SPAZI METRICI COMPLETI E COMPATTI

Compattezza in SM

(X, d) SM

def Un insieme $K \subset X$ si dice SEQUENZIALMENTE COMPATTO se $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K esiste una sottosuccessione che converge ad un elemento di K.

prop Se $K \subset X$ è seq. compatto allora K è chiuso e limitato.

dim Provo che $K = \bar{K}$. Sia $x \in \bar{K}$.

caratterizzazione sequenziale della chiusura

Esiste succ. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in K$ $\forall n$ tale che

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{X} x$$

$\exists$ sottosucc di $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ che converge ad un elemento di K. Ma ogni sottosucc di $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad x!

ma allora se K seq. compatto $\Rightarrow x \in K$.

Provo che $K \subset X$ è limitato.

Fisso $x_0 \in X$. voglio provare che $\exists R > 0$ tc $K \subset B(x_0, R)$.

PA $\nexists R > 0$ tc $K \subset B(x_0, R)$. ovvero

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad K \cap (X \setminus B_X(x_0, n)) \neq \emptyset$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \exists x_n \in K$ tc $d(x_n, x_0) \geq n$

$\Rightarrow$ per compattezza seq. $\exists$ sottosucc $x_{n_j} \xrightarrow[j \to \infty]{X} x \in K$

stima:

$$d(x_0, x) \geq \underbrace{d(x_0, x_{n_j})}_{\downarrow\, \infty} - \underbrace{d(x, x_{n_j})}_{\downarrow\, 0} \qquad \text{(disug. triang)}$$

$\Rightarrow d(x_0, x) = \infty$, ma nello spazio metrico due punti fissati hanno distanza finita $\quad \lightning$

Ora su $\mathbb{R}^n$ fissiamo la distanza standard.

TEOREMA (HEINE - BOREL)

Sia $K \subset \mathbb{R}^n$. Sono eq:

A) K è chiuso e limitato

B) K è seq. compatto

dim A) $\Rightarrow$ B). Sia $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una succ in $K \subset \mathbb{R}^n$:

$$x_m = (x_m^1, \dots, x_m^n) \in K \quad \forall m$$

K è limitato $\Rightarrow (x_m^1)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ è limitata

$\overset{(BW)}{\Longrightarrow} \exists$ s.s. $x_{m_j}^1 \xrightarrow[j\to\infty]{} x_\infty^1 \in \mathbb{R}$

Guardo: $(x_{m_j}^2)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ è limitata

$\overset{BW}{\Longrightarrow} \exists$ s.s $x_{m_{j_k}}^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} x_\infty^2 \in \mathbb{R}$

Dopo n iterazioni del ragionamento deduco che esiste una s.s.

$$\begin{array}{ccl} x_{m_j} & \xrightarrow[j\to\infty]{\mathbb{R}^n} & (x_\infty^1, \dots, x_\infty^n) = x_\infty \in \mathbb{R}^n \\ \cap & & \\ K & \xRightarrow[K \text{ chiuso}]{} & x_\infty \in K \end{array}$$

$\square$

$\exists$ succ di punti $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ in K tale che $x_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x \xRightarrow[\text{della chiusura}]{\text{caratt. seq.}} x \in \bar{K} \xRightarrow{K \text{ chiuso}} x \in K$

<u>esercizio</u> [2.12 - quaderno degli esercizi]

$X = \ell^\infty(\mathbb{R}) = \{$succ. in $\mathbb{R}$ limitate$\}$

$$\|\underset{x}{\underbrace{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

Provare che

$$K = \{x \in \ell^\infty(\mathbb{R}) : \|x\|_\infty \leq 1\}$$

è chiuso, limitato, ma non seq. compatto.

blocca il ragionamento di prima perché ho infinite coordinate

1) verifico $K = \bar{K} \Rightarrow \exists \; x^m \xrightarrow[m\to\infty]{X} x$, con $x \in \bar{K}$, $x^m \in K$

considero $x \in \bar{K}$

$\Updownarrow$

$$\|x^m - x\|_\infty \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n^m - a_n| \geq |a_n^m - a_n| \quad \forall n$$

$\downarrow m\to\infty \Rightarrow \downarrow m\to\infty$

$0 \qquad\qquad 0$

mostro che $x \in K$
(è succ. limitata tc $\|x\|_\infty \leq 1$)

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N} \; \lim_{m\to\infty} a_n^m = a_n \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N} \; \lim_{m\to\infty} |a_n^m| = |a_n|$

$|a_n^m| \leq 1 \quad \forall \; m,n$

$\Rightarrow |a_n| \leq 1 \; \forall n \xRightarrow{\text{passo al sup}} \|x\|_\infty \leq 1 \Rightarrow x \in K \Rightarrow K$ chiuso.

2) Considero $x^m = (0, \underline{\qquad}, 0, \underset{m}{1}, 0, \dots)$

$x^m \in K \quad \forall m$

Tutte le coordinate conv. a $0 \in \mathbb{R}$. Se ci fosse una $x^{m_j} \xrightarrow[j\to\infty]{\|\cdot\|_\infty} x \in X$

allora $x = 0 \in X$

ma $\|x^{m_j} - 0\|_\infty = 1 \quad \forall j$.

La succ. converge puntualmente, ma non uniformemente.

(Non conv. nella norma!)

$\Rightarrow$ K non è compatto seq.

def (X,d) SM, $K \subset X$. Diciamo che una famiglia di insiemi $A_\alpha \subset X$, $\alpha \in \mathcal{A}$ è un RICOPRIMENTO di K se

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$$

se poi $A_\alpha \in \tau(X)$ $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ diremo che il ricoprimento è APERTO

def Diremo che un insieme $K \subset X$ è COMPATTO se $\forall$ ricoprimento aperto di K $\exists$ un sottoricoprimento finito di K. Ovvero

$$\forall A_\alpha \in \tau(X) \text{ con } \alpha \in \mathcal{A} \text{ e } K \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$$

$$\exists \mathcal{B} \in \mathcal{A} \quad \text{tc} \quad \text{card}(\mathcal{B}) < \infty \quad \text{e } K \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}} A_\alpha$$

esempio
- $K = (0,1) \subset \mathbb{R}$ non è compatto, infatti: $(0,1) \overset{=}{\subset} \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n}, 1\right)}_{\text{aperti}}$

  non è seq. comp., infatti posso prendere una succ $\to 0 \notin (0,1)$
- $K = [0,\infty) \subset \mathbb{R}$ non è compatto, infatti: $K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{(-1,n)}_{\text{aperti}}$

TEOREMA Siano (X,d) uno SM e $K \subset X$. Sono equivalenti:

A) K è seq. compatto

B) K è compatto

def uno SM (X,d) si dice SEPARABILE se $\exists$ $X_0 \subset X$ tc

$$\# X_0 = \text{card}(X_0) = \text{card}(\mathbb{N}) \quad \text{e} \quad \overline{X_0} = X.$$

esempi
- $\mathbb{R}$ è separabile : $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^n$ è separabile : $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$

esercizio $C^\infty(\mathbb{R})$ con $\|\cdot\|_\infty$ non è separabile

prop Se (X,d) è compatto, allora è separabile.

dim Fissato $r>0$, la famiglia di palle (aperte) $\{B_r(x) : x \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X che dunque ha un sottoricoprimento finito. Dunque, $\forall k \in \mathbb{N}$ esiste un insieme finito di punti $x_1^k, \dots, x_{n_k}^k \in X$, $n_k \in \mathbb{N}$, tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^{n_k} B(x_i^k, \tfrac{1}{k})$$

L'insieme di tutti i centri

$$X_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n_k} \{x_i^k\}$$

è al più numerabile ed è denso in X $(\overline{X_0} = X)$.

esercizio 2.10 Sia $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Prova che sono equivalenti:

A) f è continua

B) $gr(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^2$ è chiuso

A) $\Rightarrow$ B). Chiamo $grf(f) = K$ e sia $(x,y) \in \overline{K}$. Esistono

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]$ t.c. $(x_n, f(x_n)) \xrightarrow[\mathbb{R}^2]{n\to\infty} (x,y)$.

f è continua dunque $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \underset{\text{continuità}}{=} f(x) = y \Rightarrow (x,y) \in K$.

B) $\Rightarrow$ A). Fisso $x_0 \in [0,1]$ e prendo $\underset{\in[0,1]}{x_n} \xrightarrow{n\to\infty} x_0$. Voglio mostrare che $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Abbiamo $(x_n, f(x_n)) \in K$. Per hp $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ è limitata e per BW $\exists$ una sottosuccessione che converge:

$$f(x_{n_j}) \xrightarrow[j\to\infty]{} y_0 \in \mathbb{R}^2 \quad \text{dunque}$$

$$\underset{K=\overline{K}}{\underset{\cap}{(x_{n_j}, f(x_{n_j}))}} \xrightarrow[j\to\infty]{\mathbb{R}^2} (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow (x_0, y_0) \in \overline{K} = K$

$\Rightarrow y_0 = f(x_0)$

Lo spazio $\ell^2(\mathbb{R})$ è uno spazio di Hilbert (secondo la seguente definizione) di dimensione infinita.

Definizione 3.2.5. Sia V uno spazio vettoriale reale dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Diciamo che V è uno *spazio di Hilbert* se V, dotato della norma associata al prodotto scalare, risulta uno spazio di Banach (ovvero completo).

Mentre $\ell^p(\mathbb{R})$ è separabile per ogni $1 \le p < \infty$, lo spazio $\ell^\infty(\mathbb{R})$ non è separabile. Si tratta di uno spazio di Banach enorme che contiene tutti gli spazi metrici separabili.

3. Compattezza sequenziale e compattezza sono equivalenti

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Definizione 3.3.1 (Insiemi sequenzialmente compatti). Un sottoinsieme $K \subset X$ si dice *sequenzialmente compatto* se ogni successione di punti $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K ha una sottosuccessione che converge ad un elemento di K.

Gli insiemi sequenzialmente compatti sono chiusi e limitati. Ricordiamo che un insieme $K \subset X$ si dice *limitato* se esistono $x_0 \in X$ ed $r > 0$ tali che $K \subset B_r(x_0)$ (equivalentemente: per ogni $x_0 \in X$ esiste $r > 0$ tale che $K \subset B_r(x_0)$).

Proposizione 3.3.2. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $K \subset X$ un sottoinsieme sequenzialmente compatto. Allora K è chiuso e limitato.

caratterizzazione sequenziale della chiusura

Dim. Proviamo che $K = \overline{K}$. Per ogni $x \in \overline{K}$ esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K che converge ad x. Questa successione ha una sottosuccessione $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ che converge ad un elemento di K. Ma questo elemento deve essere x, che quindi appartiene a K.

Supponiamo per assurdo che K non sia limitato. Allora esiste un punto $x_0 \in X$ tale che $K \cap (X \setminus B_r(x_0)) \neq \emptyset$ per ogni $r > 0$. In particolare, con la scelta $r = n \in \mathbb{N}$ esistono punti $x_n \in K$ tali che $d(x_n, x_0) \ge n$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è in K. Quindi esiste una sottosuccessione $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergente ad un elemento $x \in K$. Ma allora

$$d(x, x_0) \ge d(x_0, x_{n_j}) - d(x_{n_j}, x) \ge n_j - d(x_{n_j}, x) \to \infty$$

per $j \to \infty$. Questo è assurdo perchè $d(x, x_0) < \infty$. $\square$

Esempio 3.3.3. Sia $X = \mathbb{R}$ con la distanza standard e sia $K \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto. Se K è limitato, allora dal Teorema di Bolzano-Weierstrass segue che ogni successione in K ha una sottosuccessione convergente. Se K è anche chiuso, allora il limite di questa successione è un elemento di K.

Dunque, un sottoinsieme $K \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato è sequenzialmente compatto. Il viceversa vale per la proposizione precedente.

Teorema 3.3.4 (Heine-Borel). Sia $\mathbb{R}^m$, $m \ge 1$, munito della distanza standard e sia $K \subset \mathbb{R}^m$ un insieme. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) K è sequenzialmente compatto;
B) K è chiuso e limitato.

Dim. Proviamo l'affermazione B)$\Rightarrow$A). Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di punti in K. Scriviamo le coordinate $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^m)$. La successione reale $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata e dunque ha una sottosuccesione $(x_{n_j}^1)_{j\in\mathbb{N}}$ convergente ad un numero $x^1 \in \mathbb{R}$. La successione $(x_{n_j}^2)_{j\in\mathbb{N}}$ è limitata e quindi ha una sottosuccessione convergente ad un

(*) ∃ succ di punti $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ in K tale che $x_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x \xRightarrow[\text{della chiusura}]{\text{caratt. seq.}} x\in\bar{K} \xRightarrow{K \text{ chiuso}} x\in K$

numero $x^2 \in \mathbb{R}$. Si ripete tale procedimento di sottoselezione m volte. Dopo m sottoselezioni successive si trova una selezione crescente di indici $j \mapsto k_j$ tale che ciascuna successione di coordinate $(x^i_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge ad un numero $x^i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,m$. Ma allora $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $x = (x^1,\dots,x^m) \in \mathbb{R}^m$. Siccome K è chiuso, (*) deve essere $x \in K$. □

Esempio 3.3.5. Sia $\ell^2(\mathbb{R})$ con la distanza data dalla norma naturale introdotta nell'Esempio 1.3.2. Consideriamo l'insieme

$$K = \{\mathrm{x} \in \ell^2(\mathbb{R}) : \|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} \le 1\}.$$

L'insieme K è chiaramente limitato. Inoltre è chiuso, in quanto è l'anti-immagine del chiuso $(-\infty,1] \subset \mathbb{R}$ rispetto alla funzione continua $f : \ell^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})}$.

Mostriamo che K non è sequenzialmente compatto. Indichiamo con $\mathrm{e}_n \in \ell^2(\mathbb{R})$ la successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $a_k = 1$ se $k = n$ e $a_k = 0$ se $k \neq n$. La successione $(\mathrm{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è in K ma non può avere alcuna sottosuccessione convergente, in quanto per $m \neq n$ si ha

$$\|\mathrm{e}_n - \mathrm{e}_m\|_{\ell^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2}. = \sqrt{(e^n_n - e^n_m)^2 + (e^m_n - e^m_m)^2} = \sqrt{1+1}$$

↳ tutte le altre coord. $e^i_m, e^j_n = 0 \quad \forall i,j \neq n,m$

Una sottosuccessione convergente dovrebbe essere di Cauchy, e questo non è possibile.

La definizione di insieme compatto è puramente topologica (basta poter parlare di insiemi aperti).

Definizione 3.3.6 (Ricoprimento e sottoricoprimento). Una famiglia di insiemi $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$, con $A_\alpha \subset X$, si dice un *ricoprimento* di un insieme $K \subset X$ se

$$K \subset \bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}} A_\alpha.$$

Il ricoprimento si dice *aperto* se A_α è un insieme aperto per ogni $\alpha \in \mathscr{A}$.

Sia ora $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$. La famiglia di insiemi $\{A_\beta\}_{\beta\in\mathscr{B}}$ si dice un *sottoricoprimento* del ricoprimento $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ se risulta ancora

$$K \subset \bigcup_{\beta\in\mathscr{B}} A_\beta.$$

Il sottoricoprimento si dice *finito* se $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) < \infty$.

Definizione 3.3.7 (Insieme compatto). Un sottoinsieme $K \subset X$ si dice *compatto* se ogni ricoprimento aperto di K possiede un sottoricoprimento finito.

Esempio 3.3.8. Sia $X = \mathbb{R}$ con la distanza standard. L'intervallo aperto $A = (0,1)$ non è compatto. Infatti la famiglia di insiemi $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $A_n = (1/n, 1)$ forma un ricoprimento di A in quanto

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (1/n, 1).$$

Da tale ricoprimento, tuttavia, non è possibile estrarre alcun sottoricoprimento *finito*. Chiaramente, l'insieme A non è sequenzialmente compatto, in quanto non è chiuso.

Sia ora $B = [0, \infty)$. Questo intervallo è chiuso, ma non è compatto. Infatti, la famiglia di insiemi $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $B_n = (-1, n)$ forma un ricoprimento di B in quanto

$$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (-1, n).$$

Da tale ricoprimento, tuttavia, non è possibile estrarre alcun sottoricoprimento *finito*. Chiaramente, l'insieme B non è sequenzialmente compatto, in quanto non è limitato.

Negli spazi metrici, le nozioni di compattezza e di compattezza sequenziale coincidono.

TEOREMA 3.3.9. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $K \subset X$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) K è sequenzialmente compatto.
B) K è compatto.

Una versione più dettagliata di questo teorema sarà data nel Teorema 3.4.2.

DEFINIZIONE 3.3.10 (Spazio separabile). Uno spazio metrico (X, d) si dice *separabile* se esiste un sottoinsieme $X_0 \subset X$ tale che $\overline{X_0} = X$ e X_0 è (al più) numerabile.

PROPOSIZIONE 3.3.11. Gli spazi metrici compatti sono separabili.

DIM. Diamo lo schema della dimostrazione. Fissato $r > 0$, la famiglia di palle (aperte) $\{B_r(x) : x \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X che dunque ha un sottoricoprimento finito.

Dunque, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un insieme finito di punti $x_1^k, \dots, x_{n_k}^k \in X$, $n_k \in \mathbb{N}$, tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^{n_k} B_{1/k}(x_i^k).$$

L'insieme di tutti i centri

$$X_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n_k} \{x_i^k\}$$

è al più numerabile ed è denso in X. □

4. Caratterizzazione degli spazi metrici compatti

Per il Teorema di Heine-Borel, un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato. Una simile caratterizzazione smette di valere negli spazi di "dimensione infinita". Negli spazi metrici completi, tuttavia, la caratterizzazione continua valere pur di sostituire la "limitatezza" con la "totale limitatezza".

DEFINIZIONE 3.4.1 (Totale limitatezza). Uno spazio metrico (X, d) si dice *totalmente limitato* se per ogni $r > 0$ esistono $x_1, \dots, x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, tali che $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_r(x_i)$.

TEOREMA 3.4.2. Sia (X, d) uno spazio metrico. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

SM completi

def Sia (X,d) uno SM. Una succ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X si dice di Cauchy se:

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \bar{n}\in\mathbb{N} : \forall n,m>\bar{n}$ si ha $d(x_n,x_m)<\varepsilon$

Diremo che X è uno SM **COMPLETO** se tutte le succ. di Cauchy convergono ad un elemento di X.

esempi
- $(\mathbb{R},d)$ con distanza standard è completo
- $\mathbb{R}^n$ è completo
- $\ell^\infty(\mathbb{R})$ è completo

def Uno spazio normato si chiama **SPAZIO DI BANACH** se è completo come spazio metrico

Sia K SM compatto.
compatto $\Rightarrow$ seq. compatto
$\Rightarrow$ chiuso e limitato
$\Rightarrow$ posso usare Weierstrass

$X=C(K)=\{f:K\to\mathbb{R}$ continue$\}$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in K}|f(x)| \overset{(W)}{=} \max_{x\in K}|f(x)|$$

$(X,\|\cdot\|_\infty)$ SN induce una distanza d_∞ su X

TEOREMA $X=C(K)$ con $d_\infty(f,g)=\sup_{x\in K}|f(x)-g(x)|$ è SM completo.
In altri termini, $C(K)$ è uno SB.

dim Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C(K)$ di Cauchy:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \bar{n} : \forall n,m\geq\bar{n} \quad \|f_n-f_m\|_\infty<\varepsilon$$

$$\|f_n-f_m\|_\infty = \sup_{x\in K}|f_n(x)-f_m(x)|$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} |f_n(x)-f_m(x)| \leq \sup_{x\in K}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon \quad \text{per } n,m\geq\bar{n}$$

Ma allora per $x\in K$ la successione $n\mapsto f_n(x)$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ dunque esiste $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=:f(x)$. Ho trovato $f:K\to\mathbb{R}$
dimostro convergenza puntuale

e ora provo che $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_\infty=0$.

Facendo tendere $m\to\infty$ in $(*)$ si ottiene $\forall x\in K$

$$|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon \quad \forall n>\bar{n}$$

Con il sup su x trovo: $\|f_n-f\|_\infty\leq\varepsilon \quad \forall n\geq\bar{n}$, ovvero

$$\underset{C(K)}{f_n} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \underset{C(K)}{f}$$

dimostro convergenza uniforme $\Rightarrow$ continuità della funzione f

def Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due SM. Diremo che $f: X \to Y$ è una **ISOMETRIA** se

$$d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x') \qquad \forall x, x' \in X$$

Diremo che X e Y sono isometrici se esiste

$$f: X \leftrightarrow Y \text{ isometria (biettiva)}$$

def Sia (X, d) uno SM. Diremo che (Y, d_Y) è un (il) **COMPLETAMENTO METRICO** di X se $\exists f: X \to Y$ isometria tc

$$\overline{f(X)} = Y \quad \text{con } Y \text{ completo}$$

esempio $\mathbb{R}$ è completamento metrico di $\mathbb{Q}$.

esercizio $X = \mathbb{R}$ e $d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)| \quad x, y \in \mathbb{R}$

Studio $(\mathbb{R}, d)$:

i) $d(x,y) \geq 0$ ✓

$d(x,y) = 0 \iff x = y$ ✓ (iniettività arctan(x))

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ ✓

iii)
$$\begin{aligned}
d(x,y) &= |\arctan(x) - \arctan(y)| \\
&= |\arctan(x) - \arctan(z) + \arctan(z) - \arctan(y)| \\
&\leq \underbrace{|\arctan(x) - \arctan(z)|}_{= d(x,z)} + \underbrace{|\arctan(z) - \arctan(y)|}_{= d(z,y)}
\end{aligned}$$

Non è completo. Considero $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n = n$: è di Cauchy

$$d(a_n, a_m) = |\arctan(n) - \arctan(m)|$$
$$\leq \underbrace{\left|\arctan(n) - \tfrac{\pi}{2}\right|}_{\to 0} + \underbrace{\left|\tfrac{\pi}{2} - \arctan(m)\right|}_{\to 0}$$

Dunque sicuramente $\exists \bar{n} : \forall n, m > \bar{n} \quad d(a_n, a_m) < \varepsilon$. Voglio mostrare che non converge per d in $\mathbb{R}$: PA $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{d} a \in \mathbb{R}$

$\lim_{n \to \infty} \underbrace{|\arctan(n) - \arctan(a)|}_{\downarrow n \to \infty \; 0} = \left|\frac{\pi}{2} - \arctan(a)\right| = 0$, ma a è un numero $\lightning$

Calcoliamo ora il completamento di $(\mathbb{R}, d)$:

$$Y = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

$$d_Y(x,x') = |\arctan(x) - \arctan(x')| \quad \forall\, x,x' \in Y$$

dove $\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$ e $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

(Y, d_Y) è SM. L'isometria tra X e Y è $f: \mathbb{R} \to Y$ con $f(x) = x$

Voglio vedere che (Y, d_Y) è anche completo

Sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una succ di Cauchy in Y:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \bar{n} : \forall\, n,m \geq \bar{n} \qquad d_Y(b_n, b_m) < \varepsilon$$

$$\| \qquad\qquad$$

$$|\underbrace{\arctan(b_n)}_{a_n} - \arctan(b_m)| < \varepsilon$$

La succ $a_n := \arctan(b_n) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ per distanza standard.

$\mathbb{R}$ completo $\Rightarrow \exists \quad a_\infty = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \arctan(b_n)$

sfrutto la completezza di $\mathbb{R}$!

$$\cap$$

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ma $\arctan: Y \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ è iniettiva e suriettiva

$\Rightarrow \exists\, b_\infty \in Y$ tc $a_\infty = \arctan(b_\infty)$

concludo che

b_n converge $\Rightarrow$ è di Cauchy

$$d_Y(b_n, b_\infty) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

distanza euclidea

Ossero che (Y, d_Y) e $\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], d_E\right)$ sono isometrici

tramite $\arctan: Y \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ isometria

TEOREMA Sia (X,d_X) uno SM. Allora esiste uno SM (Y,d_Y) tale che

↳ il completamento metrico esiste ed è unico a meno di isometrie

1) (Y,d_Y) è completo

2) Esiste $f: X \to Y$ isometria tale che $\overline{f(X)} = Y$

Inoltre ogni altro completamento di X è isometrico con Y.

dim (abbozzo). 1) Costruire Y

2) Definire d_Y e provare che (Y,d_Y) è SM.

3) (Y,d_Y) è completo

4) Costruire $f: X \to Y$ isometria e verificare che $\overline{f(X)} = Y$

5) verificare l'unicità.

1) Sia $\mathcal{A} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di Cauchy in $X\}$

Su $\mathcal{A}$ introduco la relazione di equivalenza:

$$x \sim x' \iff d(x_n, x_n') \xrightarrow[n\to\infty]{\exists} 0$$

Indico $\bar{x} = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$ classe di equivalenza.

Pongo $Y := \mathcal{A}/_\sim = \{\bar{x} : x \in \mathcal{A}\}$

2) Definiamo $d_Y: Y \times Y \longrightarrow [0,\infty)$

$$d_Y(\bar{x}, \bar{x}') = \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, x_n')$$

con scelta di rappresentanti. Bisogna mostrare:

- limite esiste
- non dipende dai rappresentanti
- d_Y è una distanza

Mostriamo che il limite esiste.

Sia $a_n = d_X(x_n, x_n')$. Affermo che $(a_n)_{n\in\mathbb{R}}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$.

$$|a_n - a_m| = |d_X(x_n,x_n') - d_X(x_m,x_m')|$$

$$= |d_X(x_n,x_n') - d_X(x_m,x_n') + d_X(x_m,x_n') - d_X(x_m,x_m')|$$

$$\leq |d_X(x_n,x_n') - d_X(x_m,x_n')| + |d_X(x_m,x_n') - d_X(x_m,x_m')|$$

$$\overset{(DT)}{\leq} \underbrace{d(x_m,x_n)}_{\text{è di Cauchy}} + \underbrace{d(x_m',x_n')}_{\text{è di Cauchy}}$$

$d(x_m,x_n) < \varepsilon/2 \quad \forall n,m \geq \bar{n}$, $\quad d(x_m',x_n') < \varepsilon/2 \quad \forall n,m \geq \bar{n}'$

$$< \varepsilon \quad \forall n,m \geq \max\{\bar{n},\bar{n}'\}$$. È di Cauchy.

4) L'isometria $f: X \to Y$ è semplicemente

$$\underset{\substack{\cap\\ X}}{f(x)} = [\text{succ.} \equiv x]_\sim$$

↳ succ. costantemente uguale a x

CAPITOLO 3

Spazi metrici completi, compatti e connessi

1. Spazi metrici completi e teorema di completamento

In questa sezione proveremo che ogni spazio metrico ammette un'estensione che lo rende completo.

Definizione 3.1.1. Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in uno spazio metrico (X,d) si dice $\boxed{\text{di Cauchy}}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ per ogni } n, m \geq \bar{n}.$$

Uno spazio metrico (X,d) si dice $\boxed{\text{completo}}$ se ogni successione di Cauchy in X è convergente.

Sappiamo che $\mathbb{R}$ è completo con la metrica standard. Da questo fatto segue che $\mathbb{R}^k$ è completo rispetto alla distanza Euclidea, per ogni $k \geq 1$.

Esempio 3.1.2. Lo spazio k-dimensionale $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, con la distanza standard è completo. Infatti, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^k$, allora indicando con x_n^i la coordinata i-esima di x_n, $i = 1,\dots,k$, la successione $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori reali è di Cauchy in $\mathbb{R}$ e dunque converge $x_n^i \to x^i \in \mathbb{R}$. Posto $x = (x^1,\dots,x^k) \in \mathbb{R}^k$, da questo segue che $x_n \to x$ in $\mathbb{R}^k$:

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^k (x_n^i - x^i)^2 \Big)^{1/2} = 0.$$

Anche gli spazi metrici discreti (ovvero un insieme con la distanza discreta) sono completi, in quanto le successioni di Cauchy sono definitivamente costanti.

Vogliamo introdurre ora la definizione di *completamento* di uno spazio metrico. Ci occorre la nozione di isometria.

Definizione 3.1.3 (Isometria). Siano (X,d_X) e (Y,d_Y) due spazi metrici. Una funzione $f : X \to Y$ si dice $\boxed{\text{isometria}}$ se $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x,x')$ per ogni $x, x' \in X$. Due spazi metrici X e Y si dicono isometrici se esiste un'isometria $f : X \to Y$ suriettiva.

Osserviamo che un'isometria $f : X \to Y$ è iniettiva e continua. Inoltre, la funzione inversa $f^{-1} : f(X) \to X$ è ancora un'isometria, con la distanza su $f(X)$ ereditata da Y.

Definizione 3.1.4 (Completamento). Sia (X,d_X) uno spazio metrico. Uno spazio metrico (Y,d_Y) si dice $\boxed{\textit{completamento di } (X,d_X)}$ se:

i) Y è completo.
ii) Esiste un'isometria $f : X \to Y$ tale che $\overline{f(X)} = Y$ (con chiusura in Y), ovvero se $f(X)$ è un insieme denso in Y.

ESEMPIO 3.1.5. Siano $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ muniti della distanza standard. L'identità $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ è un'isometria. Inoltre $\overline{f(\mathbb{Q})} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, in quanto i razionali sono densi nei reali. Dunque $\mathbb{R}$ è un (il) completamento di $\mathbb{Q}$.

ESEMPIO 3.1.6. Consideriamo su $\mathbb{R}$ la funzione distanza $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

La funzione d è una distanza. Infatti: i) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$, essendo la funzione arcotangente iniettiva. ii) $d(x, y) = d(y, x)$; iii) Vale la disuguaglianza triangolare. Questo segue dalla subadittività del valore assoluto.

Dunque, $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico. Lasciamo al lettore l'esercizio di verificare che la topologia di questo spazio metrico coincide con la topologia standard di $\mathbb{R}$.

Proviamo che $(\mathbb{R}, d)$ non è uno spazio metrico completo. Si consideri la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = n$. Questa successione è di Cauchy. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che si ha

$$d(a_n, a_m) = |\arctan(n) - \arctan(m)| \leq |\arctan(n) - \pi/2| + |\pi/2 - \arctan(m)| \leq \varepsilon,$$

per $n, m \geq \bar{n}$. Tuttavia, la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge ad alcune elemento di $\mathbb{R}$. Se infatti esistesse $a \in \mathbb{R}$ tale che $d(a_n, a) \to 0$ per $n \to \infty$ allora si avrebbe l'assurdo seguente:

$$0 = \lim_{n\to\infty} |\arctan(n) - \arctan(a)| = |\pi/2 - \arctan(a)| \neq 0.$$

Discorso analogo vale per la successione $b_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$.

Costruiamo un completamento di $(\mathbb{R}, d)$. Sia $Y = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ e definiamo

$$d_Y(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|, \quad x, y \in Y,$$

con la convenzione che $\arctan(\infty) = \pi/2$ e $\arctan(-\infty) = -\pi/2$. Chiaramente (Y, d_Y) è uno spazio metrico. Proviamo che è completo. Se $(a_n)_{n\in}$ è una successione di Cauchy in Y, allora la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $b_n = \arctan(a_n)$ è una successione di Cauchy in $K = [-\pi/2, \pi/2]$ con la distanza standard, che quindi converge ad un elemento $b \in K$, essendo K chiuso. Siccome $\arctan : Y \to K$ è iniettiva e suriettiva, esiste $a \in Y$ tale che $\arctan(a) = b$. La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge allora ad $a \in Y$ nella distanza d_Y.

La funzione $f : \mathbb{R} \to Y$, $f(x) = x$ è un isometria e inoltre $\overline{f(\mathbb{R})} = Y$. Questo conclude la dimostrazione che (Y, d_Y) è un (il) completamento di $(\mathbb{R}, d)$. Si osservi che (Y, d_K) è isometrico a K con la distanza standard.

L'esempio precedente mostra che la completezza non è una proprietà topologica, ma metrica.

TEOREMA 3.1.7. Ogni spazio metrico ha un completamento. Inoltre, due diversi completamenti sono fra loro isometrici.

DIM. Sia (X, d_X) lo spazio metrico che si vuole completare. Alcuni dettagli della dimostrazione saranno omessi. Lo schema generale è il seguente:

(1) Costruzione dell'insieme Y.
(2) Definizione di d_Y e prova che si tratta di una distanza.
(3) Definizione dell'isometria $f : X \to Y$ e prova che $\overline{f(X)} = Y$ (densità).
(4) Verifica che (Y, d_Y) è uno spazio metrico completo.

(5) Prova dell'unicità del completamento.

(1) Sia $\mathscr{A} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di Cauchy in $X\}$. Introduciamo su $\mathscr{A}$ la relazione

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ se e solo se } \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, x'_n) = 0.$$

Tale relazione è un'equivalenza su $\mathscr{A}$ (verifica facile). Definiamo il quoziente

$$Y = \mathscr{A}_{/\sim} = \big\{[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}\big\}.$$

Nel seguito indichiamo con $\bar{x} = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ le classi di equivalenza.

(2) Definiamo la funzione $d_Y : Y \times Y \to [0, \infty)$

$$d_Y(\bar{x}, \bar{x}') = \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, x'_n).$$

Affermiamo che:

i) Il limite esiste.
ii) La definizione non dipende dal rappresentante della classe di equivalenza (prova omessa).
iii) d_Y verifica le proprietà della distanza (verifica facile).

Proviamo i). In questo punto cruciale si usa la completezza di $\mathbb{R}$. È sufficiente verificare che la successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = d_X(x_n, x'_n)$ sia di Cauchy. Infatti:

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &\le |d_X(x_n, x'_n) - d_X(x_m, x'_n)| + |d_X(x_m, x'_n) - d_X(x_m, x'_m)| \\ &\le d_X(x_n, x_m) + d_X(x'_n, x'_m) \le \varepsilon\end{aligned}$$

per $m, n \ge \bar{n}$. Abbiamo usato la disuguaglianza triangolare varie volte.

(3) Definiamo la funzione $f : X \to Y$ ponendo $f(x) =$ "successione costante identicamente uguale ad x". Proviamo che $\overline{f(X)} = Y$. Siano $\bar{y} \in Y$ ed $\varepsilon > 0$. Siccome la successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy:

$$d_X(y_m, y_n) < \varepsilon \text{ per } m, n \ge \bar{n},$$

e dunque

$$d_Y(f(y_{\bar{n}}), \bar{y}) = \lim_{n\to\infty} d_X(y_{\bar{n}}, y_n) \le \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Questo prova che $B_Y(\bar{y}, 2\varepsilon) \cap f(X) \neq \emptyset$ per ogni $\varepsilon > 0$.

(4) Proviamo ora che (Y, d_Y) è completo. Sia $(\bar{y}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in Y:

$$\lim_{n\to\infty} d_X(y_n^k, y_n^h) = d_Y(\bar{y}^k, \bar{y}^h) < \varepsilon \text{ per } h, k \ge \bar{k},$$

e dunque, definitivamente in n si ha

$$d_X(y_n^k, y_n^h) < \varepsilon \text{ per } h, k \ge \bar{k}.$$

Questa è l'informazione che abbiamo.

Dal punto (3) segue che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $y_k \in X$ tale che $d_Y(f(y_k), \bar{y}^k) < 1/k$, ovvero definitivamente in n si ha

$$d_X(y_k, y_n^k) < 1/k.$$

Formiamo la successione $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e proviamo che è di Cauchy in X:

$$d_X(y_k, y_h) \le d_X(y_k, y_n^k)+d_X(y_n^k, y_n^h)+d_X(y_n^h, y_h) < \frac{1}{k}+\varepsilon+\frac{1}{h} < 3\varepsilon \text{ per } h, k \ge \bar{k} \text{ (opportuno).}$$

Sopra abbiamo fatto una scelta opportuna di n. Dunque $\bar{y} = [(y_k)_{k\in\mathbb{N}}] \in Y$. Ora proviamo che

$$\bar{y}^k \xrightarrow[k\to\infty]{(Y,d_Y)} \bar{y}.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora, definitivamente in n si ha

$$d_X(y_n^k, y_n) \le d_X(y_n^k, y_k) + d_X(y_k, y_n) < \frac{1}{k} + \varepsilon < 2\varepsilon \text{ per } k \ge \bar{k}.$$

Questo prova che $d_Y(\bar{y}^k, \bar{y}) \le 2\varepsilon$ per $k \ge \bar{k}$.

(5) Rimane da provare l'unicità. Siano $f : X \to Y$ e $g : X \to Z$ isometrie tali che $\overline{f(X)} = Y$ e $\overline{g(X)} = Z$, con chiusura nelle topologie di Y e Z, rispettivamente. La funzione $h : g(X) \to f(X)$, $h = f \circ g^{-1}$ è un'isometria da $(g(X), d_Z)$ a $(f(X), d_Y)$ in quanto f e g sono isometrie. Estendiamo h ad una funzione da Z in Y nel seguente modo. Dato $z \in Z$, per la densità esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X tale che $g(x_n) \to z$ in Z per $n \to \infty$. La successione $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in Y, in quanto si ottiene dalla successione di Cauchy $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ mediante h, e dunque converge ad un elemento $y \in Y$. Poniamo allora $h(z) = y$. Con un argomento analogo si prova che h è suriettiva su Y. La funzione h così definita è un isometria su tutto Z:

$$d_Y(h(z), h(z')) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} d_Y(f(x_n), f(x'_m)) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} d_Z(g(x_n), g(x'_m)) = d_Z(z, z').$$

Abbiamo usato la continuità della funzione distanza e il fatto che h è un'isometria su $g(X)$. □

2. Spazi di Banach. Esempi

Gli spazi di Banach sono spazi normati che sono completi come spazi metrici.

Definizione 3.2.1 (Spazio di Banach). Uno spazio normato si chiama *spazio di Banach* se è completo come spazio metrico.

Gli spazi normati finito dimensionali sono sempre di Banach. Sia $(V, \|\cdot\|_V)$ uno spazio normato reale di dimensione finita $n \ge 1$. Fissiamo una base $\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_n$ di V. La trasformazione $\varphi : \mathbb{R}^n \to V$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{v}_i, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

è un isomorfismo vettoriale. Definiamo su $\mathbb{R}^n$ la norma

$$\|x\| = \|\varphi(x)\|_V, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Verificare che $\|\cdot\|$ sia una norma su $\mathbb{R}^n$ è un facile esercizio. Gli spazi normati $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ e $(V, \|\cdot\|_V)$ sono isomorfi come spazi vettoriali e isometrici, con isometria φ, come spazi metrici. Nel seguito, non è dunque restrittivo limitare la discussione ad $\mathbb{R}^n$.

PROPOSIZIONE 3.2.2. Due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ su $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti. Ovvero, esistono due costanti $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ tali che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1. \tag{3.2.2}$$

DIM. Senza perdere di generalità, possiamo supporre che

$$\|x\|_1 = |x| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Affermiamo che la funzione $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, $f(x) = \|x\|_2$, è continua rispetto alla distanza standard di $\mathbb{R}^n$. Infatti, dalla subadditività della norma segue segue

$$|f(x+h) - f(x)| = \big|\|x+h\|_2 - \|x\|_2\big| \leq \|h\|_2, \quad x,h \in \mathbb{R}^n.$$

D'altra parte, indicando con $\mathrm{e}_1,\dots,\mathrm{e}_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$, si ha

$$\|h\|_2 = \Big\|\sum_{i=1}^n h_i\mathrm{e}_i\Big\|_2 \leq \sum_{i=1}^n |h_i|\|\mathrm{e}_i\|_2 \leq M\sum_{i=1}^n |h_i|,$$

con $M = \max\{\|\mathrm{e}_1\|_2,\dots,\|\mathrm{e}_n\|_2\}$. Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|h| < \delta$ implica $\|h\|_2 < \varepsilon$, e quindi anche $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$. In effetti abbiamo provato che f è uniformemente continua.

La sfera unitaria $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ è un insieme compatto, e quindi per il Teorema di Weierstrass la funzione $f : K \to [0,\infty)$ ammette massimo e minimo: esistono $y, z \in K$ tali che

$$0 < C_1 = \|y\|_2 \leq \|x\|_2 \leq \|z\|_2 = C_2 < \infty, \quad x \in K.$$

La disuguaglianza generale (3.2.2) segue per omogeneità. □

Dal fatto che $\mathbb{R}^n$ è completo per la distanza standard segue che tutti gli spazi normati finito-dimensionali sono completi.

2.1. Funzioni continue su un compatto. Siano X un insieme ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione. La "sup-norma" verifica le seguenti proprietà elementari:

1) Si ha $\|f\|_\infty < \infty$ se e solo se f è limitata su X.
2) Vale la subadditività:

$$\begin{aligned}\|f+g\|_\infty &= \sup_{x\in X}|f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in X}|f(x)|+|g(x)| \\ &\leq \sup_{x\in X}|f(x)| + \sup_{x\in X}|g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.\end{aligned}$$

3) Sia K uno spazio metrico compatto e sia $f \in C(K)$ una funzione continua. Per il Teorema di Weierstrass, la funzione $x \mapsto |f(x)|$ assume massimo su K. Dunque, nella definizione di sup-norma il sup può essere sostituito con un max:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in K}|f(x)| = \max_{x\in K}|f(x)|.$$

È immediato controllare che lo spazio vettoriale $C(K)$ è normato da $\|\cdot\|_\infty$.

Teorema 3.2.3. Sia (K, d) uno spazio metrico compatto. Lo spazio $X = C(K)$ con la norma della convergenza uniforme:

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in K} |f(x)|$$

è uno spazio di Banach.

Dim. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in X. Per ogni $x \in K$ fissato, la successione $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ e quindi è convergente. Esiste un numero $f(x) \in \mathbb{R}$ tale che $f_n(x) \to f(x)$ per $n \to \infty$ e risulta così definita una funzione $f : K \to \mathbb{R}$. Proviamo che:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0. \tag{3.2.3}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $x \in K$ vale

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{per } m, n \geq \bar{n}.$$

Facendo tendere $m \to \infty$ e usando la convergenza $f_m(x) \to f(x)$ per $m \to \infty$ si ottiene, per ogni $x \in K$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{per } m, n \geq \bar{n}.$$

Questo prova l'affermazione (3.2.3).

Per il Teorema 5.2.3, $f : K \to \mathbb{R}$ è continua, ovvero $f \in X$. □

Osservazione 3.2.4. Si noti che, nel Teorema 3.2.3, l'ipotesi di compattezza su K serve unicamente a garantire che ogni $f \in C(K)$ verifichi $\|f\|_\infty < \infty$. Si può in effetti dimostrare che, se E è un qualunque spazio metrico, allora lo spazio

$$C_b(E) := \{f \in C(E) : f \text{ è limitata}\}$$

dotato della norma $\|f\|_\infty$ è uno spazio di Banach.

2.2. Lo spazio $C^1([0, 1])$. Lo spazio vettoriale

$$C^1([0, 1]) = \big\{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ è derivabile con continuità su } [0, 1]\big\}.$$

munito della norma

$$\|f\|_{C^1([0,1])} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

è uno spazio di Banach. Si veda l'Esercizio 4.4.2. In effetti, anche

$$\|f\|_* = |f(0)| + \|f'\|_\infty,$$

è una norma su $C^1([0, 1])$ che lo rende completo. Tale norma è equivalente alla precedente.

2.3. Funzioni Lipschitziane. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme. Per ogni funzione $f : A \to \mathbb{R}$ definiamo

$$\mathrm{Lip}(f) = \inf\Big\{L > 0 : \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq L, \quad x, y \in A,\, x \neq y\Big\},$$

e diciamo che f è Lipschitziana su A se $\mathrm{Lip}(f) < \infty$. Posto $L = \mathrm{Lip}(f)$ avremo allora

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in A.$$

Dunque, le funzioni Lipschitziane sono uniformemente continue. L'insieme $\mathrm{Lip}(A)$ delle funzioni Lipschitziane su A a valori in $\mathbb{R}^m$ è un sottospazio vattoriale di $C(A)$.

Caratterizzazione degli SM compatti

def Uno SM (X, d_X) si dice TOTALMENTE LIMITATO se $\forall r>0$ $\exists x_1, \dots, x_n \in X$ tali che
$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$$

TEOREMA Sia (X, d_X) uno SM. Sono equivalenti
1) X è compatto
2) Se $A \subset X$ con $\text{card}(A) = \infty$, allora A possiede un punto di accumulazione:
$\exists\, x \in X$ tc $\forall r>0$: $A \cap (B(x,r) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.
3) X è seq. compatto
4) X è completo e totalmente limitato

esercizio Sia X completo. Sia poi $K_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, una succ di insiemi chiusi tc:
1) $\emptyset \neq K_{n+1} \subset K_n$ $\forall n$
2) $\text{diam}\, K_n = \sup_{x,y \in K_n} d(x,y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Allora $\exists\, x \in X$
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}.$$

sugg considero una successione di elementi dentro i K_n e utilizzo il fatto che sono succ. di Cauchy.

dim 1) $\Rightarrow$ 2). PA sia falsa 2). Esiste $A \subset X$ con $\text{card}(A) = \infty$ che non ha punti di accumulazione. Ovvero,
$$\forall\, x \in X \quad \exists\, r_x > 0 \quad \text{tc} \quad A \cap (B(x, r_x) \setminus \{x\}) = \emptyset$$
Ora $X = \bigcup_{x \in X} B(x, r_x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{x compattezza} \\ \exists x_1, \dots, x_n}}{=} \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i})$

Ora $A = A \cap X$
$$= A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i})\right)$$
$$= \bigcup_{i=1}^{n} A \cap B(x_i, r_{x_i})$$
$$\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\} \quad \Rightarrow \quad \text{card}(A) \leq n \text{ finita} \qquad ⚡$$

2) ⇒ 3). Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ succ in X. Considero $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\subset X$.

<u>1° caso</u> $\quad \mathrm{card}(A) < \infty \Rightarrow$ posso estrarre una sottosucc costante

<u>2° caso</u> $\quad \mathrm{card}(A) = \infty \overset{2)}{\Rightarrow} \exists\, x\in X$ p.to di acc. di A

$\Rightarrow \forall r>0 \quad A\cap(B(x,r)\setminus\{x\}) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall k\in\mathbb{N} \ \exists\, n_k$ tc $d_X(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k} = r$

WLOG $k \longmapsto n_k$ crescente strettamente

Ovvero $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{(X,d)} x$.

3) ⇒ 4). Provo che X è completo. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una succ di Cauchy in X. Per compattezza seq. $\exists\,(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sottosucc che converge ad $x\in X$.

Provo che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,d)} x$.

Fisso $\varepsilon>0$:

$$d(x_n,x) \leq \underset{\varepsilon/2}{\underset{\wedge}{d(x_n,x_{n_k})}} + \underset{\varepsilon/2}{\underset{\wedge}{d(x_{n_k},x)}} < \varepsilon$$

$$\forall n, n_k > \bar{n} \quad \exists \bar{n} \qquad \forall k > \bar{k}$$

$\Rightarrow$ X è completo.

Provo che X è tot. limitato. PA X non è tot. limitato.

$\exists\, r>0$ tc X non si ricopre con finite palle di raggio r.

Scelgo $x_1\in X$ a piacere

$\exists\, x_2 \in X\setminus B(x_1,r) \neq 0$

$\exists\, x_3 \in X\setminus(B(x_1,r)\cup B(x_2,r)) \neq 0$

Per induzione $\exists\, x_{n+1} \in X\setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,r)$

Ora $d(x_n,x_m) \geq r > 0$ se $n\neq m$, ma allora non c'è sottosuccessione che converge. $\lightning$

4) ⇒ 1). PA X non è compatto.

$\exists\, A_\alpha \in \mathcal{T}(X)$ con $\alpha\in\mathcal{A}$ tc $X=\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$

ma $X \supsetneq \bigcup_{\alpha\in B} A_\alpha$ se $\mathrm{card}(B)<\infty$.

Per $r=1$ trovo palle $B^1_1, B^1_2, \dots, B^1_{n_1}$ palle di raggio 1 tali che

$$\bigcup_{i=1}^{n_1} B^1_i = X$$

Esiste $i_1 \in \{1,\dots,n_1\}$ tale che $B^1_{i_1}$ non si ricopre con finiti aperti A_α.

WLOG le palle sopra elencate sono chiuse.

$B^1_{i_1}$ è tot. limitata. Per $r=1/2$ esistono

$$B^{1/2}_1 \quad \dots \quad B^{1/2}_{n_2}$$

che ricoprono $B^1_{i_1}$. Ripeto il ragionamento precedente.

Esiste $i_2 \in \{1,\dots,n_2\}$ tale che $B^{1/2}_{i_2}$ non si ricopre con finiti aperti A_α.

Si ha $\quad B^{1/2}_{i_2} \subset B^1_{i_1}$.

Per induzione trovo una successione di insiemi chiusi tale che

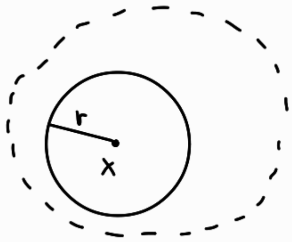
- $B^{1/(n+1)}_{i_{n+1}} \subset B^{1/n}_{i_n}$
- diam $B^{1/n}_{i_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- nessun $B^{1/n}_{i_n}$ non si ricopre con finiti aperti A_α.

X completo $\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B^{1/n}_{i_n} = \{x\} \quad \exists x \in X = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$

Ma $\exists \alpha \in \mathcal{A}$ t.c. $x \in A_\alpha$ aperto

$\Rightarrow \exists r>0$ t.c. $B(x,r) \subset A_\alpha$

Per $\frac{2}{n} < r$ avremo $B^{1/n}_{i_n} \subset B(x,r) \subset A_\alpha$



$x \in B^{1/n}_{i_n} \quad \forall n$

$\lightning$

Compattezza e continuità

TEOREMA: $(X,d_X),(Y,d_Y)$ SM. Sia $f: X \to Y$ continua. Allora

$$X \text{ compatto} \Rightarrow f(X) \subset Y \text{ compatto}$$

dim (dimostrazione topologica).

Sia $f(X) \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$ con $A_\alpha \in \mathcal{T}(Y)$. aperto in Y

$$\Rightarrow X = f^{-1}(f(X)) \subset f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \underbrace{f^{-1}(A_\alpha)}_{\text{aperto di } X}$$

$$\overset{X \text{ compatto}}{=} \bigcup_{\alpha\in\mathcal{B}} f^{-1}(A_\alpha)$$

$\exists \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ finito

$$\Rightarrow f(X) = f\Big(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{B}} f^{-1}(A_\alpha)\Big) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{B}} A_\alpha \qquad \square$$

esercizio dimostrarlo con la compattezza sequenziale.

TEOREMA Sia X uno SM compatto e sia $f: X \to \mathbb{R}$ continua.
Allora f ammette max e min su X.

dim
$$\underbrace{\overbrace{f(X)}^{\text{compatto}} \subset \mathbb{R}}_{\text{teorema precedente}} \overset{HB}{\Longleftrightarrow} f(X) \text{ chiuso e limitato}$$

continua, compatto

$\Rightarrow \exists$ finiti $\sup f(x) \in \mathbb{R}$

$\inf f(x) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists$ finiti $\sup f(x) \in f(X)$

$\inf f(x) \in f(X)$ $\square$

TEOREMA X compatto. $f: X \to Y$ continua. Allora f è unif. continua su X.

def f unif. cont. se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(x,y) < \varepsilon$$

esercizio [3.7] Sia $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tc $\varphi(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$, $x \in \mathbb{R}$
e sia $(\mathbb{R}, d)$ con

$$d(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$$

i) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è SM

ii) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ non è completo

iii) Calcolare il suo completamento

i) d è distanza:

- DT è facile:

$$d(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$$
$$= |\varphi(x) - \varphi(z) + \varphi(z) - \varphi(y)|$$
$$\leq |\varphi(x) - \varphi(z)| + |\varphi(z) - \varphi(y)| = d(x,z) + d(z,y)$$

- simmetria: $d(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi(y) - \varphi(x)| = d(y,x)$

- $d(x,y) \geq 0$ ✓

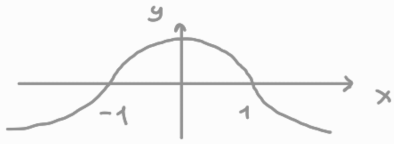
$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ ($\Leftarrow$ ✓)

($\Rightarrow$) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2y}{1+y^2} \\ \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1-y^2}{1+y^2} \end{cases}$$

$$x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$$

$$x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$$



$$\Rightarrow \quad x = y$$

ii) non è completo

$$\lim_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = (0, -1)$$

Considero $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. È di Cauchy per d perché $\varphi(n) \in \mathbb{R}^2$ e converge. Ma $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non ha limite in $(\mathbb{R}, d)$.

iii) Provo a considerare

$$Y = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$d_Y(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$$

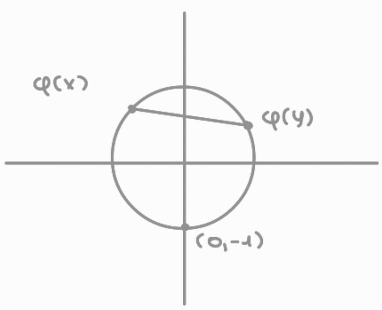
dove se $x = \infty$ oppure $y = \infty$ $d_Y(x,y) = 1$.

Dico che (Y, d_Y) è il completamento di $\mathbb{R}$.

<u>Sostituzioni trigonometriche</u>

$$\cos t = \cos\left(2 \tfrac{t}{2}\right) = \frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - \frac{\sin^2 t/2}{\cos^2 t/2}}{1 + \frac{\sin^2 t/2}{\cos^2 t/2}} \underset{x = \tan t/2}{=} \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\sin t = \sin\left(2 \tfrac{t}{2}\right) = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{2 \frac{\sin t/2}{\cos t/2}}{1 + \frac{\sin^2 t/2}{\cos^2 t/2}} = \frac{2x}{1+x^2}$$



Conclusione: il completamento di $(\mathbb{R}, d)$ è la circonferenza unitaria di $\mathbb{R}^2$ con la distanza $\mathbb{R}^2$.

Sia ora $B = [0, \infty)$. Questo intervallo è chiuso, ma non è compatto. Infatti, la famiglia di insiemi $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $B_n = (-1, n)$ forma un ricoprimento di B in quanto

$$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (-1, n).$$

Da tale ricoprimento, tuttavia, non è possibile estrarre alcun sottoricoprimento *finito*. Chiaramente, l'insieme B non è sequenzialmente compatto, in quanto non è limitato.

Negli spazi metrici, le nozioni di compattezza e di compattezza sequenziale coincidono.

Teorema 3.3.9. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $K \subset X$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) K è sequenzialmente compatto.
B) K è compatto.

Una versione più dettagliata di questo teorema sarà data nel Teorema 3.4.2.

Definizione 3.3.10 (Spazio separabile). Uno spazio metrico (X, d) si dice *separabile* se esiste un sottoinsieme $X_0 \subset X$ tale che $\overline{X_0} = X$ e X_0 è (al più) numerabile.

Proposizione 3.3.11. Gli spazi metrici compatti sono separabili.

Dim. Diamo lo schema della dimostrazione. Fissato $r > 0$, la famiglia di palle (aperte) $\{B_r(x) : x \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X che dunque ha un sottoricoprimento finito.

Dunque, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un insieme finito di punti $x_1^k, \dots, x_{n_k}^k \in X$, $n_k \in \mathbb{N}$, tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^{n_k} B_{1/k}(x_i^k).$$

L'insieme di tutti i centri

$$X_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n_k} \{x_i^k\}$$

è al più numerabile ed è denso in X. □

4. Caratterizzazione degli spazi metrici compatti

Per il Teorema di Heine-Borel, un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato. Una simile caratterizzazione smette di valere negli spazi di "dimensione infinita". Negli spazi metrici completi, tuttavia, la caratterizzazione continua valere pur di sostituire la "limitatezza" con la "totale limitatezza".

Definizione 3.4.1 (Totale limitatezza). Uno spazio metrico (X, d) si dice *totalmente limitato* se per ogni $r > 0$ esistono $x_1, \dots, x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, tali che $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_r(x_i)$.

Teorema 3.4.2. Sia (X, d) uno spazio metrico. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

i) X è compatto.
ii) Ogni insieme $A \subset X$ con $\mathrm{Card}(A) = \infty$ ha un punto di accumulazione.
iii) X è sequenzialmente compatto.
iv) X è completo e totalmente limitato.

Prima di iniziare con la dimostrazione ricordiamo il seguente fatto:

PROPOSIZIONE 3.4.3. Sia (X, d) uno spazio metrico completo e siano $K_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, insiemi chiusi non vuoti tali che $K_{n+1} \subset K_n$ e $\mathrm{diam}(K_n) \to 0$ per $n \to \infty$. Allora esiste $x \in X$ tale che

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}.$$

DIM. Selezioniamo punti $x_n \in K_n \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$, a nostro piacere. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di di Cauchy, infatti se $m \geq n$ allora $x_n, x_m \in K_n$ e dunque

$$d(x_m, x_n) \leq \mathrm{diam}(K_n) < \varepsilon$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande. Per la completezza di X, esiste $x \in X$ tale che $x_n \to x$ per $n \to \infty$. Siccome $x_m \in K_n$ per ogni $m \geq n$, dalla caratterizzazione sequenziale della chiusura di K_n segue che $x \in K_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Se, poi, y è un altro punto nell'interesezione, allora $x, y \in K_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque $d(x, y) \leq \mathrm{diam}(K_n)$. Deve dunque esssere $d(x, y) = 0$, ovvero $x = y$. □

DIM.[Dimostrazione del Teorema 3.4.2.] i)$\Rightarrow$ii). Sia X compatto e sia $A \subset X$ un sottoinsieme con cardinalità $\mathrm{Card}(A) = \infty$. Supponiamo per assurdo che A non abbia punti di accumulazione. Allora per ogni $x \in X$ esiste $r_x > 0$ tale che

$$B_{r_x}(x) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset.$$

Dal momento che $X = \bigcup_{x \in X} B_{r_x}(x)$ è un ricoprimento aperto, dalla compattezza di X segue che esistono finiti punti $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_{x_i}}(x_i)$. Da ciò segue che

$$A = A \cap X = \bigcup_{i=1}^{n} A \cap B_{r_{x_i}}(x_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\},$$

ed A è un insieme finito. Questo è assurdo.

ii)$\Rightarrow$iii). Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in X. Se la cardinalità dell'insieme $A = \{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$ è finita allora la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione costante. Se la cardinalità di A non è finita, allora esiste $x \in X$ punto di accumulazione di A. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che $x_{n_k} \in B_{1/k}(x)$. Inoltre, la scelta di n_k può essere fatta in modo tale da avere una selezione crescente di indici $k \mapsto n_k$. La sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge ad x.

iii) $\Rightarrow$ iv). Proviamo che X è completo. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy. Per ipotesi esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ che converge ad un punto $x \in X$. Ma allora, fissato $\varepsilon > 0$ esistono $\bar{n}, \bar{k} \in \mathbb{N}$ tali che

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) \leq 2\varepsilon$$

non appena $k \geq \bar{k}$ e $n, n_k \geq \bar{n}$. Questo prova che $x_n \to x$ in X per $n \to \infty$.

Proviamo che X è totalmente limitato. Supponiamo per assurdo che esista $r > 0$ tale che non ci sia un ricoprimento finito di X con palle di raggio r.

Prendiamo $x_1 \in X$, $x_2 \in X \setminus B_r(x_1)$ e per induzione

$$x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_r(x_i).$$

La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica $d(x_n, x_m) \geq r$ per ogni $n \neq m$, e dunque non può avere sottosuccessioni convergenti.

iv) $\Rightarrow$ i). Questa è la parte più significativa della dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che X non sia compatto. Allora c'è un ricoprimento aperto di X, sia esso $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$, che non ha alcun sottoricoprimento finito.

Per la totale limitatezza, esistono palle $B_1^1, \ldots, B_{n_1}^1$ di raggio 1 tali che $X = \bigcup_{i=1}^{n_1} B_i^1$. Senza perdere di generalità possiamo supporre qui e nel seguito che le palle siano chiuse. In particolare, esiste una palla $B_{i_1}^1$, $1 \leq i_1 \leq n_1$, che non è ricoperta da un numero finito di aperti A_α. L'insieme $B_{i_1}^1$ è totalmente limitato, e quindi esistono palle $B_1^2, \ldots, B_{n_2}^2$ relative a $B_{i_1}^1$ di raggio $1/2$ tali che $B_{i_1}^1 \subset \bigcup_{i=1}^{n_2} B_i^2$. Esiste un insieme $B_{i_2}^2$ che non può essere ricoperto da un numero finito di insiemi aperti A_α.

Ora procediamo per induzione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste una palla chiusa $B_{i_k}^k$ relativa a $B_{i_{k-1}}^{k-1}$, con raggio $1/k$ che non può essere ricoperta con un numero finito di insiemi aperti A_α.

Poichè X è completo, la successione decrescente di insiemi chiusi $(B_{i_k}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ha intersezione non vuota. Dunque esiste un unico $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{i_k}^k$. D'altra parte, $x \in A_\alpha$ per qualche $\alpha \in \mathscr{A}$ ed esiste dunque $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A_\alpha$. Se ora $k \in \mathbb{N}$ è tale che $1/k < r/2$ allora $B_{i_k}^k \subset B_r(x) \subset A_\alpha$. Questa è una contraddizione, perchè $B_{i_k}^k$ non può essere ricoperto da un numero finito di insiemi A_α. □

5. Continuità e compattezza

Proviamo che le immagini continue di insiemi compatti sono insiemi compatti.

TEOREMA 3.5.1. *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : X \to Y$ una funzione continua. Se X è compatto allora $f(X) \subset Y$ è compatto in Y.*

DIM. Sia $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$. Precisamente, gli insiemi $A_\alpha \subset Y$ sono aperti e

$$f(X) \subset \bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}} A_\alpha.$$

Passando alle anti-immagini si ha

$$X = f^{-1}(f(X)) \subset f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}} A_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}} f^{-1}(A_\alpha).$$

L'inclusione centrale è in effetti un'uguaglianza di insiemi. Gli insiemi $f^{-1}(A_\alpha) \subset X$ sono aperti, in quanto f è continua. Siccome X è compatto esiste $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ con $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) < \infty$ tale che

$$X = \bigcup_{\beta \in \mathscr{B}} f^{-1}(A_\beta).$$

Passando ora alle immagini si ottiene

$$f(X) = f\Big(\bigcup_{\beta \in \mathscr{B}} f^{-1}(A_\beta) \Big) = \bigcup_{\beta \in \mathscr{B}} f(f^{-1}(A_\beta)) \subset \bigcup_{\beta \in \mathscr{B}} A_\beta.$$

Dunque, ogni ricoprimento aperto di $f(X)$ ha un sottoricoprimento finito. Questo termina la dimostrazione.

Alternativamente, si può provare che $f(X) \subset Y$ è sequenzialmente compatto. Sia $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $f(X)$. Esistono punti $x_n \in X$ tali che $f(x_n) = y_n$, $n \in \mathbb{N}$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ che converge ad un punto $x_0 \in X$. Siccome f è continua si ha

$$\lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = f(x_0).$$

In altri termini, $y_{n_j} \to f(x_0) \in f(X)$ per $j \to \infty$. $\square$

Osservazione 3.5.2. Un insieme $K \subset \mathbb{R}$ compatto (e non vuoto) ammette massimo e minimo. La prova è contenuta nella dimostrazione del seguente teorema.

Teorema 3.5.3 (Weierstrass). Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esistono $x_0, x_1 \in X$ tali che

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \min_{x\in X} f(x) = \min\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in X\}, \\ f(x_1) &= \max_{x\in X} f(x) = \max\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in X\}. \end{aligned}$$

Dim.Per il teorema precedente, l'insieme $f(X) \subset \mathbb{R}$ è compatto. Per il Teorema di Heine-Borel l'insieme $f(X)$ è pertanto chiuso e limitato. Essendo limitato, esistono finiti

$$-\infty < \inf_{x\in X} f(x) \le \sup_{x\in X} f(x) < \infty.$$

Essendo chiuso, l'insieme $f(X) \subset \mathbb{R}$ ha minimo e massimo, ovvero esistono $x_0, x_1 \in X$ tali che

$$f(x_0) = \min_{x\in X} f(x), \quad f(x_1) = \max_{x\in X} f(x).$$

$\square$

Definizione 3.5.4 (Uniforme continuità). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $A \subset X$. Una funzione $f : A \to Y$ si dice *uniformemente continua su A* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, x_0 \in A$ vale l'implicazione

$$d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$