SPAZI METRICI E SPAZI NORMATI

Definizione

def Una coppia (X, d) con X un insieme, $d: X \times X \to [0, \infty)$ una funzione si dice **SPAZIO METRICO** se si verifica:

i) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \iff x = y$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (simmetria)

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall\, x,y,z \in X$ (disuguaglianza triangolare)

esempio

1) $X = \mathbb{R}$ $\quad d(x,y) = |x-y|$ è SM

2) $X = \mathbb{C}$ $\quad d(z,w) = |z-w|$ è SM

3) $X = \mathbb{R}$ $\quad d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ è SM → verificalo

4) $X = \mathbb{R}^n$ $\quad d(x,y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$ è SM (euclideo)

5) X insieme qualsiasi

sia $d: X \times X \to [0, \infty)$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

è SM (discreto).

oss Se (X,d) è uno SM e $Y \subset X$ allora (Y, d) è uno SM.

def Sia (X,d) uno SM. Per $x_0 \in X$ e $r > 0$ fissati definiamo

$$B(x_0, r) = B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\} \subset X$$

la **PALLA** centrata in x_0 di raggio r.

Sullo spazio metrico ristretto (Y,d) avremo: $B_Y(y_0, r) = B_X(y_0, r) \cap Y$

$\mathbb{R}^n$ con dist. euclidea

Indichiamo con $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

Definiamo $|\cdot| : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$

$$|x| \mapsto \sqrt{\langle x,x\rangle} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

So che vale la disuguaglianza di CS : $\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$

$$|\langle x,y\rangle| \le |x|\,|y|$$

<u>Lemma</u> Per ogni $x,y\in\mathbb{R}^n$, $n\ge 1$, vale la subadditività della norma Euclidea:

$$|x+y| \le |x| + |y|$$

<u>dim</u> $|x+y|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$

$$= |x|^2 + 2\langle x,y\rangle + |y|^2$$

$$\overset{CS}{\le} |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$$

$$\le (|x| + |y|)^2$$

$$\Rightarrow \quad |x+y| \le |x| + |y| \qquad \square$$

Ora su $\mathbb{R}^n$ definiamo

$$d(x,y) = |x-y| \qquad x,y \in \mathbb{R}^n$$

Affermo che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno SM: verifichiamolo.

i) $d(x,y) \ge 0$ e $d(x,y) = 0 \iff x = y$ ✓

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ ✓

iii) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}^n$ ✓

$d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \le |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y)$

Spazi normati

def Una coppia $(V, \|\cdot\|)$ è uno SPAZIO NORMATO se V è uno sp. vett. (su $\mathbb{R}$) e $\|\cdot\|: V \to [0, \infty)$ è una funzione (detta NORMA) che verifica:

i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V \quad$ e $\quad \|x\| = 0 \iff x = 0$

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (positiva omogeneità della norma)

iii) $\forall x, y \in V$ vale

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(subadditività della norma)

oss Sia $(V, \|\cdot\|)$ spazio normato posso definire $d: V \times V \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = \|x - y\| \qquad x, y \in V$$

Allora (V, d) è SM

Convergenza in SM

Sia (X, d) uno SM. Consideriamo $x: \mathbb{N} \to X$

$$x(k) = x_k \in X \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Potremmo indicarla $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Dato $x_\infty \in X$ diremo che

$$x_k \xrightarrow[k \to \infty]{(X, d)} x_\infty$$

se e solo se

$$\lim_{k \to \infty} d(x_k, x_\infty) = 0$$

Potremmo anche scrivere

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x_\infty$$

oss Su $\mathbb{R}^n$ fissiamo la distanza standard. Sia $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di punti $x_k \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$. Avremo che

$$x_k \xrightarrow[k \to \infty]{(\mathbb{R}^n, d)} x_\infty \in \mathbb{R}^n \quad (\iff |x_k - x_\infty| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0)$$

se e solo se

coordinata i-esima di x_k

$$\forall i = 1, \dots, n \qquad x_k^i \longrightarrow x_\infty^i$$

Esempio

$V = C([0,1])$ è uno SV. Definiamo $\|\cdot\|_\infty : V \to [0,\infty)$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

$(V, \|\cdot\|)$ è SN.

Sia $d_\infty(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.

convergenza uniforme!

Allora $f_n^{\in V} \xrightarrow[n\to\infty]{d_\infty} f^{\in V} \iff f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$

Esercizi

esercizio Sia $\ell^\infty(\mathbb{R}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N} \text{ tc } \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty\}$.

È sp. vett. Sia $\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$

$$\|a_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

Provare che $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ è uno SN.

esercizio Siano $a_1,\dots,a_n > 0$. Provare che $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2$.

Considero i vettori di $\mathbb{R}^n$

$$x = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n}) \in \mathbb{R}^n$$

$$y = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) \in \mathbb{R}^n$$

Uso la dis. di CS

$$\langle x, y\rangle \leq |x|\cdot|y|$$

$$n = \sum_{i=1}^n \cancel{a_i}\cdot\frac{1}{\cancel{a_i}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)^{1/2}$$

TOPOLOGIA DI UNO SPAZIO METRICO

Sia (X,d) uno SM.

def Sia $A \subset X$.

i) Diciamo che $x \in X$ è un P.TO INTERNO di A se $\exists\, r>0$ tc $B_r(x) \subset A$. L'INTERNO di A è

$$\text{int}(A) = \mathring{A} = \{x \in X : \exists\, r>0 \text{ tc } B_r(x) \subset A\}.$$

oss $\text{int}(A) \subset A$

ii) Diciamo che A è un INSIEME APERTO se $\text{int}(A) = A$ ($\Leftrightarrow$ tutti i suoi punti sono interni).

Indichiamo $\tau(X) = \{A \subset X : A \text{ è aperto}\} \subset \mathcal{P}(X)$, detta TOPOLOGIA di X.

def Sia $A \subset X$.

i) Diremo che $x \in X$ è un P.TO DI CHIUSURA di A se $\forall r>0$ si ha che $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$

Definiamo la CHIUSURA di A come

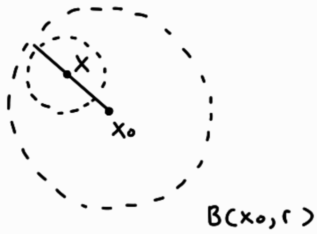
$$\overline{A} = \{x \in X : x \text{ p.to di chiusura di } A\}$$

oss $A \subset \overline{A}$

ii) Diremo che $A \subset X$ è INSIEME CHIUSO se $A = \overline{A}$ ($\Leftrightarrow$ tutti i punti di chiusura sono contenuti in A).

prop (X,d) SM, $x_0 \in X$, $r>0$. Allora $B(x_0,r) \subset X$ è aperto.

dim Sia $x \in B(x_0,r)$ e provo che è punto interno: cerco $s>0$ tc $B(x,s) \subset B(x_0,r)$.



Provo a scegliere $0<s<r-d(x,x_0)$.

Voglio verificare che $B(x,s) \subset B(x_0,r)$.

Sia $y \in B(x,s) \Leftrightarrow d(y,x)<s$

Stimo $d(y,x_0) \leq d(y,x) + d(x,x_0) < s + d(x,x_0) < r$ $\square$

prop (X,d) SM e sia $A \subset X$. Allora A è aperto $\iff \underset{C}{\underset{\parallel}{X \setminus A}}$ è chiuso.

dim A aperto $\iff A = \mathrm{int}(A)$

$\iff A = \{x \in X : \exists r>0 \text{ tc } B(x,r) \subset A\}$

$\iff X \setminus A = \{x \in X : \nexists r>0 \text{ tc } B(x,r) \subset A\}$

$\iff X \setminus A = \{x \in X : \forall r>0 \ \ B(x,r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}$

$\iff C = \{x \in X : \forall r>0 \ \ B(x,r) \cap C \neq \emptyset\}$

$\iff C = \overline{C}$

$\iff C$ è chiuso $\square$

def Sia $A \subset X$ SM. Definiamo la **FRONTIERA** di A come

$\partial A = \{x \in X : \forall r>0 \text{ si ha } B(x,r) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B(x,r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\} = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$

esercizio sia $X \in \mathbb{R}^2$ con distanza standard. Consideriamo $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$

1) A è aperto ✓

2) $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ ✓

3) $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ ✓

TEOREMA Sia (X,d) SM con topologia $\mathcal{T}(X) \subset \mathcal{P}(X)$. Allora

A1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}(X)$

A2) $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{T}(X) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}(X)$

A3) se $A_\alpha \in \mathcal{T}(X)$ $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ $\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \in \mathcal{T}(X)$

dim A2) $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \iff x \in \underset{\text{aperto}}{A_i} \ \forall i = 1, \dots, n$

$\iff \underset{i=1,\dots,n}{\exists r_i > 0} : B(x, r_i) \subset A_i$

sia allora $r = \min\{r_1, \dots, r_n\} > 0$.

Avremo $B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ $\square$

esempio $X = \mathbb{R}^2$

$A_k = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 + \frac{1}{k}\}$ aperti $\forall k \in \mathbb{N}$

$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$ non è aperto (è chiuso).

oss (X,d) SM. Allora

1) X e $\emptyset$ sono chiusi

2) $C_1,\dots,C_n \in X$ sono chiusi $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} C_i \subset X$ chiuso

3) C_α chiusi $\forall \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} C_\alpha \subset X$ chiuso

Funzioni continue fra SM

Siano (X,d_x) e (Y,d_y) SM. Consideriamo $f: \underset{\substack{\cup\\ x_0}}{X} \longrightarrow Y$

def Diciamo che $f: X\to Y$ è CONTINUA nel punto $x_0\in X$ se $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ tc

$$d_x(x,x_0)<\delta \Rightarrow d_y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$$

Diremo che f è continua da X in Y se è continua in ogni $x_0\in X$.

def Sia poi $y_0\in Y$. Diciamo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$$

se e solo se $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\forall x\in X$ si ha che

$$0<d_x(x,x_0)<\delta \Rightarrow d_y(f(x),y_0)<\varepsilon$$

Avremo: f continua in $x_0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

TEOREMA (X,d_x) e (Y,d_y) SM, $x_0\in X$, $f: X\to Y$. Sono equivalenti:

1) f è continua in x_0

2) f è sequenzialmente continua in x_0:

$$\forall\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,d_x)} x_0 \quad \text{si ha} \quad f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{(Y,d_y)} f(x_0)$$

dim 2) $\Rightarrow$ 1) Per assurdo 1) sia falsa (f non continua in x_0).

$\exists\ \varepsilon>0 : \forall\delta>0\ \exists x\in X : d_x(x,x_0)<\delta$ ma $d_y(f(x),f(x_0)) \underset{\circ}{\geq} \varepsilon$

Scelgo $\delta = \frac{1}{n}$:

$\exists\ \varepsilon>0 : \forall n\in\mathbb{N}\ \exists x_n\in X : d_x(x_n,x_0)<\frac{1}{n}$ ma $d_y(f(x),f(x_0)) \underset{\circ}{\geq} \varepsilon$

Ho trovato una successione x_n tc $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} x_0$, ma

$f(x_n) \not\to f(x_0)$. $\lightning$

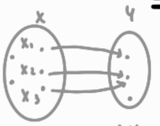
TEOREMA (X,d_X) e (Y,d_Y) SM. $f: X\to Y$. Sono equivalenti:

1) $f: X\to Y$ è continua su X

2) $\forall A\subset Y$ aperto si ha: $\overset{\text{antiimmagine}}{f^{-1}}(A)\subset X$ è aperto

3) $\forall C\in Y$ chiuso si ha: $f^{-1}(C)\subset X$ è chiuso

__dim__ Ripasso di teoria degli insiemi. Data $f: X\to Y$



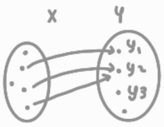
pensa ad una funzione non iniettiva

$f^{-1}(f(\{x_1,x_2\}))=\{x_1,x_2,x_3\}$

i) $A\subset f^{-1}(f(A))$ $\quad A\subset X$

ii) $B\supset f(f^{-1}(B))$ $\quad B\subset Y$

iii) $X\setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y\setminus B)$ $\quad B\subset Y$



pensa ad una funzione non suriettiva

$f(f^{-1}(\{y_1,y_2,y_3\}))=\{y_1,y_2\}$

1) $\Rightarrow$ 2). Fisso $A\subset Y$ aperto. $x_0\in f^{-1}(A)$. Devo trovare $\delta>0$ tc $B_X(x_0,\delta)\subset f^{-1}(A)$.

$x_0\in f^{-1}(A) \iff f(x_0)\in A$, A aperto

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon>0$ tc $B_Y(f(x_0),\varepsilon)\subset A$

Ora: f è continua in $x_0\in X$, ovvero $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tc

$$d_X(x,x_0)<\delta \Rightarrow d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$$

equivalentemente

$$f(B_X(x_0,\delta))\subset B_Y(f(x_0),\varepsilon)\subset A$$

l'op. di immagine inversa conserva le inclusioni:

$$B(x_0,\delta)\overset{(i)}{\subset} f^{-1}(f(B_X(x_0,\delta)))\subset f^{-1}(B_Y(f(x_0),\varepsilon))\subset f^{-1}(A)$$

2) $\Rightarrow$ 1). Dimostriamo che f è continua nel punto $x_0\in X$.

Dato $\varepsilon>0$ devo trovare $\delta>0$ tc

$$f(B_X(x_0,\delta))\subset B_Y(f(x_0),\varepsilon),\ \text{aperto di } Y\ \forall\varepsilon>0$$

$$\overset{(hp)}{\Rightarrow} \underset{\underset{x_0}{\ni}}{f^{-1}(B_Y(f(x_0),\varepsilon))}\subset X \quad \text{aperto di } X$$

$\Rightarrow$ x_0 p.to interno, ovvero $\exists\,\delta>0$ tc

$$B_X(x_0,\delta)\subset f^{-1}(B_Y(f(x_0),\varepsilon))$$

$$f(B_X(x_0,\delta))\subset f(f^{-1}(B_Y(f(x_0),\varepsilon)))\overset{(ii)}{\subset} B_Y(f(x_0),\varepsilon)$$

Ho trovato che $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tc

$$f(B_X(x_0,\delta))\subset B_Y(f(x_0),\varepsilon) \qquad \square$$

esercizio (2.6 - quaderno degli esercizi)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e consideriamo:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > f(x)\}$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq f(x)\}$$

Dimostrare o confutare:

1) f continua $\Rightarrow A \subset \mathbb{R}^2$ aperto

2) $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto $\Rightarrow f$ continua

3) f continua $\Rightarrow C \subset \mathbb{R}^2$ chiuso

4) $C \subset \mathbb{R}^2$ chiuso $\Rightarrow f$ continua

1) Voglio provare che A è aperto:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y - f(x) > 0\}$$

- $y \mapsto y$ è continua da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$
- $(x,y) \mapsto y$ è continua da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$
- $x \mapsto f(x)$ è continua
- $(x,y) \mapsto f(x)$ è continua da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$

segue che

$$(x,y) \mapsto y - f(x) = F(x,y) \quad \text{è cont. da } \mathbb{R}^2 \text{ a } \mathbb{R}$$

Ho finito perché:

$$A = F^{-1}(\underbrace{]0,\infty)}_{\mathbb{R} \text{ aperto}}) \quad \subset \mathbb{R} \text{ aperto.}$$

2) Falso, ad esempio considero $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.

Non è continua in $x = 0$.

Provo che $A = \{y > f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$ è aperto.

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \{x < 0\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ aperto} \\ A_2 &= \{y > 0\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ aperto} \end{aligned}\right\} A_1 \cap A_2 \text{ aperto}$$

$A_3 = \{y > 1\} \subset \mathbb{R}^2$ aperto

$\Rightarrow (A_1 \cap A_2) \cup A_3 = A$ aperto

Trasformazioni lineari e continue

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due SN. Consideriamo $T : X \to Y$ lineare.

Definiamo $\|T\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y \in [0, \infty]$.

Se $\|T\| < \infty$ diremo che $T : X \xrightarrow{\text{lin}} Y$ è limitata.

<u>def</u> Sia $\mathcal{L}(X,Y) = \{T : X \to Y \mid T \text{ lineare e limitata}\}$.

<u>oss</u> Se T è limitata: $\overset{0}{\underset{\nparallel}{}}x \in X$.

$$\frac{1}{\|x\|_X} \|Tx\|_Y = \left\| \frac{1}{\|x\|_X} Tx \right\|_Y \overset{T \text{ lineare}}{=} \left\| T \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_Y \overset{\text{def di } T}{\leq} \|T\|$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in X \quad \|Tx\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X$$

TEOREMA Nelle notazioni precedenti, sono equivalenti:

A) T è limitata

B) T è continua da X in Y nel punto $x = 0$

C) T è continua da X in Y in tutti i punti

<u>dim</u> A) $\Rightarrow$ C). $x_0 \in X$.

$$\|Tx - Tx_0\|_Y = \|T(x - x_0)\|_Y \leq \underset{\wedge \infty}{\|T\|} \cdot \|x - x_0\|_X \quad \forall x \in X$$

In effetti, la funzione T è Lipschitz.

B) $\Rightarrow$ A). T continua in $x_0 = 0$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tc $\|Tx - \underset{0}{\underset{\parallel}{T0}}\|_Y \leq \varepsilon$ per $\|x - 0\| \leq \delta$

ovvero

$$\|x\| \leq \delta \Rightarrow \|Tx\|_Y \leq \varepsilon.$$

Sia ora $x \in X$ con $\|x\|_X \leq 1$. Ma allora

$$\|\delta x\|_X \leq \delta \Rightarrow \|T(\delta x)\|_Y \leq \varepsilon$$

concludo

$$\|Tx\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{\delta} < \infty \qquad \forall x \in X, \ \|x\|_X \leq 1$$

Deduco che $\|T\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$. $\square$

SPAZI METRICI COMPLETI E COMPATTI

Compattezza in SM

(X, d) SM

def Un insieme $K \subset X$ si dice SEQUENZIALMENTE COMPATTO se $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K esiste una sottosuccessione che converge ad un elemento di K.

prop Se $K \subset X$ è seq. compatto allora K è chiuso e limitato.

dim Provo che $K = \overline{K}$. Sia $x \in \overline{K}$.

Esiste succ. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in K\ \forall n$ tale che

caratterizzazione sequenziale della chiusura

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} x$$

$\exists$ sottosucc di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che converge ad un elemento di K. Ma ogni sottosucc di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad x!

ma allora se K seq. compatto $\Rightarrow x \in K$.

Provo che $K \subset X$ è limitato.

Fisso $x_0 \in X$. voglio provare che $\exists\ R>0$ tc $K \subset B(x_0, R)$.

PA $\nexists\ R>0$ tc $K \subset B(x_0,R)$. ovvero

$\forall n \in \mathbb{N} \quad K \cap (X \setminus B_X(x_0, n)) \neq \emptyset$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists\ x_n \in K$ tc $d(x_n, x_0) \geq n$

$\Rightarrow$ per compattezza seq. $\exists$ sottosucc $x_{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{X} x \in K$

stima:

$$d(x_0, x) \geq \underbrace{d(x_0, x_{n_j})}_{\downarrow\ \infty} - \underbrace{d(x, x_{n_j})}_{\downarrow\ 0} \qquad \text{(disug. triang)}$$

$\Rightarrow d(x_0, x) = \infty$, ma nello spazio metrico due punti fissati hanno distanza finita $\quad\lightning$

Ora su $\mathbb{R}^n$ fissiamo la distanza standard.

TEOREMA (HEINE - BOREL)

Sia $K \subset \mathbb{R}^n$. Sono eq:

A) K è chiuso e limitato

B) K è seq. compatto

dim A) $\Rightarrow$ B) . Sia $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una succ in $K \subset \mathbb{R}^n$:

$$x_m = (x_m^1, \dots, x_m^n) \in K \quad \forall m$$

K è limitato $\Rightarrow (x_m^1)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ è limitata

$\overset{(BW)}{\Rightarrow} \exists$ s.s. $x_{m_j}^1 \xrightarrow[j\to\infty]{} x_\infty^1 \in \mathbb{R}$

Guardo: $(x_{m_j}^2)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ è limitata

$\overset{BW}{\Rightarrow} \exists$ s.s $x^2_{m_{j_k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} x^2_\infty \in \mathbb{R}$

Dopo n iterazioni del ragionamento deduco che esiste una s.s.

$$\begin{array}{ccc} x_{m_j} & \xrightarrow[j\to\infty]{\mathbb{R}^n} & (x^1_\infty, \dots, x^n_\infty) = x_\infty \in \mathbb{R}^n \\ \cap & & \\ K & \xRightarrow[K \text{ chiuso}]{\hspace{6em}} & x_\infty \in K \end{array}$$

$\square$

$\exists$ succ. di punti $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ in K tale che $x_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x \xRightarrow[\text{della chiusura}]{\text{caratt. seq.}} x\in\bar{K} \xRightarrow{K \text{ chiuso}} x\in K$

<u>esercizio</u> [2.12 – quaderno degli esercizi]

$X = \ell^\infty(\mathbb{R}) = \{$succ. in $\mathbb{R}$ limitate$\}$

$$\|\underbrace{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}_{= x}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

Provare che

$$K = \{x \in \ell^\infty(\mathbb{R}) : \|x\|_\infty \leq 1\}$$

è chiuso, limitato, ma non seq. compatto.

blocca il ragionamento di prima perché ho infinite coordinate

1) verifico $K = \bar{K} \Rightarrow \exists\ x^m \xrightarrow[m\to\infty]{X} x$

$\bar{K} \ni x$ — considero $x\in\bar{K}$; $x^m \in K$

$\Updownarrow$

$= \|x^m - x\|_\infty \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

$= \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n^m - a_n| \geq |a_n^m - a_n| \quad \forall n$

$\downarrow m\to\infty$ 0 $\Rightarrow$ $\downarrow m\to\infty$ 0

mostro che $x\in K$ (è succ. limitata t.c. $\|x\|_\infty \leq 1$)

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N} \ \lim_{m\to\infty} a_n^m = a_n \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}\ \lim_{m\to\infty} |a_n^m| = |a_n|$

$|a_n^m| \leq 1 \quad \forall\ m,n$

$\Rightarrow |a_n| \leq 1 \ \forall n \overset{\text{passo al sup}}{\Rightarrow} \|x\|_\infty \leq 1 \Rightarrow x\in K \Rightarrow K$ chiuso.

2) Considero $x^m = (0, \text{——}, 0, \underset{m}{1}, 0, \dots)$

$x^m \in K \quad \forall m$

Tutte le coordinate conv. a $0 \in \mathbb{R}$. Se ci fosse una $x^{m_j} \xrightarrow[j\to\infty]{\|\cdot\|_\infty} x \in X$

allora $x = 0 \in X$

ma $\|x^{m_j} - 0\|_\infty = 1 \quad \forall j$.

La succ. converge puntualmente, ma non uniformemente.

(Non conv. nella norma!)

$\Rightarrow$ K non è compatto seq.

def (X,d) SM, $K \subset X$. Diciamo che una famiglia di insiemi $A_\alpha \subset X$, $\alpha \in \mathcal{A}$ è un RICOPRIMENTO di K se

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$$

se poi $A_\alpha \in \tau(X)$ $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ diremo che il ricoprimento è APERTO

def Diremo che un insieme $K \subset X$ è COMPATTO se $\forall$ ricoprimento aperto di K $\exists$ un sottoricoprimento finito di K. Ovvero

$$\forall A_\alpha \in \tau(X) \text{ con } \alpha \in \mathcal{A} \text{ e } K \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$$

$$\exists \mathcal{B} \in \mathcal{A} \text{ tc } \operatorname{card}(\mathcal{B}) < \infty \text{ e } K \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}} A_\alpha$$

esempio
- $K = (0,1) \subset \mathbb{R}$ non è compatto, infatti: $(0,1) \overset{=}{\subset} \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n}, 1\right)}_{\text{aperti}}$
  non è seq. comp., infatti posso prendere una succ $\to 0 \notin (0,1)$
- $K = [0,\infty) \subset \mathbb{R}$ non è compatto, infatti: $K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{(-1,n)}_{\text{aperti}}$

TEOREMA Siano (X,d) uno SM e $K \subset X$. Sono equivalenti:

A) K è seq. compatto

B) K è compatto

def Uno SM (X,d) si dice SEPARABILE se $\exists X_0 \subset X$ tc
$\# X_0 = \operatorname{card}(X_0) = \operatorname{card}(\mathbb{N})$ e $\overline{X_0} = X$.

esempi
- $\mathbb{R}$ è separabile : $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^n$ è separabile : $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$

esercizio $\ell^\infty(\mathbb{R})$ con $\|\cdot\|_\infty$ non è separabile

prop Se (X,d) è compatto, allora è separabile.

dim Fissato $r>0$, la famiglia di palle (aperte) $\{B_r(x) : x \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X che dunque ha un sottoricoprimento finito. Dunque, $\forall k \in \mathbb{N}$ esiste un insieme finito di punti $x_1^k, \dots, x_{n_k}^k \in X$, $n_k \in \mathbb{N}$, tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^{n_k} B\left(x_i^k, \frac{1}{k}\right)$$

L'insieme di tutti i centri

$$X_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n_k} \{x_i^k\}$$

è al più numerabile ed è denso in X $(\overline{X_0} = X)$.

<u>esercizio 2.10</u> Sia $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Provare che sono equivalenti:

A) f è continua

B) $gr(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^2$ è chiuso

A) => B). Chiamo $grf(f) = K$ e sia $(x,y) \in \overline{K}$. Esistono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]$ t.c. $(x_n, f(x_n)) \xrightarrow[\mathbb{R}^2]{n\to\infty} (x,y)$.

f è continua dunque $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \underset{\text{continuità}}{=} f(x) = y \Rightarrow (x,y) \in K$.

B) => A). Fisso $x_0 \in [0,1]$ e prendo $\underset{\in[0,1]}{x_n} \xrightarrow{n\to\infty} x_0$. Voglio mostrare che $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Abbiamo $(x_n, f(x_n)) \in K$. Per hp $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ è limitata e per BW $\exists$ una sottosuccessione che converge:

$$f(x_{n_j}) \xrightarrow[j\to\infty]{} y_0 \in \mathbb{R}^2 \quad \text{dunque}$$

$$\underset{K = \overline{K}}{(x_{n_j}, f(x_{n_j}))} \xrightarrow[j\to\infty]{\mathbb{R}^2} (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow (x_0, y_0) \in \overline{K} = K$

$\Rightarrow y_0 = f(x_0)$

SM completi

def Sia (X,d) uno SM. Una succ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X si dice di Cauchy se:

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \bar{n}\in\mathbb{N} : \forall n,m>\bar{n}$ si ha $d(x_n,x_m)<\varepsilon$

Diremo che X è uno SM **COMPLETO** se tutte le succ. di Cauchy convergono ad un elemento di X.

esempi
- $(\mathbb{R},d)$ con distanza standard è completo
- $\mathbb{R}^n$ è completo
- $\ell^\infty(\mathbb{R})$ è completo

def Uno spazio normato si chiama **SPAZIO DI BANACH** se è completo come spazio metrico

Sia K SM compatto.

compatto $\Rightarrow$ seq. compatto
$\Rightarrow$ chiuso e limitato
$\Rightarrow$ posso usare Weierstrass

$X=C(K)=\{f:K\to\mathbb{R} \text{ continue}\}$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in K}|f(x)| \overset{(W)}{=} \max_{x\in K}|f(x)|$$

$(X,\|\cdot\|_\infty)$ SN induce una distanza d_∞ su X

TEOREMA $X=C(K)$ con $d_\infty(f,g)=\sup\limits_{x\in K}|f(x)-g(x)|$ è SM completo.
In altri termini, $C(K)$ è uno SB.

dim Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in C(K)$ di Cauchy:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \bar{n} : \forall n,m\geq\bar{n} \quad \|f_n-f_m\|_\infty<\varepsilon$$

$$\|f_n-f_m\|_\infty = \sup_{x\in K}|f_n(x)-f_m(x)|$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} |f_n(x)-f_m(x)| \leq \sup_{x\in K}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon \quad \text{per } n,m\geq\bar{n}$$

Ma allora per $x\in K$ la successione $n\mapsto f_n(x)$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ dunque esiste $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=:f(x)$. Ho trovato $f:K\to\mathbb{R}$

dimostro convergenza puntuale

e ora provo che $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_\infty=0$.

Facendo tendere $m\to\infty$ in $(*)$ si ottiene $\forall x\in K$

$$|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon \quad \forall n>\bar{n}$$

Con il sup su x trovo: $\|f_n-f\|_\infty\leq\varepsilon \quad \forall n\geq\bar{n}$, ovvero

$$\underset{C(K)}{\overset{\cap}{f_n}} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \underset{C(K)}{\overset{\cap}{f}}$$

dimostro convergenza uniforme $\Rightarrow$ continuità della funzione f

def Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due SM. Diremo che $f: X \to Y$ è una ISOMETRIA se

$$d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x') \qquad \forall x, x' \in X$$

Diremo che X e Y sono isometrici se esiste

$$f: X \leftrightarrow Y \text{ isometria (biiettiva)}$$

def Sia (X, d) uno SM. Diremo che (Y, d_Y) è un (il) COMPLETAMENTO METRICO di X se $\exists\, f: X \to Y$ isometria tc

$$\overline{f(X)} = Y \quad \text{con } Y \text{ completo}$$

esempio $\mathbb{R}$ è completamento metrico di $\mathbb{Q}$.

esercizio $X = \mathbb{R}$ e $d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ $\quad x, y \in \mathbb{R}$

Studio $(\mathbb{R}, d)$:

i) $d(x,y) \geq 0$ ✓

$d(x,y) = 0 \iff x = y$ ✓ (iniettività $\arctan(x)$)

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ ✓

iii)
$$\begin{aligned} d(x,y) &= |\arctan(x) - \arctan(y)| \\ &= |\arctan(x) - \arctan(z) + \arctan(z) - \arctan(y)| \\ &\leq \underbrace{|\arctan(x) - \arctan(z)|}_{= d(x,z)} + \underbrace{|\arctan(z) - \arctan(y)|}_{= d(z,y)} \end{aligned}$$

Non è completo. Considero $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n = n$: è di Cauchy

$$\begin{aligned} d(a_n, a_m) &= |\arctan(n) - \arctan(m)| \\ &\leq \underbrace{\left|\arctan(n) - \frac{\pi}{2}\right|}_{\to 0} + \underbrace{\left|\frac{\pi}{2} - \arctan(m)\right|}_{\to 0} \end{aligned}$$

Dunque sicuramente $\exists\, \bar{n}: \forall n, m > \bar{n} \quad d(a_n, a_m) < \varepsilon$. Voglio mostrare che non converge per d in $\mathbb{R}$: PA $\quad a_n \xrightarrow[n \to \infty]{d} a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to \infty} \underbrace{|\arctan(n) - \arctan(a)|}_{\downarrow n \to \infty \ 0} = \left|\frac{\pi}{2} - \arctan(a)\right| = 0 \text{, ma } a \text{ è un numero } \lightning$$

Calcoliamo ora il completamento di $(\mathbb{R}, d)$:

$$Y = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

$$d_Y(x, x') = |\arctan(x) - \arctan(x')| \quad \forall x, x' \in Y$$

dove $\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$ e $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

(Y, d_Y) è SM. L'isometria tra X e Y è $f: \mathbb{R} \longrightarrow Y$ con $f(x) = x$

Voglio vedere che (Y, d_Y) è anche completo

Sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una succ di Cauchy in Y:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \ \bar{n} : \forall n, m \geq \bar{n} \qquad d_Y(b_n, b_m) < \varepsilon$$

$$\| \qquad\qquad$$

$$|\underbrace{\arctan(b_n)}_{a_n} - \arctan(b_m)| < \varepsilon$$

la succ $a_n := \arctan(b_n) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ per distanza standard.

$\mathbb{R}$ completo $\Rightarrow \exists \ a_\infty = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \arctan(b_n)$

sfrutto la completezza di $\mathbb{R}$!

$$\cap$$

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ma $\arctan: Y \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ è iniettiva e suriettiva

$\Rightarrow \exists \ b_\infty \in Y$ tc $a_\infty = \arctan(b_\infty)$

concludo che

b_n converge $\Rightarrow$ è di Cauchy

$$d_Y(b_n, b_\infty) \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

Osservo che (Y, d_Y) e $\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], d_E\right)$ sono isometrici (distanza euclidea)

tramite $\arctan: Y \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ isometria

TEOREMA Sia (X, d_X) uno SM. Allora esiste uno SM (Y, d_Y) tale che

↳ il completamento metrico esiste ed è unico a meno di isometrie

1) (Y, d_Y) è completo

2) Esiste $f: X \to Y$ isometria tale che $\overline{f(X)} = Y$

Inoltre ogni altro completamento di X è isometrico con Y.

dim (abbozzo). 1) Costruire Y

2) Definire d_Y e provare che (Y, d_Y) è SM.

3) (Y, d_Y) è completo

4) Costruire $f: X \to Y$ isometria e verificare che $\overline{f(X)} = Y$

5) verificare l'unicità.

1) Sia $\mathcal{A} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ successione di Cauchy in } X\}$, con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = x$

Su $\mathcal{A}$ introduco la relazione di equivalenza:

$$x \sim x' \iff d(x_n, x_n') \xrightarrow[n \to \infty]{\exists} 0$$

Indico $\bar{x} = [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]_\sim$ classe di equivalenza.

Pongo $Y := \mathcal{A}/_\sim = \{\bar{x} : x \in \mathcal{A}\}$

2) Definiamo $d_Y: Y \times Y \longrightarrow [0, \infty)$

$$d_Y(\bar{x}, \bar{x'}) = \lim_{n \to \infty} d_X(x_n, x_n')$$

con scelta di rappresentanti. Bisogna mostrare:

- limite esiste
- non dipende dai rappresentanti
- d_Y è una distanza

Mostriamo che il limite esiste.

Sia $a_n = d_X(x_n, x_n')$. Affermo che $(a_n)_{n \in \mathbb{R}}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$.

$$|a_n - a_m| = |d_X(x_n, x_n') - d_X(x_m, x_m')|$$

$$= |d_X(x_n, x_n') - d_X(x_m, x_n') + d_X(x_m, x_n') - d_X(x_m, x_m')|$$

$$\leq |d_X(x_n, x_n') - d_X(x_m, x_n')| + |d_X(x_m, x_n') - d_X(x_m, x_m')|$$

$$\overset{(DT)}{\leq} \underbrace{d(x_m, x_n)}_{<\varepsilon/2 \ \forall n,m \geq \bar{n}}^{\text{è di Cauchy}} + \underbrace{d(x_m', x_n')}_{<\varepsilon/2 \ \forall n,m \geq \bar{n}'}^{\text{è di Cauchy}}$$

$$< \varepsilon \quad \forall n, m \geq \max\{\bar{n}, \bar{n}'\}$$. È di Cauchy.

4) L'isometria $f: X \to Y$ è semplicemente

$$f(x) = [\text{succ.} \equiv x]_\sim$$ con $x \in X$

↳ succ. costantemente uguale a x

Caratterizzazione degli SM compatti

def Uno SM (X, d_X) si dice TOTALMENTE LIMITATO se $\forall r>0$ $\exists\, x_1, \dots, x_n \in X$ tali che
$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$$

TEOREMA Sia (X, d_X) uno SM. Sono equivalenti

1) X è compatto
2) Se $A \subset X$ con $\mathrm{card}(A) = \infty$, allora A possiede un punto di accumulazione:
$$\exists\, x \in X \text{ tc } \forall r>0 : A \cap (B(x,r) \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$
3) X è seq. compatto
4) X è completo e totalmente limitato

esercizio Sia X completo. Sia poi $K_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, una succ di insiemi chiusi tc:

1) $\emptyset \neq K_{n+1} \subset K_n \quad \forall n$
2) $\mathrm{diam}\, K_n = \sup_{x,y \in K_n} d(x,y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Allora $\exists\, x \in X$
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}.$$

sugg considero una successione di elementi dentro i K_n e utilizzo il fatto che sono succ. di Cauchy.

dim 1) $\Rightarrow$ 2). PA sia falsa 2). Esiste $A \subset X$ con $\mathrm{card}(A) = \infty$ che non ha punti di accumulazione. Ovvero,
$$\forall\, x \in X \quad \exists\, r_x > 0 \quad \text{tc} \quad A \cap (B(x, r_x) \setminus \{x\}) = \emptyset$$
Ora
$$X = \bigcup_{x \in X} B(x, r_x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{x compattezza} \\ \exists x_1, \dots, x_n}}{=} \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i})$$

Ora $A = A \cap X$
$$= A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i}) \right)$$
$$= \bigcup_{i=1}^{n} A \cap B(x_i, r_{x_i})$$
$$\leq \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{card}(A) \leq n \text{ finita} \quad \lightning$$

2) $\Rightarrow$ 3). Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ succ in X. Considero $A = \{x_n : n\in\mathbb{N}\} \subset X$.

<u>1° caso</u> $\quad \mathrm{card}(A) < \infty \Rightarrow$ posso estrarre una sottosucc costante

<u>2° caso</u> $\quad \mathrm{card}(A) = \infty \overset{2)}{\Rightarrow} \exists\, x\in X$ p.to di acc. di A

$\Rightarrow \forall r>0 \quad A\cap(B(x,r)\setminus\{x\}) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall k\in\mathbb{N} \ \exists\, n_k$ tc $d_X(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k} = r$

WLOG $k \longmapsto n_k$ crescente strettamente

Ovvero $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{(X,d)} x$.

3) $\Rightarrow$ 4). Provo che X è completo. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una succ di Cauchy in X. Per compattezza seq. $\exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sottosucc che converge ad $x\in X$.

Provo che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,d)} x$.

Fisso $\varepsilon>0$:

$$d(x_n, x) \leq \underset{\substack{\wedge \\ \varepsilon/2}}{d(x_n, x_{n_k})} + \underset{\substack{\wedge \\ \varepsilon/2}}{d(x_{n_k}, x)} < \varepsilon$$

$$\forall n, n_k > \bar{n} \quad \exists \bar{n} \qquad \forall k > \bar{k}$$

$\Rightarrow$ X è completo.

Provo che X è tot. limitato. PA X non è tot. limitato.

$\exists\, r>0$ tc X non si ricopre con finite palle di raggio r.

Scelgo $x_1\in X$ a piacere

$\exists\, x_2 \in X\setminus B(x_1, r) \neq 0$

$\exists\, x_3 \in X\setminus(B(x_1,r)\cup B(x_2,r)) \neq 0$

Per induzione $\exists\, x_{n+1} \in X\setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$

Ora $d(x_n, x_m) \geq r > 0$ se $n\neq m$, ma allora non c'è sottosuccessione che converge.

$\lightning$

4) $\Rightarrow$ 1). PA X non è compatto.

$\exists\, A_\alpha \in \tau(X)$ con $\alpha\in\mathcal{A}$ tc $X = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$

ma $X \supsetneq \bigcup_{\alpha\in B} A_\alpha$ se $\mathrm{card}(B)<\infty$.

Per $r=1$ trovo palle $B^1_1, B^1_2, \dots, B^1_{n_1}$ palle di raggio 1 tali che

$$\bigcup_{i=1}^{n_1} B^1_i = X$$

Esiste $i_1 \in \{1,\dots,n_1\}$ tale che $B^1_{i_1}$ non si ricopre con finiti aperti A_α.

WLOG le palle sopra elencate sono chiuse.

$B^1_{i_1}$ è tot. limitata. Per $r = 1/2$ esistono

$$B^{1/2}_1 \quad \dots \quad B^{1/2}_{n_2}$$

che ricoprono $B^1_{i_1}$. Ripeto il ragionamento precedente.

Esiste $i_2 \in \{1, \dots, n_2\}$ tale che $B^{1/2}_{i_2}$ non si ricopre con finiti aperti A_α.

Si ha $B^{1/2}_{i_2} \subset B^1_{i_1}$.

Per induzione trovo una successione di insiemi chiusi tale che

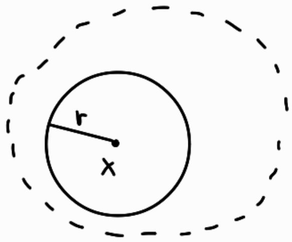
- $B^{1/n+1}_{i_{n+1}} \subset B^{1/n}_{i_n}$
- $\operatorname{diam} B^{1/n}_{i_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- ciascun $B^{1/n}_{i_n}$ non si ricopre con finiti aperti A_α.

X completo $\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B^{1/n}_{i_n} = \{x\} \quad \exists x \in X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$

Ma $\exists \alpha \in \mathcal{A}$ t.c. $x \in A_\alpha$ aperto

$\Rightarrow \exists r > 0$ t.c. $B(x, r) \subset A_\alpha$

Per $\frac{2}{n} < r$ avremo $B^{1/n}_{i_n} \subset B(x, r) \subset A_\alpha$



$x \in B^{1/n}_{i_n} \quad \forall n$

$\lightning$

Compattezza e continuità

TEOREMA: $(X, d_X), (Y, d_Y)$ SM. Sia $f: X \to Y$ continua. Allora

$$X \text{ compatto} \Rightarrow f(X) \subset Y \text{ compatto}$$

dim (dimostrazione topologica).

Sia $f(X) \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ con $A_\alpha \in \mathcal{T}(Y)$. aperto in Y

$$\Rightarrow X = f^{-1}(f(X)) \subset f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \underbrace{f^{-1}(A_\alpha)}_{\text{aperto di } X}$$

$$\overset{X \text{ compatto}}{=} \bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}} f^{-1}(A_\alpha)$$

$\exists \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ finito

$$\Rightarrow f(X) = f\Big(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}} f^{-1}(A_\alpha)\Big) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}} A_\alpha \qquad \square$$

esercizio dimostrarlo con la compattezza sequenziale.

TEOREMA Sia X uno SM compatto e sia $f: X \to \mathbb{R}$ continua.

Allora f ammette max e min su X.

dim $\quad \overbrace{f(X)}^{\text{compatto}} \subset \mathbb{R} \overset{HB}{\iff} f(X)$ chiuso e limitato

continua $\quad$ compatto

teorema precedente

$\Rightarrow \exists$ finiti $\sup f(x) \in \mathbb{R}$

$\inf f(x) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists$ finiti $\sup f(x) \in f(X)$

$\inf f(x) \in f(X)$ $\square$

TEOREMA X compatto. $f: X \to Y$ continua. Allora f è unif. continua su X.

def $\quad f$ unif. cont. se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; : \; d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(x,y) < \varepsilon$$

esercizio $\quad$ [3.7] Sia $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tc $\varphi(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$, $x \in \mathbb{R}$

e sia $(\mathbb{R}, d)$ con

$$d(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$$

i) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è SM

ii) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ non è completo

iii) calcolare il suo completamento

i) d è distanza:

- DT è facile:

$$d(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$$
$$= |\varphi(x) - \varphi(t) + \varphi(t) - \varphi(y)|$$
$$\leq |\varphi(x) - \varphi(t)| + |\varphi(t) - \varphi(y)| = d(x,z) + d(z,y)$$

- simmetria: $d(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi(y) - \varphi(x)| = d(y,x)$

- $d(x,y) \geq 0$ ✓

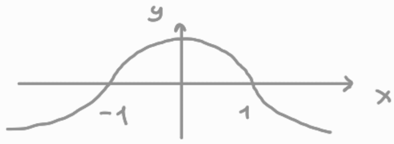
$d(x,y) = 0 \overset{\Leftarrow \checkmark}{\iff} x = y$

$(\Rightarrow)$ $\quad d(x,y) = 0 \iff \varphi(x) = \varphi(y)$

$$\iff \begin{cases} \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2y}{1+y^2} \\ \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1-y^2}{1+y^2} \end{cases}$$

$$x \longmapsto \frac{2x}{1+x^2}$$

$$x \longmapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$$



$$\Rightarrow \quad x = y$$

ii) non è completo

$$\lim_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = (0, -1)$$

Considero $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. È di Cauchy per d perché $\varphi(n) \in \mathbb{R}^2$ e converge. Ma $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non ha limite in $(\mathbb{R}, d)$.

iii) Provo a considerare

$$Y = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$d_Y(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$$

dove se $x = \infty$ oppure $y = \infty$ $d_Y(x,y) = 1$.

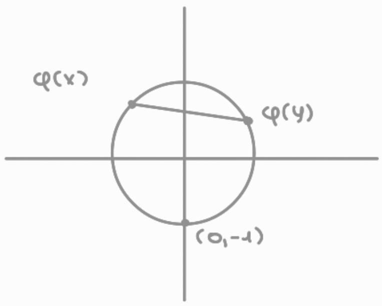
Dico che (Y, d_Y) è il completamento di $\mathbb{R}$.

<u>Sostituzioni trigonometriche</u>

$$\cos t = \cos\left(2\,\tfrac{t}{2}\right) = \frac{\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1 - \frac{\sin^2 t/2}{\cos^2 t/2}}{1 + \frac{\sin^2 t/2}{\cos^2 t/2}} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$x = \tan t/2$

$$\sin t = \sin\left(2\,\tfrac{t}{2}\right) = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}} = \frac{2\,\frac{\sin t/2}{\cos t/2}}{1 + \frac{\sin^2 t/2}{\cos^2 t/2}} = \frac{2x}{1+x^2}$$



Conclusione: il completamento di $(\mathbb{R}, d)$ è la circonferenza unitaria di $\mathbb{R}^2$ con la distanza $\mathbb{R}^2$.