

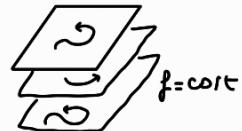
INTEGRALI PRIMI

def $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (diff) è "integrale primo" del campo vettoriale \mathbf{f} se da $\dot{z} = X(z)$ se gli insiemi di livello di f sono invarianti per X .

Ovvero $\forall z, t \quad f(\mathbf{f}(z(t))) = f(z)$

si dice che " f è costante lungo le soluzioni"

se X completo $f \circ \phi_t^X = f \quad \forall t$



esempio $m\ddot{x} = -kx, \quad x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{k}{m}x \end{cases} \quad (x, v) \in \mathbb{R}^2$$

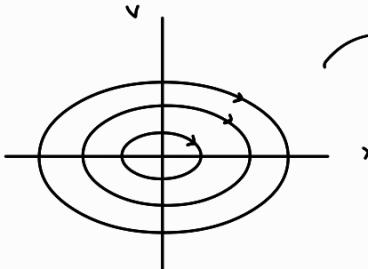
$$E: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Vogliamo verificare che è integrale primo: poniamo forza centrale concreta (attrazione).

$t \mapsto (x_t, v_t)$ soluzione, calcolo valore della derivata di E

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(x_t, v_t) &= mv_t v_t' + kx_t x_t' \\ &= v_t \left(m \left(-\frac{k}{m} \right) x_t + k x_t \right) = 0 \end{aligned}$$

$E(x, v)$ è l'eq. di un ellisse:
gli integrali primi mi permettono di trovare al risatto in fare senza fare troppi conti!



$$\dot{z} = X(z), \quad z \in \Omega$$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dt} f(z_t) = f'(z_t) \dot{z}_t = f'(z_t) X(z_t) = (\mathbf{f}' \cdot \mathbf{x})(z_t)$$

Per le questioni teoriche è utile introdurre una definizione in cui non compare la soluzione z_t

def La "derivata di Lie" di f associata al lungo il campo vettoriale X

è la funzione $L_X f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$L_X f := \mathbf{f}' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \nabla f = \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial t_j}$$

$\mathbf{f}' = J\mathbf{f}$ è vettore riga

prop 1. (X completo) $\frac{d}{dt} f \circ \phi_t^x = (L_x f) \circ \phi_t^x \quad \forall t$

2. f è I.P. di $X \iff L_x f = 0$

dum 1. è d'conto fatto sopra

2. • $L_x f = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} f(t_0) = 0 \quad \forall$ soluzione $\Rightarrow f$ è I.P.

• f I.P. $\Rightarrow L_x f(t_0) = 0 \quad \forall t, \forall t_0$

$\Rightarrow L_x f(t_0) = 0 \quad \forall t_0 \Rightarrow L_x f = 0$

Capire se una funzione è integrale primo, si riduce a calcolare la derivata di L e

Esempio $E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$$X(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{k}{m}x \end{pmatrix}$$

$$DE(x, v) = (kx \quad mv)$$

$$X \cdot DE = v k x - \frac{k}{m} x m v = 0$$

È lo stesso conto da prima: la differenza è che in questo caso consideriamo la funzione che appartiene allo sp. delle fasi e non delle soluzioni

derivare lungo le soluzioni

due caratterizzazioni di I.P.

uso la derivata di L e

Foliazione invariante

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

se $J_f(z) \neq 0$, allora in un intorno di z gli insiemi di livello di f sono sottovarie di dimensione $n-1$

def • z p.t. critico di f se $f'(z) = 0$

• z p.t. regolare di f se $f'(z) \neq 0$

insieme di livello di f , cui punti sono tutti regolari si chiama "regolare"

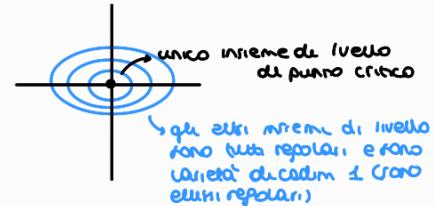
\Rightarrow ogni insieme di livello regolare di $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è sottovaria di codim. 1

esempio 1) (OA) $m\ddot{x} = -kx$, $x \in \mathbb{R}$, cerchiamo i punti critici della funzione energia

$$E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\nabla E(x, v) = (kx, mv) \stackrel{?}{=} (0, 0)$$

Unico punto critico è $(x, v) = (0, 0)$



2) (RA) $m\ddot{x} = kx$, $x \in \mathbb{R}$

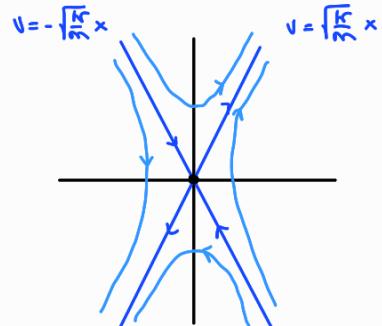
$$E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}kx^2 \text{ è ip}$$

(la verifica è immediata)

$$\nabla E(x, v) = \begin{pmatrix} -kx \\ mv \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x, v) = (0, 0)$$

L'insieme di livello $E=0$ ($\Rightarrow v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}x$) non è sottovaria perché contiene il punto critico $(0, 0)$.

Tutti gli altri insiemi di livello sono iperboli.



Supponiamo ora di trovarsi in una situazione in cui ci sono k integrali primi

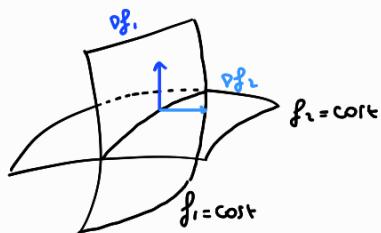
$$f := (f_1, \dots, f_k) : \Omega \xrightarrow{U} \mathbb{R}^k$$

def • $t \in \Omega$ "p.t. regolare" di f se $\det(f'(t)) = k$ (se f è sommerso in t)

• insiemi di livello "regolari" di f sono insiemi composti da punti regolari, dunque in particolare sono sottovarie di codim K (dim $\Omega - k$)

oss

In \mathbb{R}^3 :



$$f = (f_1, f_2)$$

$$f' = \begin{bmatrix} \nabla f_1^t \\ \nabla f_2^t \end{bmatrix}$$

vector ruota

Richiedere che $\text{rk}(f') = 2$, significa richiedere che ∇f_1 e ∇f_2 siano $\neq 0$ e un'indip: questo garantisce che i due insiem di livello si intersecano incisa sottoavvento di dim inferiore (se fossero paralleli, i due insiem di livello potrebbero concidere e dunque intersecarsi in qualcosa che non ha dim più bassa).

fatto n, arco tra le sp. delle forz. è fatto da punti invarianti (\Rightarrow equilibri)

oss

#max di I.P. indip. è $n-1$

fanno $n-1$ integrali primi, allora gli insiem di livello sono curve 1-dim, sono orbite! In questo caso, dunque, gli integrali primi determinano le orbite

esercizio

$$\dot{x} = 3y + xy^2$$

$$\dot{y} = -x - \frac{1}{3}x^2y$$

Determinare $k \in \mathbb{R}$ (te 3) tc $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + ky^2)$ è I.P.

$$\begin{aligned}
 L_x f &= x\dot{x} + ky\dot{y} = x(3y + xy^2) + ky(-x - \frac{1}{3}x^2y) \\
 &= 3xy + x^2y^2 - kyx - \frac{k}{3}x^2y^2 \\
 &= xy(3-k) + \frac{1}{3}x^2y^2(3-k) = 0 \quad \forall (x,y) \quad \text{se } k=3
 \end{aligned}$$

Abbellimento della dim dell'equazione

$$f = (\underbrace{f_1, \dots, f_k}_{\text{indip}})$$

$f = \text{cost}$
dimensione $n-k$

Almeno localmente esistono coordinate adattate a f $(y, u) : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$

nelle quali $f = \text{cost}$ $\Leftrightarrow u = \text{cost}$

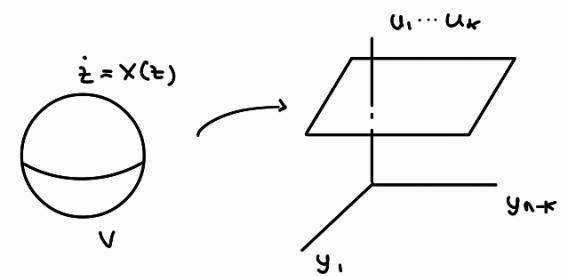
Potrei prendere $u = f$

$$\begin{cases} \dot{y} = Y(y, u) =: Y_u(y) \\ \dot{u} = 0 \end{cases} \quad \text{perche' } u \text{ e' costante}$$

Abbiamo ridotto $\dot{z} = X(z)$ nella famiglia che dipende da $u = (u_1, \dots, u_k)$

(o $f = (f_1, \dots, f_k)$) di ODE

$$\dot{y} = Y_u(y), \quad y \in \mathbb{R}^{n-k}$$



Esempio

$$\begin{cases} \dot{x} = y z^2 \\ \dot{y} = -x(x-1)^2 z^2, \quad \mathbb{R}^3 \\ \dot{z} = (2-x)x^2 y z \end{cases}$$

$$\text{i.p. : } f(x, y, z) = z^2 - y^2 - x^2 \quad (\text{ha verificato})$$

Vogliamo trovare gli insiemi di livello e studiare la rappresentazione del campo vettore su essi.

- punti critici

$$\partial f = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0) \quad \text{unico punto critico}$$

$$f(0, 0, 0) = 0$$

insieme critico che contiene l'origine $\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2$ è un cono

- $z^2 = x^2 + y^2 + C$

sono funz. di rotazione attorno a z

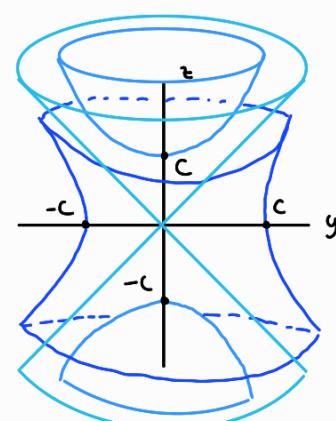
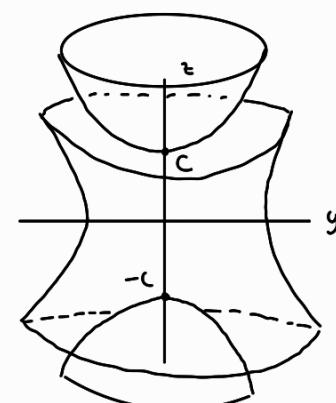
\Rightarrow guardiamo in $x=0$

$$z = \pm \sqrt{y^2 + C}$$

$C > 0$ $|z| > C \Rightarrow$ iperboloidi a due falda

$C < 0$ $y^2 = z^2 + |C|$

$|y| > C \Rightarrow$ iperboloidi a una falda



le varietà trovate fanno insieme invarianti. Cerchiamo di capire cosa succede (le orbite) su una delle "scodelle".

I dobbiamo modellare delle coordinate adattate alla sommissione: vogliamo che una coordinata sia l'integrale primo.

$$u = f$$

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, f(x, y, z))$$

in questo modo si parallelizza
focalmente un punto della scodella

siano $f(x, y, z) > 0$ e $z > 0$

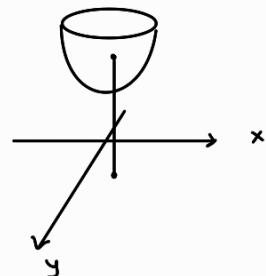
Bisognerebbe verificare che sia un c.c.:

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{det } \mathcal{L}' = z^2 > 0$$

prendo + perché abbiamo
sempre $z > 0$

$$g = z^2 - x^2 - y^2 = u \Rightarrow z = \sqrt{u + x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y(u + x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x(x-1)^2(u + x^2 + y^2) \\ \dot{z} > 0 \end{cases}$$



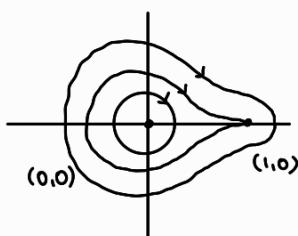
il campo vett. differisce per $u + x^2 + y^2$ dal sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x(x-1)^2 \end{cases} \iff \ddot{x} = -x(x-1)^2$$

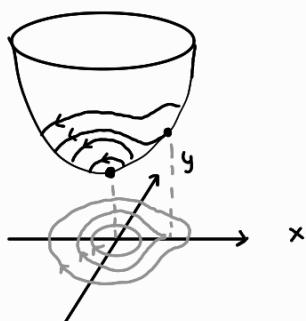
e hanno le stesse orbite dato che $u + x^2 + y^2 > 0 \quad \forall x, y$

farò il riferito infatti che $\ddot{x} = -x(x-1)^2$ è

↓ lo vedremo più
davanti

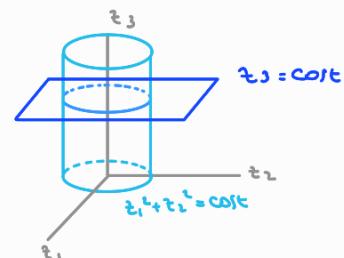
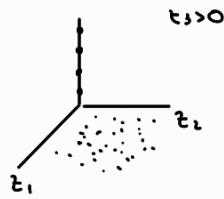


da cui ottieniamo:



caso

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 z_3 \\ \dot{z}_2 = z_1 z_3 \\ \dot{z}_3 = 0 \end{cases}, \mathbb{R}^3$$



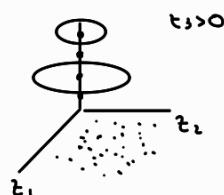
- equilibri : $z_3 = 0$, $\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \end{cases}$
 - IP: $f_1(z_1, z_2, z_3) = z_3$ (ovvio perché $\dot{z}_3 = 0$ per ip)
- $$f_2(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 \quad (\text{è OA})$$

Siamo nella situazione in cui abbiamo $n-1$ I.P., vogliamo

capire dove sono indipendenti:

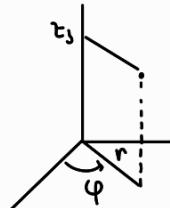
$$f' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ z_1 & z_2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{gli unici punti in cui non ha rango 2 sono } z_1 = z_2 = 0$$

Tutti gli equilibri, le orbite stanno sull'intersezione tra un piano orizzontale e un cubo verticale, che è un rettangolo che non contiene equilibri: è un'orbita



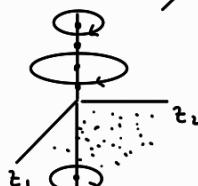
(non rappresenta il verso di percorrenza).

- coordinate adattate : $\begin{cases} u_1 = \sqrt{x^2 + y^2} = r \\ u_2 = z_3 \\ y = \varphi \end{cases}$



sono le coord. cilindriche!

L'eq. sistematica è $\dot{\varphi} = -z_3$



oss Anche $f_3 = x^2 + y^2 + z^2$ è IP

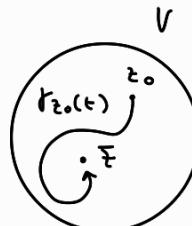
prop Se esiste un integrale primo (non costante in alcun aperto), allora l'ODE non ha equilibri attrattivi e repulsivi.

dum PA ḡ è eq. attrattivo con integrale primo f

Vogliamo $f(\tilde{z}_{\tau_0}(t)) = f(z_0)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(\tilde{z}_{\tau_0}(t)) = f(z_0)$$

$f \uparrow$
 $f \text{ cont.} \rightarrow \parallel$



$$f(\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{z}_{\tau_0}(t)) = f(\tilde{z}) \quad \forall z_0 \in V$$

□

ESEMPI

Preda-predatore (Lotka-Volterra)

$x = \# \text{ prede}$

$y = \# \text{ predatori}$

Se isolati, l'andamento delle popolazioni è $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x \\ \dot{y} = -\gamma y \end{cases}$

Introduciamo una interazione:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy & \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0 \\ \dot{y} = -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Supponiamo $x \geq 0, y \geq 0$.

Tramite ricalcolo:

$$(x, y) \mapsto (\tilde{x} = \frac{\delta}{\gamma} x, \tilde{y} = \frac{\beta}{\alpha} y) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \frac{\delta}{\gamma} (\alpha x - \beta xy) = \alpha \tilde{x}(\lambda - \tilde{y}) \\ \dot{\tilde{y}} = \dots = -\gamma \tilde{y}(\lambda - \tilde{x}) \end{cases}$$

dividiamo per α e ottengono un solo parametro!

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\lambda - y) \\ \dot{y} = -K y(\lambda - y) \end{cases} \quad K > 0$$

- equilibri: $(0, 0), (\lambda, \lambda)$

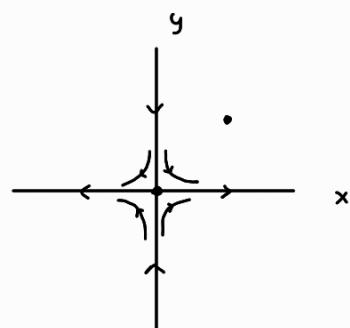
Oss al interno il primo quadrante: ha senso chiederli se sia invariante.

Gli assi sono invarianti. \Rightarrow anche il primo quadrante

$$y=0 \quad : \quad \dot{x} = x$$

$$x=0 \quad : \quad \dot{y} = -Ky$$

- linearizzazione: $X'(x, y) = \begin{pmatrix} \lambda - y & -x \\ Ky & -K(\lambda - x) \end{pmatrix}$



$$X'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -K \end{pmatrix} \Rightarrow \text{separ}$$

Grönman-Hartman deduce che la dinamica vicino a 0 è simile a un'ellisse

$$x'(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ K & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^2 + K = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\pm} = \pm i\sqrt{K} \quad \Rightarrow \text{centro: c'è equilibrio ellittico}$$

Gröbner-Hartman in questo caso non puo' aiutare!

- I.P.: questo sistema ammette un integrale primo $f(x,y) = (xe^{-x})^k ye^{-y}$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} k(xe^{-x})^{k-1} e^{-x}(1-x)ye^{-y} \\ (xe^{-x})^k e^{-y}(1-y) \end{pmatrix}$$

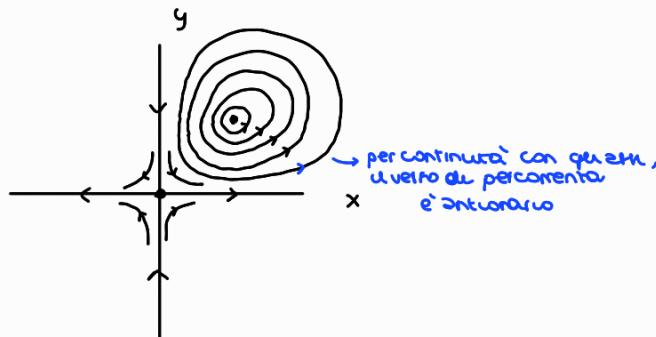
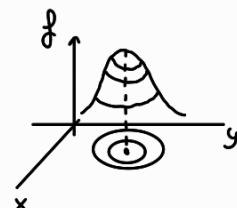
Ci interessano gli zeri del primo quadrante: $x>0, y>0$

\Rightarrow punti critici: $(1,1)$

$$\nabla^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} -k(xe^{-x})^{k-1} e^{-x}ye^{-y} & 0 \\ 0 & -(xe^{-x})^k e^{-y} \end{pmatrix} \Big|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} <0 & 0 \\ 0 & <0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (1,1)$ e' punto di max stretto

Intuitivamente, le curve di livello sono curve chiuse



Nelle coordinate originali l'equilibrio e' in $(\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$

Potrebbe aver senso inserire un termine logistico nell'eq. delle prede: il punto ellittico immediatamente diventa iperbolico (frena alcuni per appieno intermedio), c'e' una biforcazione.

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy - \eta x^2 \\ \dot{y} = -\delta y + \delta xy \end{cases}$$

Portiamo pentare da infuso del prede indiscriminato, ad esempio dovuto alla setta

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy - \varepsilon x \\ \dot{y} = -\delta y + \delta xy - \varepsilon y \end{cases}$$

In questo modo l'equilibrio è $\left(\frac{\delta + \varepsilon}{f}, \frac{\alpha - \varepsilon}{\beta} \right)$.

È evidente che se ε è alto, l'eq. si sposta a sud-est, dunque i predatori diminuiscono. Viceversa, se diminuisce la preda, ε basso, l'eq. si sposta a nord-ovest, dunque i predatori aumentano.

Se pensiamo di calcolare la media delle popolazioni nello stesso intervallo di tempo si ha:

$$t \mapsto (X(t), y(t))$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt = \dots = \frac{\delta + \varepsilon}{f}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \dots = \frac{\alpha - \varepsilon}{\beta}$$

SIR

$$\text{popolazione} = S + I + R$$

↑
INFETTI
↓
SUSCETTIBILI RIMOSSI (guariti o deceduti)

Supponiamo $S \rightarrow I \rightarrow R$, avendo una nata infett., poi si diventa guariti o deceduti, non si può tornare ad essere suscettibili.

Ipotesi: funzione che dipende da I

$$\begin{cases} \dot{S} = -\alpha(I)S \\ \dot{R} = \beta I \\ S + I + R = \text{cost} \Rightarrow \dot{I} = -\dot{R} - \dot{S} \end{cases}$$

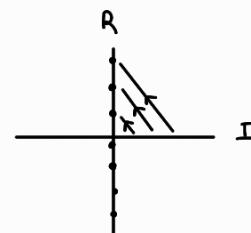
$$\begin{cases} \dot{S} = -\alpha I S \\ \dot{I} = \alpha S I - \beta I \\ \dot{R} = \beta I \end{cases} \quad (S, I, R) \in \mathbb{R}^3, \alpha, \beta > 0$$

un'interna $S, I, R > 0$: chiediamo per la **invariante**

• $I=0 \stackrel{\dot{I}=0}{\Rightarrow} \dot{S}, \dot{R}=0 \Rightarrow$ sono tutti equilibri, ed è **invariante**

• $S=0$ è invariante in \mathbb{R}^3 $\Rightarrow \begin{cases} \dot{I} = -\beta I \\ \dot{R} = \beta I \end{cases}$

$$I>0: \begin{cases} \dot{I} = -1 \\ \dot{R} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(t) = I_0 - t \\ R(t) = R_0 + t \end{cases}$$

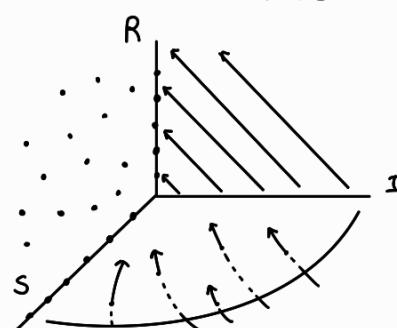


se non ci sono infetti,
l'espansione non parte
 \Rightarrow ha fatto che siano tutti equilibri

• $R=0 \Rightarrow \dot{R} = \beta I > 0$ la componente R del campo vett. punta verso l'alto (anche se non so come sono dette)

\Rightarrow le orbite che entrano nel piano SI dal basso, vanno verso l'alto, ma non escono dal piano "ottante"

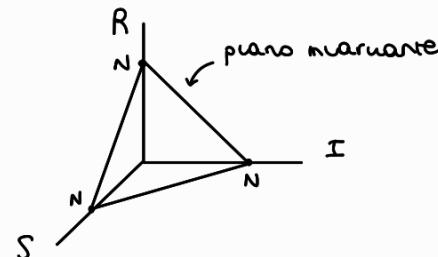
\Rightarrow il primo "ottante" è invariante nel futuro



OSS NON SO UTILIZZARE il modello per cercare di capire cosa succede prima di partire l'infezione

$S+I+R=\text{cost} \Rightarrow$ c'è un **integrale primo**!

$$S+I+R=N > 0$$



Troviamo delle coordinate adattate al piano: sceglio

$$\begin{cases} \dot{S} = -\alpha S I \\ \dot{I} = \alpha S I - \beta I \end{cases}$$

$$(S, I) \mapsto (S, I, N - S - I)$$

$$\Sigma_N = \{0 < S, 0 < I, S + I < N\}$$

$$I > 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{S} = -\alpha S \\ \dot{I} = \alpha S - \beta \end{cases} \quad \text{dividendo per } I \quad \begin{cases} \dot{\frac{S}{I}} = -\alpha \\ \dot{\frac{I}{S}} = \alpha - \beta \frac{1}{S} \end{cases} \quad \text{dividendo per } \alpha \quad \begin{cases} \dot{\frac{S}{I}} = -1 \\ \dot{\frac{I}{S}} = 1 - \frac{\beta}{\alpha} \end{cases}, \quad k = \frac{\beta}{\alpha} > 0$$

Integriamo le equazioni:

$$\begin{cases} S_t = e^{-kt} S_0 \\ \frac{dI}{dt} = e^{-kt} S_0 - k \end{cases} \quad \begin{cases} S_t = e^{-kt} S_0 \\ I_t = I_0 - e^{-kt} S_0 \Big|_0^t \end{cases} \quad -kt = I_0 - S_0 e^{-kt} + S_0 - kt$$

$$I_t - I_0 = \int (e^{-kt} S_0 - k) dt$$

$$t \mapsto \left(\begin{array}{l} S_t = S_0 e^{-kt} \\ I_t = -S_0 e^{-kt} - kt + C \end{array} \right) \text{ curve integrali del sistema ridotto ad } (S, I)$$

Ora vogliamo trovare l'eq. delle orbite: cerchiamo I in funzione di S

$$e^{-kt} = \frac{S_t}{S_0} \Rightarrow -kt = \log\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$$

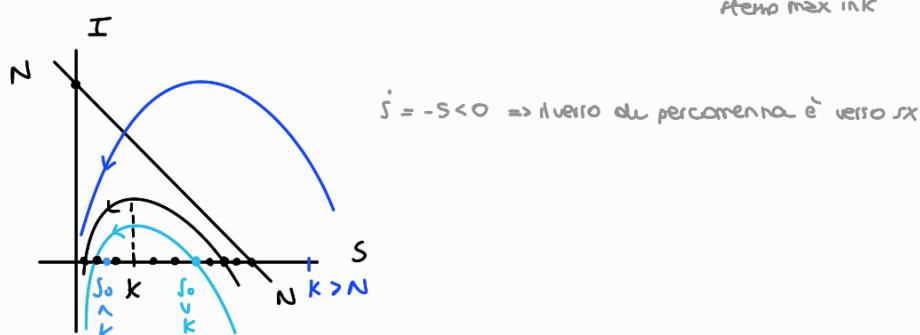
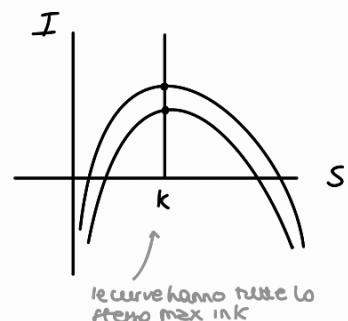
$$I_t = -S_t + k \log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) + C$$

$$\Rightarrow I = -S + k \log(S) + C \quad \text{eq. cartesiana delle orbite}$$

$$I' = -1 + \frac{k}{S} = 0 \quad \text{se } S = k$$

> 0 se $S < k$

< 0 se $S > k$



$k < N$

- $S_0 < k$: l'epidemia non parte: si estingue da sola
- $S_0 > k$: l'epidemia parte, raggiunge un max e poi si ferma, quando il numero di suscettibili non è necessariamente nullo (non tutti si devono ammalare)

(S, I)

corrido perché le eq. per S ed I non contengono R
=> calcolo automaticamente la fermata

piano marcante

curva studiare
il sistema in questo
triangolo Σ_N

$k > N$ comunque parte l'epidemia, questa tende a spegnersi

Per non far partire un'epidemia vogliamo che il numero di suscettibili sia $S_0 < k = \frac{\beta}{\alpha}$.

Dunque abbiamo le seguenti possibilità:

- diminuire S_0 : vaccinazioni (e non c'è nemmeno bisogno di vaccinare tutti)
- aumentare β : aumentare la velocità di guarigione (\Rightarrow farmaci)
- abbattere α : misure di sicurezza

EQUAZIONE 1-DIM DI NEWTON

Ritorno in fase

$$m\ddot{x} = f(x), \quad x \in L \subseteq \mathbb{R}$$

$f: L \rightarrow \mathbb{R}$ diff $\Rightarrow \exists V: L \rightarrow \mathbb{R}$ tc $f = -V'$ detta ENERGIA POTENZIALE

$$m\ddot{x} = -V'(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{1}{m} V'(x) \end{cases}$$

Ha un I.P. $E(x,v) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$ detto ENERGIA TOTALE, infatti:

$$\frac{d}{dt} E(x,v) = mvV' + V'(x)x' = -VV' + V'V = 0$$

Esempio

$$(OA) \quad f = -kx$$

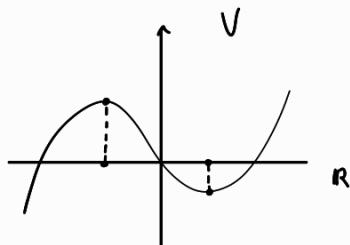
$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$(RA) \quad f = +kx$$

$$V(x) = -\frac{1}{2}kx^2$$

Cerchiamo di tracciare gli insiem di livello di E (\Rightarrow orbita), a partire dal grafico dell'energia potenziale.

- equilibri: $(\bar{x}, 0)$ con \bar{x} punto critico di V

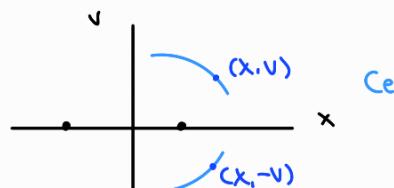


- Cerchiamo i punti critici dell'energia

$$DE(x,v) = \begin{pmatrix} V'(x) \\ mv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\bar{x}, 0) = (\bar{x}, 0) \text{ equilibrio del campo vett.}$$

\Rightarrow gli insiem di livello che non contengono equilibri sono regolari.

- E è quadratico nella velocità, ovvero è pari rispetto a v , dunque se (x, v) è un punto di livello, allora $(x, -v)$ è nello stesso insieme di livello.
 \Rightarrow il grafico di E è simmetrico rispetto all'asse delle x



Siano $C_e = \{(x, v) : E(x, v) = e, e \in \mathbb{R}\}$ gli insiem di livello dell'energia, allora

- $\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = e > 0 \stackrel{(x, v) \in C_e}{\implies} V(x) \leq e$
($e > \min_{x \in \mathbb{R}} V(x)$)

- $E(x, v) = e$

$$\frac{1}{2}mv^2 = e - V(x)$$

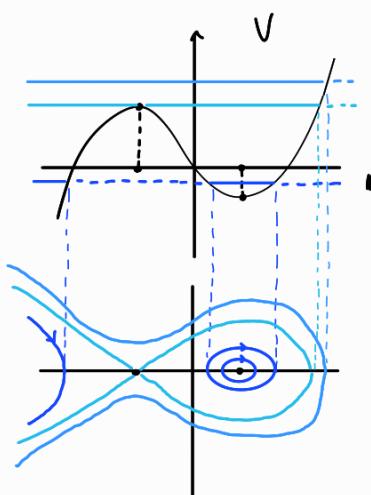
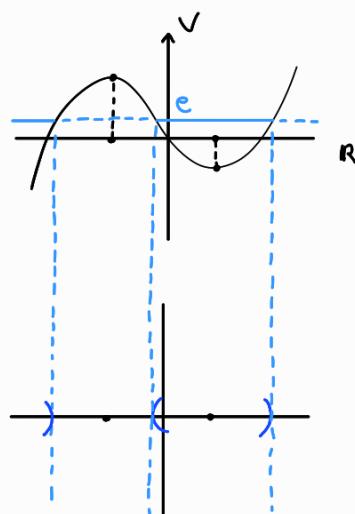
$$v^2 = \frac{2}{m}(e - V(x))$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(e - V(x))} = \pm \tilde{v}(x, e)$$

$x \mapsto (x, \pm \tilde{v}(x, e))$ è param (rk J ≠ 0) delle orbite

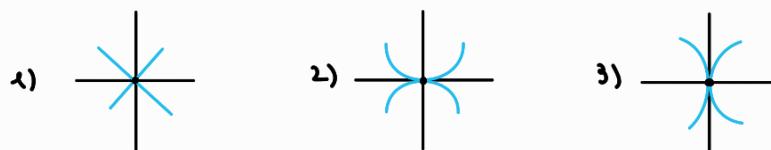
- $V(x) = e \stackrel{(x, v) \in C_e}{\implies} v = 0$

⇒ l'orbita incontra l'asse in modo verticale necessariamente, perché non è p.t.o di equilibrio



Vogliamo capire in che modo è fatto il grafico in $(\bar{x}, 0)$ p.t.o di max locale ($\bar{x} < 0$).

Abbiamo 3 possibilità:



Osserviamo immediatamente che:



$$\Sigma^s(\bar{x}, 0)$$



$$\Sigma^u(\bar{x}, 0)$$

Vogliamo capire come è messa la tangente in $(\bar{x}, 0)$:

Tg $\alpha x \mapsto (x, \pm \tilde{v}(x, e))$ in $(\bar{x}, 0)$ con $v'(x) = 0$ e $v(x) = e$

$$\frac{d}{dx} \tilde{v}(x, e) = \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{2}{m} \sqrt{e - V(x)}} = \sqrt{\frac{1}{2m}} \frac{-V'(x)}{\sqrt{e - V(x)}} \xrightarrow[x \rightarrow \bar{x}]{} \left(\frac{0}{0} \right)$$

"(x)"

Se siamo de l'Hôpital continua a venire $\left[\frac{0}{0} \right]$: facciamo lo sviluppo di Taylor

$$(*) = -\frac{1}{12m} \frac{V'(x) + V''(\bar{x})(x-\bar{x}) + O(|x-\bar{x}|^2)}{\sqrt{e^{-V(x)} - V'(\bar{x})(x-\bar{x}) - \frac{1}{2}V''(\bar{x})(x-\bar{x})^2 + O(|x-\bar{x}|^3)}}$$

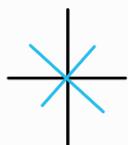
e' ben definito
perche' \bar{x} p.t.o di
nex locale, dunque
 $V''(\bar{x}) \leq 0$

$$= -\frac{1}{12m} \frac{V''(\bar{x})(x-\bar{x}) + O(x)}{\sqrt{-\frac{1}{2}V''(\bar{x})|x-\bar{x}| + o(x)}} \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} +\sqrt{\frac{1}{m} |V''(\bar{x})|} \cdot \text{sgn}(x-\bar{x})$$

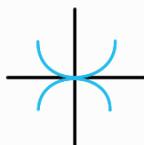
farebbe $O(\frac{3}{2})$

Abbiamo i seguenti casi:

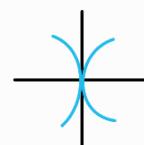
- \bar{x} è max stretto di $V \Rightarrow V''(\bar{x}) < 0 \Rightarrow$ siamo nel caso 1)
- se $V''(\bar{x}) = 0$, allora dovremo andare agli ordini successivi.
Se allora una derivata di V in \bar{x} è $\neq 0$, allora siamo nel caso 2)
- le funzioni che possono avere beide le derivate nulle sono quelle non analitiche,
dunque il caso 3) è eccezionale



$$V''(x) < 0$$



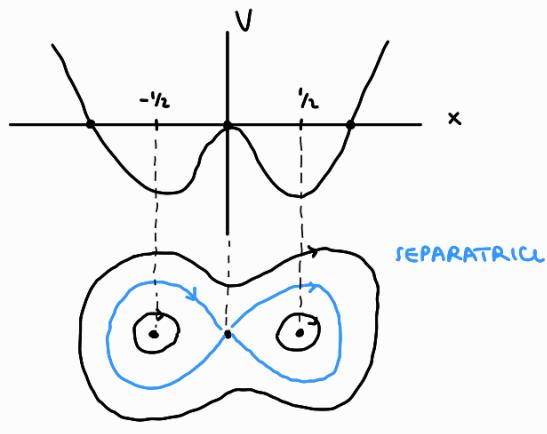
$$V''(x) = 0 \\ V \text{ non analitica}$$



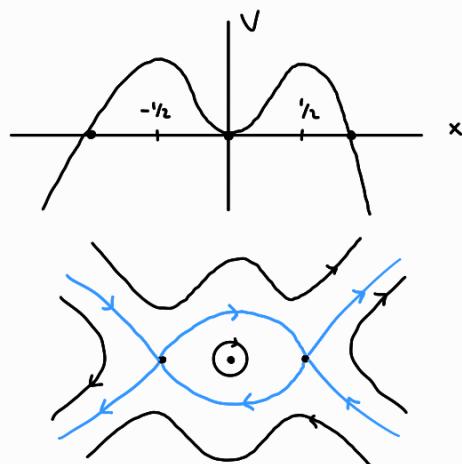
$$V''(x) = 0 \\ V \text{ non analitica}$$

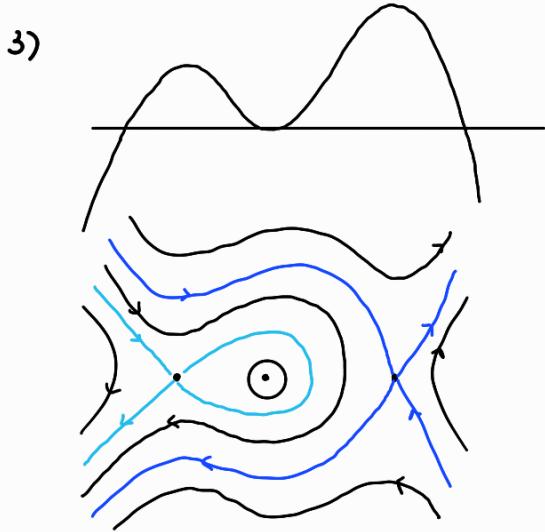
Esempio 1) $V(x) = x^3(x^2-1)$

$$\ddot{x} = -V'(x) \quad x \in \mathbb{R}$$



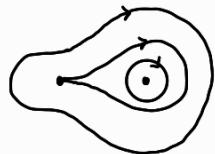
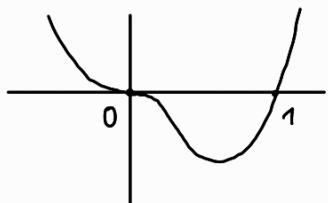
2) $V(x) = -x^4(x^2-1)$





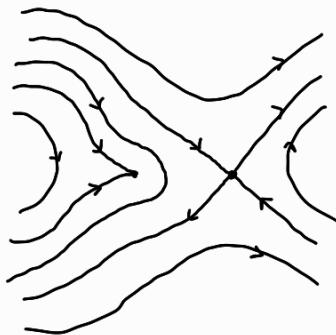
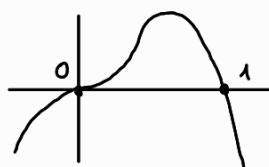
4) $U_k(x) = kx^3(x-1)$, $k \in \mathbb{R}$

$k > 0$

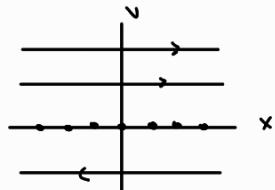


$U''(0)=0$, mai scuro nel catto 2)

$k < 0$



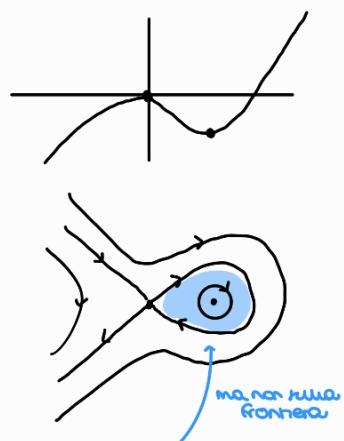
$k = 0$



5) $\ddot{x} = -x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$

$$= -V'(x)$$

$$V(x) = \int x^2 - x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} = -\frac{x^2}{3}(x - \frac{3}{2})$$



- determinare condizioni iniziali che producono orbite periodiche :

Sono quei (x_0, v_0) t.c. $E(x_0, v_0) < \tilde{E}(0, 0) = V(0) = 0$, $x_0 \in (0, \frac{3}{2})$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v_0^2 + \frac{x_0^2}{3}(x_0 - \frac{3}{2}) < 0, x_0 \in (0, \frac{3}{2})$$

- determinare le cond. iniziali che producono rot. limitate :

le stesse + la frontiera

Linearizzazione

RISULTATO $m\ddot{x} = -V'(x), \quad x \in \mathbb{R}$

$$E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

$$Ce = E^{-1}(e)$$

$$\tilde{v}(x, e) = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (e - V(x))}$$

Proviamo a linearizzare agli equilibri $(\bar{x}, 0), \quad V'(\bar{x}) = 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{1}{m}V'(x) \end{cases} \xrightarrow[\text{Jacobiана}]{\text{matrice}} A(x, v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{m}V''(x) & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(\bar{x}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{m}V''(\bar{x}) & 0 \end{pmatrix}$$

avr.: $d^2 + \frac{1}{m}V''(\bar{x}) = 0 \Rightarrow d_{\pm} = \pm \sqrt{-\frac{1}{m}V''(\bar{x})}$

- $V''(\bar{x}) > 0 \Leftrightarrow \bar{x}$ è p.t.o di min. stretto

$$d_{\pm} = \pm i \sqrt{\frac{1}{m}V''(\bar{x})}$$

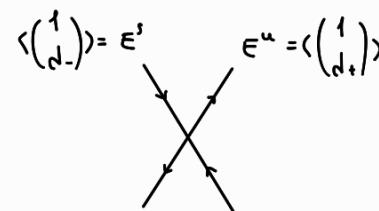
$(\bar{x}, 0)$ è equilibrio ellittico (centro)

Il ritratto in fase della linearizzazione è un centro: in generale non ci dà informazioni sul ritratto in fase generale (perché ellittico), ma in questo caso sono effettivamente simili. Se, intutt., c'è una buca di potenziale, dalla trattazione precedente, si ottiene effettivamente un centro.

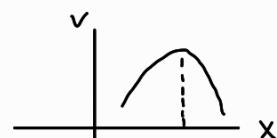
- $V''(\bar{x}) < 0 \Leftrightarrow \bar{x}$ è p.t.o di max. stretto

$$d_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{1}{m}|V''(\bar{x})|}$$

$(\bar{x}, 0)$ è un equilibrio iperbolico (stella)



In questo caso il teorema di Grobman-Hartman ci dice che ritratto in fase linearizzato e non sono simili. Infatti:



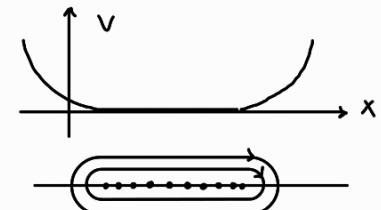
$E^s(\bar{x}, 0) \quad E^u(\bar{x}, 0)$

VARIETÀ STAB/INSTAB di $(\bar{x}, 0)$



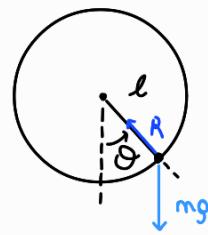
- $V''(\bar{x}) = 0$

Non dà informazioni!



Esempio (pendolo)

$$m\ell^2 \ddot{\theta} = -mg \ell \sin \theta, \quad \theta \in \mathbb{S}^1$$



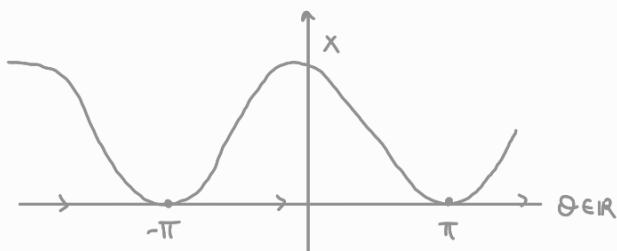
Risoltoretempo ODE $\dot{\theta} = 1 + \cos \theta, \theta \in \mathbb{S}^1$

Invece di lavorare sul cerchio calcoliamo in \mathbb{R} e poi facciamo

una proiezione $p(\theta) = \theta \bmod 2\pi$

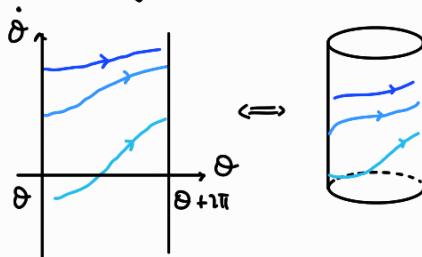
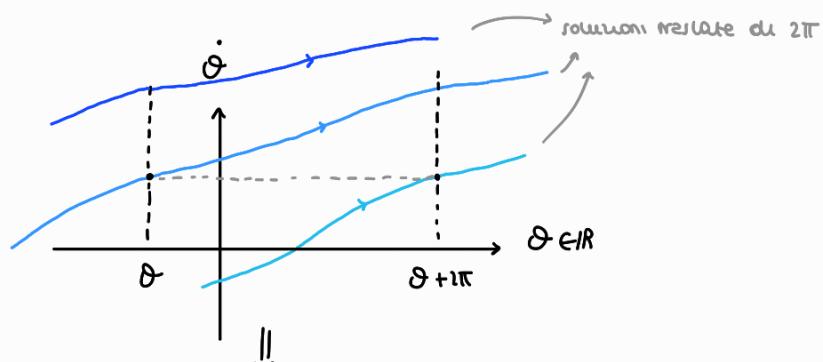
$$\theta - 2\pi \quad \theta \quad \theta + 2\pi \quad \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\downarrow p(\theta)$$



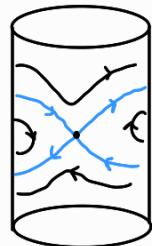
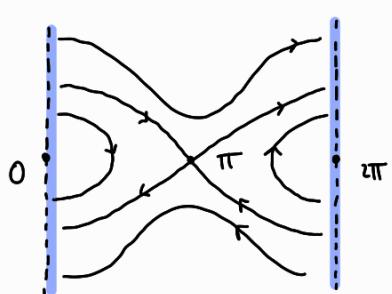
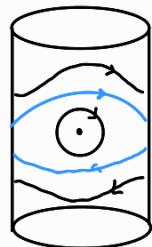
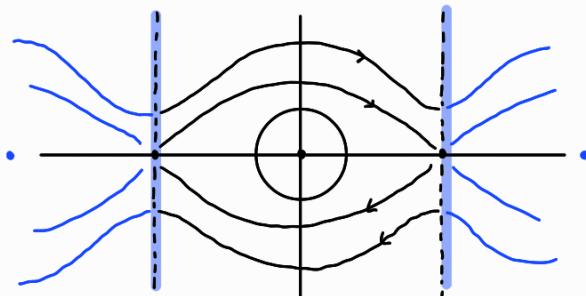
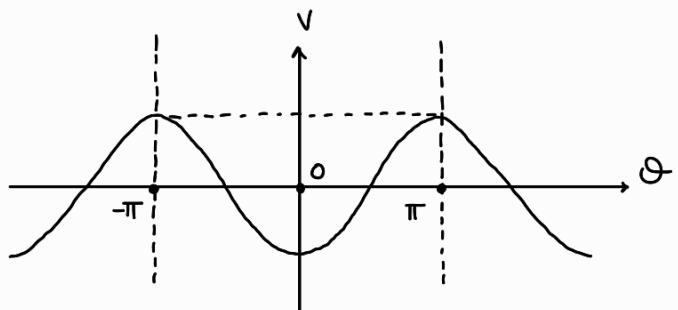
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\frac{g}{L} \sin \theta \end{cases}, \quad (\theta, v) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$$



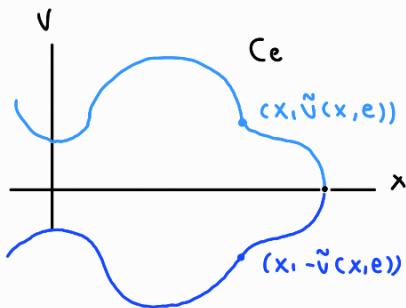
Lo sp. delle fasi in reale è un cilindro!

$$\ddot{\theta} = -V'(\theta) = -K \sin \theta$$



OSS le orbite periodiche non hanno stesso periodo: nelle separatrici l'equilibrio viene raggiunto all'infinito (nel passato o nel futuro), dunque, per continuità del ritratto infinito, man mano che ci si avvicina alle separatrici il periodo diventa sempre più grande (allora si possono fare discorsi di buon senso).

legge oraria



vogliamo usare coordinate adattate a E : (x, \bar{e})

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x, \bar{e})}{\partial(x, v)} & 0 \\ \frac{\partial \bar{e}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{e}}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v'(x) & mv \end{pmatrix}$$

$$\det J = mv \neq 0 \quad \text{e } v \neq 0$$

\Rightarrow i punti (x, \bar{e}) danno parametrizzazione (locale) di C_e

Risolviamo l'eq. di Newton con le coord. adattate per un piano di livello fissato C_e

$$\begin{cases} \dot{x} = v = \pm \tilde{v}(x, \bar{e}) \\ \dot{\bar{e}} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{e - V(x)} \quad \xrightarrow{\text{integro}} \quad t \mapsto x(t)$$

$t \mapsto (x(t), x'(t))$ param. temp. delle soluzioni

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{e - V(x)}} \quad \Rightarrow t(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{dy}{\sqrt{e - V(y)}}$$

Se è invertibile, otengo $t \mapsto x(t)$

\Rightarrow questo permette di trovare la legge oraria (qui faremo su che orbita muovo, in più adesso rappresento anche con le velocità)

Cerchiamo il periodo del moto di energia e :

$$T(e) = 2 \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_-(e)}^{x_+(e)} \frac{dx}{\sqrt{e - V(x)}}$$

$x_-(e)$

\downarrow dipende da e \downarrow

Il periodo del periodo non è costante, perché dipende da e .

Per questo è detto Anisocrono

