CONICHE E QUADRICHE

Richiami su spazi proiettivi

V = sp. vett $/\mathbb{K}$ $\qquad \mathbb{P}(V) = \{ \ell \subset V \mid \ell$ sottosp. vett $\dim_{\mathbb{K}} \ell = 1 \} \longleftrightarrow V \setminus \{0\} / \mathbb{K}^\times$

$\ell_v = \langle v \rangle \longleftrightarrow [v]$

se $V = \mathbb{K}^{n+1}$ $\qquad \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \ni [x_0 \cdots x_n]$

$\underbrace{P_0 = [1\ 0 \cdots 0], \dots, P_n = [0 \cdots 0\ 1]}_{\text{punti fondamentali}}, \ \underbrace{U = [1 \cdots 1]}_{\text{punto unità}}$

riferimento proiettivo $\dim_{\mathbb{K}} V = n+1$. $P_0, P_1, \dots, P_n, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ in posizione generale

$\Rightarrow \exists$ base $\mathcal{E}$ di V unica a meno di coeff. di proporz. tc

$P_0 = [e_0], \dots, P_n = [e_n], \ P_{n+1} = [e_0 + \dots + e_n] = U$

Dato un riferimento proiettivo $P_0, \dots, P_n, U$ otteniamo una biezione

$\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \longleftrightarrow \mathbb{P}(V)$ $\qquad$ cioè coordinate omogenee

$[\alpha_0, \dots, \alpha_n] \longleftrightarrow [\alpha_0 e_0 + \dots + \alpha_n e_n]$

dove $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ è la base di V tc $P_0 = [e_0], \dots, P_n = [e_n], U = [e_0 + \dots + e_n]$

Dunque $[1\ 0 \cdots 0] \mapsto P_1, \dots, [0 \cdots 0\ 1] \to P_n, [1 \cdots 1] \to U$

sottosp. proiettivi $W \subset V$ sottosp. vett. $\Rightarrow \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ sottosp. proiettivo

esempio $\qquad P \neq Q \in \mathbb{P}(V)$ cioè $P = [v_1]$, $Q = [v_2]$ con v_1, v_2 lin indip

$L(P, Q)$ retta (proiettiva) per P e Q.

$L(P, Q) = \mathbb{P}(\langle v_1, v_2 \rangle)$

rif. proiettivo per $L(P, Q)$: P, Q, R con $R = [v_1 + v_2]$

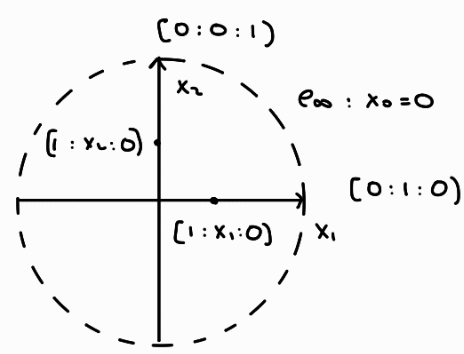
omogeneizzazione / disomogeneizzazione

in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ iperpiani fondamentali $H_0 : x_0 = 0, \dots, H_n = x_n = 0$

$$\mathbb{P}^n \setminus H_0 \underset{\varphi_0}{\overset{j_0}{\rightleftarrows}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$$

$$[x_0 : \dots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)$$

$$[1 : t_1 : \dots : t_n] \leftarrow (t_1, \dots, t_n)$$



Più ingenerale, $H: a_0x_0+\dots+a_nx_n=0$ iperpiano in $\mathbb{P}^n_K$. Supponiamo che $a_0\neq 0$

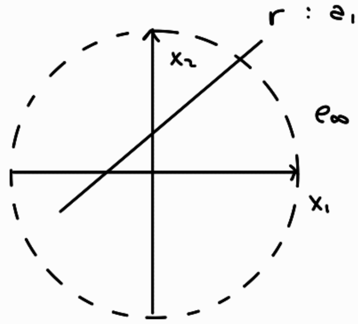
$$\mathbb{P}^n\setminus H \underset{\theta_H}{\overset{j_H}{\rightleftarrows}} \mathbb{A}^n_K$$

$$\underset{\notin H}{[x_0:\dots:x_n]} \longmapsto \left(\frac{x_1}{\underbrace{a_0x_0+\dots+a_nx_n}_{\neq 0}},\dots,\frac{x_n}{a_0x_0+\dots+a_nx_n}\right)$$

$$\left[\frac{1-a_1t_1-\dots-a_nt_n}{a_0}:t_1:\dots:t_n\right] \longleftarrow (t_1,\dots,t_n)$$

Si vede $\theta\circ j=id_{\mathbb{A}^n}$ e $j\circ\theta=id_{\mathbb{P}^n\setminus H}$.

Se $T\subset\mathbb{A}^n_K$ sottosp. affine $\overline{T}=L(j(T))\subset\mathbb{P}^n$ omogeneizzazione di T.
$\overline{T}\cap H$ sono i "punti impropri di T"



$r: a_1x_1+a_2x_2+b=0$
$\rightsquigarrow bx_0+a_1x_1+a_2x_2=0$
p.to improprio $[0:a_2:-a_1]$

Viceversa, se $S\subset\mathbb{P}^n_K$:

$S\not\subseteq H_0 \Rightarrow \theta(S\setminus H_0)\subset\mathbb{A}^n$ è sottosp. affine (eq: si pone $x_0=1$).

<u>Trasf. proiettive</u>

Data $\varphi: V\to W$ appl. lin. tra due sp. vett$/\mathbb{R}$

$\rightsquigarrow f:\mathbb{P}(V)\setminus\mathbb{P}(\ker(\varphi))\longrightarrow\mathbb{P}(W)$ è detta trasf. proiettiva

$[v] \longmapsto [\varphi(v)]$

è non degenere se $\ker\varphi=0$: $f:\mathbb{P}(V)\to\mathbb{P}(W)$

se $\varphi: V\to W$ è un iso di sp. vett, allora $f:\mathbb{P}(V)\to\mathbb{P}(W)$ è iso di sp. proiettivi

Un'applic. $f:\mathbb{P}(V)\to\mathbb{P}(W)$ è trasf. proiett. (non-deg) se $\exists\ \varphi:V\to W$ appl. lineare tc $\forall\ p=[v]\in\mathbb{P}(V)$, allora $f(p)=[\varphi(v)]$.

Se $\lambda\in K\setminus\{0\}=K^*$, φ e $\lambda\varphi$ inducono la stessa trasf. proiettiva.

In particolare, $PGL(V)=\{f:\mathbb{P}(V)\to\mathbb{P}(V)$ trasf. proiett. non degeneri$\}$ è un gruppo e $PGL(V)\simeq GL(V)/_{K^*}$. È detto gruppo delle proiettività di $\mathbb{P}(V)$.

esempio importante (proiezioni)

Sia $P_0 \in \mathbb{P}^2$ un punto e $\ell \subset \mathbb{P}^2$ retta tc $P_0 \notin \ell$. Consideriamo la mappa

$$\pi: \mathbb{P}^2 \setminus \{P_0\} \longrightarrow \ell$$
$$Q \longmapsto L(P_0, Q) \cap \ell$$

è ben definita perché $P_0 \notin \ell$, dunque l'immagine è sempre un punto.

Affermo che π è una trasf. proiett. degenere.

Scegliamo P_0, P_1, P_2, U rif. proiettivo per $\mathbb{P}^2$ con $P_1, P_2 \in \ell$; $P_0 = [1:0:0]$

e $\ell: x = 0$.

Sia $Q \in \mathbb{P}^2 \setminus \{P_0\}$, $Q = [x_0 : y_0 : z_0]$ tc $(y_0, z_0) \neq (0,0)$

$L(P_0, Q)$ ha equazione $z_0 y - y_0 z = 0$

$$\Rightarrow L(P_0, Q) \cap \ell = \begin{cases} x = 0 \\ z_0 y - y_0 z = 0 \end{cases} = [0 : y_0 : z_0]$$

$$\Rightarrow [x_0 : y_0 : z_0] \overset{\pi}{\longmapsto} [0 : y_0 : z_0] \quad \text{con matrice} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ che è degenere.}$$

Più in generale, $K \subset \mathbb{P}^n$ sottosp. proiettivo $\dim K = r$,

sia $S \subset \mathbb{P}^n$ sottosp. $\dim S = n - r - 1$ tc $S \cap K = \emptyset$

Allora
$$\pi: \mathbb{P}^n \setminus K \longrightarrow S \subset \mathbb{P}^n$$
$$Q \longmapsto L(K, Q) \cap S = \{\pi(Q)\}$$

è ben definita (Grassmann) ed è una trasf. proiettiva degenere. (esercizio)

Dualità

V = sp. vett $/_K$ $\qquad V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$

$$\mathbb{P}(V^*) \longleftrightarrow \{H \subset V \text{ iperpiani vettoriali}\} \longleftrightarrow \{H \subset \mathbb{P}(V) \text{ iperpiani proiettivi}\}$$

$$[\varphi : V \to K] \longmapsto \ker(\varphi) \subset V$$
$$\varphi \neq 0$$

Curve piane

def Una CURVA PIANA PROIETTIVA $\mathcal{C}$ sul campo K è una classe di proporzionalità di un polinomio omogeneo (le coord hanno lo stesso grado)

$$F(x_0,x_1,x_2) \in K[x_0,x_1,x_2] \quad \text{di grado } d>0$$

il suo SUPPORTO è $supp(\mathcal{C}) = \{[x_0:x_1:x_2] \in \mathbb{P}^2_K \mid F(x_0,x_1,x_2)=0\} \subseteq \mathbb{P}^2$.

il GRADO è $\deg(\mathcal{C}) = d$.

def Una CURVA PIANA AFFINE $\mathcal{C}$ sul campo K è una classe di proporzionalità di un polinomio $F \in K[x,y]$ di grado $d>0$.

il suo supporto è $supp(\mathcal{C}) = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2_K \mid F(x,y)=0\} \subset \mathbb{A}^2_K$.

il suo grado è $\deg(\mathcal{C}) = d$.

def Una CURVA PIANA EUCLIDEA $\mathcal{C}$ è una classe di proporzionalità di un polinomio $F \in \mathbb{R}[x,y]$ di grado $d>0$.

$supp(\mathcal{C}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y)=0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$\deg(\mathcal{C}) = \deg F = d$.

esempi $d=1$ i) iperpiani proiettivi $H \subset \mathbb{P}^2$: rette

ii) iperpiani affini $L \subset \mathbb{A}^2_K$: rette affini

oss i) Una proiettività $T: \mathbb{P}^2_K \to \mathbb{P}^2_K$ è tc

$$T([x_0:x_1:x_2]) = [a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 : \dots : a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2]$$

se r è la retta di equazione $F(x_0,x_1,x_2) = Ax_0 + Bx_1 + Cx_2 = 0$

$$supp(r) = \{[x_0:x_1:x_2] \in \mathbb{P}^2_K \mid F(x_0,x_1,x_2)=0\}$$

e allora

$$T^{-1}(supp(r)) = \{[x_0:x_1:x_2] \in \mathbb{P}^2_K \mid A(a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2) + B(\dots) + C(\dots) = 0\}.$$

Definiamo

$T^{-1}(r)$ = la retta proiettiva di equazione

$$A(a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2) + B(\dots) + C(\dots) = 0$$

sto cercando i punti tali che quando ci applico T, le nuove coordinate soddisfino l'eq della retta r

Analogamente, se T è proiettività e $\mathscr{C}$ è la curva di equazione $F(x_0, x_1, x_2)=0$, allora definiamo $T^{-1}(\mathscr{C})$ come la curva di equazione

$$F(a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2,\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2,\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = 0 .$$

$\Rightarrow \ supp(T^{-1}(\mathscr{C})) = T^{-1}(supp(\mathscr{C}))$

ii) se $T : \mathbb{A}^2_K \to \mathbb{A}^2_K$ è affinità e $\mathscr{C} : F(x,y)=0$ è curva affine,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c$$

allora definiamo $T^{-1}(\mathscr{C})$ come la curva di equazione

$$F\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c\right) = 0$$

e si ha

$$supp(T^{-1}(\mathscr{C})) = T^{-1}(supp(\mathscr{C})).$$

iii) stessa cosa per $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ isometria.

<u>def</u> Date $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ curve piane proiettive (risp. affini, euclidee) si dicono proiettivamente EQUIVALENTI (risp. affinemente equiv. CONGRUENTI) se esiste T proiettività (risp. affinità, isometria) tc $\mathscr{D} = T^{-1}(\mathscr{C})$

<u>esempio</u>
- tutte le rette sono equivalenti
- in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ la curva di equazione $\mathscr{C}: x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ non è equivalente a $\mathscr{D}: x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ e $supp(\mathscr{C}) = \emptyset$, $[0:1:1] \in supp(\mathscr{D}) \neq \emptyset$

CONICHE PROIETTIVE

Da ora $char(K) \neq 2$.

def Una CONICA PROIETTIVA PIANA è una curva piana proiettiva di grado 2. cioè pol. omogeneo di grado 2 a meno di un coeff. di proport. in K^*.

L'eq di $\mathcal{C}$ è $F(x_0, x_1, x_2) = 0$

L'insieme $K[x_0, x_1, x_2]_2 = \langle x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2 \rangle$

Quindi l'insieme di tutte le coniche proiettive è

$$\mathbb{P}(K[x_0, x_1, x_2]_2)$$

def Data una conica $\mathcal{C}$ di eq. $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ abbiamo una matrice $A \in M_3(K)$ simmetrica tc

$$F(x_0, x_1, x_2) = (x_0\ x_1\ x_2)\, A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

cioè $F(\underline{x}) = {}^t\underline{x} A x = 0$.

Chiamiamo A la MATRICE DELLA CONICA $\mathcal{C}$.

$rg(A) = rg(\mathcal{C})$.

def
- definiamo $\mathcal{C}$ una conica NON DEGENERE se $rg(\mathcal{C}) = 3$
- definiamo $\mathcal{C}$ una conica SEMPLICEMENTE DEGENERE se $rg(\mathcal{C}) = 2$
- definiamo $\mathcal{C}$ una conica DOPPIAMENTE DEGENERE se $rg(\mathcal{C}) = 1$

oss se $T: \mathbb{P}^2_K \longrightarrow \mathbb{P}^2_K$ proiettività con matrice $[P] \in PGL(\mathbb{P}^2_K)$ e se $\mathcal{C}$ ha eq. $F(x) = {}^t x A x = 0$, allora

$$F(Px) = {}^t(Px) A (Px) = {}^t x ({}^t P A P) x = 0$$

$\Rightarrow$ se $\mathcal{C}$ ha matrice A, allora $T^{-1}(\mathcal{C})$ ha matrice ${}^t PAP$.

prop se $\mathcal{C}$ è la conica di eq. ${}^t x A x = 0$ e $\mathcal{D}$ di eq. ${}^t x B x = 0$ allora $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono proiettiv. equiv. $\iff \exists\, P \in GL_3(K)$, $\alpha \in K^*$ tc $\alpha B = {}^t PAP$.

def Un INVARIANTE PROIETTIVO per una conica è una proprietà che non cambia per coniche proiettivamente equivalenti.

esempio
- se $\mathcal{C}$ è conica proiettiva, allora $rg(\mathcal{C})$ è inv. proiettivo
- $\det(A)$ non è inv. proiettivo
- se $\mathcal{C}$ è una conica proiettiva reale, $\mathcal{C}: {}^t x A x = 0$.

  $sgn(A) = (p,q)$ non è inv. proiettivo infatti: $sgn(-A) = (q,p) \neq (p,q)$.

  Tuttavia, se $\mathcal{C}$ ha matrice A con $sgn(A) = (p,q)$, allora $(\max\{p,q\}, \min\{p,q\})$ è inv. proiettivo per $\mathcal{C}$, infatti:

  $$sgn({}^t PAP) = sgn(A)$$ rappresentano la stessa forma quadratica in base diversa e la sgn non dipende dalla base (Sylvester)

  e anche $\max\{p,q\}$ e $\min\{p,q\}$ non cambiano moltiplicando per $\alpha \in \mathbb{R}^*$ (proporzionale sopra).

Classificazione delle forme quadratiche

i) Sia $q: V \to K$ una f. quadratica con $\dim_K V < \infty$.

Se $K = \bar{K}$ allora $\exists$ base $\{e_1, \dots, e_n\}$ di V tale che

$$q(\mathbb{E}x) = \underbrace{{}^t x D x}_{x_1^2 + \dots + x_r^2} \quad \text{dove} \quad D = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & \\ \hline & \end{array}\right), \; r = rg(q)$$

Se $K = \mathbb{R}$ allora $\exists$ base $\{e_1, \dots, e_n\}$ di V tale che

$$q(\mathbb{E}x) = {}^t x D x \quad \text{dove} \quad D = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{1}_p & & \\ \hline & -\mathbb{1}_q & \\ \hline & & \end{array}\right), \quad p+q = rg(q)$$

ii) Data $A \in M_n(K)$ simmetrica, $K = \bar{K}$.

Allora $\exists P \in GL_n(K)$ tc ${}^t PAP = D$.

oss Data una f. quadratica $q: V \to \mathbb{R}$

i) determinare qual è la matrice D in cui si può scrivere

ii) determinare una base $\mathbb{E}$ in cui q abbia matrice D.

iii) data $A \in M_n(\mathbb{R})$ determinare

- p, q tc per qualche $H \in GL_n(\mathbb{R})$: ${}^t HAH = D = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & & \\ & -\mathbb{1}_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$
- determinare H tc ${}^t HAH = D$.

iv) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ il teorema spettrale afferma che $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tc $P^{-1}AP = {}^t PAP = D$ (altrimenti posso usare l'algoritmo di Lagrange).

TEOREMA Sia $K=\overline{K}$ allora ci sono 3 classi di equiv. proiettive di coniche in $\mathbb{P}^2_K$ con rappresentanti le 3 forme canoniche:

$\mathcal{D}_3$: $x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$ CONICA GENERALE

$supp(\mathcal{D}_3)$ non contiene rette

$\mathcal{D}_2$: $x_0^2+x_1^2=0$ CONICA SEMPLIC. DEGENERE

$supp(\mathcal{D}_2)=\underbrace{\{x_0-ix_1=0\}}_{r_1}\cup\underbrace{\{x_0+ix_1=0\}}_{r_2}$

$\mathcal{D}_3$: $x_0^2=0$ CONICA DOPP. DEGENERE

$supp(\mathcal{D}_3)=H_0$ una retta

TEOREMA Sia $K=\mathbb{R}$, ci sono cinque classi di equiv. proiettiva di coniche $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, con le seguenti forme canoniche:

	$rg(\mathcal{D}_i)$	(p,q), $p\geq q$	$supp(\mathcal{D}_i)$
$\mathcal{D}_1$: $x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$	3	$(3,0)$	$\emptyset$
$\mathcal{D}_2$: $x_0^2+x_1^2-x_2^2=0$	3	$(3,1)$	$\neq\emptyset$, non contiene rette $supp(\mathcal{D}_2)\subset\mathbb{P}^2\setminus H_2$
$\mathcal{D}_3$: $x_0^2+x_1^2=0$	2	$(2,0)$	$[0:0:1]$
$\mathcal{D}_4$: $x_0^2-x_1^2=0$	2	$(1,1)$	$\underbrace{\{x_0=x_1\}}_{r_1}\cup\underbrace{\{x_0=-x_1\}}_{r_2}$
$\mathcal{D}_5$: $x_0^2=0$	1	$(1,0)$	H_0: $x_0=0$

dim Se $\mathcal{C}$ è la conica di equazione ${}^tXAX=0$ troviamo $P\in GL_3(\mathbb{R})$ tc ${}^tPAP=D$ diagonale e ${}^tPAP$ o $-{}^tPAP$ hanno la forma cercata. $\square$

OSS
- Se K è un campo qualsiasi (con $char(K)\neq 2$) allora una conica in $\mathbb{P}^2_K$ è proiett. equiv. a una conica di eq. $x_0^2+\alpha x_1^2+\alpha_2 x_2^2=0$.
- Equivalentemente, data una conica in $\mathbb{P}^2_K$ esiste un rif. proiettivo $\mathcal{R}$ di $\mathbb{P}^2_K$ tc $\mathcal{C}$ ha equazione

$$(x_0')^2+\alpha_1(x_1')^2+\alpha_2(x_2')^2=0.$$

esercizio In $\mathbb{P}^2_K$ con rif. canonico $\mathcal{R}$ consideriamo la conica $\mathcal{C}$ di eq.

$2x_0x_1 - 2x_0x_2 + 4x_1x_2 = 0$

i) classificare la conica $\mathcal{C}$ per $K = \mathbb{C}$ e $K = \mathbb{R}$ e indicare la f. canonica $\mathcal{D}$

ii) Determinare un rif. proiettivo $\mathcal{R}'$ tc nelle coordinate di $\mathcal{R}'$ la conica $\mathcal{C}$ sia in forma canonica.

iii) Determinare una proiettività $T : \mathbb{P}^2_K \longrightarrow \mathbb{P}^2_K$ tc $T^{-1}(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$

i) $\mathcal{C}$ ha matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(K)$

$\det(A) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow rg(\mathcal{C}) = 3$.

$K = \mathbb{C}$ $\quad \mathcal{D} : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ proiett. equiv. a $\mathcal{C}$

$K = \mathbb{R}$ $\quad$ o guardiamo la segnatura (dobbiamo fare i conti) altrimenti guardiamo il supporto.

$[1:0:0] \in Supp(\mathcal{C}) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{D} : x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ è proiett. equiv. a $\mathcal{C}$

ii) Troviamo con Lagrange una matrice diagonale congruente ad A.

$\mathcal{E} = (e_0\ e_1\ e_2)$ base canonica.

$f_0 = e_0 + e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad {}^t f_0 A f_0 = 2\beta(e_0, e_1) = 2 = \beta(f_0, f_0)$

$e_1' = e_1 - \dfrac{\beta(f_0, e_1)}{\beta(f_0, f_0)} f_0 = e_1 - \frac{1}{2}(e_0 + e_1) = -\frac{1}{2}e_0 + \frac{1}{2}e_1$

$e_2' = e_2 - \dfrac{\beta(f_0, e_2)}{\beta(f_0, f_0)} f_0 = e_2 - \frac{1}{2}(e_0 + e_1) = -\frac{1}{2}e_0 - \frac{1}{2}e_1 + e_2$

$\beta(e_1', f_0) = -\frac{1}{2}\beta(e_0 - e_1, e_0 + e_1) = 0$

$\beta(e_1', e_1') = \beta(-\frac{1}{2}e_0 + \frac{1}{2}e_1, -\frac{1}{2}e_0 + \frac{1}{2}e_1) = -\frac{2}{4}\beta(e_0, e_1) = -\frac{1}{2}$

$\beta(e_1', e_2') = \beta(-\frac{1}{2}e_0 + \frac{1}{2}e_1, -\frac{1}{2}e_0 - \frac{1}{2}e_1 + e_2) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$\beta(e_2', e_2') = \beta(-\frac{1}{2}e_0 - \frac{1}{2}e_1 + e_2, -\frac{1}{2}e_0 - \frac{1}{2}e_1 + e_2) = -\frac{5}{2}$

$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & -5/2 \end{pmatrix}$

$e_2'' = e_2' - \dfrac{\beta(e_2', e_1')}{\beta(e_1', e_1')} e_1' = e_2' + \dfrac{3/2}{1/2} e_1' = e_2' + 3e_1' = -2e_0 + e_1 + e_2$

$\beta(e_2'', f_0) = 0$

$\beta(e_2'', e_1') = 0$

$\beta(e_2'', e_2'') = 4$

$f_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -2 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^tPAP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1/2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

$\underline{K = \mathbb{C}}$ $\quad f_0' = \frac{1}{\sqrt{2}} f_0 \qquad f_1' = \sqrt{2}\, i\, f_1 \qquad f_2' = \frac{1}{2} f_2$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} i & -1 \\ 1/\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} i & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{F} = \mathbb{E}Q = (f_0' \; f_1' \; f_2') \qquad \mathcal{R}' = RP(\mathbb{F})$$

In $\mathcal{R}'$ $\mathcal{C}$ ha equazione $(x_0')^2 + (x_1')^2 + (x_2')^2 = 0$, cioè ${}^tQAQ = I_3 = \mathbb{1}_3$

$\underline{K = \mathbb{R}}$ $\quad f_0'' = \frac{1}{\sqrt{2}} f_0 \qquad f_1'' = \frac{1}{2} f_2 \qquad f_2'' = \sqrt{2} f_1$

$$S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{F}'' = \mathbb{E}S \qquad \mathcal{R}'' = \mathcal{R}P(\mathbb{F}'')$$

in $\mathcal{R}''$ $\mathcal{C}$ ha equazione $(x_0'')^2 + (x_1'')^2 - (x_2'')^2 = 0$

cioè $\quad {}^tSAS = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

iii) Se $\mathcal{C}$ ha eq. ${}^tx A x = 0$ allora $T^{-1}(\mathcal{C})$ ha eq. ${}^tx({}^tPAP)x = 0$

$T : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$

$[x_0 : x_1 : x_2] \mapsto \left[P \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right]$

CONICHE AFFINI

def classe di polinomi $F(x,y) \in K[x,y]_2$ a meno di K^*

$supp(\mathcal{C}) = supp([F]) = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2_K \mid F(x,y) = 0\} \subset \mathbb{A}^2_K$

un'eq. di $\mathcal{C}$ è $F(x,y) = 0$.

$$F(x,y) = \underbrace{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}_{\text{PARTE QUADRATICA}} + \underbrace{2a_{01}x + 2a_{02}y}_{\text{PARTE LINEARE}} + \underbrace{a_{00}}_{\text{TERMINE NOTO}}$$

sia $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix}$, allora si ha

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & {}^t\underline{a} \\ \underline{a} & A_0 \end{pmatrix}$$

$0 \neq A_0 \in M_2(K)$

$0 \neq A \in M_3(K)$

$$F(x,y) = {}^t\tilde{x} A \tilde{x} = a_{00} + 2\,{}^t\underline{a}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x\ y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

def se $\mathcal{C}$ conica di eq ${}^t\tilde{x}A\tilde{x} = 0$, allora chiamiamo RANGO di C $rg(\mathcal{C}) = rg(A)$

se $rg(\mathcal{C}) = 3$ $\mathcal{C}$ è NON DEGENERE

se $rg(\mathcal{C}) = 2$ $\mathcal{C}$ è SEMPLIC. DEGENERE

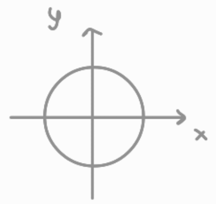
se $rg(\mathcal{C}) = 1$ $\mathcal{C}$ è DOPP. DEGENERE

def se $rg(A_0) = 2$ $\mathcal{C}$ è CONICA A CENTRO

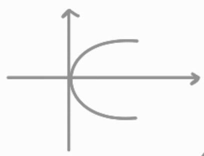
se $rg(A_0) = 1$ $\mathcal{C}$ è PARABOLA

esempi

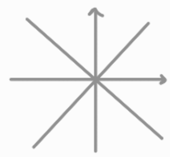
$A = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $rg(A) = 3$ $rg(A_0) = 2$ $x^2 + y^2 - 1 = 0$



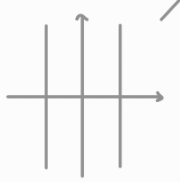
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $rg(A) = 3$ $rg(A_0) = 1$ $y^2 - 2x = 0$



$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $rg(A) = 2$ $rg(A_0) = 2$ $x^2 - y^2 = 0$



$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $rg(A) = 2$ $rg(A_0) = 1$ $x^2 - 1 = 0$



oss Se $\mathcal{C}=[F]$ con $F(x,y)={}^t\tilde{x}A\tilde{x}$ consideriamo la conica proiettiva $\bar{\mathcal{C}}$ di eq. $\bar{F}(x_0,x_1,x_2)=(x_0\ x_1\ x_2)\,A\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}=0$

def $\bar{\mathcal{C}}=[\bar{F}]$ è detta ZERESIMA PROIETTIFICAZIONE di $\mathcal{C}$

prop Se $supp(\mathcal{C})\subset \mathbb{A}^2_K$ e $supp(\bar{\mathcal{C}})\subset \mathbb{P}^2_K$ allora $j_0:\mathbb{A}^2_K\longrightarrow \mathbb{P}^2_K\setminus H_0$

$j_0(supp(\mathcal{C}))=supp(\bar{\mathcal{C}})\setminus H_0=supp(\bar{\mathcal{C}})\cap \mathbb{P}^2_K\setminus H_0$

dim $\subseteq$ ovvio : $F(x,y)=0=\bar{F}(1,x,y)=0$

$\Rightarrow j_0(supp(\mathcal{C}))\subseteq supp(\bar{\mathcal{C}})\cap(\mathbb{P}^2\setminus H_0)$

$\supseteq$ Sia $[x_0:x_1:x_2]\in supp(\bar{\mathcal{C}})\cap(\mathbb{P}^2\setminus H_0)$ $\quad x_0\neq 0$

$\quad\; \shortparallel$

$\left[1:\frac{x_1}{x_0}:\frac{x_2}{x_0}\right]\in supp(\bar{\mathcal{C}})$

$\Rightarrow \left(1\ \frac{x_1}{x_0}\ \frac{x_2}{x_0}\right)A\begin{pmatrix}1\\x_1/x_0\\x_2/x_0\end{pmatrix}=0$

quindi $F\left(\frac{x_1}{x_0},\frac{x_2}{x_0}\right)=0$ e $(x_0:x_1:x_2)=j_0\left(\frac{x_1}{x_0},\frac{x_2}{x_0}\right)$

def Definiamo PUNTI IMPROPRI di $\mathcal{C}$ punti in $supp(\bar{\mathcal{C}})\cap H_0$.

Sono al più 2 : $H_0\cap supp(\bar{\mathcal{C}})=\{[0:x_1:x_2]\mid (0\ x_1\ x_2)\,A\begin{pmatrix}0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}=0\}$

$=\{[0:x_1:x_2]\mid \underbrace{(x_1\ x_2)\,A_0\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}}_{\text{polinomio omogeneo di grado 2}}=0\}$

$\Rightarrow$ ci sono al più 2 soluzioni omogenee

prop Sia $F\in k[x:y]_d$ pol. omogeneo di grado d, allora $F(x,y)=0$ ha al più d soluzioni omogenee non banali, contate con molteplicità.

dim $F(x,y)=\sum_{i=0}^{d} c_i x^i y^{d-i}$

$\deg(F)=d>0 \Rightarrow \exists i$ tc $c_i\neq 0$

Siccome F è omogeneo, $F(a,b)=0\Rightarrow F(ta,tb)=0\ \forall t\in K$

Distinguo due casi:

1) $(1,0)$ non è radice $\Rightarrow c_d\neq 0$.

Allora $F(t,1)$ è un polinomio in una variabile di grado d, dunque ha al più d radici

2) $(1,0)$ è radice. Sia $r \leq d$ la sua molteplicità, allora

$c_d = c_{d-1} = \dots = c_{d-r+1} = 0$

$\Rightarrow F(x,y) = y^r \cdot G(x,y)$ dove G è omogeneo di grado $d-r$.

$\Rightarrow G(1,y)$ è un pol. in una variabile di grado $d-r$ e dunque ha $d-r$ radici.

<u>esempi</u> in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ $\quad \mathcal{C}_1 : x^2+y^2-1=0 \qquad \overline{\mathcal{C}}_1 : x^2+y^2-z^2=0$

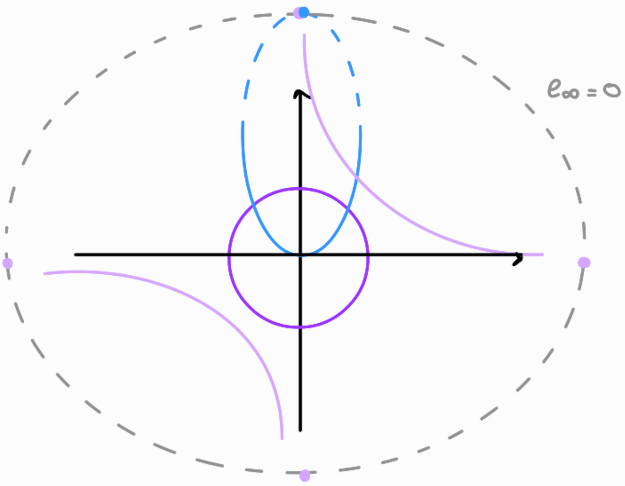
$supp(\overline{\mathcal{C}}_1) \cap H_0 = \{[0:x:y] \mid x^2+y^2=0\} = \emptyset$

$\mathcal{C}_2 : x^2-y=0 \qquad \overline{\mathcal{C}}_2 : x^2-yz=0$

$supp(\overline{\mathcal{C}}_2) \cap H_0 = \{[0:x:y] \mid x^2=0\} = [0:0:1]$

$\mathcal{C}_3 : xy-1=0 \qquad \overline{\mathcal{C}}_3 : xy-z^2=0$

$supp(\overline{\mathcal{C}}_3) \cap H_0 = \{[0:x:y] \mid xy=0\} = \{[0:0:1],[0:1:0]\}$



Si ha dunque una biezione:

$\{$coniche affini in $\mathbb{A}^2_K\}$ $\longleftrightarrow$ $\{$coniche proiettive in $\mathbb{P}^2_K$ / $supp(\mathcal{D}) \not\supseteq H_0\}$

$\mathcal{C} : {}^t\tilde{x}A\tilde{x}=0 \longmapsto \overline{\mathcal{C}} : {}^tzAz=0 \qquad z = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & & \\ a_{20} & A_0 & \end{pmatrix}$

${}^t\tilde{x}A\tilde{x}=0 \longleftarrow \mathcal{D} : {}^tzAz=0$

$F(1,x,y)=0 \qquad F(x_0,x_1,x_2)=0$

<u>esercizio</u> verificare che $supp(\mathcal{D}) \not\supseteq H_0 \iff F(1,x,y)$ è pol. di grado 2.

$supp(\mathcal{D}) \supseteq H_0 \iff F(x_0,x_1,x_2) = x_0 \tilde{F}(x_0,x_1,x_2)$

Classificazione a meno di trasformazioni affini

$f : \mathbb{A}^2_K \longrightarrow \mathbb{A}^2_K$

$Q = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto f(Q) = M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ $\qquad M \in GL_2(K) \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in K^2$

$GL_2(K) \ltimes K^2$ cioè $f_{N,d} \circ f_{M,c} = f_{NM, Nc+d}$

(Tesi ⊴ AFF)

ovvero se $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & & \\ c_2 & & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 1 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & M \end{pmatrix}$, allora

$$\tilde{M}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$f : \mathbb{A}^2_K \longrightarrow \mathbb{A}^2_K \quad \rightsquigarrow \quad f^{-1}(\mathcal{C})$

$\mathcal{C}$ conica affine

se $\mathcal{C} : F(x,y) = 0$ e $f = f_{M,c}$

$$f^{-1}(\mathcal{C}) : F\left(M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c\right) = 0$$

chiaramente $\operatorname{supp}(F^{-1}(\mathcal{C})) = F^{-1}(\operatorname{supp}(\mathcal{C}))$

$F(x,y) = {}^t\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{M}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$

$$f^{-1}(\mathcal{C}) = {}^t\left(\tilde{M}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}\right) A \, \tilde{M}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} {}^t\tilde{M} A \tilde{M}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ se $\mathcal{C}$ ha matrice A e f ha matrice $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & & M \end{pmatrix}$, allora $f^{-1}(\mathcal{C})$ ha matrice ${}^t\tilde{M} A \tilde{M}$

def
- Due matrici si dicono **AFFINEMENTE EQUIVALENTI** se $\exists$ un'affinità che trasforma una nell'altra
- Una proprietà che dipende solo dalla classe di equiv. affine è un' **INVARIANTE AFFINE** della conica.

prop $\mathcal{C}: {}^t\tilde{x}A\tilde{x}=0$ $\quad \mathcal{D}: {}^t\tilde{x}B\tilde{x}=0$ sono affinem. equiv. $\iff \exists f=f_{M,c} \in Aff(\mathbb{A}^2_K)$, $\alpha \in K^*$ tc $\alpha B = {}^t\tilde{M}A\tilde{M}$ con $\tilde{M}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & M & \end{pmatrix}$

oss • $rg(\mathcal{C}) = rg(A)$ è un'invariante affine

• $rg(A_0)$ è un'invariante affine

$${}^t\tilde{M}A\tilde{M} = \begin{pmatrix} a_{00} & * & * \\ * & {}^tMA_0M & \\ * & & \end{pmatrix}$$

ripeto $f: \mathbb{A}^n$ affinità $\iff$ $RA(O',\mathbb{E}')$

$\varphi(\mathbb{E}) = \mathbb{E}'M'$, $M' \in M_n(K)$

$f(O') = C' \in \mathbb{A}$

$$f(Q') = f(O' + \overrightarrow{O'Q'}) = C' + \varphi(\overrightarrow{O'Q'}) = C' + M'(\overrightarrow{O'Q'}_{\mathbb{E}})$$

In particolare, un'omotetia di centro P_0 e dilatazione $d \in K^*$

$$f(Q) = f(P_0 + \overrightarrow{P_0Q}) = P_0 + d\,\overrightarrow{P_0Q}$$

In coordinate canoniche $P_0, Q \in \mathbb{A}^n_K$, $P_0 = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, $Q_1 = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix} \qquad f(Q) = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix} = (1-d)\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

def • Una SIMMETRIA rispetto a un punto P_0 è un'omotetia $\omega_{P_0,-1}$ con centro P_0 e dilatazione -1.

• Una conica è SIMMETRICA rispetto a P_0 se $(\omega_{P_0,-1})^{-1}\mathcal{C} = \mathcal{C}$

prop Sia $\mathcal{C}$ una conica affine in $\mathbb{A}^2_K$. Allora $\mathcal{C}$ è una conica a centro $\iff$ $\mathcal{C}$ ha un unico centro di simmetria. Inoltre in questo caso il centro di simmetria è $C_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ tc $A_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \underline{a} = 0$.

dim $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \underline{X}_0$ $\quad \omega_{P_0,-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

ha matrice $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x_0 & -1 & 0 \\ 2y_0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL_3(K)$

se $\mathcal{C}$ ha matrice $A = \begin{pmatrix} a_{00} & {}^t\underline{a} \\ \underline{a} & A_0 \end{pmatrix} \in M_3(K)$

$${}^t\tilde{M} A \tilde{M} = \left(\begin{array}{c|c} a_{00} + 4\,{}^t\underline{x}_0 \underline{a} + 4\,{}^t\underline{x}_0 A_0 \underline{x}_0 & -{}^t\underline{a} - 2\,{}^t\underline{x}_0 A_0 \\ \hline -\underline{a} - 2A_0 \underline{x}_0 & A_0 \end{array}\right)$$

$\mathcal{C}$ ha un'unico centro di simmetria in P_0

$\iff \exists!\, P_0 \in \mathbb{A}^2_K$ tc $(\omega_{P_0,-1})(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$

$\iff \exists!\, x_0 \in M_{2,1}(K)$ tc ${}^t\tilde{M} A \tilde{M} = \alpha A$ $\exists\, \alpha \in K^*$

$\iff \exists!\, x_0$ tc $\begin{cases} a_{00} = a_{00} + 4\,{}^t\underline{x}_0 \underline{a} + 4\,{}^t\underline{x}_0 A_0 \underline{x}_0 \\ -\underline{a} - 2A_0 \underline{x}_0 = \underline{a} \end{cases}$

$\iff \exists!\, x_0$ tc $A_0 x_0 + \underline{a} = 0$

$\iff rg(A_0) = 2$

$\iff \mathcal{C}$ è una conica a centro $\square$

__corollario__ Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due coniche a centro aff. equiv. con P_0 centro di $\mathcal{C}$ e Q_0 centro di $\mathcal{D}$. Allora se $f: \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^2$ tc $\mathcal{D} = f^{-1}(\mathcal{C})$, allora $f(Q_0) = P_0$

__dim__ $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = P_0$ centro di $\mathcal{C}$: $A_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \underline{a} = 0$

$\mathcal{C}: (1\ x\ y)\, A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{00} & {}^t\underline{a} \\ \underline{a} & A_0 \end{pmatrix}$

$f: \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \tilde{M} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & M \end{pmatrix}$ $\quad M \in GL_2(K)$

$\Rightarrow \mathcal{D}$ ha matrice

$${}^t\tilde{M} A \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & {}^tc \\ 0 & {}^tM \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & {}^t\underline{a} \\ \underline{a} & A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & M \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{00} + {}^t\underline{a} c + {}^tc \underline{a} + {}^tc A_0 c & {}^t\underline{a} M + {}^tc A_0 M \\ {}^tM \underline{a} + {}^tM A_0 c & {}^tM A_0 M \end{pmatrix}$$

$f^{-1}(P_0)$ centro per $\mathcal{D}$: $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

$f^{-1}(P_0) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - M^{-1} c$

$$({}^tM A_0 M)\left(M^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - M^{-1} c\right) = {}^tM A_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + (-{}^tM A_0 c)$$

$$= -{}^tM \underline{a} - {}^tM A_0 c \quad \square$$

Classificazione delle coniche affini

TEOREMA i) Se $K=\overline{K}$ allora la classificazione è la seguente

$rg_0(\mathcal{C})$ \ $rg(\mathcal{C})$	3	2	1
2	a centro generale $x^2+y^2-1=0$	a centro sempl. degenere $x^2+y^2=0$	
1	parabola generale $y^2-x=0$	parabola sempl degenere $y^2-1=0$	parabola dopp. degenere $y^2=0$

ii) Se $K=\mathbb{R}$ allora la classificazione è la seguente

$sg(A_0) \gtrless 0$

$\det({}^tMA_0M) = \det(M)^2\det(A_0)$ il segno di $\det(A_0)$ è un invariante aff.

$sg(A_0)$ \ $rg(\mathcal{C})$	3	2	1
>0	ellisse generale $x^2+y^2-1=0$ / ellisse generale a punti immaginari $x^2+y^2+1=0$	ellisse degenere $x^2+y^2=0$	
<0	iperbole generale $x^2-y^2-1=0$	iperbole degenere $x^2-y^2=0$	
$=0$	parabola generale $y^2-x=0$	parabola semplic. degenere $y^2-1=0$ / parabola semplic. dep. a punti immaginari $y^2+1=0$	parabola dopp. degenere $y^2=0$

dim I) Diagonalizziamo A_0 (Lagrange).

$\mathcal{C}: \ {}^t\tilde{x} A \tilde{x} = 0 \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a_{00} & {}^t\underline{a} \\ \underline{a} & A_0 \end{pmatrix}$

Troviamo M tc ${}^tMA_0M = D$ diagonale

$\Rightarrow \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$

${}^t\tilde{M}A\tilde{M}$ non ha termine xy

II) Eliminiamo la parte lineare e/o il termine noto

(a) Se $\mathcal{C}$ è a centro $A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad a_{11} \ a_{22} \neq 0$

Consideriamo la traslazione $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{01}/a_{11} & 1 & 0 \\ -a_{02}/a_{22} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$${}^t\tilde{M}A\tilde{M} = \begin{pmatrix} \overset{d_{00}}{\underset{\shortparallel}{}} a_{00} - \frac{a_{01}^2}{a_{11}} - \frac{a_{02}^2}{a_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \text{ è diagonale}$$

inoltre $\det(A) = \det({}^t\tilde{M}A\tilde{M})$

$$f^{-1}\mathcal{C}: \ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + \left(a_{00} - \frac{a_{01}^2}{a_{11}} - \frac{a_{02}^2}{a_{22}}\right) = 0$$

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + d_{00} = 0$$

(b) Se $\mathcal{C}$ non è a centro $A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & 0 & 0 \\ a_{02} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}$

possiamo supporre $a_{11} = 0$ e $a_{22} \neq 0$.

Consideriamo la traslazione $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{02}}{a_{22}} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$${}^t\tilde{M}A\tilde{M} = \begin{pmatrix} \overset{d_{00} =}{} a_{00} - \frac{a_{02}^2}{a_{22}} & a_{01} & 0 \\ a_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$f^{-1}(\mathcal{C}) = a_{22}y^2 + 2a_{01}x + \left(a_{00} - \frac{a_{02}^2}{a_{22}}\right) = 0$$

b.1) Se $a_{00} = 0$

$$f^{-1}(\mathcal{C}): \ a_{22}y^2 + d_{00} = 0$$

b.2) se $a_{00} \neq 0$

traslano con $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -d_{00}/2a_{01} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad x = x' - \frac{d_{00}}{2a_{01}}, \quad y = y'$$

$$\Rightarrow \quad a_{22}(y')^2 + 2a_{01}\left(x' - \frac{d_{00}}{2a_{01}}\right) + d_{00} = 0$$

$$f^{-1}(\mathcal{C}): \quad a_{22}(y')^2 + 2a_{01}(x') = 0, \qquad a_{22}a_{01} \neq 0$$

$$\text{e} \qquad \det\begin{pmatrix} 0 & a_{01} & 0 \\ a_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$$

III) Normalizziamo.

Possiamo supporre che $a_{00} = -1$ oppure $a_{00} = 0$.

(a) Conica a centro : $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{00} = 0$

<u>$K = \overline{K}$</u> operiamo $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{a_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{a_{22}} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + a_{00} = 0$$

<u>$K = \mathbb{R}$</u> operiamo $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{|a_{11}|} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{|a_{22}|} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \pm x^2 \pm y^2 + a_{00} = 0$$

(b) Parabole :

<u>$K = \overline{K}$</u> 1) $a_{22}y^2 + a_{00} = 0$

$$y = \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}y' \quad \Rightarrow \quad (y')^2 + a_{00} = 0$$

2) $a_{22}y^2 + 2a_{01}x = 0$

$$y = \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}y', \quad x = \frac{x'}{-2a_{01}} \quad \Rightarrow \quad (y')^2 - x^2 = 0$$

<u>$K = \mathbb{R}$</u> 1) $\pm (y)^2 + a_{00} = 0$

2) $\pm (y)^2 - x = 0$

$\square$

CONICHE EUCLIDEE

L'equazione di una conica euclidea è un polinomio $F(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ di grado 2. Consideriamo $\mathbb{E}^2$ lo sp. euclideo canonico con rif. euclideo canonico, cioè i punti sono $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{E} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ e

$$\mathrm{Cong}(\mathbb{E}^2) = O_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$$

$$f: \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} \qquad \tilde{M} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ c & M\end{pmatrix}$$

__def__ Gli invarianti per congruenza (isometria) sono detti **INVARIANTI METRICI** delle coniche euclidee

__esempio__
- $rg(\mathcal{C})$, $rg_0(\mathcal{C})$, $sgn(\det(A_0))$
- $\dfrac{\det(A)^2}{\det(A_0)^3} \in \mathbb{R} \setminus \{\infty\} \cup \{\text{indeterm.}\}$
- $\dfrac{\det(A_0)}{Tr(A_0)^2}$
- $\dfrac{\det(A)}{Tr(A_0)^3}$

__TEOREMA__ Le forme canoniche di coniche euclidee in $\mathbb{E}^2$ sono, al variare di $a, b, p \in \mathbb{R}^+$:

$\mathcal{C}_1: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ $\quad a \geq b > 0$ $\quad$ **ELLISSE GEN. A PUNTI REALI**

$\mathcal{C}_2: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ $\quad a \geq b > 0$ $\quad$ **ELLISSE GEN. A PUNTI IMMAGINARI**

$\mathcal{C}_3: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ $\quad a > 0, b > 0$ $\quad$ **IPERBOLE GENERALE**

$\mathcal{C}_4: y^2 - 2px = 0$ $\quad p > 0$ $\quad$ **PARABOLA GENERALE**

$\mathcal{C}_5: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ $\quad a \geq b > 0$ $\quad$ **ELLISSE DEGENERE**

$\mathcal{C}_6: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad a \geq b > 0$ IPERBOLE DEGENERE

$\mathcal{C}_7: y^2 - a^2 = 0 \qquad a > 0$ PARABOLA SEMPLIC. DEGENERE (2 punti reali)

$\mathcal{C}_8: y^2 + a^2 = 0 \qquad a > 0$ PARABOLA SEMP. DEG. A PUNTI IMMAGINARI

$\mathcal{C}_9: y^2 = 0$ PARABOLA DOPP. DEGENERE

<u>dim</u> Per quanto visto sopra, ogni conica euclidea è congruente ad una conica con equazione:

- $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{00} = 0$ con $a_{00} = 0$ o $a_{00} = -1$
- $a_{22}y^2 + a_{00} = 0$
- $a_{22}y^2 + 2ax = 0$

Resta da mostrare che sono 2 a 2 non congruenti. Consideriamo gli invarianti metrici

$$\frac{\det(A)^2}{\det(A_0)^3}, \quad \frac{\det(A_0)}{Tr(A_0)^2}, \quad \frac{\det(A)}{Tr(A_0)^3}$$

Mostriamo che le coniche in $\mathcal{C}_1$ sono a 2 a 2 non congruenti:

$\mathcal{C}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad a \geq b > 0$

$\mathcal{D}: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0 \quad \alpha \geq \beta > 0$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1/a^2 & \\ & & 1/b^2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1/\alpha^2 & \\ & & 1/\beta^2 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = -\frac{1}{a^2b^2}, \ \det(A_0) = \frac{1}{a^2b^2}$

$Tr(A_0) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$

$\det(B) = -\frac{1}{\alpha^2\beta^2}, \ \det(B_0) = \frac{1}{\alpha^2\beta^2}$

$$\frac{\det(A)^2}{\det(A_0)^3} = a^2b^2 = \alpha^2\beta^2 = \frac{\det(B)^2}{\det(B_0)^3} \Rightarrow ab = \alpha\beta = c \in \mathbb{R}^+$$

$$\frac{\det(A_0)}{Tr(A_0)^2} = a^2b^2 \cdot \frac{1}{(a^2+b^2)^2} = \alpha^2\beta^2 \frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)^2} = \frac{\det(B_0)}{Tr(B_0)^2}$$

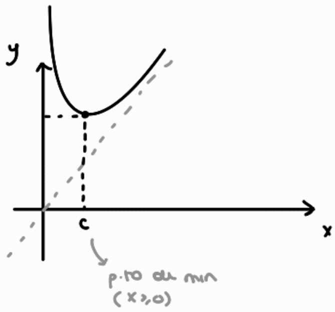
$$\Rightarrow \begin{cases} ab=\alpha\beta & =c \neq 0 \\ \alpha^2+\beta^2=a^2+b^2 & =R\neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a^2+\frac{c^2}{a^2} = \alpha^2+\frac{c^2}{\alpha^2}$$

$$\frac{(a^2)^2+c^2}{a^2} = \frac{(\alpha^2)^2+c^2}{\alpha^2}$$

Consideriamo la funzione $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \longmapsto \frac{x^2+c}{x}$$



$a \geq b \Rightarrow a \geq \frac{c}{a} \Rightarrow a^2 \geq c$

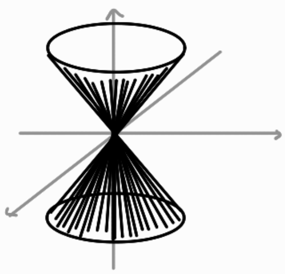
pertanto

$$\frac{(a^2)^2+c}{a^2} = \frac{(\alpha^2)^2+c}{\alpha^2} \Rightarrow a=\alpha \quad e \quad b=\frac{c}{a}=\beta \qquad \square$$

esercizio Mostrare che in ogni classe $\mathcal{C}_i$ di coniche le equazioni definiscono delle coniche 2 a 2 non congruenti.

Proprietà geometriche delle coniche euclidee

In $\mathbb{R}^3$ consideriamo il cono $C: \quad x^2+y^2-\alpha^2z^2=0 \quad \alpha>0$



Intersechiamo il cono con il piano $\pi: z=Ay+B$

A=0 $\cap$ è circonferenza $x^2+y^2=(\alpha B)^\alpha$ di raggio αB

$$\frac{x^2}{(\alpha B)^2}+\frac{y^2}{(\alpha B)^2}=1$$

A≠0 $x^2+(1-\alpha^2A)y^2-2\alpha^2ABy-\alpha^2B^2=0$

si ottengono ellissi, iperbole e parabole $(A=\frac{1}{\alpha})$

B=0 $x^2+(1-\alpha^2A^2)y^2=0$ degenere

Geometria delle coniche a punti reali

1) $\mathcal{C}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ con $a \geq b>0$

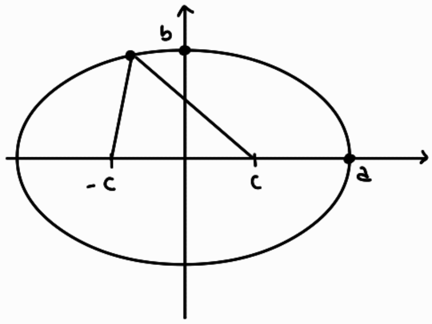
$c=\sqrt{a^2-b^2}$

$(c,0),(-c,0)$ FUOCHI

$e=\frac{c}{a}$ ECCENTRICITÀ

rette $x=\pm\frac{a}{c}$ DIRETTRICI

$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$



eq. parametrica: $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi)$

2) $\mathcal{C}: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $a,b>0$

- $\mathcal{C}$ è simmetrica rispetto ai due assi
- $\mathcal{C}$ non ha punti sull'asse delle y
- $\mathcal{C}$ incontra l'asse delle x in 2 punti $(a,0),(-a,0)$
- $\mathcal{C}$ non ha soluzioni per $|x|<a$
- $\mathcal{C}$ ha due rami:

  $supp(\mathcal{C})=(supp(\mathcal{C})\cap\mathcal{E}_+)\sqcup(supp(\mathcal{C})\cap\mathcal{E}_-)$

  dove

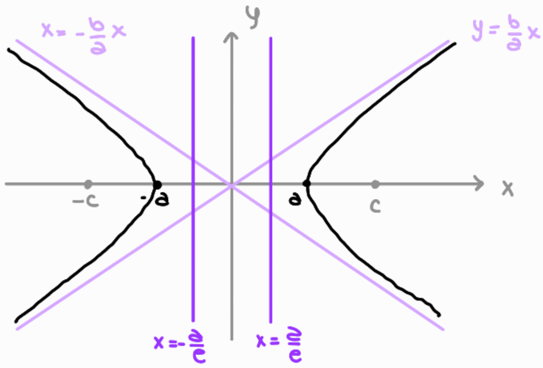
  $\mathcal{E}_+=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq a\}$ $\mathcal{E}_-=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\leq -a\}$

$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \Rightarrow \left|\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right|<\left|\frac{bx}{a}\right|$

$c=\sqrt{a^2+b^2}$

$(c,0),(-c,0)$ fuochi

$1< e=\frac{c}{a}$ eccentricità



eq. parametriche: $\begin{cases} x=a\cosh t \\ y=b\sinh t \end{cases}$ e $\begin{cases} x=-a\cosh t \\ y=b\sinh t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

prop L'ellisse (iperbole) ha per supporto il luogo dei punti $P \in \mathbb{R}^2$ la cui distanza dai due fuochi hanno somma (modulo della differenza) costante $= 2a$.

dim $F=(c,0)$ $\quad F'=(c',0)$ $\quad P=(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$|d(P,F) \pm d(P,F')| = 2a$$

$$\iff \left| \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm \sqrt{(x+c)^2+y^2} \right| = 2a$$

$$\iff x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

$$\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1 \qquad \square$$

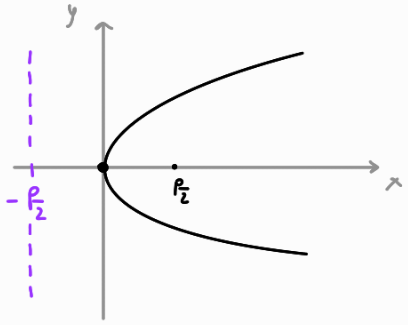
3) $\mathcal{P}: \; y^2 = 2px \qquad p>0$

$F=\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ fuoco

$x = \pm \, p/2$ direttrice

$e=1$ eccentricità

equazioni parametriche : $\begin{cases} x = t^2/2p \\ y = t \end{cases}$



prop L'ellisse, l'iperbole, la parabola hanno per supporto il luogo dei punti la cui distanza da un fuoco e dalla rispettiva direttrice hanno rapporto costante $= e$.

dim $P=(x,y)$ $\quad F=(\pm c, 0)$ $\qquad$ direttrice :

$$c = \begin{cases} \sqrt{a^2-b^2} & \text{ellisse} \\ \sqrt{a^2+b^2} & \text{iperbole} \\ p/2 & \text{parabola} \end{cases} \qquad \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} x = \frac{a}{e} \\ \} \; x = -\frac{p}{2} \end{matrix}$$

$$\frac{\sqrt{(x \mp c)^2 + y^2}}{\left| x \mp \frac{a}{e} \right|} = e \iff \frac{\sqrt{(x \mp c)^2+y^2}}{|ex \mp a|} = 1$$

valida anche per $e=0$ (circonferenza)

Sviluppando ottengo

$$a^2(1-e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

e sostituendo con i dati che ho ottengo proprio le eq. delle rispettive coniche $\square$

Trattare coniche

1° passo $\mathcal{C}$ conica a centro $\iff \det(A_0) \neq 0$

il centro è $C = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ tc $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + a = 0$

ricordiamo $(1\ x\ y)\begin{pmatrix} a_{00} & {}^t a \\ a & \boxed{A_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$

2° passo A_0 simmetrica $\Rightarrow$ ortogonalmente diagonalizzabile

A_0 ammette due autovalori (λ, μ) con $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ tc $\det(A_0) = \lambda\mu$

$$\begin{cases} \mathcal{C} \text{ ellisse} \iff \lambda\mu > 0 \\ \mathcal{C} \text{ iperbole} \iff \lambda\mu < 0 \\ \mathcal{C} \text{ parabola} \iff \lambda\mu = 0 \end{cases}$$

$\underline{\lambda \neq \mu}$ $V_\lambda(A_0), V_\mu(A_0)$ sono due rette perpendicolari

$\underline{\lambda = \mu}$ $\mathcal{C}$ circonferenza e $V_\lambda(A_0) = \mathbb{R}^2$

oss se prendiamo un'altra equazione per la conica $\mathcal{C}$ otteniamo $A' = \alpha A$ e $A_0' = \alpha A_0$. Gli autovalori cambiano, ma gli autospazi rimangono gli stessi.

$v \in V_\lambda(A_0) \iff A_0 v = \lambda v \iff \alpha A_0 v = \alpha\lambda v \iff v \in V_{\alpha\lambda}(\alpha A_0)$

def Siano $E_\lambda(\mathcal{C}), E_\mu(\mathcal{C})$ i due **AUTOSPAZI** di $\mathcal{C}$

Se $\mathcal{C}$ è conica a centro, $C_0 \in \mathbb{R}^2$ centro di $\mathcal{C}$:

- se $\mu \neq \lambda$, allora le due rette $C_0 + E_\lambda(\mathcal{C})$, $C_0 + E_\mu(\mathcal{C})$ sono dette **ASSI** della conica $\mathcal{C}$
- se $\mu = \lambda$, ogni retta per C_0 è "asse della conica"

prop Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro, sia v un asse della conica. Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la simmetria di asse v. Allora $f^{-1}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$

prop Sia $\mathcal{C}$ una parabola euclidea. Sia $E_0(\mathcal{C}) \subset \mathbb{R}^2$ l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 0$. Esiste una e una sola retta affine r con direzione $E_0(\mathcal{C})$ tale che se $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ha simmetria con asse r, allora $f^{-1}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.
Questa è detta **ASSE DI SIMMETRIA** della parabola $\mathcal{C}$.
Inoltre, se $\mathcal{C}$ non è degenere, $\mathrm{supp}(\mathcal{C}) \cap r$ è un solo punto, detto **VERTICE** di $\mathcal{C}$.

esercizio $\mathcal{C}: x^2 + 4xy + 4y^2 + 4y = 0$

1) Di che tipo di conica si tratta

2) Determina assi di simmetria, centro e vertice

3) Determina forma canonica

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\det(A) = -4 \Rightarrow \mathcal{C}$ è non degenere

$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\det(A_0) = 0 \Rightarrow \mathcal{C}$ è parabola generale

2) Autospazi $E_0(\mathcal{C}) = V_0(A_0) = \ker(A_0) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$

$A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $E_5(\mathcal{C}) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$

$\Rightarrow$ asse di simmetria ha direzione $\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$.

Consideriamo il fascio di rette parallele con direzione $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$:

$2x - y + c = 0$. Cerchiamo $c \in \mathbb{R}$ tc la retta $\cap$ supp$(\mathcal{C})$ in un punto solo

$$r \cap \text{supp}(\mathcal{C}) = \begin{cases} y = 2x + c \\ x^2 + 4xy + 4y^2 + 4y = 0. \end{cases}$$

$$(x+2y)^2 + 4y \overset{y=2x+c}{=} (5x+2c)^2 + 8x + 4c = 25x^2 + (20c+8)x + 4c(1+c) = 0$$

$$\Delta = (20c+8)^2 - 400c(1+c) \overset{\text{un unico punto}}{=} 0 \qquad \Rightarrow c = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow V = \left(-\frac{12}{25}, -\frac{4}{25}\right)$$

asse di simmetria: $V + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ di equazione: $x + 2y + \frac{4}{5} = 0$

3) Per la forma canonica possiamo osservare che la matrice $M = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ha 2 vettori ortogonali e normalizzati.

Cambiamo variabile $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y')$ $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y')$

$$F(x', y') = \frac{1}{5}(2x'+y')^2 + \frac{4}{5}(2x'+y')(-x'+2y') + \frac{4}{5}(-x'+2y')^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}(-x'+2y') =$$

$$= \frac{1}{5}(25y'^2 - 4\sqrt{5}x' + 8\sqrt{5}y')$$

Devo ricondurmi alla forma $y^2 - 2px = 0$, dunque il termine $8\sqrt{5}y$ deve sparire nella traslazione.

La forma canonica è $y^2 - 2\left(\frac{2\sqrt{5}}{25}\right)x = 0$

se $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si ha $f^{-1}(\mathcal{C}) : 25y^2 - 4\sqrt{5}x + 8\sqrt{5}y = 0$

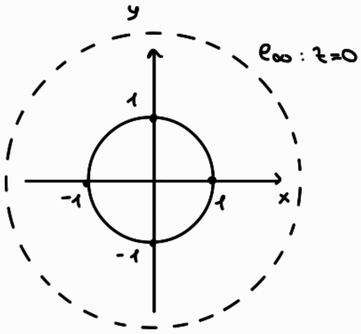
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

esercizio Trovare una traslazione t tc $t^{-1}(f^{-1}(\mathcal{C})) : y^2 - 2\left(\frac{2\sqrt{5}}{25}\right)x = 0$

<u>esercizio</u> (omogeneizzazione e disomogeneizzazione)

$\mathcal{C}: x^2+y^2-z^2=0 \quad \in \mathbb{P}^2_K$

$[x:y:z]$ punti proiettivi

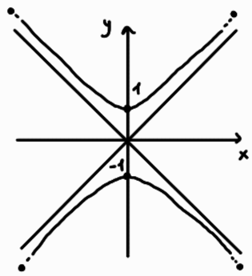


i) $\{[x:y:z] : z \neq 0\} = \mathbb{P}^2 \setminus \ell_\infty$

$j_2 : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2 \setminus \ell_\infty$

$(s,t) \longmapsto [s:t:1]$

$j_2^{-1}(\mathcal{C}) : s^2+t^2-1=0$



ii) $j_0 : (s,t) \longmapsto [1:s:t] \in \mathbb{P}^2 \setminus [x=0]$

$j_0^{-1}(\mathcal{C}) = 1+s^2-t^2=0$

iii) $j_1 : (s,t) \longmapsto [s:1:t] \in \mathbb{P}^2 \setminus [y=0]$

$j_1^{-1}(\mathcal{C}) = s^2+1-t^2=0$

Abbiamo disomogeneizzato rispetto ai 3 iperpiani fondamentali.

Se H_∞ non è iperpiano fondamentale!

Consideriamo H iperpiano (retta) : $x+by+cz=0$

$\mathbb{P}^2 \setminus H = \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2_K \mid x+by+cz \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2_K$

$\theta_H : \mathbb{P}^2 \setminus H \longrightarrow \mathbb{A}^2$ è ben def. e biettiva

$[x:y:z] \longmapsto \left(\frac{y}{x+by+cz}, \frac{z}{x+by+cz}\right)$

$j_H : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2 \setminus H$

$(s,t) \longmapsto [\underset{x}{1-bs-ct} : \underset{y}{s} : \underset{z}{t}]$ è una retta eliminare la x

$\theta_H(j_H(s,t)) = (s,t)$

$j_H(\theta_H([x:y:z])) = \left[\frac{x}{x+by+cz} : \frac{y}{x+by+cz} : \frac{z}{x+by+cz}\right]$.

Nel caso della conica $\mathcal{C}: x^2+y^2-z^2=0$

$j_H^{-1}(\mathcal{C}) : (1-bs-ct)^2+s^2-t^2=0$

$\Rightarrow (1+b^2)s^2 \; (-1+c^2)t^2 + 2bcst - 2bs - 2ct + 1 = 0$

conica di matrice $\begin{pmatrix} 1 & -b & -c \\ -b & 1+b^2 & bc \\ -c & bc & -1+c^2 \end{pmatrix}$

verificare che è conica non degenere (supp non contiene rette ed ha infiniti punti).

esempio Sia $H: x+z=0$

$j_H: (s,t) \longmapsto [1-t : s : t]$

$j_H^{-1}(\mathcal{C}): (1-t)^2 + s^2 - t^2 = 0 \Rightarrow 1-2t+s^2=0$

di matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(A) = -1 \neq 0$, $\det(A_0)=0 \Rightarrow$ parabola

QUADRICHE

Analogamente a quanto fatto per le coniche possiamo classificare le quadriche proiettive, affini ed euclidee.

def Una QUADRICA PROIETTIVA in $\mathbb{P}^n_K$ (rispettivamente AFFINE in $\mathbb{A}^n_K$, EUCLIDEA in $\mathbb{E}^n$) è una classe di equivalenza per proporzionalità di un polinomio omogeneo di grado 2 in $K[x_0, \dots, x_n]$ (rispettivamente polinomio di grado 2 in $K[x_0, \dots, x_n]$, polinomio di grado 2 in $\mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]$).

Quadriche proiettive in $\mathbb{P}^n_K$

$$Q: \sum_{j=0}^{n} a_{jj} x_j^2 + 2 \sum_{0 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j = 0 \quad \text{conica in } \mathbb{P}^n_K$$

con matrice $A \in M_{n+1,n+1}(K)$. $rg(Q) = rg(A)$ è invariante proiettivo

def Due quadriche di matrice A e B sono proiett. equiv. $\iff {}^tPAP = \alpha B$, $\alpha \in K^*$, $P \in GL_n(K)$

Classificazione a meno di equivalenza proiettiva

$K = \overline{K}$ dipendendo da $rg(Q) = r$

Forma canonica $Q_{r,n}: x_0^2 + \dots + x_r^2 = 0$ in $\mathbb{P}^n_K$

$K = \mathbb{R}$ dipende da $sgn(A) = (p, q)$ con $p \ge q$, $p + q = r$

Forma canonica $Q_{p,q,n}: x_0^2 + \dots + x_{p-1}^2 - x_p^2 + \dots - x_{p+r-1}^2 = 0$ in $\mathbb{P}^n_K$

Quadriche affini ed euclidee

$$Q: \sum_{j=1}^{n} a_{jj} x_j^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{j=1}^{n} a_{0j} x_j + a_{00} = 0$$

$${}^t\tilde{x} A \tilde{x} = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} a_{00} & {}^t\underline{a} \\ \underline{a} & A_0 \end{pmatrix} \in M_{n+1,n+1}(K) \text{ simmetrica}$$

$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $a_{00} \in \mathbb{R}$ termine noto, $\underline{a} \in M_{n,1}(K)$

trasf. affini $\longleftrightarrow$ $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underline{c} & M \end{pmatrix}$ con $M \in GL_n(k)$, $\underline{c} \in K^n = M_{n,1}(k)$

trasf. euclidee (o isometrie o congruenze) := trasf. affini con $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underline{c} & M \end{pmatrix}$ $M \in O_n(\mathbb{R})$

def • $Q: {}^t\tilde{X} A \tilde{X} = 0$ è affinemente equivalente a $Q': {}^t\tilde{X} B \tilde{X} = 0$

$\iff \exists\ \alpha \in K^*$, $\exists\ \tilde{M}$ trasf. affine tc ${}^t\tilde{M} A \tilde{M} = \alpha B$

• $Q: {}^t\tilde{X} A \tilde{X} = 0$ è congruente a $Q': {}^t\tilde{X} B \tilde{X} = 0$

$\iff \exists$ congruenza $\tilde{M}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tc ${}^t\tilde{M} A \tilde{M} = \alpha B$.

TEOREMA 1) Ogni quadrica non degenere di $\mathbb{A}^n_K$ è affinemente equiv. a una e una sola di

$K = \bar{K}$ i) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1 = 0$

ii) $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - x_n = 0$

$K = \mathbb{R}$ i) $\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{n} x_j^2 = 1$ $p = 0, \dots, n$

ii) $\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{n} x_j^2 - x_n = 0$ $p = 1, \dots, n-1$

2) Ogni quadrica euclidea non degenere è congruente ad una e una sola delle seguenti:

i) $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{n} \alpha_j x_j^2 = 1$ $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_p > 0$

$\alpha_{p+1} \geq \alpha_{p+2} \geq \dots \geq \alpha_n > 0$

$p = 0, \dots, n$

ii) $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{n} \alpha_j x_j^2 - x_n = 0$ $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_p > 0$

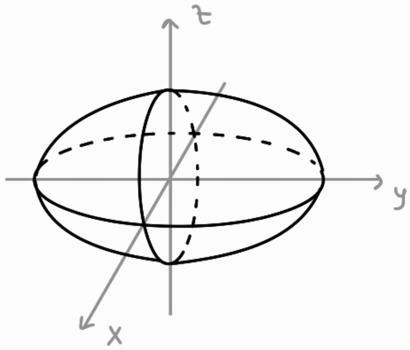
$\alpha_{p+1} \geq \alpha_{p+2} \geq \dots \geq \alpha_n > 0$

$p = 1, \dots, n$

dim Simile alle coniche: diagonalizzare A_0 (nel caso euclideo si usa il teorema spettrale), poi traslare. Vedi Ferrari.

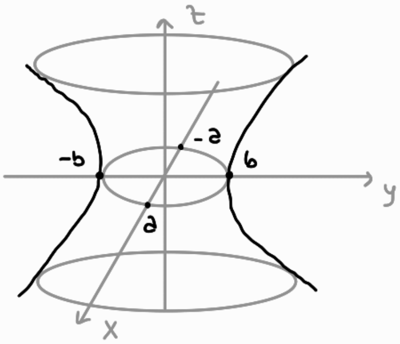
La geometria delle quadriche euclidee in $\mathbb{E}^3$ (a punti reali)

1) **ELLISSOIDE** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a\geq b\geq c>0)$



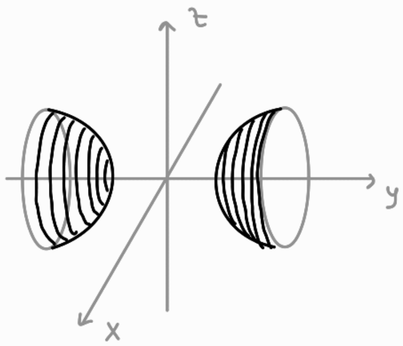
2) **IPERBOLOIDE IPERBOLICO** $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-\frac{z^2}{c}=1$ $(a\geq b>0,\ c>0)$

Facciamo "ruotare" un'iperbole attorno all'asse delle z.



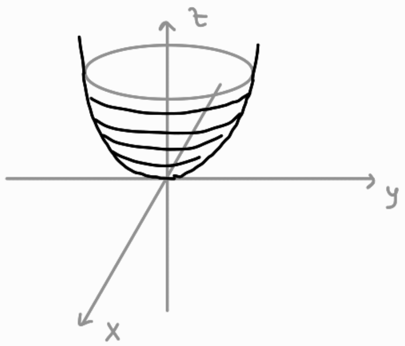
3) **IPERBOLOIDE ELLITTICO** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

Facciamo "ruotare" un'iperbole intorno all'asse delle x



4) **PARABOLOIDE ELLITTICO** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$

Facciamo "ruotare" una parabola intorno all'asse delle z



5) PARABOLOIDE IPERBOLICO $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$