Teorema di invertibilità locale

Sia $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ lineare e dato $b \in \mathbb{R}^n$ cerchiamo la soluzione di $f(x) = b$ (*).

In $x \in \mathbb{R}^n$ avremo $f(x) = Ax$ con $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Se $\det(A) \neq 0$ allora l'eq. (*) ha soluzione unica.

Vogliamo studiare l'eq. (*) quando f è non lineare.

def Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Diciamo che $f \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, è un **DIFFEOMORFISMO** di classe C^k se:

(i) $f: A \hookrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow f(A) \subset \mathbb{R}^n$ (iniettiva e suriettiva)

(ii) $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ aperto

(iii) $f^{-1}: f(A) \longrightarrow A$, $f^{-1} \in C^k(f(A); \mathbb{R}^n)$

def $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Diciamo che $f \in C^k(A, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, è un **DIFFEOMORFISMO LOCALE** di classe C^k se

(i) f è aperta

(ii) $\forall x \in A$, $\exists \delta > 0$ tc $f: B_\delta(x) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo di classe C^k

TEOREMA Sia $f \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Sono equivalenti:

A) $f: A \longrightarrow f(A)$ è un diffeomorfismo locale di classe C^k

B) $\det(J_f(x)) \neq 0 \quad \forall x \in A$

esempio Vorrei risolvere: $\begin{cases} x + y\sin(x) = b_1 \\ x^2 y + \sin(y) = b_2 \end{cases}$ con $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Sia $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x + y\sin(x), \; x^2 y + \sin(y))$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$

Osservo che $f(0) = 0$.

Proviamo che esistono due numeri $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tali che per ogni $b \in B_\varepsilon(0)$ esiste un'unica soluzione $(x,y) \in B_\delta(0)$ del sistema

Calcoliamo la Jacobiana: $J_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 + y\cos(x) & \sin(x) \\ 2xy & x^2 + \cos(y) \end{pmatrix}$

Ora $J_{f(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(J_{f(0,0)}) = 1$

per continuità $\Rightarrow \exists \delta>0$ tale che $\det(J_{f(x,y)}) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in B_\delta(0)$

Dunque f è un diffeomorfismo loc. di classe C^∞ su $B_\delta(0)$.

th di invertibilità locale $\Rightarrow$ Per $\delta>0$ un po' più piccolo, f è anche aperta ed iniettiva su $B_\delta(0)$.

Dunque l'insieme $f(B_\delta(0)) \subset \mathbb{R}^n$ è aperto e siccome $\underbrace{0=f(0)\subset f(B_\delta(0))}_{0 \text{ è p.to interno di } f(B_\delta(0))}$,

allora $\exists \varepsilon>0$ tc $B_\varepsilon(0) \subset f(B_\delta(0))$.

se $b \in B_\varepsilon(0)$, allora esiste $(x,y) \in B_\delta(0)$ tale che $f(x,y)=b$ e

per l'iniettività di f il punto (x,y) è unico in $B_\delta(0)$.

<u>dim</u> (del teorema)

A) $\Rightarrow$ B). $x_0 \in A$, $\delta>0$ tale che $f \in C^k(B_\delta(x_0), \mathbb{R}^n)$ sia un diffeomorfismo di classe C^k. Indichiamo con $f^{-1}: f(B_\delta(x_0)) \longrightarrow B_\delta(x_0)$ la funzione inversa. Allora per ogni $x \in B_\delta(x_0)$ si ha $f^{-1}(f(x)) = x = I_n(x)$, dove I_n è la matrice identità $n \times n$. Dal teorema sul differenziale della funzione composta si ha

$$I_n = J(f^{-1}\circ f)(x) = J_{f^{-1}}(f(x))\, J_f(x)$$

Dal teorema sui determinanti si ottiene allora

$$1 = \det(I_n) = \det(J_{f^{-1}}(f(x))\, J_f(x)) = \det(J_{f^{-1}}(f(x)) \det(J_f(x))$$

Questo implica che $\det(J_f(x)) \neq 0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0)$ e in particolare per $x = x_0$.

B) $\Rightarrow$ A). Supponiamo che sia $\det(J_f(x)) \neq 0$ in ogni punto $x \in A$. Sia $x_0 \in A$.

Devo provare che $\exists \delta>0$ tc $f: B_\delta(x_0) \longrightarrow f(B_\delta(x_0))$ è C^k-diffeomorfismo.

Voglio provare che f è aperta: basta provare che $f(B_\delta(x_0)) \subset \mathbb{R}^n$ è aperto.

Voglio provare che $f(x_0) \in f(B_\delta(x_0))$ è p.to interno di $f(B_\delta(x_0))$.

(1) Devo provare che $\exists \varepsilon>0$ tc $B_\varepsilon(f(x_0)) \subset f(B_\delta(x_0))$.

L'affermazione può essere riscritta nel seguente modo:

una sorta di argomento di suriettività $\rightarrow$ $\exists \varepsilon>0$ tc $\forall y \in B_\delta(f(x_0))$ esiste $x \in B_\varepsilon(x_0)$ tc $f(x)=y \iff f(x)-y=0$.

So che $\det(J_f(x_0)) \neq 0 \iff df(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertibile

Sia $T = df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ e osserviamo che $\det(T) = \det(J_f(x_0)) \neq 0$.

Dunque esiste l'operatore lineare inverso $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Osservo ora che:

$$T^{-1}(-f(x)+y) = 0 \iff \underbrace{x + T^{-1}(y - f(x))}_{\shortparallel\; K(x)} = x$$

Definiamo la funzione $K : \overline{B_\delta(x_0)} \longrightarrow \overline{B_\delta(x_0)}$ con

(•) $K(x) = x + T^{-1}(y - f(x))$. Vogliamo provare che K è ben definita, cioè trasforma $\overline{B_\delta(x_0)}$ in se stesso.

Conti: $K(x) - x_0 = x + T^{-1}(y - f(x)) - x_0$

$g(x) := x - T^{-1}(f(x))$

$\Rightarrow K(x) - x_0 = g(x) + T^{-1}(y - f(x)) - g(x_0)$

- $$|K(x) - x_0| = |g(x) - g(x_0) + T^{-1}(y - f(x))|$$
$$\leq |g(x) - g(x_0)| + \|T^{-1}\| \underbrace{\|y - f(x)\|}_{\leq \varepsilon}$$
$$\leq |g(x) - g(x_0)| + \|T^{-1}\| \varepsilon$$

- $|g(x) - g(x_0)| \leq \|dg(z)\| \cdot \underbrace{\|x - x_0\|}_{\leq \delta} \quad \exists\, z \in [x_0, x]$

- $dg(x) = I_n - T^{-1} df(x)$, ma $dg(x) = I_n - T^{-1} \circ T(x) = 0$.

  Siccome g è di classe C^1 (poiché lo è f), $\exists\, \delta > 0$ tale che $\|dg(x)\| \leq \frac{1}{2} \quad \forall\, x \in B_\delta(x_0)$.

$$\Rightarrow |K(x) - x_0| \leq |g(x) - g(x_0)| + \|T^{-1}\| \varepsilon$$
$$\leq \frac{1}{2}\delta + \|T^{-1}\| \varepsilon \leq \delta$$

così abbiamo dimostrato che K va dalla palla dentro se stessa

per un'opportuna scelta di ε.

(•) Vogliamo ora provare che K è una contrazione. Siano $x, \bar{x} \in \overline{B_\delta(x_0)}$

$$|K(x) - K(\bar{x})| = |x - T^{-1}(f(x) - y) - (\bar{x} - T^{-1}(f(\bar{x}) - y))|$$
$$= |x - T^{-1}(f(x)) - (\bar{x} - T^{-1}(f(\bar{x})))|$$
$$= |g(x) - g(\bar{x})|$$

corollario del teorema del valor medio; scelta di δ fatta in precedenza

$$\leq \|dg(z)\|\, |x - \bar{x}| \leq \frac{1}{2}|x - \bar{x}|$$

$\exists\, z \in [x, \bar{x}] \subset \overline{B_\delta(x_0)}$

$\Rightarrow K$ è una contrazione.

Siccome $\overline{B_\delta(x_0)}$ è completo con la distanza ereditata da $\mathbb{R}^n$, dal teorema di punto fisso di Banach segue che esiste un (unico) punto $x \in \overline{B_\delta(x_0)}$ tale che $x = K(x) \iff 0 = T^{-1}(f(x) - y) \iff f(x) - y = 0 \iff f(x) = y$.

(2) Prossimo obiettivo è provare che $\exists\, M > 0$ tale che $\forall\, x, \bar{x} \in \overline{B_\delta(x_0)}$ si ha

$$|f(x) - f(\bar{x})| \geq M |x - \bar{x}| \qquad (*)$$

Questa disuguaglianza dimostra che f è iniettiva, perché se

$x \neq \bar{x} \Rightarrow f(\bar{x}) \neq f(\bar{x})$. f e' iniettiva è anche biettiva, dunque

$\exists\, f^{-1}$ inversa su un aperto e inoltre

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(\bar{y})| \leq \frac{y-\bar{y}}{M}$$

ossia f^{-1} è Lipschitziana e di conseguenza è continua.

Dobbiamo quindi mostrare (*)

$$|x-\bar{x}| = |g(x) + T^{-1}(f(x)) - g(\bar{x}) - T^{-1}(f(\bar{x}))|$$
$$\leq |g(x)-g(\bar{x})| + \|T^{-1}\|\, |f(x) - f(\bar{x})|$$
$$\leq \frac{1}{2}|x-\bar{x}| + \|T^{-1}\|\, |f(x) - f(\bar{x})|$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2\|T^{-1}\|}}_{= M} \cdot |x-\bar{x}| \leq |f(x) - f(\bar{x})|$$

(3) Rimane da provare che la funzione inversa è di classe $C^1(f(B_\delta(x_0)), B_\delta(x_0))$.

Provo che f^{-1} è F-differenziabile in $y_0 = f(x_0)$

Sappiamo

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x-x_0) + E_{x_0}(x) \quad \text{dove} \quad \frac{E_{x_0}(x)}{|x-x_0|} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

Invertendo si ha

il differenziale è invertibile perché per ipotesi il determinante della matrice Jacobiana è diverso da 0

$$df(x_0)^{-1}(f(x) - f(x_0) - E_{x_0}(x)) + x_0 = x$$

Sostituisco $x = f^{-1}(y)$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$ e trovo

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) + df(x_0)^{-1}(y-y_0) - \underbrace{df(x_0)^{-1}(E_{f^{-1}(y_0)}(f^{-1}(y)))}_{= F_{y_0}(y)}$$

Rimane da controllare che $\frac{F_{y_0}(y)}{|y-y_0|} \xrightarrow[y\to y_0]{} 0$

non ci interessa, perché è una matrice costante

$$\frac{-df(x_0)^{-1}(E_{\underset{= x_0}{f^{-1}(y_0)}}(\underset{= x}{f^{-1}(y)}))}{|\underset{= f(x)}{y} - \underset{= f(x_0)}{y_0}|} \xrightarrow[y\to y_0]{} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{E_{x_0}(x)}{|f(x)-f(x_0)|} \xrightarrow[f(x)\to f(x_0)]{} 0$$

$$= \underbrace{\frac{|x-x_0|}{|f(x)-f(x_0)|}}_{\leq \frac{1}{M} \text{ per dim precedente}} \cdot \underbrace{\frac{E_{x_0}(x)}{|x-x_0|}}_{\to 0}$$

<u>conclusioni</u> ① f^{-1} è differenziabile in y_0

② $\underbrace{df^{-1}(y_0)}_{\text{differenziale della funzione inversa}} = \underbrace{df(x_0)^{-1}}_{\text{inverso del differenziale}}$ con $y_0 = f(x_0)$

③ Affermo che $f^{-1} \in C^1$: l'identità precedente può essere riformulata come

$$J(f^{-1}(y)) = \underbrace{(Jf(x))^{-1}}_{\text{matrice inversa della Jacobiana}}$$

Dal teorema sulla matrice inversa deduciamo che le entrate di $Jf^{-1}(y_0)$ sono funzioni che dipendono in modo continuo da y_0. Lo stesso argomento prova che f^{-1} è di classe C^k □

<u>oss</u> Abbiamo dimostrato il teorema di invertibilità locale da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$, ma vale anche se al posto di $\mathbb{R}^n$ prendiamo uno spazio di Banach (la dim è analoga)

TEOREMA DELLA FUNZIONE IMPLICITA

Premessa

Sia $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e consideriamo l'equazione $f(x,y)=0$, il **LUOGO DEGLI ZERI**.

Ci domandiamo quando tale equazione definisca implicitamente una funzione $x \longmapsto y(x)$ t.c. $f(x, y(x)) = 0$

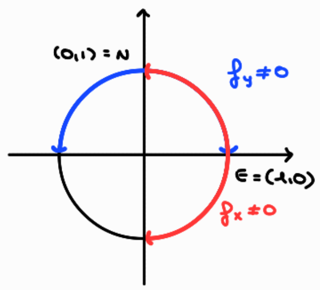
esempio $f(x,y) = x^2+y^2-1$

Voglio "esplicitare" l'equazione $f(x,y)=0$ analizzando l'insieme (la circonferenza) $M=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y)=0\}$.

$\nabla f(x,y) = 2(x,y) \Rightarrow |\nabla f| \neq 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$

$N:=(0,1) \in M$

Posso esplicitare $y(x) = \sqrt{1-x^2}$, $-1<x<1$, ottenendo la semicirconferenza centrata nel polo nord.



Analogamente, $E:=(1,0) \in M$ e posso esplicitare la semicirconferenza centrata nel polo est, ottenendo $x(y) = \sqrt{1-y^2}$.

In particolare, il fatto di poter esplicitare la funzione in qualche modo dipende dal fatto che le derivate parziali non siano 0.

Considerazione euristica

$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $f(0,0)=0$ e $f_y(0,0)>0$. Allora:

- per continuità delle derivate parziali prime $\exists\, \delta>0,\ \eta>0$ t.c. $f_y(x,y)>0$ se $|x|<\delta$ e $|y|<\eta$
- siccome $y \longmapsto f(0,y)$ è strettamente crescente ed $f(0,0)=0$, avremo $f(0,-\eta)<0$ e $f(0,\eta)>0$
- per continuità di f, a meno di scegliere δ ancora più piccolo, avremo $f(x,-\eta)<0$ ed $f(x,\eta)>0$ per ogni $x \in (-\delta, \delta)$

- per il teorema degli zeri, $\forall\ |x|<\delta\ \exists\ y = y(x) \in (-\eta, \eta)$ tc $f(x, y(x)) = 0$

  Per la stretta monotonia, questo punto è unico

Dunque, il grafico della funzione $x \longmapsto y(x)$ descrive l'insieme degli zeri di f (nel rettangolo $(-\delta, \delta) \times (-\eta, \eta)$).

Teorema di Dini

<u>notazioni</u> $p, q \in \mathbb{N}^*$, $n = p+q$. $\mathbb{R}^n = \underset{x}{\mathbb{R}^p} \times \underset{y}{\mathbb{R}^q}$. Data una funzione $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $f = (f_1, \dots, f_q)$, definiamo le MATRICI JACOBIANE PARZIALI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p} \end{pmatrix} \quad \text{matrice } q \times p$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial y_q} \end{pmatrix} \quad \text{matrice } q \times q$$

<u>**TEOREMA**</u> (del Dini). $A \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ aperto, $f \in C^k(A, \mathbb{R}^q)$, $k \geq 1$, $(x_0, y_0) \in A$.

Supponiamo che

(1) $f(x_0, y_0) = 0$

(2) $\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0$

Allora $\exists\ \delta > 0$ e $\eta > 0$, $\exists\ \varphi \in C^k(B_\delta(x_0), B_\eta(y_0))$ funzione esplicita tc

(i) $B_\delta(x_0) \times B_\eta(y_0) \subset A$ — basta prendere δ, η piccoli perché A aperto, dunque (x_0, y_0) p.to interno

il grafico di φ è tutto contenuto nell'insieme degli zeri e non ce ne sono altri dentro il rettangolo $B_\delta(x_0) \times B_\eta(y_0)$

(ii) $\{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^n : x \in B_\delta(x_0)\} = \{(x,y) \in B_\delta(x_0) \times B_\eta(y_0) : f(x,y) = 0\}$

(iii) la funzione φ verifica

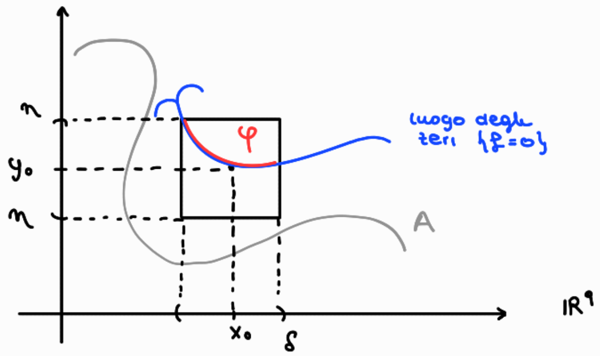
quella matrice inversa esiste per l'ipotesi (2)

è un sistema di equazioni alle derivate parziali

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = -\left(\frac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial x} \quad \forall\ x \in B_\delta(x_0)$$

dove $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ indica la matrice Jacobiana di φ e a destra si intende un prodotto di matrici.

<u>idea</u> ci si può restringere ad un rettangolo in cui il luogo degli zeri coincide con il grafico di una funzione



<u>dim</u> $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $p+q=n$

$$\underset{(x\;,}{\mathbb{R}^p}\ \ \underset{y)}{\mathbb{R}^q}$$

$A \subset \mathbb{R}^n$ aperto

$f \in C^k(\underset{(x_0,y_0)}{A}; \mathbb{R}^q)$ $\quad f(x_0,y_0)=0 \quad \det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$

Allora $\exists\ \delta, \eta > 0 \quad \exists\ \varphi \in C^k(B_\delta(x_0), B_\eta(y_0))$ tale che

$\{(x,y) \in B_\delta(x_0) \times B_\eta(y_0) : f(x,y)=0\} = \{(x,\varphi(x)) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : x \in B_\delta(x_0)\}$

Definiamo $F: A \to \mathbb{R}^n$

forse va indicata come vettore colonna

$$F(x,y) = (x, f(x,y)) \qquad (x,y) \in A$$

Ora

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det JF(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ (per hp)

teorema della funzione inversa

$\hookrightarrow \exists\ \delta, \eta > 0$ tc $F: B_\delta(x_0) \times B_\eta(y_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un C^k-diffeomorfismo (con $B_\delta(x_0) \times B_\eta(y_0) \subseteq A$)

$\Rightarrow B = F(B_\delta(x_0), B_\eta(y_0))$ è aperto di $\mathbb{R}^n$

$B \ni (x_0, f(x_0,y_0))$, $f(x_0,y_0) = 0$

Inoltre $\exists\ G = F^{-1} : B \longrightarrow B_\delta \times B_\eta$

Avremo $G = (G_1, G_2)$, $G_1 \in \mathbb{R}^p$, $G_2 \in \mathbb{R}^q$.

Osservo che

$$
\begin{aligned}
(x,y) &= F(G(x,y)) \\
&= F(G_1(x,y), G_2(x,y)) \\
&= (G_1(x,y),\ f(G_1(x,y), G_2(x,y)))
\end{aligned}
$$

ma allora

$$
\begin{cases} G_1(x,y) = x \\ f(x, G_2(x,y)) = y \end{cases}
$$

Definiamo dunque $\varphi : B_\delta(x_0) \longrightarrow \mathbb{R}^q$

$$\varphi(x) := G_2(x,0)$$

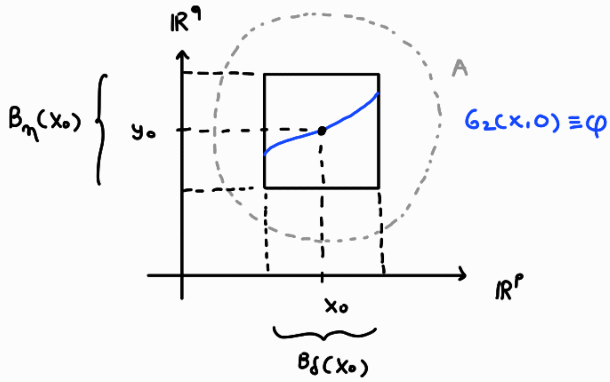
è di classe C^k.

Verifico $\exists$: $f(x,\varphi(x)) = f(x, G_2(x,0)) = 0$.

voglio mostrare $y = \varphi(x)$

Verifico C : sia ora $(x,y) \in B_\delta(x_0) \times B_\eta(y_0)$ t.c. $f(x,y) = 0$.

$$
\begin{aligned}
(x,y) &= G(F(x,y)) = \\
&= G(x, f(x,y)) = \\
&= (\underbrace{G_1(x, f(x,y))}_{x},\ G_2(x, f(x,y))) = \\
&= (x,\ G_2(x,0)) = (x, \varphi(x))
\end{aligned}
$$



$\Rightarrow y = \varphi(x) \Rightarrow (x,y) \in gr(\varphi)$.

Dunque

$$f(x,\varphi(x)) = 0 \quad \forall\ x \in B_\delta(x_0)$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial x} f(x, \varphi(x)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)
\end{aligned}
$$

In un intorno di (x_0,y_0) si ha che $\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))$ è invertibile, dunque

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))$$

prodotto fra matrici bendefinito

la φ deve risolvere questo sistema di eq. diff.

$\square$

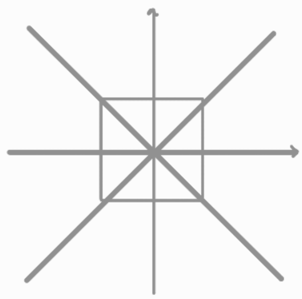
esempio $\quad f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sia $f(x,y) = \begin{cases} y\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

- $f(0)=0$, f continua in 0
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0) = \lim_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)}{y} = -1 \neq 0$
- La tesi di Dini non vale:

$$f(x,y)=0 \iff y=0 \;\vee\; y=\pm x$$

dunque non tutte le ipotesi del teorema risultano verificate.

Infatti, $f \notin C^1$.



↪ $f=0$ non è grafico di funzione, anche se ruoto il sistema di riferimento

esercizio $\quad$ sia $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = z e^{xy} + xy e^{z} + xyz$$

Provare che $f=0$ definisce una funzione che ha in $0\in\mathbb{R}^2$ un punto di sella.

- $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$
- $f(0)=0$

Voglio vedere se riesco ad esplicitare una delle coordinate in funzione delle altre due. Guardo il gradiente

$$\nabla f(x,y) = (zye^{xy} + ye^{z} + yz,\; zxe^{xy} + xe^{z} + xz,\; e^{xy} + xye^{z} + xy)$$

$$\nabla f(0) = (0,\; 0,\; \underset{\neq 0}{1})$$

Per Dini $\exists\, \delta,\eta>0\ \exists\ \varphi \in C^\infty((-\delta,\delta)\times(-\eta,\eta))$ tale che

$$\{f=0\} = gr(\varphi) \quad \text{in } (-\delta,\delta)\times(-\eta,\eta) \quad \text{con } z=\varphi(x,y)$$

Riparto da capo.

$$f(x,y,\varphi(x,y)) \equiv 0 \implies \begin{cases} f_x + f_z\varphi_x = 0 \implies \varphi_x = -\dfrac{f_x}{f_z} \implies \varphi_x(0,0)=0 \\ f_y + f_z\varphi_y = 0 \implies \varphi_y = -\dfrac{f_y}{f_z} \implies \varphi_y(0,0)=0 \end{cases}$$

Dunque la funzione implicita ha un punto critico nell'origine del piano cartesiano.

Voglio calcolare la matrice hessiana.

Derivate seconde:

- $$\varphi_{xx} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{f_x(x,y,\varphi(x))}{f_z(x,y,\varphi(x))}$$

derivata in x di f_z: non mi serve perché tanto $f_x(0)=0$

$$= -\frac{(f_{xx}+f_{xz}\varphi_x)f_z - f_x \cdot *}{(f_z)^2}$$

$$\Rightarrow \varphi_{xx}(0) = -f_{xx}(0) = -\left[xy^2e^{xy}\right]_{x=y=z=0} = 0$$

- $$\varphi_{xy} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{f_x(x,y,\varphi(x))}{f_z(x,y,\varphi(x))}$$

$$= -\frac{(f_{xy}+f_{xz}\varphi_y)f_z - f_x \cdot *}{(f_z)^2}$$

$$\Rightarrow \varphi_{xy}(0) = -f_{xy}(0) = -\left[z\cdot * + e^z + z\right]_{x=y=z=0} = -1$$

- φ è di classe C^2, dunque non mi serve calcolare $\varphi_{yx}(0)=\varphi_{xy}(0)=-1$
- si trova $\varphi_{yy}(0)=0$

$$H\varphi(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H\varphi) = -1 < 0$$

$$\Rightarrow \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{0}} \text{ è p.to di sella di } \varphi.$$