathcal{L}^n([-R,R[^n) = (2R)^n < \infty$

  (bisognerebbe anche dim. che la misura di una faccia del pluri-intervallo, ovvero di un iperpiano, ha misura zero).
- (i) $\geq$ ovvia

  $K_j := \{x \in A : |x| \leq j \,,\, \text{dist}(x, \partial A) \geq \frac{1}{j}\}$ è chiuso e limitato

  $K_j \subseteq K_{j+1}$ e $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$

  Per monotonia: $\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(\bigcup_j K_j) = \lim_{j \to \infty} \mathcal{L}^n(K_j) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^n(K_i)$

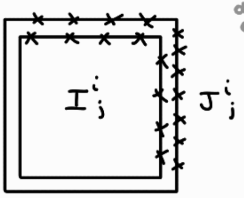
  $\Rightarrow \leq$

  (ii) $\leq$ ovvia

  se fosse ∞, non avrei nulla da dimostrare

  Posso supporre $\mathcal{L}^n(E) < \infty$

  Fisso $i \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists (I_j^i)_j$ pluriintervalli tc $E \subseteq \bigcup_j I_j^i$ e



  def di misura di Lebesgue $\rightarrow$ $\mathcal{L}^n(E) + \frac{1}{2^i} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(I_j^i) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathcal{L}^n(J_j^i) - \frac{1}{2^i 2^j}\right)$ (*)

  dove J_j^i è pluri-intervallo aperto tc $I_j^i \subseteq J_j^i$

  Definisco $A_i := \bigcup_j J_j^i$ è aperto $\supseteq E$

  $\Rightarrow B := \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ è di Borel e $\supseteq E$

  $\forall i \quad \mathcal{L}^n(E) \leq \mathcal{L}^n(B) \leq \mathcal{L}^n(A_i) \leq \sum_j \mathcal{L}^n(J_j^i) \overset{(*)}{\leq} \mathcal{L}^n(E) + \frac{2}{2^i}$

  $\Rightarrow \mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(B) = \lim_{i \to \infty} \mathcal{L}^n(A_i) = \inf_i \mathcal{L}^n(A_i)$

  $\Rightarrow \geq$ $\square$

B è G_δ-set (intersezione numerabile di aperti)

corollario 1 $\quad \forall E \subseteq \mathbb{R}^n \; \exists B$ Borel tc $E \subseteq B$ e $\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(B)$

corollario 2 $\quad E \subseteq \mathbb{R}^n$ è misurabile $\iff \exists B$ Boreliano ed N tc $\mathcal{L}^n(N) = 0$ ed $E = B \setminus N$

$\Leftarrow$ B ed N misurabili, allora anche E lo è

$\Rightarrow$ B ed E sono misurabili e hanno stessa misura, dunque $\mathcal{L}^n(N) = 0$

oss
- $\mathcal{L}^n(E + h) = \mathcal{L}^n(E) \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^n, \forall h \in \mathbb{R}^n$
- E misurabile $\iff$ $E + h$ misurabile

TEOREMA (unicità della misura di Haar). μ misura di Borel in $\mathbb{R}^n$ tc

1) $\mu(E+h) = \mu(E) \quad \forall\, E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\ \forall h \in \mathbb{R}^n$

2) $\mu([0,1[^n) = 1$

Allora $\mu = \mathcal{L}^n$.

se non la normalizzo, si ha $d := \mu([0,1[^n) \Rightarrow \mu = d\,\mathcal{L}^n$

dim $[0,1[^n$ = unione disgiunta di 2^{nk} cubi di lato $\frac{1}{2^k}$

sono tutti traslati l'uno dell'altro

che hanno tutti la stessa misura μ.

$\Rightarrow \forall\, Q$ cubo di lato $\frac{1}{2^k}$, $\mu(Q) = \frac{1}{2^{nk}} = \mathcal{L}^n(Q)$

$\Rightarrow \mu(A) = \mathcal{L}^n(A) \quad \forall\, A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

esercizio Ogni aperto A è unione disgiunta di cubi diadici

Sia B di Borel e limitato.

$\mathcal{L}^n(B) = \inf\{\underset{\mu(A)}{\underbrace{\mathcal{L}^n(A)}} : B \subseteq A \text{ aperto}\} \geq \mu(B)$

palla aperta di raggio R

$B \subseteq B_R \Rightarrow \cancel{\mathcal{L}^n(B_R)} - \mathcal{L}^n(B) = \mathcal{L}^n(B_R \setminus B) \geq \mu(B_R \setminus B)$

$= \mu(B_R) - \mu(B)$

$= \cancel{\mathcal{L}^n(B_R)} - \mu(B)$

$\Rightarrow \mathcal{L}^n(B) \leq \mu(B)$

$\Rightarrow \mathcal{L}^n(B) = \mu(B) \quad \forall\, B$ Borel limitato

$\Rightarrow \mu(B) = \lim_{i\to\infty} \mu(B \cap B(0,i)) = \mathcal{L}^n(B) \quad \forall B$ $\square$

$\mu(B \cap B(0,i)) = \mathcal{L}^n(B \cap \underbrace{B(0,i)}_{\text{palla di centro 0 e raggio } i})$

oss $\mathcal{L}^n$ e μ coincidono sugli aperti

$\Rightarrow$ coincidono anche sulla σ-algebra generata

$\delta_d(x) := (d_1 x_1, \dots, d_n x_n)$, $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ fissato

I pluri-intervallo $\Rightarrow \delta_d(I)$ è pluri-intervallo e $mis(\delta_d(I)) = |d_1 d_2 \cdots d_n|\, mis(I)$

conseguenza $\mathcal{L}^n(\delta_d(E)) = |\det \delta_d|\, \mathcal{L}^n(E)$ ed E misurabile $\Leftrightarrow \delta_d(E)$ misurabile.
se $d_i \neq 0$

TEOREMA $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\forall T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineare $\mathcal{L}^n(T(E)) = |\det T| \mathcal{L}^n(E)$

In particolare, E misurabile $\Leftrightarrow$ $T(E)$ misurabile
↳ se $\det(T) \neq 0$

<u>idea della dim</u>

- $H^d_\delta(E) := \inf \left\{ \underset{\underset{\mathbb{R}}{\cap}}{\omega_d} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} E_k}{2} \right)^d : E \subseteq \bigcup_k E_k, E_k \subseteq \mathbb{R}^n, \operatorname{diam} E_k < \delta \right\}$

- $H^d(E) := \lim_{\delta \to 0^+} H^d_\delta(E) = \sup_{\delta > 0} H^d_\delta(E)$ MISURA DI HAUSDORFF (di dim d)

- <u>fatto</u> se $\omega_d = \mathcal{L}^d(B^d(0,1))$, allora per $d = n$ $\mathcal{L}^n = H^n$.

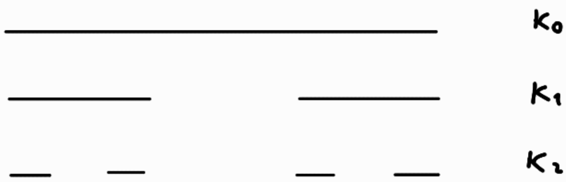
un'isometria non cambia i diametri

ok se $T \in O(n)$: $\mathcal{L}^n(T(E)) = H^n(T(E)) \overset{\downarrow}{=} H^n(E) = \mathcal{L}^n(E) = \underset{\overset{\|}{1}}{|\det T|} \mathcal{L}^n(E)$

per $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \Rightarrow T = T_1 \circ \delta_\lambda \circ T_2$, $T_1, T_2 \in O(n)$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$ e

vale perché $|\det \delta_\lambda| = |\det T|$ $\square$

<u>esempio 1</u> K = insieme di Cantor



$K_i = \bigcup$ di 2^i intervalli lunghi $\frac{1}{3^i}$

$K := \bigcap_i K_i$

$\mathcal{L}^1(K) = 0$ perché $\mathcal{L}^1(K) \leq \mathcal{L}^1(K_i) \leq 2^i \cdot \frac{1}{3^i} \longrightarrow 0$

<u>fatto</u> $\# K = \# \mathbb{R}$
↳ K è in biezione con successioni di 0 e 1 e ad ogni successione corrisponde un punto di K

questo mi permette di dimostrare che $\# \mathcal{A}(\mathbb{R}) = \# \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$\Longrightarrow$ K compatto $\Rightarrow$ K di Borel $\Rightarrow$ K misurabile

$\forall H \subseteq K$ $\mathcal{L}^1(H) = 0 \Rightarrow H$ è misurabile $\Rightarrow \mathcal{P}(K) \subseteq \mathcal{A}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \# \mathcal{A}(\mathbb{R}) \geq \# \mathcal{P}(K) = \# \mathcal{P}(\mathbb{R}) \Rightarrow \# \mathcal{A}(\mathbb{R}) = \# \mathcal{P}(\mathbb{R})$

<u>esercizio 2</u> $\exists A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto t.c. $\mathcal{L}^2(A) \leq 1$ e $\mathcal{L}^2(\partial A) = +\infty$

$A := \bigcup_i Q(q_i, 1/2^{i+1})$
cubi aperti di centro q_i e lato $\frac{1}{2^{i+1}}$

$(q_i)_{i \in \mathbb{N}} = \mathbb{Q}^2$

$\mathcal{L}^n$ misura esterna e A unione non disgiunta e numerabile di aperti

$\mathcal{L}^2(A) \leq \sum_i \mathcal{L}^2(q_i, \frac{1}{2^{i+1}}) = \sum_i \left(\frac{1}{2^{i+1}} \right)^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = 1$

dico $A^c \subseteq \partial A$. se $x \notin A \Rightarrow \exists \underset{\underset{A}{\cap}}{q_{i_k}} \longrightarrow \underset{\underset{\bar{A}}{\cap}}{x} \Rightarrow x \in \bar{A} \setminus A = \partial A$

$\Rightarrow \mathcal{L}^2(\partial A) \geq \mathcal{L}^2(A^c) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2) \setminus \mathcal{L}^2(A) = +\infty$

esercizio 4 $\mathcal{L}^n(\mathbb{Q}^n)=0$, anzi, se $A\subseteq\mathbb{R}^n$ numerabile, allora $\mathcal{L}^n(A)=0$

Scrivo $A=(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$, fisso $\varepsilon>0$, allora $A\subseteq Q(q_i,\frac{\varepsilon}{2^{i+1}})$

e ripetendo il conto precedente si ha

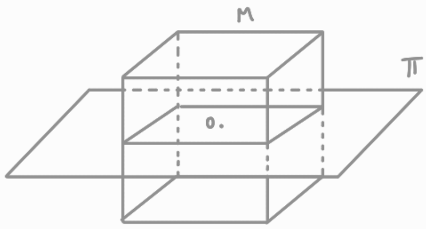
$$\mathcal{L}^n(A)\le\sum_i\left(\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right)^n\le\varepsilon$$

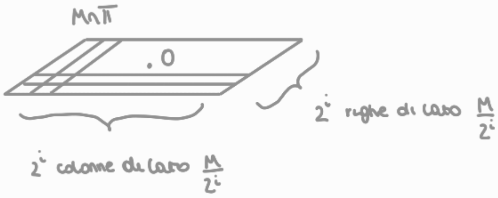
esercizio 5 $\pi = \mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}\subseteq\mathbb{R}^n$. Dico che $\mathcal{L}^n(\pi)=0$

$$\mathcal{L}^n(\underbrace{\pi\cap Q(0,M)})\xrightarrow{M\to\infty}\mathcal{L}^n(\pi)$$

ha misura 0 perché $\subseteq \bigcup$ (unione) di $\underset{\mathbb{R}\text{ (costante)}}{\underset{\cap}{c}}\cdot 2^{i(n-1)}$ cubi di lato $\frac{M}{2^i}$

$$\text{vol. totale}\le c\,2^{i(n-1)}\left(\frac{M}{2^i}\right)^n=\frac{\bar{c}}{2^i}\xrightarrow[i\to\infty]{}0$$





$\Rightarrow (2^i)^2=(2^i)^{n-1}$ quadretini che ricoprono $M\cap\pi$

Funzioni misurabili e boreliane

$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

def $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ si dice MISURABILE e si scrive $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ se $\forall A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ aperto $f^{-1}(A)$ è misurabile

oss f cont $\Rightarrow$ f misurabile

esercizio $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile $\Rightarrow$ χ_E è misurabile, infatti:

$$\{\chi_E < t\} = \begin{cases} \emptyset & t \leq 0 \\ \mathbb{R}^n \setminus E & t \in]0,1] \\ \mathbb{R}^n & t > 1 \end{cases}$$

sono tutti misurabili e vale la seguente prop

prop sono equivalenti:

A) $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile

B) $\forall t \in \overline{\mathbb{R}}$ $\{f < t\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < t\} = f^{-1}([-\infty, t[)$ è misurabile

C) $\forall t \in \overline{\mathbb{R}}$ $\{f \leq t\}$ è misurabile

D) $\forall t \in \overline{\mathbb{R}}$ $\{f > t\}$ è misurabile

E) $\forall t \in \overline{\mathbb{R}}$ $\{f \geq t\}$ è misurabile

dim

- B) $\Leftrightarrow$ E)
- C) $\Leftrightarrow$ D)

passaggio al complementare

- B) $\Leftrightarrow$ C) : $\Rightarrow$ $\{f \leq t\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{f < t + \frac{1}{i}\}$

  $\Leftarrow$ $\{f < t\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{f \leq t - \frac{1}{i}\}$

- A) $\Leftrightarrow$ B) : $\Rightarrow$ ovvio

  $\Leftarrow$ dimostriamo B) $\wedge$ C) $\wedge$ D) $\wedge$ E) $\Rightarrow$ A)

  se $A = I$ intervallo aperto, allora $f^{-1}(I)$ è misurabile

  $f^{-1}((a,b)) = \{f < b\} \cap \{f > a\}$

  se $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ è aperto, allora $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ intervalli aperti disgiunti, dunque $f^{-1}(A) = \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}(I_i)}_{\text{misurabile}}}_{\text{misurabile}}$ □

L'insieme delle funzioni misurabili finite è un'algebra con le usuali operazioni.

esercizio $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ finite $(f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R})$. Allora

- $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $fg \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$
- $\frac{1}{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ purché $f(x) \neq 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}^n$

idee

- $\alpha f, \beta g$ misurabili

  $\alpha = 0$ e $\alpha < 0$ sono circa simili

  $\{\alpha f < t\} = \{f < \frac{t}{\alpha}\} \quad (\alpha > 0)$

- $f + g$ misurabile

  $$\{f + g < t\} = \bigcup_{\substack{p, q \in \mathbb{Q} \\ p+q<t}} \underbrace{\big(\underbrace{\{f < p\}}_{mis} \cap \underbrace{\{g < q\}}_{mis}\big)}_{mis} \implies mis$$

  $\supseteq$ facile

  $\subseteq \quad f(x) + g(x) < t$

  $\mathbb{Q} \ni p_i \searrow f(x)$

  $\quad\; \ni q_i \searrow g(x)$

  $\implies \exists\, \bar{i}$ tc $\quad p_{\bar{i}} + q_{\bar{i}} < t$

  $\implies x \in \{f < p_{\bar{i}}\} \cap \{g < q_{\bar{i}}\}$

- se $f \geq 0$ e $g \geq 0$, allora fg è mis, perché

  $$\{fg < t\} = \bigcup_{\substack{p, q \in \mathbb{Q} \\ pq<t}} (\{f < p\} \cap \{g < q\})$$

  In generale, $f = f_+ - f_-$, $g = g_+ - g_-$

- $\frac{1}{f}$ facile (esercizio)

prop $(f_k)_k$ successione di funzioni misurabili. Allora

$f_-(x) := \inf_k f_k(x)$ e $f_+(x) := \sup_k f_k(x)$ sono misurabili

dim

$$\{f_- < t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f_k < t\}$$

$$\{f_+ > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f_k > t\} \qquad \square$$

corollario $(f_k)_k$ successione di funzioni misurabili. Allora

$$\liminf_{k \to +\infty} f_k(x) := \lim_{k \to +\infty} \inf_{j \geq k} f_j(x) = \sup_k \inf_{j \geq k} f_j(x)$$

$$\limsup_{k \to +\infty} f_k(x) := \lim_{k \to +\infty} \sup_{j \geq k} f_j(x) = \inf_k \sup_{j \geq k} f_j(x)$$

sono misurabili. In particolare, $f(x) = \lim_k f_k(x)$, se esiste, è misurabile.

coincide sia con il liminf che con il limsup

def $E\subseteq\mathbb{R}^n$ misurabile, $f: E\to\overline{\mathbb{R}}$ si dice MISURABILE SU E e si scrive $f\in\mathcal{M}(E)$ se $f\chi_E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Valgono le stesse proprietà sopra.

fuori da E la estendo con 0

def $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ si dice DI BOREL se $\forall A\subseteq\overline{\mathbb{R}}$ aperto $f^{-1}(A)$ è di Borel.

oss f Borel $\Rightarrow f$ misurabile

def $\varphi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ si dice FUNZIONE SEMPLICE se $\exists\, A_1,\dots,A_k$ misurabili disgiunti, $\exists\, a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}$ tc

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i\,\chi_{A_i}(x)\qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

oss se A_i non fossero disgiunti, potrei sempre ricondurmi ad insiemi disgiunti (considero anche le intersezioni)

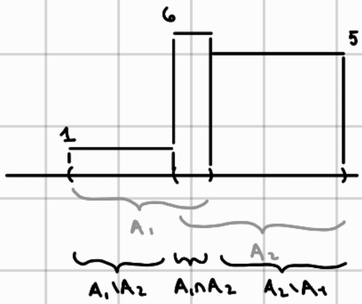
φ si dice INTEGRABILE se vale: $\mathcal{L}^n(A_i)=\infty \Rightarrow a_i=0$, cioè se $a_i\neq 0$, allora $\mathcal{L}^n(A_i)<\infty$.

se φ è integrabile, il suo INTEGRALE è

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx := \sum_{i=1}^{k} a_i\,\mathcal{L}^n(A_i)$$

(convenzione: $0\cdot\infty=0$), oppure

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\,d\mathcal{L}^n=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,d\mathcal{L}^n(x)$$



oss L'approccio per la costruzione dell'integrale è come quello di Riemann (con funzioni costanti a tratti), ma è molto più generale, perché gli A_i sono insiemi qualunque (purché misurabili), ad esempio $\mathbb{Q}$.

oss La def è ben posta. se $\varphi=\sum_{i=1}^{k} a_i\chi_{A_i}=\sum_{j=1}^{h} b_j\chi_{B_j}$, allora

$\sum_i a_i\mathcal{L}^n(A_i)=\sum_j b_j\mathcal{L}^n(B_j)$

idea $\sum_{i,j} c_{i,j}\,\chi_{C_{i,j}}$, $C_{i,j}=A_i\cap B_j$ copia

oss se $\varphi \geq 0$ semplice (cioè $a_i \geq 0 \ \forall i$), $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx$ è comunque definito (eventualmente $+\infty$).

lemma φ, ψ semplici e integrabili, allora $\varphi + \psi$ semplice e integrabile e

$$\int \varphi + \psi = \int \varphi + \int \psi$$

dim $\varphi = \sum_i^k a_i \chi_{A_i}$ con A_i disgiunti e $a_i = 0$ se $\mathcal{L}^n(A_i) = +\infty$

$\psi = \sum_j^h b_j \chi_{B_j}$ con B_j disgiunti e $b_j = 0$ se $\mathcal{L}^n(B_j) = +\infty$

se non copro tutto $\mathbb{R}^n$, posso aggiungere quello che manca in A_{k+1} e porre $a_{k+1} = 0$

Posso supporre $\mathbb{R}^n = \bigcup_i A_i = \bigcup_j B_j$. Allora

$$\varphi + \psi = \sum_{i,j} (a_i + b_j)\, \chi_{A_i \cap B_j}$$

$\mathcal{L}^n(A_i) \geq \mathcal{L}^n(A_i \cap B_j) = +\infty \Rightarrow a_i = 0$ (analogo per b_j)

è semplice e se $\mathcal{L}^n(A_i \cap B_j) = +\infty \Rightarrow a_i + b_j = 0$

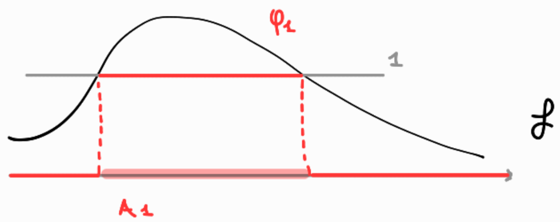
$$\int \varphi + \psi = \sum_{i,j} (a_i + b_j) \mathcal{L}^n(A_i \cap B_j)$$

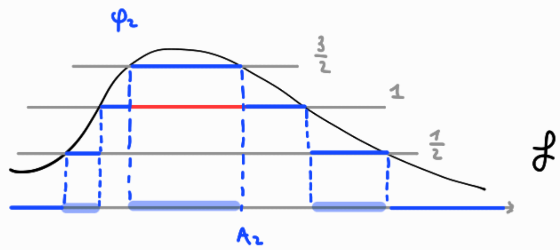
$$= \sum_i \sum_j a_i \mathcal{L}^n(A_i \cap B_j) + \sum_j \sum_i b_j \mathcal{L}^n(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_i a_i \mathcal{L}^n(A_i) + \sum_j b_j \mathcal{L}^n(B_j) = \int \varphi + \int \psi \qquad \square$$

una funzione misurabile è un "limite" di funzione semplice

lemma $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty]$ misurabile. Allora $\exists (A_k)_k$ misurabili (non necess. disgiunti) tc $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$





dim $A_1 = \{ f \geq 1 \}$

$\varphi_1 := \chi_{A_1}$ (è semplice)

Per induzione: $A_k := \{ f - \varphi_{k-1} \geq \frac{1}{k} \}$, $k \geq 2$

$$\varphi_k := \varphi_{k-1} + \frac{1}{k} \chi_{A_k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \chi_{A_j}$$

Dico che $f = \varphi_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_{A_j}$

$f \geq \varphi_\infty$: x fissato e $f(x) < \infty$ (altrimenti OK). $\bar{k} := \sup\{ k : x \in A_k \}$

se $\bar{k} = \infty$, $x \in A_k$ per infiniti k

$f(x) - \varphi_{k-1}(x) \geq \frac{1}{k}$ per infiniti k

$f(x) - \varphi_\infty(x) \geq 0$ per $k \to \infty$

se $\bar{k} < \infty$, allora $x \in A_{\bar{k}}$, $x \notin A_j \quad \forall j > \bar{k}$

$$f(x) \geq \varphi_{\bar{k}-1}(x) + \frac{1}{\bar{k}} = \varphi_{\bar{k}}(x) = \varphi_\infty(x)$$

$\chi_{A_{\bar{k}}}(x) = 1$

perché da $\bar{k}$ in poi, x non sta più in A_j ($\chi_{A_j}(x) = 0 \quad \forall j > \bar{k}$)

$f \leq \varphi_\infty$: se $x \in A_k \quad \forall k \geq \tilde{k}$, allora $f(x) \geq \varphi_\infty(x) \geq \sum_{j=\tilde{k}}^{\infty} \frac{1}{j} \underbrace{\chi_{A_j}}_{=1} = +\infty$

cioè $f(x) = \varphi_\infty(x) = +\infty$.

Altrimenti $\exists$ infiniti k t.c. $x \notin A_k$. Per tali k $f(x) < \varphi_{k-1}(x) + \frac{1}{k}$

per $k \to +\infty$ $f(x) \leq \varphi_\infty(x)$. $\square$

$A_k := \{ f - \varphi_{k-1} \geq \frac{1}{k} \}$
$\Rightarrow$ se $x \notin A_k$, allora $f(x) - \varphi_{k-1} < \frac{1}{k}$

oss se f è limitata, allora $\varphi_k \overset{\text{convergono dal basso}}{\nearrow} f$ uniformemente

<u>dim</u> PA $\exists \varepsilon > 0 \ \exists (k_h)_h \ \exists (x_h)_h$ t.c. $k_h \longrightarrow \infty$

$$|f(x_h) - \varphi_{k_h}(x_h)| \geq \varepsilon \quad \forall h \in \mathbb{N}$$
$$\parallel$$
$$f(x_h) - \varphi_{k_h}(x_h)$$

il $|\cdot|$ non serve, perché φ_i sono crescenti dal basso

$\Rightarrow f(x_h) \geq \varepsilon + \varphi_{k_h}(x_h) \geq \varphi_j(x_h) + \frac{1}{j} \quad \forall j \in [\frac{1}{\varepsilon}, k_h]$

$\Rightarrow x_h \in A_j \quad \forall j \in [\frac{1}{\varepsilon}, k_h]$

$\Rightarrow M \geq f(x_h) = \sum_{j \in [\frac{1}{\varepsilon}, k_h]} \frac{1}{j} \underbrace{\chi_{A_j}(x_h)}_{=1} = \sum_{j \in [\frac{1}{\varepsilon}, k_h]} \frac{1}{j} \xrightarrow[h \to \infty]{} \infty$ $\lightning$

Integrazione

Ricordo:

<u>corollario</u> $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,+\infty]$ misur, allora $\exists (\varphi_k)_k$ succ. di funzioni semplici tali che $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$, $\varphi_k(x) \nearrow f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$

se f è limitata, si può inoltre supporre che $\varphi_k \longrightarrow f$ uniformemente

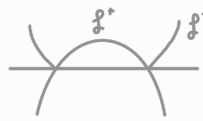
<u>def</u> a) $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,+\infty]$ misurabile. L'**INTEGRALE** (di Lebesgue) di f è

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx : \varphi \text{ semplice}, \varphi \leq f \right\} \in [0,+\infty)$$

posso sempre supporre $\varphi \geq 0$

f si dice **INTEGRABILE** se $\int f(x)\, dx < \infty$

b) $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabile si dice **INTEGRABILE** se $f^+ := \max\{f, 0\}$ e $f^- := \max\{-f, 0\}$ sono integrabili. In tal caso



$f = f^+ - f^-$

$|f| = f^+ + f^-$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx := \int f^+ - \int f^-$$

In particolare, f è integrabile $\iff$ $|f|$ è integrabile e $\left|\int f(x)\,dx\right| \leq \int |f(x)|\, dx$

<u>def</u> $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ misurabile, f si dice **INTEGRABILE** se

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

è integrabile su $\mathbb{R}^n$. In tal caso $\int_E f(x)\, dx := \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(x)\, dx$

<u>oss</u> se f è integrabile su A misurabile e $B \subseteq A$ è misurabile, allora è integrabile su B e $\int_B f(x)\, dx = \int_A f(x)\, \chi_B(x)\, dx$

<u>def</u> Una proprietà $P(x)$ vale **QUASI OVUNQUE** (q.o.) su $\mathbb{R}^n$ (oppure per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$) se $\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) \text{ è falsa}\}) = 0$

<u>esempio</u> la proprietà di avere almeno una coordinata irrazionale è quasi vera ovunque

prop f, g integrabili, $f \le g$ q.o., allora $\int f \le \int g$

dim Suppongo $0 \le f$, $0 \le g$. Allora $\forall \varphi$ semplice, $\varphi \le f$ vale $\varphi \le g$ q.o.

però $\tilde{\varphi} := \varphi \chi_{\{f \le g\}} \le g$.

$\tilde{\varphi}$ è semplice : $\varphi = \sum a_i \chi_{A_i} \Rightarrow \varphi \chi_E = \sum a_i \chi_{A_i \cap E}$

$\Rightarrow \int \varphi = \int \tilde{\varphi} \le \int g$ i due integrali sono uguali perché differiscono per un insieme di misura nulla

$\Rightarrow \int f = \sup_{\varphi} \{ \int \varphi \} \le \int g$

In generale, $f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$, $f^+ \le g^+$ e $f^- \ge g^-$. $\square$

corollario Se $f = g$ q.o., allora $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx$

esempio $\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}} = 0$ dato che $\chi_{\mathbb{Q}} = 0$ q.o.

oss Se f è integrabile, allora f è finita q.o.

dim $A_k := \{ x \in \mathbb{R}^n, |f(x)| \ge k \}$

$$\mathcal{L}^n(A_k) = \int_{A_k} 1 \le \int_{A_k} \frac{|f(x)|}{k} \le \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^n} |f| = \frac{c}{k}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^n(\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| = +\infty\}}_{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k}) = \lim_{k \to \infty} \mathcal{L}^n(A_k) = \lim_{k \to \infty} \frac{c}{k} = 0 \qquad \square$$

TEOREMA (di convergenza monotona / di Beppo-Levi). $f_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty]$ misurabili, $f_{k+1} \ge f_k$, $f_k(x) \longrightarrow f(x)$ per $k \longrightarrow \infty$. Allora f è misurabile e

$$\int f(x)\,dx = \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx$$

in quanto limite di funzioni misurabili

$f_k \le f_{k+1} \le f \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n} f_{k+1}\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n} f\,dx$

dim f è misurabile e $\exists\, L := \lim_{k \to +\infty} \int f_k(x)\,dx \le \int f(x)\,dx$.

Devo mostrare l'altra disuguaglianza. Se $L = +\infty$ ho finito.

Posso supporre $L < +\infty$. Mostro che

$\forall\, \varphi$ semplice $\le f$ $\quad \int \varphi \le L$

$\varphi = \sum_{i=1}^{h} a_i \chi_{A_i}$ posso supporre $a_i = 0$ se $\mathcal{L}^n(A_i) = +\infty$

Posso supporre $\varphi \ge 0$ ($\underbrace{\sup\{\varphi, 0\}}_{= \varphi \chi_{\{\varphi > 0\}}}$ è semplice e $\le f$)

Fisso $\varepsilon>0$: $E_k := \{(1-\varepsilon)\varphi \le f_k\}$, $E_k \subseteq E_{k+1}$. Si ha
(infatti $f_k \le f_{k+1}$)

$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$: $\forall x \in \mathbb{R}^n$

- se $f(x)=0 \Rightarrow \varphi(x)=0 \le f_k(x) \Rightarrow x \in E_k$
- se $f(x)>0 \Rightarrow f_k(x) \longrightarrow f(x) \overset{\text{maggiore stretto}}{>} (1-\varepsilon)\varphi(x)$ $\quad(\varphi \le f)$

$\Rightarrow x \in E_k$ definitivamente.

$$L = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k \geq \lim_k \int_{E_k} f_k \geq \lim_k \int_{E_k} (1-\varepsilon)\varphi \overset{}{=} (1-\varepsilon)\int \overbrace{\varphi\chi_{E_k}}^{\text{semplice}}$$

$$= (1-\varepsilon) \lim_k \sum_{i=1}^{h} a_i \mathcal{L}^n(A_i \cap E_k)$$

$$= (1-\varepsilon) \sum_{i=1}^{h} a_i \mathcal{L}^n(A_i) = (1-\varepsilon)\int \varphi$$

per $\varepsilon \to 0$ $\int\varphi \le L \Rightarrow \int\varphi \le \int f \le L$ $\square$

oss Vale anche se le funzioni sono definite non su $\mathbb{R}^n$, ma su A misurabile

TEOREMA (lemma di Fatou). $f_k : A \longrightarrow [0,+\infty]$ misurabili, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile

$f(x) := \liminf_{k\to+\infty} f_k(x)$, $x\in A$ (f è mis.). Allora

$$\int_A f(x)\,dx \le \liminf_{k\to\infty} \int_A f_k(x)\,dx$$

($\int \liminf \le \liminf \int$)

dim $f(x) := \lim_{k\to\infty} \underbrace{\left(\inf_{i\geq k} f_i(x)\right)}_{g_k(x) \,\le\, f_k}$

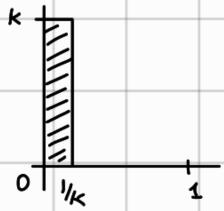
se è lim, allora è anche liminf

$g_{k+1} \geq g_k$ e $g_k \nearrow f$ $\overset{\text{B.Levi}}{\Longrightarrow} \int_A f = \lim_{k\to\infty} \int_A g_k = \liminf_{k\to\infty} \int_A g_k$

$\le \liminf_k \int_A f_k$ $\square$

oss Non è detto valga $=$. Ad esempio:

$f_k = k\chi_{(0,1/k)}$



$f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 = f(x)$ $\forall x \in [0,1]$

$0 = \int_{[0,1)} f < \liminf_k \underbrace{\int f_k}_{=1}$

(inoltre, non si può applicare il lemma di Fatou)

perché?

def $A \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile. Lo spazio $L^1(A)$ è

$$L^1(A) := \{ f : A \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ \underbrace{f \text{ è integrabile su } A}_{\text{cioè } \int_A |f| < \infty} \}$$

prop $L^1(A)$ è sp. vettoriale reale e l'operatore $L^1(A) \ni f \longmapsto \int_A f(x)\,dx$ è lineare.

dim
- f integrabile su $A \Rightarrow \alpha f$ è integrabile su A (banale)

  (si dimostra che $\int \alpha f = \alpha \int f$)
- se $f, g \in L^1(A) \Rightarrow f+g \in L^1(A)$, perché

  $\int |f+g| \leq \int (|f| + |g|) = \int |f| + \int |g| < \infty$ ↗ si usa qua
- $\int (f+g) = \int f + \int g$

  Posso supp. $f \geq 0$, $g \geq 0$ (tanto $f = f^+ - f^-$)

  Fisso $\varphi_k \geq 0$, $\psi_k \geq 0$ semplici tc $\varphi_k \nearrow f$, $\psi_k \nearrow g$

  Allora $\varphi_k + \psi_k$ è semplice ed è $\leq f+g$, anzi, $\varphi_k + \psi_k \nearrow f+g$

  $$\Rightarrow \underbrace{\lim_k \int (\varphi_k + \psi_k)}_{\overset{\parallel \text{ B.Levi}}{\int (f+g)}} = \lim_k \left(\int \varphi_k + \int \psi_k \right) = \int f + \int g$$ $\square$

oss $\overset{\|f\|_1}{\parallel}$ $\|f\|_{L^1(A)} := \int_A |f(x)|\,dx$ è una SEMI-NORMA

1) $\|f\|_1 \geq 0$

2) $\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \, \|f\|_1$

3) $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ (sub-lineare)

esercizio $\|f\|_{L^1(A)} = 0 \iff f = 0$ q.o. in A

($\Leftarrow$ facile)

TEOREMA (di Lebesgue / di convergenza dominata). $A \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, $f_k \in L^1(A)$

tc per q.o. $x \in A$ (quasi ogni) $\exists$ $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$. Se $\exists$ $g \in L^1(A)$ tc $\forall k$

$|f_k(x)| \leq |g(x)|$ q.o. $x \in A$, allora

$$\lim_{k\to\infty} \int_A |f_k - f| = 0 \quad (\text{cioè } \|f_k - f\|_1 \longrightarrow 0)$$

In particolare, $\int_A f_k \longrightarrow \int_A f$ per $k \to \infty$.

dim $$\int_A 2|g| = \int_A \overset{(\inf)}{\lim_{k\to\infty}} \{ \underbrace{2|g| - |f_k - f|}_{\geq 0 \text{ q.o. perché } |f_k - f| \leq |f_k| + |f| \leq |g| + |g|} \}$$

$$\overset{\text{Fatou}}{\Longrightarrow} \leq \liminf_{k\to\infty} \left(\int_A 2|g| - \int_A |f_k - f| \right)$$

$\liminf(-y) = -\limsup(y)$

$$= \int_A 2|g| - \limsup_k \int_A |f_k - f|$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le \limsup_k \int_A |f_k - f| \le 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_k \int_A |f_k - f| = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left|\int_A f_k - \int_A f\right| \le \int_A |f_k - f| \longrightarrow 0 \qquad \square$$

<u>oss</u> Nel controesempio a Fatou, se esiste g che domina le f_k, allora viene che l'integrale di g è infinito.

<u>ricordo</u>

1) <u>B. Levi</u> $f_k \ge 0$, $f_k \nearrow f \Rightarrow \int f_k \longrightarrow \int f$

2) <u>Fatou</u> $f_k \ge 0 \Rightarrow \int \liminf_k f_k \le \liminf_k \int f_k$

3) <u>Lebesgue</u> $|f_k| \le g \in L^1$, $f_k \longrightarrow f \Rightarrow \int |f_k - f| \longrightarrow 0 \Rightarrow \int f_k \longrightarrow \int f$

<u>esercizi</u>

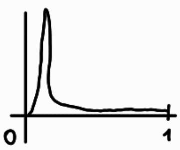
1) $$f(x) = \frac{k\sqrt{x}}{1+k^2x^2} e^{x^2} \sin(kx)$$

calcolare $\lim_{k\to\infty} \overset{\int_{(0,1)} f_k(x)\,dx \,=}{\int_0^1 f_k(x)\,dx}$

quando una funzione è integrabile secondo Riemann, è integrabile anche secondo Lebesgue e i due integrali coincidono

$f_k(x) \longrightarrow 0$ puntualmente $(\forall x)$, ma non converge uniformemente:

$$f_k\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{\sqrt{k}}{2} \underbrace{e^{\frac{1}{k^2}}}_{\ge 1} \underbrace{\sin(1)}_{>0} \longrightarrow +\infty$$



più aumenta k, più il picco si avvicina allo 0 e aumenta di altezza (ciò nonostante, l'area tende a 0)

f_k è dominata: $$|f_k| = \underbrace{\frac{kx}{1+k^2x^2}}_{\le 1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \underbrace{e^{x^2}}_{\le e} \underbrace{|\sin kx|}_{\le 1} \le \underset{g(x)}{\frac{e}{2\sqrt{x}}} \in L^1((0,1))$$

perché $\int_0^1 \frac{e}{2\sqrt{x}} < +\infty$.

$$\Rightarrow \quad \lim_k \int_0^1 f_k = \int_0^1 0 = 0$$

2) $$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{2024}\,dx \overset{!}{=} \underbrace{\int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-x} x^{2024}}_{\le \frac{1}{x^2}\ \forall x \ge M} dx}_{<\infty}$$

è integrabile (integrando per parti 2024 volte)

$$\| $$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \underbrace{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{2024} \chi_{[0,n]}(x)}_{= f_n(x) \,\longrightarrow\, e^{-x}x^{2024}}\,dx$$

si poteva usare anche B. Levi, perché converge dal basso

È dominata: $|f_n(x)| \le e^{-x} x^{2024} \in L^1([0,+\infty))$

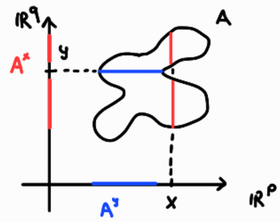
notazione $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p_x \times \mathbb{R}^q_y \qquad p+q=n$

"x-sezione"

Dati $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^p$: $A^x := \{y \in \mathbb{R}^q : (x,y) \in A\}$

"y-sezione"

$A^y := \{x \in \mathbb{R}^p : (x,y) \in A\}$



TEOREMA (di riduzione). $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-misur, allora

(i) per $\mathcal{L}^p$-q.o. $x \in \mathbb{R}^p$, A^x è $\mathcal{L}^q$-misur.

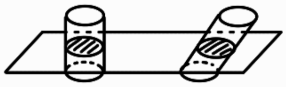
(ii) la funzione $\mathbb{R}^p \ni x \longmapsto \mathcal{L}^q(A^x)$ è misur.

(iii) $\mathcal{L}^n(A) = \int_{\mathbb{R}^p} \mathcal{L}^q(A^x)\, \underbrace{dx}_{= d\mathcal{L}^p(x)}$

oss 1 Enunciato simile per A^y.

oss 2 (iii) è il principio di Cavalieri

se due solidi hanno la stessa sezione, allora hanno lo stesso volume



def $A \subseteq \mathbb{R}^n$ misur, $f \in L^1(A)$, $f \geq 0$. Definiamo il SOTTOGRAFICO di f

$$G := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in A,\ 0 \leq t \leq f(x)\}$$

oss G è misurabile, infatti

$$G = \{\underbrace{\chi_A \circ \pi_{\mathbb{R}^n} > \tfrac{1}{2}}_{\text{le prime } n \text{ componenti stanno in } A}\} \cap \{\pi_{\mathbb{R}} \geq 0\} \cap \underbrace{\{\underbrace{\pi_{\mathbb{R}} - \underbrace{f \circ \pi_{\mathbb{R}^n}}_{\text{misur}}}_{\text{misur}} \leq 0\}}_{\text{sottolivello di misur} \implies \text{misur}}$$

è intersezione di 3 insiemi misurabili.

In alternativa: per il teorema di riduzione con $p=n$, $q=1$ si ha

$G^x = \{t \geq 0 : t \leq f(x)\}$

$G^t = \{x \in A : f(x) \geq t\}$

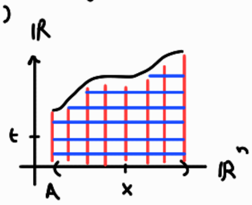
$$\mathcal{L}^{n+1}(G) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^1(G^x)\, dx = \int_A f(x)\, dx$$

$G^x = \emptyset$ se $x \notin A$

$G^x = [0, f(x)]$ se $x \in A$

dunque l'integrale è la misura del sottografico (rassicurante!)

oss
$$\mathcal{L}^{n+1}(G) = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}^n(G^t)\, dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \mathcal{L}^n(\{x \in A : f(x) \geq t\})\, dt$$



$\forall t$ considero la misura del sopralivello di t per f

TEOREMA (Fubini-Tonelli) $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p_x \times \mathbb{R}^q_y$, $p+q=n$, allora

(i) per $\mathcal{L}^p$-q.o. $x \in \mathbb{R}^p$ $\quad \underbrace{f(x,-)}_{\text{x-sezione di } f} \in L^1(\mathbb{R}^q)$

(ii) $\mathbb{R}^p \ni x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dy$ è $L^1(\mathbb{R}^p)$

(iii) $\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\, dz$

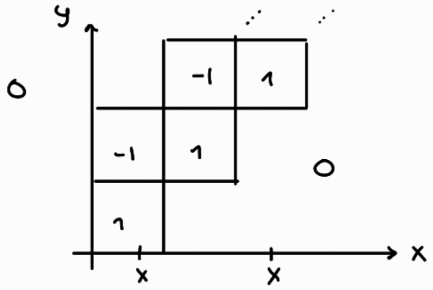
oss 1 Idem guardando y

$$\int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\,dz$$

posso riscriverlo anche come $\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dx\,dy$

oss 2 Il teorema vale anche per $f \geq 0$ (non necess. L^1)

oss 3 Il teorema può non valere se $f \notin L^1$ e cambia segno



$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\right)dy = \int_0^1 1\,dy = 1$$

Il problema è che cambia segno e $\int_{\mathbb{R}^2} |f| = +\infty$ $(\Rightarrow f \notin L^1)$

dim Posso supporre $f \geq 0$ $(\rightsquigarrow f = f^+ - f^-)$

$G := \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq t \leq f(x,y)\}$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\,dz = \mathcal{L}^{n+1}(G) = \int_{\mathbb{R}^p} \mathcal{L}^{q+1}(G^x)\,dx = (*)$$

Osservo che $G^x = \{(y,t) : 0 \leq t \leq f(x,y)\}$

$= \text{sottografico di } f(x,-) : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(*) = \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy\right)dx$$

una funzione L^1 è finita q.o.

$\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) $\square$

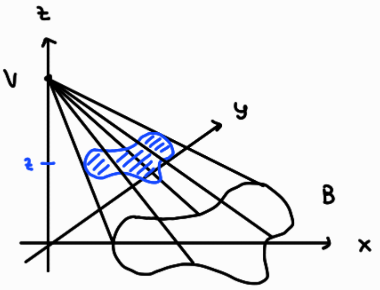
esercizio

$$\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right)dy = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\right)dx = -\frac{\pi}{4}$$

Esercizi

1. $B \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$



$C \subseteq \mathbb{R}^3$ cono su B con vertice $v = (0,0,h)$

$C := \bigcup_{p \in B} [p, v]$, $\mathcal{L}^3(C) = ?$

$\forall z \in \mathbb{R}$: sez z

$C^z = \emptyset$ se $z \notin [0,h]$

$C^z = \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 B$ se $z \in [0,h]$

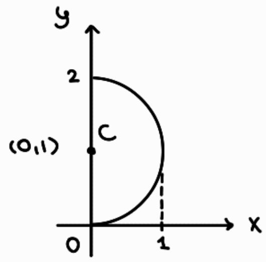
$\mathcal{L}^2(B) \int_0^h \left(1 - \frac{2z}{h} + \frac{z^2}{h^2}\right) dz = \mathcal{L}^2(B) \left[z - \frac{z^2}{h} + \frac{z^3}{3h^2} \right]_0^h$

classica area del cono

$\Rightarrow \mathcal{L}^3(C) = \int_0^h \mathcal{L}^2(C^z)\, dz = \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \mathcal{L}^2(B)\, dz = \frac{1}{3} h \mathcal{L}^2(B)$

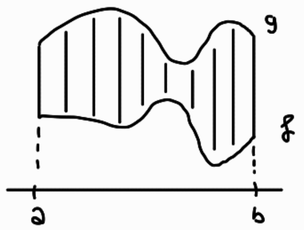
esercizio $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $V = (0, \dots, 0, h)$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ $\Rightarrow \mathcal{L}^{n+1}(C) = \frac{1}{n+1} h \mathcal{L}^n(B)$

2. $\int_C xy \, dx dy$



$C = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 1 - \sqrt{1-x^2} \le y \le 1 + \sqrt{1-x^2}\}$

def C è un DOMINIO NORMALE rispetto ad x se



$C = \{(x,y) : a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x)\}$

Posso usare Fubini - Tonelli ($xy \ge 0$ su C)

$\int_C xy \, dx dy = \int_0^1 \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} xy \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{1-\sqrt{\dots}}^{1+\sqrt{\dots}} dx$

$= \int_0^1 2x \sqrt{1-x^2} \, dx = \left[-\frac{2}{3} (1-x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$

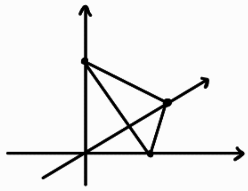
oss C è normale anche rispetto ad y:

$C = \{(x,y) : 0 \le y \le 2, \quad 0 \le x \le \sqrt{1-(y-1)^2}\}$

$\int_C xy \, dx dy = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} xy \, dx \right) dy = \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{2y-y^2}} dy$

$= \int_0^2 \frac{2y-y^2}{2} \, dy = \dots = \frac{2}{3}$

3. $T=\{(x,y,z) : x,y,z\in[0,1], x+y+z\le 1\}$ tetraedro



Trovare il baricentro x_0, y_0, z_0 di T

Riscrivo $T=\{(x,y,z): 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le z\le 1-x-y\}$

$$z_0 := \frac{1}{\underbrace{\mathcal{L}^3(T)}_{\text{volume cono }=\frac{1}{6}}}\int_T z\,dz = 6\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} z \quad dz\,dy\,dx \quad \text{(Fubini-Tonelli)}$$

$$= 6\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{(1-x-y)^2}{2}\,dy\,dx$$

$$= 6\int_0^1\left[-\frac{(1-x-y)^3}{6}\right]_0^{1-x} = \int_0^1 (1-x)^3\,dx = \frac{1}{4}$$

il baricentro è $(\underbrace{\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}}_{\text{per simmetria}}, \tfrac{1}{4})$

4. $\displaystyle\int_E \underbrace{\frac{1}{x(x^2+y^2)}}_{\ge 0 \text{ su } E}\,dx\,dy$, $E:=\{(x,y): x\ge 1,\ 0\le y\le x^2\}$

$$\int_{\mathbb{R}^2}\overset{\shortparallel}{\frac{1}{x(x^2+y^2)}}\chi_E = \int_1^{+\infty} dx\left(\int_0^{x^2}\frac{1}{x(x^2+y^2)}\,dy\right)$$

$$= \int_1^{\infty}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}\right]_{y=0}^{y=x^2} dx$$

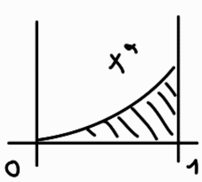
$$= \int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\arctan x\,dx$$

$$= \left[-\frac{\arctan x}{x}\right]_1^{\infty} + \int_1^{\infty}\underbrace{\frac{1}{x}\frac{1}{1+x^2}}_{=\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)} dx$$

$$= 0 + \frac{\pi}{4} + \underbrace{\left[\log x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_1^{\infty}}_{\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2$$

5. $E_\alpha := \{(x,y): 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^\alpha, \alpha>0\}$

Per quale α $\quad \dfrac{x}{x^4+y^4} \in L^1(E_\alpha)$?



$$\int_{E_\alpha} \frac{x}{x^4+y^4}\, d\mathcal{L}^2 \overset{\overset{0}{\wedge}}{=} \int_0^1 dx \int_0^{x^\alpha} \frac{x}{x^4+y^4}\, dy$$ (non serve il modulo)

$$\leq \int_0^1 dx \int_0^{x^\alpha} \frac{x}{x^4}\, dy$$

$$\leq \int_0^1 \frac{1}{x^{3-\alpha}}\, dx < \infty \quad \text{se } \alpha > 2$$

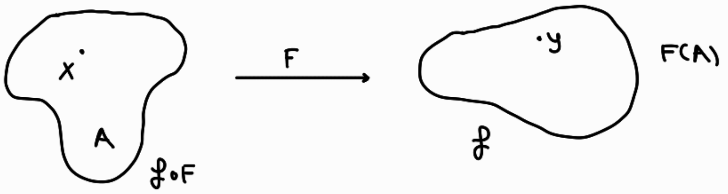
se per $\alpha = 2$ diverge, allora diverge anche per i valori inferiori di α ($E_\alpha \supseteq E_2$ per $\alpha \leq 2$)

$$\int_{E_\alpha} \frac{x}{x^4+y^4} \geq \int_{E_2} \frac{x}{x^4+y^4} = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \frac{x}{\underbrace{x^4+y^4}_{\leq x^4+x^8 \leq 2x^4}}\, dy \geq \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \frac{x}{2x^4}\, dy = +\infty$$

Cambio di variabile

TEOREMA (cambio di variabile). $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $F \in C^1(A;\mathbb{R}^n)$ diffeom. (tra A e $F(A)$), $f \in L^1(F(A))$. Allora

$$\int_{F(A)} f(y)\,dy = \int_A f(F(x))\,|\det JF(x)|\,dx$$



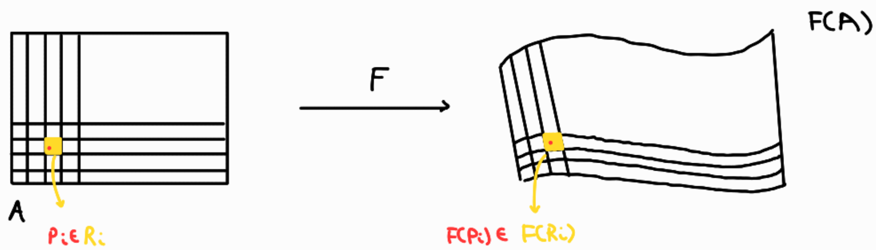
$$\int_{F(A)} f(y)\,dy \xrightarrow[\;]{\substack{y \,\to\, F(x) \\ dy \,\to\, |\det JF(x)|\,dx}} \int_A f(F(x))\,|\det JF(x)|\,dx$$

<u>oss</u> $n=1$, $a<b$: $\displaystyle\int_{F(a)}^{F(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f(F(x))\,F'(x)\,dx$

non sappiamo se $F(a)<F(b)$

$$(\cancel{\text{sgn}}\, F') \int_{F([a,b])} f(y)\,dy = \underbrace{(\cancel{\text{sgn}}\, F')}_{\text{costante}} \int_a^b f(F(x))\,|F'(x)|\,dx$$

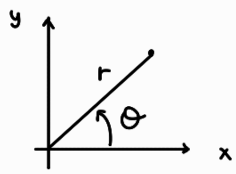
<u>idea</u> (della dimostrazione)



Su piccola scala, F è vicino dal essere un'applicazione lineare: R_i è un rettangolino e $F(R_i)$ è circa un parallelogramma. Dunque $F(R_i)$ è vicino all'approssimazione al primo ordine di F (la Jacobiana).

$$\int_{F(A)} f \sim \sum_i f(F(P_i))\,\mathcal{L}^n(F(R_i))$$
$$\sim \sum_i f(F(P_i))\,|\det JF(p_i)|\,\mathcal{L}^n(R_i)$$
$$\sim \int_A f(F(x))\,|\det JF(x)|\,d\mathcal{L}^n(x) = \int_A f(F(x))\,|\det JF(x)|\,d\mathcal{L}^n(x)$$

Coordinate polari in $\mathbb{R}^n$



$F(r,\theta) = (r\cos\theta,\, r\sin\theta)$

F è diffeo tra $(0,+\infty)\times(0,2\pi)$ e $\mathbb{R}^2 \setminus \underbrace{\{(x,0): x \geq 0\}}_{\mathcal{L}^2(\dots)=0}$ $\Rightarrow$ posso usare le coord. polari senza che l'integrale cambi

$$JF(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad |\det JF| = r$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{(0,+\infty)\times(0,2\pi)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^{+\infty} r \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta\, dr$$

In particolare, se $f(x,y) = \varphi(\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{= r})$ $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} f\, d\mathcal{L}^2 = \int_0^{+\infty} 2\pi\, \varphi(r)\, r\, dr$

<u>esercizio</u> $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

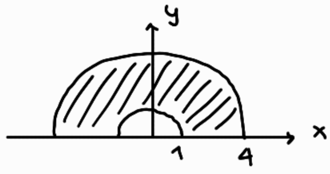
$$\int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{e^{-(x^2+y^2)}}_{= e^{-x^2} e^{-y^2}} dx\,dy = 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2}\, dr = \left[-\pi e^{-r^2}\right]_0^{+\infty} = \pi$$

|| FT

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy}_{= K} \Big)\, dx = \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \right)^2}_{= K^2}$$

Esercizi

1. $\int_C \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, $C := (B_4 \setminus B_1) \cap \{y \geq 0\}$

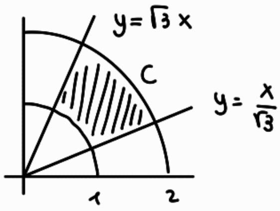


$$\| $$

$$\int_1^4 dr \int_0^\pi \frac{\cancel{r}\sin\theta}{r^{\cancel{2}}}\,\cancel{r}\,d\theta = \int_1^4 2\,dr = 6$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\chi_C = \int_0^{+\infty} dr \int_0^{2\pi} \frac{r\sin\theta}{r^2}\,\chi_A(r,\theta)\; r\,d\theta$$ con $A = \{(r,\theta) \in (1,4)\times(0,\pi)\}$

2. $C = \{(x,y) : 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2,\ \frac{x}{\sqrt3} \leq y \leq \sqrt3\, x\}$

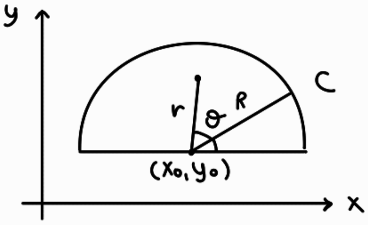


$$\int_C x\,dx\,dy = \int_1^2 dr \int_{\pi/6}^{\pi/3} r\cos\theta\; r\; d\theta$$

$$= \int_1^2 r^2 \left[\sin\theta\right]_{\pi/6}^{\pi/3} dr = \left(\frac{\sqrt3}{2} - \frac12\right)\left(\frac{r^3}{3}\right)_1^2 = \left(\frac{\sqrt3}{2}-\frac12\right)\left(\frac{8-1}{3}\right)$$

$$\int_C y^2\,dx\,dy = \int_1^2 \int_{\pi/6}^{\pi/3} r^2 \underbrace{\sin^2\theta}_{=1-\cos 2\theta}\; r\,d\theta\,dr = \dots = \frac{5}{16}\pi$$

3. $\int_C (ax+by+c)\,dx\,dy$



$F(r,\theta) = (x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta)$

$JF = (\dots) \Rightarrow |\det JF| = r$

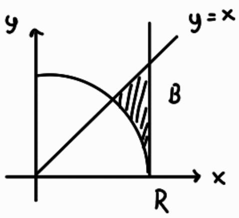
$C = F(A)$, $A = \{(r,\theta) : 0 < r \leq R,\ \theta \in [0,\pi]\}$

$$\int_C (ax+by+c) = \int_0^R dr \int_0^\pi (a(x_0 + r\cos\theta) + b(y_0 + r\sin\theta) + c)\; r\,d\theta$$

$$= \int_0^R r\,dr\left(\pi(ax_0 + by_0 + c) + 0 + 2r\right)dr$$

$$= \frac{\pi R^2}{2}(ax_0 + by_0 + c) + bR^2$$

4. $\int_B \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$



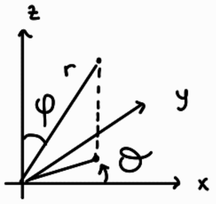
In coord. polari F

$B = F(A)$, $A := \{(r,\theta) : \theta \in (0,\pi/4),\ r \in (R, \frac{R}{\cos\theta})\}$

$$\int_B \frac{x}{x^2+y^2} = \int_A \frac{\cancel{r}\cos\theta}{r^{\cancel{2}}}\,\cancel{r}\,dr\,d\theta = \int_0^\pi d\theta \int_R^{R/\cos\theta} \cos\theta\; dr$$

$$= \int_0^{\pi/4} R(1 - \cos\theta)\,d\theta = R\left(\pi/4 - \frac{1}{\sqrt2}\right)$$

coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$



$$F(r,\theta,\varphi) = (r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\varphi)$$

$$F : \underbrace{(0,+\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi)}_{= A} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

F è diffeomorfismo tra A e $F(A)$

$$\mathcal{L}^3(\mathbb{R}^3 \setminus F(A)) = 0$$

$$\det JF(r,\theta,\varphi) = -r^2\sin\varphi$$

$$JF(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)\, r^2\sin\varphi \;d\varphi\, d\theta\, dr \quad (*)$$

<u>oss</u> se $f(x,y,z) = \psi(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} f = 4\pi \int_0^{+\infty} \psi(r)\, r^2\, dr$

<u>esempio</u> $\mathcal{L}^3(B(0,R)) = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{B(0,R)}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

$$\overset{(*)}{=} 4\pi \int_0^{+\infty} \chi_{(0,R)}(r)\, r^2\, dr = 4\pi \int_0^R r^2\, dr = \frac{4}{3}\pi R^3$$

5. $$\int_{B(0,R)\subseteq\mathbb{R}^3} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

Usiamo le coord. sferiche:

$$= \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi\, (r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)\, r^2\sin\varphi$$

$$= 2\pi \underbrace{\int_0^R r^4\, dr \int_0^{\pi} \overset{\sin\varphi(1-\cos^2\varphi)}{\sin^3\varphi}\, d\varphi} = 2\pi\,\frac{R^5}{5}\left[-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{8}{15}\pi R^5$$

sparisce la dipendenza da θ, dunque posso integrare prima in θ

sarebbe $\int_0^R\int_0^{\pi} r^4\sin^3\varphi\, d\varphi\, dr$

$= \int_0^R \left(\int_0^{\pi} r^4\sin^3\varphi\, d\varphi\right) dr$

$= \int_0^R r^4\left(\int_0^{\pi} \sin^3\varphi\, d\varphi\right) dr$

$\Rightarrow$ viene un vero e proprio prodotto fra integrali

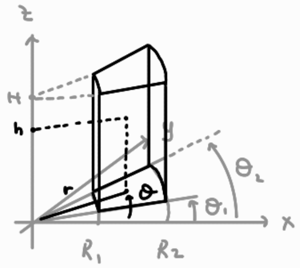
Potevo integrare su metà della sfera:

$$\int_{\{(x,y,z)\in B(0,R)\,:\,z\geq 0\}} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi\,(r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)\,r^2\sin\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^R r^4\,dr \int_0^{\pi/2} \overset{\sin\varphi(1-\cos^2\varphi)}{\sin^3\varphi}\,d\varphi \qquad = 2\pi\,\frac{R^5}{5}\left[-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{15}\pi R^5$$

coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$



$(x,y,z) = F(r,\theta,h) = (r\cos\theta,\, r\sin\theta,\, h)$

$$JF = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \det JF = r$$

è un diffeomorfismo con l'immagine (escludendo opportuni punti) e $\mathcal{L}^3(\mathbb{R}^3 \setminus F(A)) = 0$

$B = F(A)$, dove $A := (R_1 \times R_2) \times (\theta_1,\theta_2) \times (0,H)$

gli integrali si spezzano

$$\Rightarrow \mathcal{L}^3(B) = \int_B 1\,d\mathcal{L}^3 = \int_{R_1}^{R_2} dr \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^H dh \cdot 1 \cdot r = \underbrace{\frac{R_2^2-R_1^2}{2}(\theta_2-\theta_1)}_{\text{area della base}} \cdot \underbrace{H}_{\text{altezza}}$$

oss $\quad R_1 = 0,\ \theta_1 = 0,\ \theta_2 = 2\pi \Rightarrow B$ è il cilindro di raggio R_2 e altezza H

e il suo volume è $\pi R_2^2 H = \mathcal{L}^3(B)$

esempio $\quad$ Cerchiamo il baricentro (x_0, y_0, z_0) di B.

$$x_0 = \frac{1}{\mathcal{L}^3(B)}\int_B x\,d\mathcal{L}^3 = \frac{1}{\mathcal{L}^3(B)}\int_{R_1}^{R_2} dr \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^H dh\, r\cos\theta \cdot r$$

$$= \frac{2}{(R_2^2-R_1^2)(\theta_2-\theta_1)\cancel{H}}\ \frac{R_1^3-R_2^3}{3}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\cancel{H}$$

$$y_0 = \frac{1}{\mathcal{L}^3(B)}\int_B y\,d\mathcal{L}^3 = \frac{1}{\mathcal{L}^3(B)}\int_{R_1}^{R_2} dr \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^H dh\, r\sin\theta \cdot r$$

$$= \frac{2}{(R_2^2-R_1^2)(\theta_2-\theta_1)\cancel{H}}\ \frac{R_1^3-R_2^3}{3}(-\cos\theta_2 + \cos\theta_1)\cancel{H}$$

$$z_0 = \frac{1}{\mathcal{L}^3(B)}\int_B z\,d\mathcal{L}^3 = \int_{R_1}^{R_2} dr \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^H dh\, hr$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{(R_2^2-R_1^2)}\cancel{(\theta_2-\theta_1)}\cancel{H}}\ \frac{\cancel{R_2^2-R_1^2}}{\cancel{2}}\cancel{(\theta_2-\theta_1)}\ \frac{H^{\cancel{2}}}{2} = \frac{H}{2}$$

come ci si aspetta per simmetria

sottinteso : A misurabile

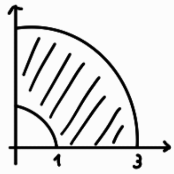
def Il BARICENTRO di $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ definito da

$$\bar{x}_i := \frac{1}{\mathcal{L}^n(A)} \int_A x_i \, d\mathcal{L}^n(x) \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

Il MOMENTO D'INERZIA di A rispetto alla retta r in $\mathbb{R}^n$ è

$$I_r(A) := \int_A (\mathrm{dist}(x,r))^2 \, d\mathcal{L}^n(x)$$

esempio $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 3, \ x,y \geq 0\}$



$$\mathcal{L}^2(A) = \int_A 1 \, dx\,dy = \int_1^3 dr \int_0^{\pi/2} r \, d\vartheta = \frac{\pi}{2} \, \frac{9-1}{2} = 2\pi$$

- Baricentro $(\bar{x}, \bar{y}) = ?$

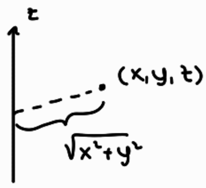
$$\bar{x} = \frac{1}{2\pi} \int_A x \, dx\,dy = \frac{1}{2\pi} \int_1^3 dr \int_0^{\pi/2} d\vartheta \, r^2 \cos\vartheta = \frac{1}{2\pi} \, \frac{3^3-1}{3} = \frac{13}{3\pi}$$

$\bar{y} = \bar{x}$ per motivi di simmetria

- $$I_{\text{asse } y}(A) = \int_A x^2 \, dx\,dy = \int_1^3 dr \int_0^{\pi/2} d\vartheta \, r^2 \overbrace{\cos^2\vartheta}^{\frac{1+\cos 2\vartheta}{2}} \cdot r = \frac{\pi}{4} \, \frac{81-1}{4} = 5\pi$$

l'integrale si spezza

6. $I_{\text{asse } z}(B(0,R)) = ?$ in $\mathbb{R}^3$



$$\int_{B(0,R)} (x^2+y^2) \, dx\,dy\,dz =$$

① $= 2 \int_{B(0,R)} x^2 \, dx$

per ragioni di simmetria

② $= \frac{2}{3} \int_{B(0,R)} x^2+y^2+z^2 \, dx\,dy\,dz = \frac{2}{3} \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} d\varphi \, r^2 r^2 \sin\varphi$

$$= \frac{2}{3} \, \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{8}{15} \pi R^5$$

oss se su A è presente una DENSITÀ DI MASSA $\rho(x)$, allora

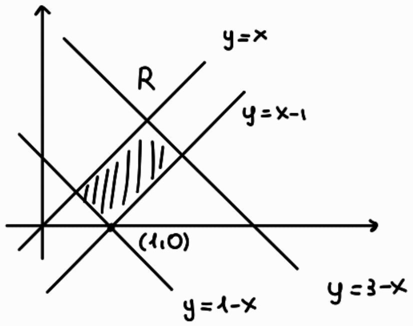
$$I_r(A) = \int_A \rho(x) \, [\mathrm{dist}(x,r)]^2 \, dx$$

esempio $A = B(0,R) \subseteq \mathbb{R}^3$, $\rho = \text{cost} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

$$I_{\text{asse } z}(B(0,R)) = \int_{B(0,R)} \frac{3M}{4\pi R^3} \cdot (x^2+y^2) \, dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{\cancel{3}M}{4\cancel{\pi} \cancel{R^3}} \cdot \frac{\cancel{8}^{\,2}}{\cancel{15}_{\,5}} \cancel{\pi} R^{\cancel{5}\,2} = \frac{2}{5} M R^2$$

7. $\int_R (x-y)\log(x+y)\,dx\,dy$



Osserviamo che $\begin{cases} u = x-y \in [0,1) \\ v = x+y \in [1,3) \end{cases}$ $\forall (x,y)\in R$

Usiamo il cambio di variabile dato da u,v.

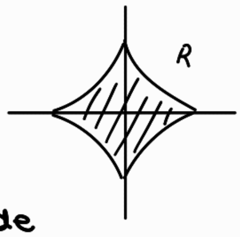
$(x,y) = F(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$

$JF = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $\det JF = \frac{1}{2}$

$R = F(A)$ dove $A = \overset{u\,\in}{[0,1]} \times \overset{v\,\in}{[1,3]}$

$$\int_R (x-y)\log(x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 du \int_1^3 dv\; u\log(v)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(v\log v - v\right]_1^3\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}(3\log 3 - 2)$$

8. $\int_C |xy|\,dx\,dy$, $C = \{(x,y) : x^{2/3} + y^{2/3} \leq R^{2/3}\}$



C è la regione racchiusa dall'asteroide

$(R\cos^3\theta, R\sin^3\theta)$, $\theta\in[0,2\pi]$ è param dell'asteroide

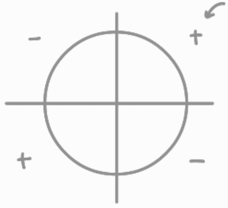
$\Rightarrow C = \{\underbrace{(r\cos^3\theta, r\sin^3\theta)}_{F(r,\theta)} : r\in[0,R],\ \theta\in[0,2\pi]\}$

$C = F([0,R]\times[0,2\pi])$

$JF = \begin{pmatrix} \cos^3 & -3r\cos^2\sin \\ \sin^3 & 3r\sin^2\cos \end{pmatrix}$, $\det JF = 3r(\sin^2\cos^4 + \sin^4\cos^2) = 3r\sin^2\cos^2$

$$\Rightarrow \int_C |xy|\,dx\,dy = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta\, |r^2\cos^3\theta\sin^3\theta| \cdot 3r\sin^2\cos^2$$

$$= \frac{3}{4}R^4 \int_0^{\pi/2} 4\cdot \sin^5\theta\cos^5\theta\,d\theta$$



segno di s^3c^3

$\int_0^{2\pi} |s^3c^3| = 4\int_0^{\pi/2} s^3c^3$

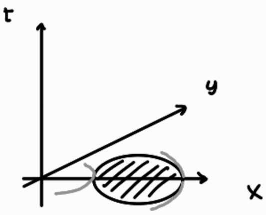
$$= 3R^4 \int_0^{\pi/2} (\sin^5\theta)\cos\theta\,(1-\sin^2\theta)^2\,d\theta$$

$$= 3R^4\left[\frac{\sin^6}{6} - \frac{\sin^8}{8} + \frac{\sin^{10}}{10}\right]_0^{\pi/2} = \frac{R^4}{20}$$

Solidi di rotazione

$E \subseteq \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$

lo ruoto attorno all'asse z e trovo $\tilde{E}$



$F(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ coord. cilindriche

$\tilde{E} = F(A)$, dove $A = \{(r,\theta,z) : (r,z) \in E,\ \theta \in [0,2\pi]\}$

$$\mathcal{L}^3(\tilde{E}) = \int_{\tilde{E}=F(A)} 1 \, d\mathcal{L}^3 = \int_A 1 \, |\det JF| \, dr\,d\theta\,dz$$

$$= \int_E \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \underset{\text{"}x}{r} \, \underset{\text{"}x}{dr} \, dz = 2\pi \int_E x \, dx\,dz$$

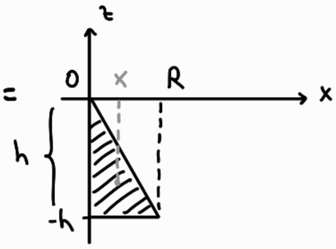
$$= 2\pi \, \mathcal{L}^2(E) \underbrace{\frac{\int_E x\,dx\,dz}{\mathcal{L}^2(E)}}_{\text{è la prima coordinata del baricentro di } E}$$

TEOREMA (Guldino o Pappo-Guldino). $\mathcal{L}^3(\tilde{E}) = 2\pi \, \mathcal{L}^2(E) \cdot (1^a \text{ coord. baricentro di } E)$

oss Ruotando E solo per angoli $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$$\mathcal{L}^3(\dots) = (\theta_2 - \theta_1) \, \mathcal{L}^2(E) \cdot (1^a \text{ coord. baricentro di } E)$$

esempio $E =$



$\tilde{E}$ = cono

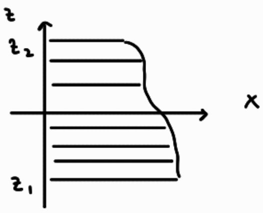
$$\mathcal{L}^3(\tilde{E}) = 2\pi \int_E x\,dx\,dz = 2\pi \int_0^R \left(\int_{-h}^{-\frac{h}{R}x} x \, dz \right) dx$$

$$= 2\pi \int_0^R -h \left(\frac{x^2}{R} - x \right) dx = -2\pi h \left(\frac{R^{\cancel{3}\,2}}{3\cancel{R}} - \frac{R^2}{2} \right) = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

oss se $E = \{(x,z) : z_1 \leq z \leq z_2 \,;\ 0 \leq x \leq f(z)\}$

allora $\mathcal{L}^3(\tilde{E}) = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^{f(z)} x\,dx$

$$= \pi \int_{z_1}^{z_2} f(z)^2 \, dz$$



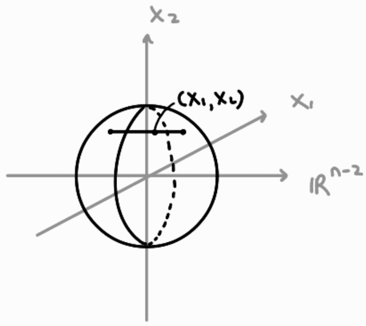
Nel caso del cono: $f(z) = -\frac{R}{h} z$, $z_1 = h$, $z_2 = 0$

$$\mathcal{L}^3(\tilde{E}) = \pi \int_{-h}^{0} \frac{R^2}{h^2} z^2 \, dz = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{\cancel{h^2}} h^{\cancel{3}}$$

Esercizi

1. $\omega_n := \mathcal{L}^n(B(0,1))$. Dimostrare che $\omega_n = \frac{2\pi}{n}\omega_{n-2} \quad \forall n \geq 3$.

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$



$(x_1,x_2) \in D = B_{\mathbb{R}^2}(0,1)$
$\quad\quad \shortparallel$
$\quad\quad B_{\mathbb{R}^n}(0,1) \cap \{(x_1,x_2,0,\dots,0)\}$

$$E_{x_1,x_2} = \{(x_3,\dots,x_n) : (x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) \in B(0,1)\}$$
$$= B_{\mathbb{R}^{n-2}}\left(0, \sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}\right)$$

formula di riduzione:

$$\omega_n = \mathcal{L}^n(B(0,1)) = \int_{\mathbb{R}^2 \leadsto D} \mathcal{L}^{n-2}(E_{x_1,x_2})\, dx_1\, dx_2$$

$$= \int_{D = B_{\mathbb{R}^2}(0,1)} \omega_{n-2} \overbrace{(1-(x_1^2+x_2^2))}^{\text{raggio alla } n-2}{}^{\frac{n-2}{2}}\, dx_1\, dx_2$$

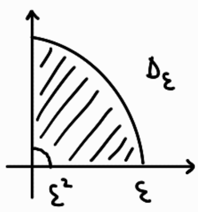
$$= \omega_{n-2} \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta\, (1-r^2)^{\frac{n}{2}-1}\, r$$

$$= 2\pi\, \omega_{n-2} \left[-\frac{(1-r^2)^{\frac{n}{2}}}{n} \right]_0^1 = \frac{2}{n}\pi\, \omega_{n-2}$$

$\omega_1 = 2 \longrightarrow \omega_3 = \frac{4}{3}\pi \longrightarrow \omega_5 = \frac{8\pi^2}{15} \longrightarrow \dots$

$\omega_2 = \pi \longrightarrow \omega_4 = \frac{\pi^2}{2} \longrightarrow \dots$

2. $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \int_{D_\varepsilon} \sin xy \, dx\, dy$



$\underline{\alpha \leq 0}$ il limite è 0:

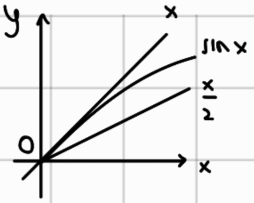
1 se $\alpha = 0$ $= \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \longrightarrow 0$ e $\left| \int_{D_\varepsilon} \sin \right| \leq 1 \cdot \mathcal{L}^n(D_\varepsilon) \longrightarrow 0$

$\underline{\alpha > 0}$ Noto che $0 \overset{\text{se } \varepsilon^2 \leq \pi}{\leq} \sin \underbrace{xy}_{0 \leq \dots \leq \varepsilon^2 \leq \pi} \leq |xy| \overset{\text{sono in } D_\varepsilon}{=} xy$

$$\Rightarrow \int_{D_\varepsilon} \sin xy \, dx dy \leq \int_{D_\varepsilon} xy\, dx\, dy = \int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon} dr \int_0^{\pi/2} d\theta\, r^3 \underbrace{\sin\theta\cos\theta}_{= \frac{\sin 2\theta}{2}} = \frac{1}{2}\, \frac{\varepsilon^4 - \varepsilon^8}{4}$$

<u>conclusione</u> se $\alpha < 4$ il limite è 0

Per ε sufficientemente piccolo



$$\sin xy \geq \frac{xy}{2}$$

$$\int_{D_\varepsilon} \sin xy \geq \frac{1}{2}\int_{D_\varepsilon} xy = \dots = \frac{1}{4}\,\frac{\varepsilon^4 - \varepsilon^8}{4} = \underbrace{\frac{\varepsilon^4}{16}(1-\varepsilon^4)}_{\varepsilon^\alpha}$$

Se $\alpha > 4$, allora il limite è $+\infty$.

Se $\alpha = 4$, il limite è $\frac{1}{8}$, infatti: $\forall \eta > 0$ fissato ho

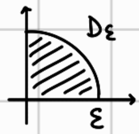
$$\sin xy \geq (1-\eta)\,xy \quad \text{su } D_\varepsilon$$

purché ε sufficientemente piccolo

$$\Rightarrow \quad xy \geq \sin xy \geq (1-\eta)\,xy$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(1-\eta)\int_{D_\varepsilon} xy}_{= (1-\eta)\frac{\varepsilon^4}{8}(1-\varepsilon^4)} \leq \int_{D_\varepsilon} \sin xy \leq \int_{D_\varepsilon} xy = \frac{1}{8}\varepsilon^4(1-\varepsilon^4) \qquad \forall \eta$$

$\Rightarrow$ se $\alpha = 4$ il lim è $\frac{1}{8}$



3. $f(\varepsilon) = \displaystyle\int_{D_\varepsilon} \underbrace{\frac{x^2 y}{x^2+y^2}}_{0 \leq \dots \leq y} (1-\cos xy)\, dx\,dy$

Trovare lo sviluppo di Mac-L. di f di ordine 8.

Usiamo coord. polari

$$f(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \int_0^{\pi/2} \frac{r^{\cancel{3}}\cos^2 \sin}{\cancel{r^2}} \underbrace{(1-\cos(r^2\cos\sin))}_{\frac{(r^2\cos\sin)^2}{2} + o(r^8)}\, r\, d\theta\, dr \qquad 1-\cos t = \frac{t^2}{2} + o(t^4)$$

$$= \int_0^\varepsilon \int_0^{\pi/2} r^2 \sin\cos^2 \cdot \left(\frac{1}{2} r^4 \sin^2\cos^2\right) + \underbrace{o(r^{10})}_{\leq C\varepsilon^{10}}\, dr\, d\theta$$

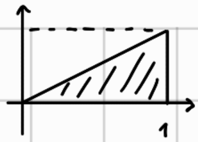
$$= \frac{\varepsilon^7}{14}\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^3\cos^4}_{\sin(1-\cos^2)\cos^4} + o(\varepsilon^{11})$$

$$= \frac{\varepsilon^7}{14}\left[-\frac{\cos^5}{5} + \frac{\cos^7}{7}\right]_0^{\pi/2} + o(\varepsilon^{11})$$

$$= \frac{\varepsilon^7}{14}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + o(\varepsilon^{11})$$

<u>oss</u> Nell'esercizio precedente si poteva usare uno sviluppo $\int_{D_\varepsilon} \underbrace{\sin xy}_{= xy + o((xy)^3)}\, dx\,dy$

4. $a_n := \int_{D_n} e^{xy} \arctan(x+y)\, dx\,dy$



- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, infatti: $0 \le a_n \le \int_{D_n} e^1 \frac{\pi}{2} \le C\mathcal{L}^2(D_n) \le \frac{C}{n}$

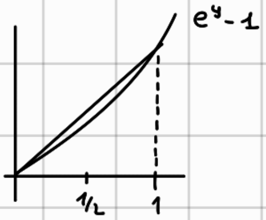
- $\sum_n a_n = ?$

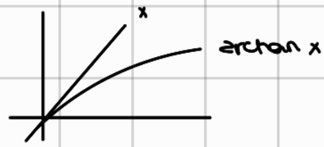
La stima appena fatta non ci basta. Osserviamo che e^{xy} non dà grandi contributi ($1 \le e^{xy} \le e$).

$$\int_{D_n} e^{xy} \arctan(x+y) \ge \int_{D_n'} \underbrace{e^0 \arctan(1/2)}_{c}$$

$$\ge c\mathcal{L}^2(D_n') \ge c\mathcal{L}^2(D_n'') = c\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n}$$

5. $a_n = \int_{D_n} (e^y - 1) \arctan xy\, dx\,dy$, D_n = quello sopra





■ $\left.\begin{array}{l} 0 \le e^y - 1 \le 100y \\ 0 \le \arctan xy \le xy \end{array}\right\} \forall (x,y) \in D_n$

$\Rightarrow a_n \le \int_{D_n} 100xy^2 \le 100 \cdot 1 \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2n}$

$\Rightarrow a_n \longrightarrow 0$ e $\sum_n a_n < \infty$

■ $\exists ?\, c$ t.c. $\left(a_n - \frac{c}{n^3}\right) n^4$ sia limit.?

$a_n = \frac{c}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \rightsquigarrow n^4\left(a_n - \frac{c}{n^3}\right) = O(1)$

Unica possibilità: se c esiste, allora $c = \lim_{n\to\infty} a_n n^3$

<u>oss</u> $\underset{\sim y}{e^y - 1}\ \underset{\sim x}{\arctan xy} \sim xy^2$

$\forall\, \varepsilon > 0$ fissato, per n suff. grande

$$(1-\varepsilon)xy^2 \le (e^y - 1)\arctan(xy) \le (1+\varepsilon)xy^2 \quad \forall (x,y) \in D_n$$

$\Rightarrow (1-\varepsilon)\int_{D_n} xy^2 \le a_n \le (1+\varepsilon)\int_{D_n} xy^2$

$\int_{D_n} xy\, dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{x/n} xy^2\, dy\, dx = \int_0^1 x\, \frac{1}{3}\left(\frac{x}{n}\right)^3 dx = \frac{1}{15n^3}$

$\Rightarrow c = \lim_{n\to\infty} a_n n^3 = \frac{1}{15}$

$$a_n - \frac{1}{15n^3} = \int_{D_n} \left[(e^y - 1) \arctan xy - xy^2 \right) dx\,dy = \dots = \frac{k}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

■ Con Taylor si trova che $\left(a_n - \frac{c}{n^3}\right) n^4$ è limitata e, anzi, ammette limite.

Vediamolo:

$$a_n - \frac{1}{15n^3} = \int_{D_n} \left[(e^y - 1) \arctan xy - xy^2 \right] dx\,dy =$$

$$= \int_{D_n} \left(y + \frac{y^2}{2} + O(y^3)\right)\left(xy + O((xy)^3)\right) - xy^2 \,] =$$

$$= \int_{D_n} \cancel{xy^2} + O(x^3y^4) + \frac{xy^2}{2} + O(x^3y^5) + O(x^3y^6) - \cancel{xy^2}$$

$0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1/n \Rightarrow O\left(\frac{1}{n^4}\right)$

$$= \int_0^1 \int_0^{x_n} \left[\frac{xy^3}{2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right] dy \quad dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^5}{8n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \quad dx = \frac{1}{48n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{15n^3} + \frac{1}{48n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \left(a_n - \frac{1}{15n^3}\right) n^4 = \frac{1}{48}$$

6. Trovare α tc $\displaystyle\int_{B(0,1)} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} \,dx\,dy < \infty$

Oss $\alpha > 0$, la funzione non è limitata

Usiamo coord. polari $\{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$$= \int \frac{1}{r^\alpha}\, r \,dr\,d\theta$$

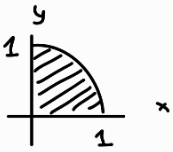
$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{\alpha-1}} \,d\theta\,dr = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha-1}} \,dr = 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{r^{\alpha-1}} \,dr$$

è convergente se $\alpha < 2$ $\quad (\alpha - 1 < 1)$

è divergente se $\alpha \geq 2$

esercizio $\displaystyle\int_{B(0,1)\subseteq\mathbb{R}^3} \frac{1}{\|(x,y,z)\|^\alpha} \,dx\,dy\,dz$ è conv. se $\alpha < 3$

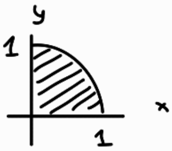
è divergente se $\alpha \geq 3$

7. $\int_D \frac{1}{xy+x^4+y^4}\,dx\,dy$ $\quad D =$ 

≥ 0 sempre $\Rightarrow$ è $\mathcal{L}^1$ $\Rightarrow$ è integrabile secondo Lebesgue

$$\geq \int_D \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{2}+x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_D \frac{2}{3(x^2+y^2)} = \frac{1}{4}\int_{B(0,1)} \frac{2}{3}\,\frac{1}{x^2+y^2} = +\infty \quad \text{(esercizio precedente)}$$

8. $\int_D \frac{\sin(x+y)}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ $\quad D =$ 

$$\leq \int_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy \leq \int_D \frac{2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}}{x^2+y^2} \leq \int_{B(0,1)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy < \infty \quad (\alpha = 1)$$

9. $\int_{\mathbb{R}^2\setminus B(0,1)} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}\,dx\,dy = \int_1^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^\alpha}\, r\, d\theta\, dr$

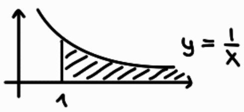
$$= 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{r^{\alpha-1}}\,dr$$

conv. se $\alpha-1>1 \Rightarrow \alpha>2$

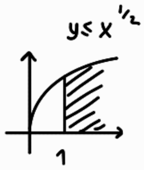
div. se $\alpha \leq 2$

esercizio $\quad \int_{\mathbb{R}^3\setminus B(0,1)} \frac{1}{\|(x,y,z)\|^\alpha}\,dx\,dy\,dz$ è conv. se $\alpha>3$

è div. se $\alpha \leq 3$

10. $\int_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ $\quad D =$ 

$$\int_1^\infty \int_0^{1/x} \frac{1}{x^2+y^2}\,dy\,dx \leq \int_1^\infty \int_0^{1/x} \frac{1}{x^2}\,dy\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx < \infty$$

Generalizziamo: $\int_{D_\alpha} \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, $\quad D_\alpha := \{(x,y) : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq x^\alpha\}$ 

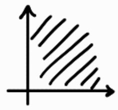
$$\leq \int_1^\infty dx \int_0^{x^\alpha} \frac{1}{x^2}\,dy = \int_1^\infty \frac{1}{x^{2-\alpha}}\,dx \quad \text{è conv. se } \alpha<1$$

Cosa succede per $\alpha \geq 1$?

oss $\quad D_\alpha \supseteq D_1 \quad \forall \alpha \geq 1 \Rightarrow \int_{D_\alpha} \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy \geq \int_{D_1} \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy = (*)$

$$(*) = \int_1^\infty dx \underbrace{\int_0^x \frac{1}{x^2+y^2}\,dy}_{\substack{y\leq x \\ \Rightarrow x \text{ determina} \\ \text{l'ordine}}} \geq \int_1^\infty \int_0^x \frac{1}{2x^2}\,dy\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{2x}\,dx = +\infty$$

11. $\displaystyle\int_D \underbrace{\frac{x}{\sqrt{xy}+x^4+y^4}}_{>0 \text{ su } D}\,dx\,dy \qquad D = \{x \geq 0,\ y \geq 0\}$



È conv.? Devo verificare che $\int_{D\cap B(0,1)}$ e $\int_{D\setminus B(0,1)}$ sono conv.

$$\int_{D\cap B(0,1)} \frac{x}{\sqrt{xy}+x^4+y^4} \leq \int_{D\cap B(0,1)} \frac{x}{\sqrt{xy}} \leq \int_{D\cap[-1,1]^2 = [0,1]^2} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

$$\leq \int_0^1\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\,dy\,dx < \infty$$

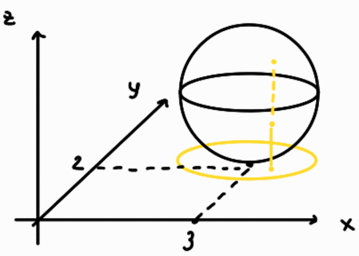
$$\int_{D\setminus B(0,1)} \frac{x}{\sqrt{xy}+x^4+y^4} \leq \int_{D\setminus B(0,1)} \frac{x}{x^4+y^4}\,dx\,dy$$

passiamo in polari: $\displaystyle = \int_1^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r\cos\theta}{r^4\underbrace{(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}_{\substack{\geq c>0 \\ \text{(periodica e non si annulla mai)}}}}\, r\,d\theta\,dr$

$$\leq c\int_1^\infty \frac{1}{r^2}\,dr < \infty$$

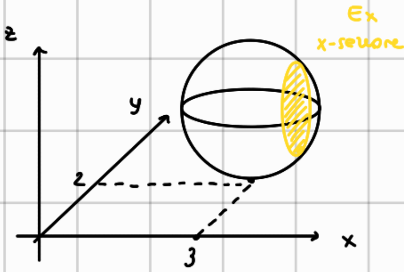
esercizio $\quad \displaystyle\int_D \frac{|\sin x^2 y|}{x^4+y^4}\,dx\,dy \quad D = \{x \geq 0,\ y \geq 0\}$ è finito

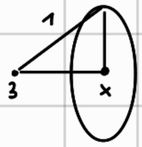
12. $E = B((3,2,1),1) \subseteq \mathbb{R}^3$



$$\int_E x^2\,d\mathcal{L}^3 = \int_{B((3,2),1)\subseteq \mathbb{R}^2_{xy}} \int_{1-\sqrt{1-\|(x,y)-(3,2)\|^2}}^{1+\sqrt{1-\|(x,y)-(3,2)\|^2}} x^2\,dz\,dx\,dy$$

$$= \int_2^4 dx \int_{2-\sqrt{1-(x-3)^2}}^{2+\sqrt{1-(x+3)^2}} dy \int_{1-\sqrt{\dots}}^{1+\sqrt{\dots}} x^2\,dz = \dots$$

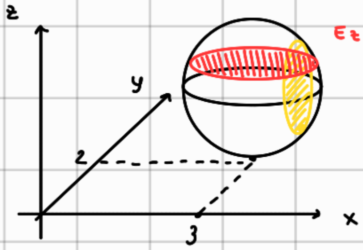




$$\int_E x^2 d\mathcal{L}^3 = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{E_x} x^2 dy\, dz = \int_2^4 x^2 \mathcal{L}^2(\underbrace{E_x}_{B((2,1),\sqrt{1-(x-3)^2})})\, dx$$

$$= \int_2^4 x^2 \pi (1-(x-3)^2)\, dx = \dots$$ (molto più facile!)

13. $\int_E z^{2024}\, d\mathcal{L}^3$ $\qquad E =$ es. precedente

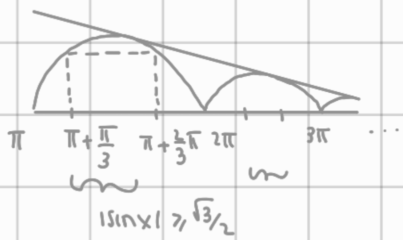


$$= \int_{\mathbb{R}} dz \int_{E_z} z^{2024} dx dy = \int_0^2 z^{2024} \mathcal{L}^2(\underbrace{E_z}_{B((3,2),\sqrt{1-(z-1)^2})})\, dz$$

$$= \int_0^2 z^{2024}\, \pi(1-(z-1)^2)\, dz$$

14. $\frac{\sin x}{x} \notin L^1((0,\infty))$, infatti $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$

OSS



$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} \geq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{j\pi+\frac{\pi}{3}}^{j\pi+\frac{2}{3}\pi} \frac{\sqrt{3}/2}{x} dx \geq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{j\pi+\frac{\pi}{3}}^{j\pi+\frac{2}{3}\pi} \frac{\sqrt{3}}{2(j\pi+\frac{2}{3}\pi)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\pi}{3} \frac{\sqrt{3}}{2(j+1)\pi} = +\infty$$

Però questo integrale è definito come $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^n \left(\int_0^\infty \sin x\, e^{-tx} dt\right) dx =$$

$\sin x\, e^{-tx} \in L^1((0,n)\times(0,\infty))$, infatti: $\int_{(0,n)\times(0,\infty)} |\sin x|\, e^{-tx}\, d\mathcal{L}^2(t,x) < \infty$

$$\overset{F.T.}{=} \int_0^\infty \left(\int_0^n \sin x\; e^{-tx} dx\right) dt$$

$$\int_0^n \sin x\, e^{-tx}\,dx = \left[-\cos x\, e^{-tx}\right]_0^n - t\int_0^n \cos x\, e^{-tx}\,dx$$

$$= \left[-\cos x\, e^{-tx}\right]_0^n - t\left[\sin x\, e^{-tx}\right]_0^n - t^2\int_0^n \sin x\, e^{-tx}\,dx$$

$$\Rightarrow (1+t^2)\int_0^n \sin x\, e^{-tx}\,dx = [\dots]_0^n - t[\dots]_0^n$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{\frac{1}{1+t^2}\left(e^{-nt}(-\cos n - t\sin n) + 1\right)}\,dt$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1+t^2} \text{ puntualmente } (\forall t)$$

servirebbe la convergenza uniforme oppure il teorema di convergenza dominata:

$$|\dots| \le \frac{e^{-t}(1+t)+1}{1+t^2} \in L^1(0,\infty)$$

Ma allora posso passare il limite sotto il segno di integrale!

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{\sin x}{x} = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\left(e^{-nt}(\dots)+1\right)\,dt$$

$$\overset{\text{C.D.}}{=} \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

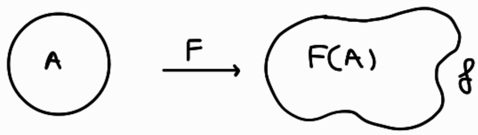
Teoremi finali della lezione

TEOREMA (Riemann vs Lebesgue). $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ limitata. Allora f è Riemann-integrabile se e solo se f è continua quasi-ovunque in $[a,b]$.

Inoltre, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\mathcal{L}^1$.

TEOREMA (cambio di variabile). $A\subseteq\mathbb{R}^n$ aperto, F diffeo C^1 tra A e $F(A)\subseteq\mathbb{R}^n$, $f\in L^1(F(A))$. Allora $f\circ F\,|\det JF|\in L^1(A)$ e

$$\int_{F(A)} f(y)\,dy = \int_A f(F(x))\,|\det JF(x)|\,dx$$



TEOREMA (Radon-Nykodym). $\mu:\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\longrightarrow[0,+\infty)$ misura tc

(i) μ è ASSOLUTAMENTE CONTINUA rispetto a $\mathcal{L}^n$ ($\mu<<\mathcal{L}^n$), cioè $\forall\, B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tc $\mathcal{L}^n(B)=0$ vale $\mu(B)=0$

(ii) per $\mathcal{L}^n$-q.o. $x\in\mathbb{R}^n$ esiste

$$\delta(x):=\lim_{r\to0^+}\frac{\mu(B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))}$$

detta DENSITÀ di μ rispetto a $\mathcal{L}^n$

Allora δ è integrabile sui compatti di $\mathbb{R}^n$ ($\delta\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$) e

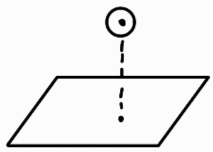
$$\mu(B)=\int_B \delta(x)\,d\mathcal{L}^n(x)$$

Oss 1 (ii) non serve: in realtà μ assolutamente continua, implica che la densità esiste

Oss 2 Si usa $\frac{d\mu}{d\mathcal{L}^n}(x)$ per il lim in (ii)

Oss 3 /es $\mathbb{R}^3=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$, $\mu=$ misura "ovvia" su $\underset{\mathbb{R}^2}{\cong}\mathbb{R}^2\times\{0\}$

$\mu(A)=\mathcal{L}^2(A\cap(\mathbb{R}^2\times\{0\}))$



Allora $\frac{d\mu}{d\mathcal{L}^n}(x)=\lim_{r\to0^+}\frac{\mu(B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))}=0 \quad \forall\, x\notin\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$

$\Rightarrow \delta(x)=0$ per $\mathcal{L}^3$-q.o. $x\in\mathbb{R}^3$

Radon-Nykodym direbbe $\mu=0$, ma $\mu\neq0$. Non posso applicarlo perché non è verificata l'ipotesi che $\mu<<\mathcal{L}^3$: $\mathcal{L}^3(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})=0$, ma $\mu(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})=\infty$

<u>esercizio</u> $F:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitziana. $L := \mathcal{L}ip(F)$. Allora $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}^d(F(A)) \leq L^d \mathcal{H}^d(A)$$

<u>ricordo</u> $\delta > 0$

$$\mathcal{H}^d_\delta(A) := \inf \left\{ \omega_d \sum_k \left(\frac{\operatorname{diam} E_k}{2}\right)^d : E_k \subseteq \mathbb{R}^n, \operatorname{diam} E_k < \delta, A \subseteq \bigcup_k E_k \right\}$$

- (è monotona decrescente in δ)
- $\mathcal{H}^d(A) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^d_\delta(A)$
- $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$

$$\mathcal{H}^d_{L\delta}(F(A)) \leq \inf\left\{ \omega_d \sum_k \left(\frac{\operatorname{diam} F(E_k)}{2}\right)^d : E_k \subseteq \mathbb{R}^n, \bigcup_k E_k \supseteq A, \operatorname{diam} E_k \leq \delta \right\}$$

se $\bigcup_k E_k \supseteq A$, allora $\bigcup_k F(E_k) \supseteq F(A)$

$\operatorname{diam} E_k \leq \delta \implies \operatorname{diam} F(E_k) \leq L \operatorname{diam} E_k \leq L\delta$

$$\leq \inf\left\{ \omega_d \sum_k \left(\frac{L \operatorname{diam} E_k}{2}\right)^d : \dots \right\} = L^d \mathcal{H}^d_\delta(A)$$

Per $\delta \to 0^+$ $\mathcal{H}^d(F(A)) \leq L^d \mathcal{H}^d(A)$. $\square$

<u>dim</u> (cambio variabile).

Posso supporre $f = 1$ e $\mathcal{L}^n(F(A)) < \infty$

Perché? Se è vero per $f=1$, allora il teorema vale per

$f = \chi_\Omega$ $\forall\, \Omega$ aperto t.c. $\bar{\Omega}$ compatto $\subseteq A$ (in modo che poi F li manda in compatti $\Rightarrow$ limitati $\Rightarrow$ hanno misura finita)

$\Rightarrow$ vale per $f = \chi_B$ $\forall\, B$ misurabile con $\bar{B}$ compatto $\subseteq A$

(regolarità: posso approssimare la misura di B dall'alto con gli Ω)

$\Rightarrow$ vale per $f = \chi_B$ $\forall\, B$ misurabile

$\Rightarrow$ vale per $f = \sum_{k=0}^\infty \alpha_k \chi_{B_k}$, B_k misurabili, $\alpha_k \geq 0$

(vale per somme finite, con convergenza dominata si ha che vale per somme infinite)

(ogni $f \geq 0$ si poteva rappresentare in questo modo)

$\Rightarrow$ vale $\forall f \geq 0$ $\left(\rightsquigarrow f = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}\chi_{A_k}\right)$

$\Rightarrow$ vale $\forall f \in L^1$ $(f = f^+ - f^-)$.

Devo dim. $\mathcal{L}^n(F(A)) = \int_A \underbrace{1}_{f(F(x))=1} \cdot |\det JF(x)|\, dx$ (FORMULA DELL'AREA)

Definiamo $\mu(B) := \mathcal{L}^n(F(B))$, $B \in \mathcal{B}(A) = \{B \text{ Borel}, B \subseteq A\}$. μ è misura finita

sulla σ-algebra $\mathcal{B}(A)$. È suff. dim

(i) $\mu \ll \mathcal{L}^n$

(ii) $\forall x_0 \in A$ $\lim_{r\to 0^+} \frac{\mu(B(x_0,r))}{\mathcal{L}^n(B(x_0,r))} = |\det JF(x_0)|$

$$\text{Se questo è vero} \quad \overset{RN}{\Longrightarrow} \quad \overset{\mathcal{L}^n(F(B))}{\overset{\shortparallel}{\mu(B)}} = \int_B |\det JF(x)|\,dx$$

(i) Sia $B \in \mathcal{B}(A)$ e $\mathcal{L}^n(B) = 0$ $\quad (\overset{?}{\Longrightarrow} \mu(B) = 0)$

$$\mu(B) = \mathcal{L}^n(F(B)) = \sup\{\underset{\mathcal{H}^n(K) \,=\, \mathcal{H}^n(F(\underbrace{F^{-1}(K)}_{\overset{\shortparallel}{H \subseteq B \text{ è compatto}}}))}{\underset{\shortparallel}{\mathcal{L}^n(K)}} : K \subseteq F(B) \text{ compatti}\}$$

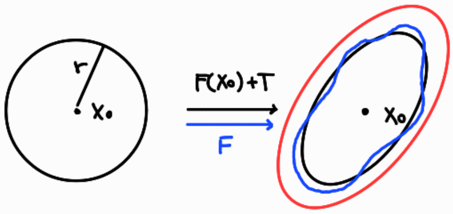
$$\leq \sup\{\mathcal{H}^n(F(H)) : H \subseteq B \text{ compatto}\}$$

$$\leq \sup\{L^n \mathcal{H}^n(H) : H \subseteq B \text{ compatto}\}$$

$$\leq \sup\{(\underset{\exists \text{ perché } H \text{ compatto}}{\mathrm{Lip}\, F|_H})^n \underbrace{\mathcal{H}^n(H)}_{\leq \mathcal{H}^n(B) = \mathcal{L}^n(B) = 0} : H \subseteq B \text{ cpt}\} = 0$$

(ii) $x_0 \in A$ fissato, $T := JF_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ invertibile

■ Dico che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists r_0 > 0$ tc $\forall r \in (0, r_0)$ $\quad F(B_r(x_0)) \subseteq F(x_0) + T(B_{(1+\varepsilon)r}(0))$ (*)



sto dicendo che comunque l'immagine è contenuta in un ellissoide un attimo più grande

$$F(x) = F(x_0) + T(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

$$= F(x_0) + T((x - x_0) + \underbrace{T^{-1} o(|x - x_0|)}_{|\cdot| \,\leq\, \|T^{-1}\| \, |o(|x - x_0|)| \,<\, \varepsilon |x - x_0|})$$

$\uparrow$ $\forall x$ tc $|x - x_0| < r_0 = r_0(\varepsilon)$

Se $x \in B_r(x_0)$ e $r < r_0$, allora $\underbrace{x - x_0}_{\leq r} + \underbrace{T^{-1} o(|x - x_0|)}_{\leq \varepsilon |x - x_0| < \varepsilon r} \in B(0, (1+\varepsilon)r)$

cioè $F(x) = F(x_0) + T$(un qualche punto di $B(0, (1+\varepsilon)r)$), che è (*)

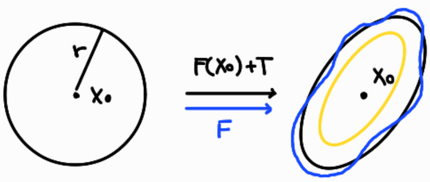
■ $\mu(B(x_0, r)) \overset{\forall r \in (0, r_0)}{=} \mathcal{L}^n(F(B(x_0, r))) \leq \mathcal{L}^n(\cancel{F(x_0)} + T(B_{(1+\varepsilon)r}(0)))$ perché è una traslazione

$$= |\det T| \, \mathcal{L}^n(B_{(1+\varepsilon)r}(0))$$

$$= |\det T| \, (1+\varepsilon)^n \, \mathcal{L}^n(B_r(x_0))$$

$$\Longrightarrow \quad \limsup_{r \to 0} \frac{\mu(B(x_0, r))}{\mathcal{L}^n(B(x_0, r))} \leq \underset{\uparrow \text{ per arbitrarietà di } \varepsilon}{\cancel{(1+\varepsilon)^n}} |\det T| \qquad \forall \varepsilon > 0$$

■ Dico che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists r_0 > 0$ tc $\forall r \in (0, r_0)$ $\quad F(B_r(x_0)) \supseteq F(x_0) + T(B_{(1-\varepsilon)r}(0))$



È esattamente la dimostrazione del teorema di invertibilità locale!

Analogamente e prima riga:

$$\mu(B(x_0,r)) \overset{\forall r \in (0,r_0)}{=} \mathcal{L}^n(F(B(x_0,r))) \geq \mathcal{L}^n(\cancel{F(x_0)} + T(B_{(1-\varepsilon)r}(0)))$$

$$= |\det T| \, \mathcal{L}^n(B_{(1-\varepsilon)r}(0))$$

$$= |\det T| (1-\varepsilon)^n \mathcal{L}^n(B_r(x_0))$$

$$\Rightarrow \quad \liminf_{r\to 0} \frac{\mu(B(x_0,r))}{\mathcal{L}^n(B(x_0,r))} \geq (\cancel{1-\varepsilon})^n |\det T| \qquad \forall \varepsilon > 0$$

e questo permette di concludere (ii).

<u>ricordo</u> Fisso $y \in F(x_0) + T(B_{(1-\varepsilon)r}(0))$, cioè

$$|T^{-1}(y - F(x_0))| \leq (1-\varepsilon) r$$

voglio $x \in B(x_0,r)$ tc $F(x) = y$.

Definisco $G(x) = x + T^{-1}(y - F(x))$ e dimostro che G è una contrazione di $B(x_0,r)$ in sé (perché $r < r_0$ $\exists r_0$).

$\Rightarrow \exists \; \bar{x} \in B(x_0,r)$ punto fisso per G

$\Rightarrow \bar{x} = G(\bar{x}) = \bar{x} + T^{-1}(y - F(\bar{x})) \Rightarrow \dots \Rightarrow F(\bar{x}) = y.$ $\square$