FORME BILINEARI E QUADRATICHE

RICHIAMI DI ALGEBRA LINEARE

Basi, appl. lineari e matrice

campo K $\quad V$ sp. vett. $/K$, W sp. vett. $/K$

$Hom_K(V,W)$ applicazioni K-lineari

$V^* = V^\vee = Hom_K(V,K)$

base di V $\quad \mathbb{E} = (e_1,\dots,e_n) \quad e_j \in V$

base di W $\quad \mathbb{F} = (f_1,\dots,f_m) \quad f_j \in W$

$\varphi: V \to W$ appl. lin. $\quad \varphi(\mathbb{E}) = \mathbb{F}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \mathbb{F} A$ $= \alpha_{\mathbb{E},\mathbb{F}}(\varphi)$

matrice associata a φ rispetto alle basi $\mathbb{E}$ ed $\mathbb{F}$:

$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$

nuova base $\mathbb{E}' = (e_1',\dots,e_n')$ di V

$\mathbb{E}' = (e_1',\dots,e_n') = \mathbb{E}\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & & x_{nm} \end{pmatrix}$ $\qquad \mathbb{E}' = \mathbb{E}P \qquad \mathbb{E} = \mathbb{E}'P^{-1}$

$P = \alpha_{\mathbb{E}',\mathbb{E}}(id_V) \qquad P^{-1} = \alpha_{\mathbb{E},\mathbb{E}'}(id_V)$

$\mathbb{F}' = \mathbb{F}Q \qquad \mathbb{F} = \mathbb{F}'Q^{-1}$

$\varphi(\mathbb{E}) = \mathbb{F}A \qquad \varphi\left(\underbrace{\mathbb{E}\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}}_{v = \sum d_i e_i}\right) = \varphi(\mathbb{E}d) = \mathbb{F}Ad$

$\varphi\left(\mathbb{E}'\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}\right) = \varphi(\mathbb{E}P\mu) = \mathbb{F}AP\mu = \mathbb{F}'(Q^{-1}AP)\mu$

endomorfismi: $\quad \varphi: V \to V \qquad \varphi(\mathbb{E}) = \mathbb{E}A$

$\varphi(\mathbb{E}') = \mathbb{E}'(P^{-1}AP)$ dove $\mathbb{E}' = \mathbb{E}P$

Spazi duali

$V^* = Hom_K(V,K)$

se $\dim_K V = n < +\infty \qquad \mathbb{E} = (e_1,\dots,e_n)$

$\varepsilon_j: V \to K$ definite da $\varepsilon_j(e_r) = \delta_{jr} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = r \\ 0 & \text{se } j \neq r \end{cases}$

$\mathbb{E}^* = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ base duale di V^*

domanda $\quad$ se $\dim V = +\infty$?

base algebrica - vett. lin. indip.

- generatori : ogni vettore di V si scrive con combinazione lineare finita di elementi

esempio

$$V = \underset{n \in \mathbb{N}}{\overset{\text{"somma diretta"}}{\bigoplus}} K = \{(a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0, \dots) \mid n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R}\}$$

insieme delle succ. definitivamente nulle

Considero $e_i := (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{i-esimo posto}}, 0, \dots)$, allora $\mathbb{E} = (e_1, \dots, e_n, \dots)$ è base

Possiamo costruire $\varepsilon_j : V \to K$

$$e_r \mapsto \begin{cases} 0 & r \neq j \\ 1 & r = j \end{cases}$$

$\varepsilon_j \in V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$

L'insieme (infinito) $\{\varepsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è linearmente indip., ma non è una base, infatti non è un insieme generatore di V^*.

Per esempio non genera $\eta : V \to K$

$$(a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

scelto un sottinsieme finito di $\{\varepsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ e detto m il max dei pedici, si ha, ad esempio: $(0, \dots, 0, a_{m+1}, \dots, a_k, 0 \dots) \mapsto \sum_{i=m+1}^{k} a_i$ ma questa somma non può essere rappresentata tramite l'insieme finito scelto (sarebbe 0)

In generale possiamo dimostrare che V^* non ha una base algebrica numerabile. Allora $V \not\cong V^*$. Si ha

$$V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K) = \underbrace{\prod_{n \in \mathbb{N}}}_{\text{"prodotto diretto"}} K = \{(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots) \mid a_i \in K\}$$

In generale se $\dim_K V = n < +\infty$, $\mathbb{E} = (e_1, \dots, e_n)$ base di V induce una base duale $\mathbb{E}^* (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ e possiamo costruire:

$$f : V \to V^* \quad \text{è iso di sp. vett.}$$

$$e_1 \mapsto \varepsilon_1$$
$$\vdots$$
$$e_n \mapsto \varepsilon_n$$

attenzione se prendiamo $\mathbb{E}'$ e $(\mathbb{E}')^*$ otteniamo un altro isomorfismo

$$f' : V \to V^*$$

$$e_1' \mapsto \varepsilon_1' \quad \cdots \quad e_n' \mapsto \varepsilon_n'$$

però in generale $f \neq f'$. Si dice che non esiste un isomorfismo canonico.

<u>esempi</u> (di isomorfismi "naturali")

1 Fissiamo V e W $\mathbb{K}$-sp. vettoriali di $\dim_{\mathbb{K}} < +\infty$.

$\dim_{\mathbb{K}} V = n$ e $\dim_{\mathbb{K}} W = m$.

$$\dim_{\mathbb{K}} (\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)) = mn$$
$$= \dim_{\mathbb{K}} (\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W,V))$$
$$= \dim_{\mathbb{K}} (\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W^*,V^*))$$

Possiamo costruire un isomorfismo canonico (o naturale) tra $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W^*,V^*)$ quello che associa a un'appl. lin $f: V \to W$ la sua trasposta ${}^t f$. Se $f: V \to W$ e $\varphi \in W^*$, cioè $\varphi: W \to \mathbb{K}$, allora ${}^t f(\varphi) = \varphi \circ f: V \to \mathbb{K}$

Si ottiene: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) \to \mathrm{Hom}(W^*,V^*)$

$$f \mapsto \varphi \circ f$$

1) Mostrare che $({}^t f)(\varphi): V \to \mathbb{K}$ è lineare

2) Mostrare che $f \mapsto {}^t f$ è lineare

$$\Psi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W^*,V^*)$$

3) mostrare che Ψ è un isomorfismo

4) cosa succede se V, W hanno dim infinita?

2 V sp. vett.

$V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\mathbb{K})$

$(V^*)^* = V^{**} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V^*,\mathbb{K})$

Esiste una appl. lin. canonica $\Phi : V \to V^{**}$

$$v \mapsto \psi_v : V^* \to \mathbb{K}$$
$$\varphi \mapsto \varphi(v)$$

1) $\psi_{v+v'} = \psi_v + \psi_{v'}$ (Φ è lineare)

2) se $v \neq 0$ allora $\psi_v \neq 0$ (Φ è iniettiva)

<u>corollario</u> se $\dim_{\mathbb{K}} V$ è finita, allora Φ è isomorf.

FORME BILINEARI

V = sp. vett $/\mathbb{K}$

def Un'applicazione $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ si dice **FORMA BILINEARE** su V se:

i) $\beta(v+v', w) = \beta(v,w) + \beta(v',w) \quad \forall\, v,v',w \in V$

ii) $\beta(v, w+w') = \beta(v,w) + \beta(v,w') \quad \forall\, v,w,w' \in V$

iii) $\beta(\alpha v, w) = \alpha\, \beta(v,w) = \beta(v, \alpha w) \quad \forall\, v,w \in V, \ \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$

def Una forma bilineare su V si dice

- **SIMMETRICA** se $\beta(v,w) = \beta(w,v) \quad \forall\, v,w \in V$
- **ANTISIMMETRICA** se $\beta(v,w) = -\beta(w,v) \quad \forall\, v,w \in V$
- **ALTERNANTE** se $\beta(v,v) = 0 \quad \forall\, v \in V$

prop Se $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ è una forma bilineare alternante, allora β è antisimmetrica.

dim $0 = \beta(v+w, v+w) = \underbrace{\beta(v,v)}_{=0} + \beta(v,w) + \beta(w,v) + \underbrace{\beta(w,w)}_{=0}$

$\Rightarrow \beta(v,w) = -\beta(w,v)$ $\square$

domanda Quando vale il viceversa?

Esempi

i) $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ t.c. $\forall\, v,w \quad \beta(v,w) = 0$ è una forma bilineare detta **FORMA NULLA**

ii) $V = \mathbb{R}^n \qquad \cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ prodotto scalare

$$(v, w) \mapsto v \cdot w = {}^t v \cdot w$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

iii) $V = \mathbb{C}^n \ni v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \ w = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ prodotto hermitiano

$\langle v, w \rangle = {}^t v \cdot \overline{w} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{\mu_j}$ non è una forma bilineare

se considero il prodotto scalare (reale) standard su $\mathbb{C}^n$ è forma bilineare

iv) $V = C^0[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ : f \text{ continua}\}$

$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$

$\langle \ , \ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ è forma bilineare simmetrica.

v) $V = K^n$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in V$

sia $A \in M_n(K)$

$\beta(x,y) = {}^t x A y$ è una forma bilineare $\beta : K^n \times K^n \to K$

<u>esplicitamente</u> $\beta(x,y) = (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\, x_j\, y_k$

se $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ j-esimo posto allora $\beta(e_j, e_k) = a_{jk}$

Applicazioni bilineari

<u>def</u> V, W, Z sp vett $/K$ allora possiamo definire applicazioni bilineari

$\beta : V \times W \to K$

$\beta : V \times W \to Z$

<u>oss</u> Chiamiamo $Bil_K(V \times V, K)$ l'insieme di tutte le forme bilineari su V e analog. $Bil_K(V \times W, K)$ e $Bil_K(V \times W, Z)$.

- sono sp. vett $/K$
- sono di dim finita se V (risp. V e W, V e W e Z) lo sono

Fissiamo una appl. bil. $\beta : V \times W \to K$ e $Bil_K(V \times W, K)$. Possiamo costruire due appl. lineari:

$\beta_1 : V \to W^*$ $\qquad b_v$ per il seminesi

δ_b per il seminesi $\qquad v \mapsto \left(\beta_{1,v} : W \to K \atop \quad w \mapsto \beta(v,w) \right)$ $\qquad \beta_1(v) = \beta_{1,v} = \beta(v, -) \in W^*$ (far variare w)

$\beta_2 : W \to V^*$ $\qquad b_w'$

δ_b' $\qquad w \mapsto \beta_{2,w} : V \to K$

$\qquad v \mapsto \beta(v,w)$ $\qquad \beta_2(w) = \beta_{2,w} = \beta(-, w) \in V^*$

Viceversa, fissiamo $\beta_1 : V \to W^*$, allora possiamo definire un'appl. bilineare $\beta : V \times W \to K$

$$(v,w) \mapsto (\beta_1(v))(w)$$

Analog se fissiamo $\beta_2 : W \to V^*$

esercizio 1) Mostrare che esistono iso canonici

$$Bil_K(V \times W, K) \to Hom_K(V, W^*)$$
$$\beta \mapsto \beta_1$$
$$Bil_K(V \times W, K) \to Hom_K(W, V^*)$$
$$\beta \mapsto \beta_2$$

2) se $\dim_K V < +\infty$ e $\dim_K W < +\infty$, allora mostrare che β_1 e β_2 sono una la trasposta dell'altra

3) se hanno $\dim_K = +\infty$??

def consideriamo $\beta : V \times W \to K$ appl. bilineare:

a) β è non-degenere a sx se $\ker(\beta_1) = 0$:

$$\beta(v,w) = 0 \ \forall w \in W \Rightarrow v = 0$$

b) β è non-degenere a dx se $\ker(\beta_2) = 0$

$$\beta(v,w) = 0 \ \forall v \in V \Rightarrow w = 0$$

c) β è non-degenere se lo è sia a dx che a sx

esempio Prendiamo $W = V^*$ e $\beta_2 = id_{V^*} : \underset{W}{V^*} \to \underset{V^*}{V^*}$

allora $\beta : V \times V^* \to K$

$$(v, \varphi) \mapsto \varphi(v)$$

β_2 è isomorfismo

$\Rightarrow \beta$ è non degenere

esercizio 1) Sia $\beta : V \times V \to K$. Mostrare che β è simmetrica $\iff \beta_1 = \beta_2$

β è antisimmetrica $\iff \beta_1 = -\beta_2$

2) Sia $\beta : V \times V \to K$ f.bil. con $\dim_K V < +\infty$.

Allora sono equiv:

a) β è non-degenere a sx

b) β è non-degenere a dx

c) β_1 è isomorf.

d) β_2 è isomorf.

e) $\forall\ v \neq 0$ in V, $\exists\ w \in V$ tc $\beta(v,w) \neq 0$

f) $\forall\ w \neq 0$ in V, $\exists\ v \in V$ tc $\beta(v,w) \neq 0$

<u>esercizio</u> Sia $K = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\quad V = K^2$

- trovare una f. bilineare $\beta : V \times V \to K$ antisimmetrica e non alternante
- trovare condizioni per cui una forma antisimmetrica su V sia alternante

<u>hint</u> lavorare con le matrici $(\lambda_1, \lambda_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$

FORME BILINEARI E MATRICI

Sia $\dim_K V < +\infty$. Abbiamo visto $V = K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\}$ $\quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

una forma. bil. su V è ${}^t x A y$ dove $A \in M_{n,n}(K)$ e

$$\beta(x,y) = {}^t x A y = (x_1 \cdots x_n)(a_{ij})\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum a_{ij} x_i y_j$$

$$a_{ij} = \beta(e_i, e_j)$$

data una f.bil. nella forma $x^t A y$, posso determinare β (matrice => funzione)

In generale se V ha $\dim_K V < +\infty$ e $\mathbb{E} = (e_1 \dots e_n)$ base, ogni $v \in V$ si scrive

$v = \mathbb{E} X = \mathbb{E}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, chiamiamo

$$A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(K) \text{ con } a_{ij} = \beta(e_i, e_j)$$

se $\beta : V \times V \to K$ è f. bilineare.

Allora possiamo calcolare

$$\beta(v,w) = \beta(\mathbb{E}x, \mathbb{E}y) = \beta(\sum x_i e_i, \sum y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \beta(e_i, e_j) y_j = {}^t x A y$$

in questo modo mostro che data una forma bilineare β ho una corrispondente con la matrice (a_{ij}) tc $a_{ij} = \beta(e_i, e_j)$ (funzione => matrice)

domanda se cambiamo base?

$$\mathbb{E}' = \mathbb{E} P, \quad P \in GL_n(K)$$

"immagine di x nella base $\mathbb{E}$"

$$\beta(\mathbb{E}'x, \mathbb{E}'y) = \beta(\mathbb{E}Px, \mathbb{E}Py) = {}^t(Px) A (Py) = {}^t x ({}^t P A P) y$$

=> la matrice di β nella base $\mathbb{E}' = \mathbb{E}P$ è ${}^t P A P$

oss • $rg({}^t P A P) = rg(A)$ => rg non dipende dalla base scelta

perché P è matrice invertibile => $rg(P) = n$

• $\det({}^t P A P) = (\det P)^2 (\det A)$

domanda Chi sono le matrici associate alle appl. lin. β_1, β_2?

$\beta : V \times V \to K \qquad \mathbb{E}$ base di V

$\beta(v,w) = \beta(\mathbb{E}x, \mathbb{E}y) = {}^t x A y$

• $\beta_1 : \underset{\mathbb{E}}{V} \to \underset{\mathbb{E}^*}{V^*}$

$$v \mapsto \left[\begin{array}{ll} \beta(v,-) : & V \to K \\ & w \mapsto \beta(v,w) \end{array} \right]$$

$$e_1 \mapsto \beta(e_1, -) : \mathbb{E}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mapsto (1\, 0 \dots 0) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11} \cdots a_{1n})\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11}\varepsilon_1 + \dots + a_{1n}\varepsilon_n)(\mathbb{E}y)$$

$$\beta_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^* \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

coordinate di $\beta_1(e_1)$ nella base $\mathbb{E}^*$

$$e_i \mapsto a_{i1}\varepsilon_1 + \ldots + a_{in}\varepsilon_n$$

$\Rightarrow$ la matrice di β_1 nelle basi $\mathbb{E}$ e $\mathbb{E}^*$ è ${}^tA$

- $\beta_2 : V \longrightarrow V^*$ $\quad \mathbb{E}$, $\mathbb{E}^* = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$

$$v \mapsto \left[\begin{aligned} \beta(-,v) : \ & V \to K \\ & w \mapsto \beta(w,v) \end{aligned} \right]$$

$$e_1 \mapsto \beta(-, e_1) : V \to K$$

$$\mathbb{E}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto (x_1 \cdots x_n)\, A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} =$$

$$= (a_{11}\varepsilon_1 + \ldots + a_{n1}\varepsilon_n)\, \mathbb{E}x$$

$$e_i = \mathbb{E}^* \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ la matrice di β_2 nelle basi $\mathbb{E}, \mathbb{E}^*$ è A

oss In particolare β è simm $\iff A = {}^tA \iff \beta_1 = \beta_2$

dal Fernelli pagina 211:
$\beta(v,w) = {}^txAy = {}^t({}^tyAx)$ e
$\beta(w,v) = {}^tyAx$
$\Rightarrow \beta(v,w) = \beta(w,v)$
$\iff A = A^t$

β è antisimm $\iff A = -{}^tA \iff \beta_1 = -\beta_2$

β è non-degenere $\iff \beta_1$ appl. lin. iniettiva

$\iff \beta_2$ appl. lin. iniettiva

$\iff \det(A) \neq 0$

prop Se il campo K ha $\mathrm{char}(K) \neq 2$ allora ogni f. bil. su V è somma di una f. bil. simm. e di una alternante.

dim i) Se $\dim V < +\infty$ e $\mathbb{E}$ base per V, una f. bil. $\beta : V \times V \to K$ è $\beta(\mathbb{E}x, \mathbb{E}y) = {}^txAy$ con $A \in M_{n,n}(K)$.

Poniamo $A = \frac{1}{2}\underbrace{(A + {}^tA)}_{\text{simmetrica}} + \frac{1}{2}\underbrace{(A - {}^tA)}_{\substack{\text{antisimmetrica} \\ \Rightarrow \text{ alternante} \\ (\mathrm{char} \neq 2)}}$, allora

$$\beta(\mathbb{E}x, \mathbb{E}y) = \frac{{}^tx(A + {}^tA)y}{2} + \frac{{}^tx(A - {}^tA)y}{2}$$

ii) In generale, se $\beta : V \times V \to K$ è f. bil. poniamo

$$\sigma : V \times V \to K \qquad \qquad \Omega : V \times V \to K$$
$$(v,w) \mapsto \beta(v,w) + \beta(w,v) \qquad (v,w) \mapsto \beta(v,w) - \beta(w,v)$$

Allora $\beta = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\Omega$ $\square$

OSS $Bil_K(V\times V,K) \supseteq Sym(V\times V,K)$ } sottospazi vettoriali
$\qquad\qquad\qquad\qquad\supseteq Alt(V\times V,K)$

$\Rightarrow Bil_K(V\times V,K) = Sym(V\times V,K) \oplus Alt(V\times V,K)$

↳ non vale nel caso char(2) perché sym ≡ anti-sym

domanda A che cosa corrisponde questa decomposizione in $Hom_K(V,V^*)$?

esercizio $\beta: K^4\times K^4 \to K$

$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}\right) \mapsto x_1y_2-2x_2y_4+x_3y_3$$

1) matrice di β rispetto alla base canonica di K^4
2) verificare che β è degenere
3) $K=\mathbb{R}$ trovare $0\neq x_0\in\mathbb{R}^4$ tc $\beta(x_0,y)=0$ $\forall y\in\mathbb{R}^4$
4) $K=\mathbb{R}$ trovare $0\neq y_0\in\mathbb{R}^4$ tc $\beta(x,y_0)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}^4$
5) $K=\mathbb{R}$ $e_1'=e_1$ $e_2'=e_4-e_1$ $e_3'=e_1+e_2$ $e_4'=e_3$
trovare la matrice di β rispetto a $E'=(e_1',e_2',e_3',e_4')$
$A'=(a_{ij}')$ $\quad\beta(e_i',e_j')=a_{ij}'$

soluzione i) $A=(a_{ij})$, $a_{ij}=\beta(e_i,e_j) \Rightarrow A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $\quad rg(A)=3$

ii) β è degenere perché $\det(A)=0$

iii) $x_0\in\ker\beta_1$, $\beta_1: V\longrightarrow V^*$
$$x\longmapsto\beta(x,-)$$
matrice di β_1 nelle basi E, E^* è ${}^tA$ $\Rightarrow e_4\in\ker({}^tA)=\ker(\beta_1)$
$\Rightarrow \beta(e_4,y)=0$

iv) $y_0\in\ker\beta_2 \Leftrightarrow \beta(x,y_0)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}^4$
$\Rightarrow e_1\in\ker\beta_2$

v) $P=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$, posso calcolare A' in uno dei due modi:

- $A'={}^tPAP=(a_{ij}')$
- $a_{ij}'=\beta(e_i',e_j')$

ORTOGONALITÀ

$V =$ sp. vett $/ \mathbb{K}$ di dim finita

$\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ f. bil. simmetrica

def • Diciamo che $v, w \in V$ sono **ORTOGONALI** se $\beta(v,w) = 0$ e scriviamo $v \perp w$

• Dato $S \subseteq V$ sottoinsieme, chiamiamo

$$S^\perp = \{ w \in V \text{ tc } \beta(v,w) = 0 \ \forall v \in S \}$$

esercizio $S^\perp$ è un sottospazio vettoriale

oss • $S = \{0\}$ $\quad S^\perp = V$

• $S = \{v\}$ $\quad S^\perp = \langle v \rangle^\perp = v^\perp$

• $S = V$ $\quad V^\perp$ è chiamato il **RADICALE** di V

• $V^\perp = \{0\} \iff \beta$ è non-degenere

esercizio 1) se β è non degenere allora $(S^\perp)^\perp = \langle S \rangle$

2) se β è degenere ??

esempio $\mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è simm e non-deg.

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \beta(e_1, e_1) = 0 \Rightarrow e_1 \in e_1^\perp$

$\beta(e_1, e_2) = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow e_1^\perp = \langle e_1 \rangle$

def Diciamo che un vettore $v \in V$ è **ISOTROPO (o β-ISOTROPO)** se $\beta(v,v) = 0$, cioè $v \in v^\perp$

oss se v è isotropo, anche λv lo è $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

$$\beta(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 \beta(v,v) = 0$$

def Chiamiamo **CONO ISOTROPO** l'insieme di tutti i vettori isotropi di V e lo denotiamo con $I_\beta(V)$.

esercizio 1) Rappresentare in $\mathbb{R}^3$ il cono isotropo per le f. bil. indotte dalle seguenti matrici:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $a, b > 0$; $a > 0, b < 0$

2) Mostrare che

i) $I_\beta(U) = \{0\} \Rightarrow \beta$ è non-degenere

ii) l'implicazione inversa non è vera

iii) $K = \mathbb{C}$: può essere $I_\beta(U) = \{0\}$??

iv) $I_\beta(U)$ in generale non è sottospazio vett. Dare un esempio con $\dim(V) \geq 2$.

def Due sottospazi U, W sono ortogonali se $U \subseteq W^\perp$ (è equiv. a $W \subseteq U^\perp$)

prop $\beta : V \times V \to K$ f. bil. simm. non-degenere. $U, W \leq V$ sottosp. vett.

i) $U \subseteq W \iff W^\perp \subseteq U^\perp$

ii) $(U^\perp)^\perp = U$

iii) $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

iv) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

v) $\dim_K U + \dim_K(U^\perp) = \dim_K V$

dim v) Sia $r = \dim_K U$, $\{e_1, \dots, e_r\}$ base di U. La completiamo a base $\mathbb{E} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ di V.

In base $\mathbb{E}$, β ha matrice $A \in GL_n(K)$

le eq. di $U^\perp$ sono i coeff delle prime r righe di A:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \text{ tc } \beta\left(e_1, \mathbb{E}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$(1\ 0 \dots 0)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

e ripeto su e_i $\forall i = 1, \dots, r$.

A ha rango massimo $\Rightarrow$ le prime r righe di A sono lin. indip.

$\Rightarrow U^\perp$ ha dim $n-r$

ii) $(U^\perp)^\perp \supseteq U$ e $\dim U + \dim U^\perp = n$ e $\dim U^\perp + \dim (U^\perp)^\perp = n$

$\Rightarrow \dim U = \dim (U^\perp)^\perp \Rightarrow U = (U^\perp)^\perp$

ii) $U \subseteq W \Rightarrow W^\perp \subseteq U^\perp$

$W^\perp \subseteq U^\perp \overset{ii)}{\Rightarrow} U = (U^\perp)^\perp \subseteq (W^\perp)^\perp = W$

iii) $(U+W)^\perp \subseteq U^\perp \cap W^\perp$

$U^\perp \cap W^\perp \subseteq (U+W)^\perp$ (x linearità)

iv) di conseguenza al primo $\square$

Se $v \notin I_\beta(V)$ allora $\langle v \rangle \oplus v^\perp = V$, cioè se $\beta(v,v) \neq 0$.

$$\underset{\substack{\cup \\ w}}{V}$$

$$w_1 + w_2 = w$$

Se $w \in V$ allora $w = \underbrace{\frac{\beta(w,v)}{\beta(v,v)} v}_{\in \langle v \rangle} + \left(\underbrace{w - \frac{\beta(w,v)}{\beta(v,v)} v}_{\overset{?}{\in} v^\perp}\right)$

$$\beta\left(v, w - \frac{\beta(w,v)}{\beta(v,v)} v\right) = \beta(v,w) - \frac{\beta(w,v)}{\cancel{\beta(v,v)}} \cancel{\beta(v,v)} = 0$$

Chiamiamo $\alpha_v(w) = \frac{\beta(w,v)}{\beta(v,v)}$ il COEFF. DI FOURIER di w lungo v

In generale, se $U \subseteq V$ è sottosp. vett. sono equivalenti:

(i) $U \cap U^\perp = \{0\}$

(ii) $\beta|_{U \times U}$ è f. bil. non degenere

(iii) $V = U \oplus U^\perp$

dim (i)$\Leftrightarrow$(iii) per dimensioni

(i) $\Rightarrow$ (ii) Se $\beta|_{U\times U}$ è degenere $\Rightarrow \exists\, u_0 \in U$, $u_0 \neq 0$ t.c. $\beta(u_0,u) = 0 \ \forall u \in U$

$\Rightarrow u_0 \in U^\perp \cap U \neq 0$

(ii) $\Rightarrow$ (i) se $u_0 \neq 0 \in U \cap U^\perp$ allora $\beta(u_0,u) = 0 \ \forall u \in U$

$\Rightarrow \beta|_{U\times U}$ è degenere $\square$

def V sp. vett./K, $\beta: V\times V \to K$ f. bil. simm. Una base $\mathcal{E}$ è detta **β-ORTOGONALE (o β-diagonalizzante)** se $\beta(e_i, e_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

($\Leftrightarrow$ la matrice A di β è diagonale)

TEOREMA se $2 \neq 0$ in K, $\exists$ $\mathbb{E}$ β-ortogonale

dim se $\beta = 0$ ovvio. Supponiamo $\beta \neq 0$.

Per induzione su $n = \dim V$.

se $n=1$ qualsiasi base è ok.

$n = \dim V \geq 2$. $\beta \neq 0 \Rightarrow \exists\, v, w \in V \;:\; \beta(v,w) \neq 0$.

Allora è vera una fra:

- $\beta(v,v) \neq 0$
- $\beta(w,w) \neq 0$
- $\beta(v+w, v+w) \neq 0$ $\qquad$ $(\mathrm{char}(K) \neq 2)$

$$\beta(v+w, v+w) = \beta(v,v) + \beta(w,w) + 2\beta(v,w)$$

Troviamo e_1 tc $\beta(e_1,e_1) \neq 0$

$\Rightarrow e_1 \oplus \langle e_1 \rangle^\perp$, $\dim \langle e_1 \rangle^\perp = n-1$

Per induzione $\exists$ base $\{e_2, \dots, e_n\}$ per $\langle e_1 \rangle^\perp$, dunque

$\mathbb{E} = (e_1, \dots, e_n)$ è β-ortogonale. $\square$

ALGORITMO DI LAGRANGE

Iniziamo da una base $\mathbb{E}$ di V, β con matrice A in $\mathbb{E}$:

1° passo cerchiamo e_1' tc $\beta(e_1', e_1') \neq 0$

- se $\beta(e_1,e_1) \neq 0$ poniamo $e_1' = e_1$
- se $\beta(e_1,e_1) = 0$ e $\beta(e_i,e_i) \neq 0$, permutiamo e_1 con e_i (prendo il più piccolo i)
- se $\beta(e_1,e_1) = \dots = \beta(e_n,e_n) = 0$ prendiamo e_i, e_j tc $\beta(e_i,e_j) \neq 0$ (prendo i più piccoli i,j per cui $i<j$) e poniamo

$$\mathbb{E}' = (e_i + e_j\,,\; e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_j, \dots, e_n)$$

e_j lo prendo, e_i no

allora $e_1' = e_i + e_j$ è non isotropo (come prima)

2° passo $\alpha_{e_1}(-) = \dfrac{\beta(e_1, -)}{\beta(e_1,e_1)}$ e poniamo
$$e_1' = e_1$$
$$e_2' = e_2 - \alpha_{e_1}(e_2)\cdot e_1$$
$$\vdots$$
$$e_n' = e_n - \alpha_{e_1}(e_n)\cdot e_1$$

$\Rightarrow e_2', \dots, e_n'$ ortogonali a e_1

$$\mathbb{E}'' = \mathbb{E}' P \,, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha(e_1) & \cdots & -\alpha(e_n) \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = {}^tPAP = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{B} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

3° passo Ripetiamo a partire dalla matrice B.

esempio Trovare una base diagonalizzante per la forma bilineare β su K^3 ($char(K) \neq 2$) con matrice (rispetto alla base $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \beta$ non-degenere.

$\beta(e_1, e_1) = \beta(e_2, e_2) = \beta(e_3, e_3) = 0.$

Pongo $e_1' = e_1 + e_2$. Allora $\beta(e_1', e_1') = (1\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$

Considero quindi la base $\mathcal{E}' = \{e_1' = e_1 + e_2,\ e_2' = e_2,\ e_3' = e_3\}$.

$\beta(e_1', e_2') = (1\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

$\beta(e_1', e_3') = (1\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

Perciò, se considero la base $\mathcal{E}'$, la matrice di β rispetto a quella base è

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice di cambiamento di base è $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Quindi la condizione soddisfatta dalle matrici è:

$A' = {}^tPAP$ (verifica per esercizio).

Considero ora la base $\mathcal{E}''$ ottenuta usando i coeff. di Fourier:

$$e_1'' = e_1'$$

$$e_2'' = e_2' - \frac{\beta(e_1', e_2')}{\beta(e_1', e_1')} e_1' = e_2' - \frac{1}{2} e_1' \quad (= (-\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ 0))$$

$$e_3'' = e_3' - \frac{\beta(e_1', e_3')}{\beta(e_1', e_1')} e_1' = e_3' - \frac{1}{2} e_1' \quad (= (-\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\ 1))$$

Considero come prima la matrice di cambio di base da $\mathcal{E}'$ a $\mathcal{E}''$

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rispetto a questa base $\mathbb{E}''$, la β ha matrice:

$$A'' = {}^t P' A P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

A questo punto, considero

$$f_1 = e_1''$$
$$f_2 = e_2''$$
$$f_3 = e_3'' - \frac{\beta(e_2'', e_3'')}{\beta(e_2'', e_2'')} e_2'' = e_3'' - \frac{3/2}{-1/2} e_2'' = e_3'' + 3e_2''$$

Come sopra, la matrice di cambio di base dalla $\mathbb{E}''$ alla $\mathbb{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ è

$$P'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e rispetto a questa nuova base, β ha matrice

$$B = {}^t P'' A'' P'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

La base $\mathbb{F}$ è esplicitamente data dal cambio di base

$$\mathbb{F} = \mathbb{E}'' \cdot P'' = \mathbb{E}' \cdot P' \cdot P'' = \mathbb{E} \cdot P \cdot P' \cdot P'' = \mathbb{E} \cdot \varphi$$

$$\varphi = P \cdot P' \cdot P'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questo significa che rispetto alla base

$$\mathbb{F} = \{(1\ 1\ 0), (-1/2\ \ 1/2\ \ 0), (-2\ 1\ 1)\}$$

β ha matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Quindi, per ogni campo K di caratt $\neq 2$, possiamo esprimere la forma bilineare β in una base opportuna come matrice diagonale.

Possiamo supporre (a meno di riordinare gli elementi di questa base) che i primi r elementi della base siano non isotropi, cioè che la matrice sia della forma

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} r \leq n \\ n = \dim_K(V), \quad V = K^n \end{matrix}$$

$d_i = \beta(v_i, v_i)$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ base diagonalizzante

oss (1) Se per ogni $i = 1, \dots, r$ esiste α_i con $\alpha_i^2 = d_i$, allora cambiando la base diagonalizzante con la nuova base $\{ \frac{v_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{v_r}{\alpha_r}, v_{r+1}, \dots, v_n \}$ ho la matrice $\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{0}_{n-r} \end{array} \right)$

(infatti $\beta\left(\frac{v_i}{\alpha_i}, \frac{v_i}{\alpha_i}\right) = \frac{1}{\alpha_i^2} \beta(v_i, v_i) = 1$)

(2) Se $K = \mathbb{C}$ succede sempre così, e una forma bil. simmetrica ammette sempre una base rispetto alla quale β è $\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & \mathbb{0}_{n-r} \end{pmatrix}$

(3) Se $K = \mathbb{R}$, questo succede solo se $d_i > 0$. Se ho $d_1 > 0, \dots, d_p > 0$, $d_{p+1} < 0, \dots, d_r < 0$ (a meno di riordinamento) considero la base

$$\left\{ \frac{v_1}{\sqrt{d_1}}, \dots, \frac{v_p}{\sqrt{d_p}}, \frac{v_{p+1}}{\sqrt{|d_{p+1}|}}, \dots, \frac{v_r}{\sqrt{|d_r|}}, v_{r+1}, \dots, v_n \right\}$$

allora β è nella forma

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{1}_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\mathbb{1}_{r-p} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbb{0}_{n-r} \end{array} \right)$$

TEOREMA (SYLVESTER)

V sp. vett. su $\mathbb{R}$, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$, $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineare simmetrica di rango $rg(\beta) = r$. Allora $\exists\, p \in \mathbb{Z}$, $0 \leq p \leq r$, che dipende solo da β, e una base $\mathbb{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ t.c. β abbia matrice

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & & \\ & -\mathbb{1}_q & \\ & & \mathbb{0}_{n-r} \end{pmatrix} \qquad q = r - p$$

rispetto ad $\mathbb{F}$.

dim Bisogna dim che p non dipende dalla base scelta. Suppongo PA che in una base $\mathbb{F}'$ β abbia matrice

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_t & & \\ & \mathbb{1}_{r-t} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

con $t < p$.

Considero i sottospazi $S = \langle f_1, \dots, f_p \rangle$ e se $F' = \{f_1', \dots, f_n'\}$

$T = \langle f_{t+1}', \dots, f_n' \rangle$

Poiché $t < p$, $T \cap S \neq 0$ (formula di Grassman).

Fisso $v \neq 0$ in $T \cap S$. Sarà

$$v = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_p f_p$$
$$\overset{!}{=} \mu_{t+1} f_{t+1}' + \dots + \mu_n f_n'$$

Dunque

$$\beta(v,v) = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_p^2 > 0$$
$$\overset{!}{=} -(\mu_{t+1})^2 - \dots - (\mu_n)^2 < 0$$

Contraddizione $\Rightarrow t = p$. $\square$

def La coppia $(p,q) = (p, r-p)$ è detta SEGNATURA di β.

def Due matrici A e $B \in M_n(K)$ si dicono CONGRUENTI se $\exists\ P \in GL_n(K)$ t.c. $B = {}^tPAP$, cioè B e A rappresentano la stessa forma bilineare su K^n rispetto a due basi diverse.

Forme quadratiche

Data una forma bilineare simmetrica $\beta : V \times V \to k$ possiamo definire un'applicazione $q : V \to k$ ponendo $q(v) = \beta(v, v)$, $v \in V$.

La funzione q è detta forma quadratica associata a β.

Verifica:

(i) $q(\lambda v) = \lambda^2 v$

(ii) $q(v+w) - q(v) - q(w) = 2\beta(v, w)$.

esempio $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $v = (x, y)$

$$q((x, y)) = (x \; y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 2y^2$$

In generale $q : V \to k$ è detta **FORMA QUADRATICA** se

(i) $q(\lambda v) = \lambda^2 v$

(ii) $q(v+w) - q(v) - q(w)$ è bilineare

Osservo che se $\mathrm{char}(k) \neq 2$, ricostruisco la forma bilineare da quella quadratica ponendo

$$\beta(v, w) = \frac{q(v+w) - q(v) - q(w)}{2}$$

Quindi, se fisso una base $\mathbb{E}$ di V, una forma quadratica è un polinomio di grado 2 in $x_1, \dots, x_n$ se $\beta(\mathbb{E}x, \mathbb{E}y) = {}^t x A y$

$$q(\mathbb{E}x) = {}^t x A x = \sum_{i,j=1,\dots,n} a_{ij} x_i x_j$$

Concretamente, il polinomio è $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$

oss se $\mathrm{char}(k) = 2$ questo non funziona: ad esempio $Q(x_1, x_2) = x_1 x_2$ non è forma quadratica associata ad alcuna β:

$$\beta \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = A$$

$$(x_1 \; x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 \neq x_1 x_2 \text{ sempre}$$

↳ infatti, siccome β è simmetrica si ha $a_{21} = a_{12}$, dunque

$$a_{11}x_1^2 + \underbrace{a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_1x_2}_{=\,0} + a_{22}x_2^2$$

Forme definite positive o negative

Su $\mathbb{R}$, sappiamo che le forme bilineari simmetriche sono nella forma

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & & \\ & -\mathbb{1}_q & \\ & & \mathbb{0}_{n-r} \end{pmatrix}$$

quindi $Q(x_1,\dots,x_n) = x_1^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots-x_n^2$. Questa è detta **FORMA CANONICA** della forma quadratica di segnatura (p,q).
(la forma bil. da cui proviene la segnatura (p,q)).

def Una f. quadr. $q: V \to K$ si dice

(i) **DEFINITA POSITIVA** se $q(v)>0 \quad \forall v \neq 0$

(ii) **SEMIDEFINITA POSITIVA** se $q(v) \geq 0 \quad \forall v$

(iii) **DEFINITA NEGATIVA** se $q(v)<0 \quad \forall v \neq 0$

(iv) **SEMIDEFINITA NEGATIVA** se $q(v) \leq 0 \quad \forall v$

corollario $A \in M_n(\mathbb{R})$ è definita positiva $\iff \exists P \in GL_n(K) : A = {}^tPP$
(cioè è congruente alla matrice identità).

lemma Se $A \in M_n(K)$ e $C \in GL_n(K)$ è unitriangolare i.e.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

i minori principali sono i seguenti:

allora i minori principali di A e ${}^tCAC$ coincidono.

dim
$$\underset{A^{(1)}\ \cdots\ A^{(n)}}{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ & 1 & c_{23} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = (A^{(1)}, c_{12}A^{(2)}+A_2, \dots, c_{1n}A^{(1)}+\dots+A^{(n)})$$

le op. di Gauss non modificano il determinante

$$\Rightarrow \det(A) \overset{(*)}{=} \det(AC) \Rightarrow \det({}^tA) = \det({}^tC\,{}^tA) \;(**)$$

$$\Rightarrow \det({}^tCAC) \underset{(*)}{=} \det({}^tCA) \underset{(**)}{=} \det(A) \qquad \square$$

(*) con $A = {}^tCA$ (**) con ${}^tA = A$

oss non bastava dire che $\det(C)=1 \Rightarrow \det(A)=\det({}^tCAC)$? NO, perché a me interessa che il determinante dei minori principali non cambi e questo lo vedo perché sommo a ciascuna colonna il multiplo di un'altra

TEOREMA $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica è definita

(i) positiva $\Leftrightarrow$ tutti i determinanti dei minori principali sono >0

(ii) negativa $\Leftrightarrow$ i determinanti dei minori principali sono a segni alterni $D_1<0, D_2>0, \dots$

dim (i) ($\Rightarrow$) induzione su n.

$n=1$ non c'è nulla da dimostrare.

Suppongo $n>1$ e $A \in M_n(\mathbb{R})$ def. pos.

Allora $a_{11} = D_1 = {}^t e_1 A e_1 > 0$. Considero

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -a_{12}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Allora ${}^tCAC$ corrisponde alla forma bilineare (associata ad A nella base canonica) nella nuova base

$e_1' = e_1$

$e_2' = -\frac{a_{12}}{a_{11}} e_1 + e_2$

$\vdots$

$e_n' = -\frac{a_{1n}}{a_{11}} e_1 + e_n$

Per Lagrange $e_2', \dots, e_n' \perp e_1'$, dunque

$${}^tCAC = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \cdots & 0 \\ 0 & a_{11}' \cdots & a_{1,n-1}' \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & a_{n-1,1}' \cdots & a_{n-1,n-1}' \end{pmatrix} \quad = A'$$

e dal lemma precedente ${}^tCAC$ ha gli stessi minori di A.

Ma ora A' è simmetrica, definita positiva, e posso applicare l'ipotesi induttiva. Quindi i minori $D_1', \dots, D_{n-1}'$ di A' sono positivi e i minori di A sono

$$a_{11}, a_{11}D_1', \dots, a_{11}D_{n-1}' > 0$$

da cui l'enunciato.

($\Leftarrow$) $D_1 = a_{11} > 0$ per hp. Considero come sopra

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -a_{12}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$ {}^{t}CAC = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{11} & \cdots & a'_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a'_{n-1,1} & \cdots & a'_{n-1,n-1} \end{pmatrix} $$

$= A'$

e i minori di A' sono $D_i' = \frac{D_{i+1}}{a_{11}} > 0$.

Per hp induttiva, A' e' def positiva, ma allora anche ${}^{t}CAC$ lo e'. Segue che A lo e'.

(ii) Osservare che $-A$ è def positiva, ed utilizzare il risultato per $-A$ e dedurre per A. $\square$

Prodotti scalari e operazioni che li preservano

def V su $\mathbb{R}$; una f. bil. simm. e definita positiva è detta **PRODOTTO SCALARE** $\langle , \rangle$. Una **BASE ORTONORMALE** di V è una base in cui $\langle , \rangle$ assume forma $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

Una coppia $(V, \langle , \rangle)$ è detta **SPAZIO VETTORIALE EUCLIDEO**.

Posso definire una lunghezza

$$\|v\| = \sqrt{q(v)} = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

dove q = forma quadratica associata a $\langle , \rangle$

Consideriamo due K-spazi vettoriali con forme bilineari β, β':

$$(V, \beta), \quad \mathbb{E} \text{ base di } V, \quad \beta(\mathbb{E}x, \mathbb{E}y) = {}^t x B y$$

$$(V', \beta'), \quad \mathbb{E}' \text{ base di } V', \quad \beta(\mathbb{E}'x, \mathbb{E}'y) = {}^t x B' y$$

considero isomorfismi di spazi vettoriali

$$\varphi : V \longrightarrow V' \implies \varphi(\mathbb{E}) = \mathbb{E}' P \quad , \quad P \in GL_n(K)$$

Vogliamo che φ mandi β in β' nel seguente senso:

$$\beta'(\varphi(v), \varphi(w)) = \beta(v, w) \qquad \forall \; v, w \in V$$

ovvero, se

$$\beta'(\varphi(\mathbb{E}x), \varphi(\mathbb{E}y)) = \beta'(\mathbb{E}'Px, \mathbb{E}'Py) = {}^t(Px) B' (Py) = {}^t x ({}^t P B' P) y$$

voglio che

$${}^t x ({}^t P B' P) y = {}^t x B y \qquad \forall \; x, y .$$

Questo implica ${}^t P B' P = B$ (lo vedo usando la base canonica).

Se $\varphi : V \to V$ è automorfismo ($V' = V$, $\beta' = \beta$) la condizione diventa

$$B = {}^t P B P$$

<u>esempio</u> se β è prodotto scalare e $\mathbb{E}$ b.o.n. allora la condizione sopra è ${}^t P P = \mathbb{1}_n$, cioè $P \in O_n(\mathbb{R})$: isometrie di $\mathbb{R}^n$.

Più in generale, se fisso $B \in M_n(K)$, l'insieme

$$\{ P \in GL_n(K) \mid {}^t P B P = B \} \leq GL_n(K)$$

è un sottogruppo (convincersene).

Piani e spazi iperbolici

def Sia K un campo, $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Sia $U \leq V$. $\dim_K(U)=2$.

Sia $h: U \times U \longrightarrow K$ simmetrica non-degenere tc $\exists\, u_0 \neq 0, u_0 \in I_h(U)$

Chiamo h FORMA IPERBOLICA e chiamo la coppia (U,h) un

PIANO IPERBOLICO.

esempio $h \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ in base canonica

$h(e_1,e_1)=0 \Rightarrow e_1 \in I_h(\mathbb{R}^2)$

$h(e_2,e_2)=0 \Rightarrow e_2 \in I_h(\mathbb{R}^2)$

$h(e_1,e_2)=h(e_2,e_1)=1.$

prop Ogni piano iperbolico e' isomorfo a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

dim Basta trovare una base $\{u_1,u_2\}$ di vettori isotropi tc $h(u_1,u_2)=1$.

Cioe', in una scelta opportuna di basi, h è rappresentata

da $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ancora, sto dicendo che esiste un isomorfismo di s.v.

$\varphi: U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tc $h(v,w) = {}^t\varphi(v) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \varphi(w)$.

Fisso u_1 vettore isotropo.

Poiché h è non-deg. $\exists\, v \in V$ tc $h(u_1,v) \neq 0$

Rimpiazzando v con $\dfrac{v}{h(u_1,v)}$ si ha $h(u_1,v)=1$.

Noto che u_1 e v sono linearmente indip.: se $v=\alpha u_1$, allora

$$h(u_1,v) = h(u_1,\alpha u_1) = \alpha\, h(u_1,u_1)=0$$

Pongo $u_2 = v - \dfrac{h(v,v)}{2} u_1$. Mostro che la base $\{u_1,u_2\}$ funziona:

$h(u_1,u_1)=0$

$h(u_1,u_2) = h\left(u_1, v - \frac{h(v,v)}{2}u_1\right) = \underset{}{\overset{1}{\overset{\shortparallel}{h(u_1,v)}}} - \frac{h(v,v)}{2} \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{h(u_1,u_1)} = 1$

$h(u_2,u_2) = h\left(v - \frac{h(v,v)}{2}u_1, v - \frac{h(v,v)}{2}u_1\right) =$

$= h\left(v, v - \frac{h(v,v)}{2}u_1\right) - \frac{h(v,v)}{2} h\left(u_1, v - \frac{h(v,v)}{2}u_1\right) =$

$= h(v,v) - \frac{h(v,v)}{2}\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{h(v,u_1)} - \frac{h(v,v)}{2}\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{h(u_1,v)} + \left(\frac{h(v,v)}{2}\right)^2 \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{h(u_1,u_1)}$

$= h(v,v) - h(v,v) = 0$ $\square$

def Sia V sv su K, $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Una forma bilineare h non degenere, simmetrica si dice IPERBOLICA se $\exists\, U \subseteq V$ t.c. $U = U^{\perp}$.

(V, h) è detto SPAZIO IPERBOLICO.

prop Se (V,h) è iperbolico, allora $\dim_K(V)$ è pari: $\dim_K(V) = 2m$. Inoltre, esiste una base $\{u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_m, v_m\}$ t.c. h in questa base sia

$h(u_i, v_i) = 1$

$h(u_i, u_i) = h(v_i, v_i) = 0$

$h(u_i, v_j) = 0$ se $i \neq j$

cioè $\langle u_i, v_i \rangle \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ piano iperbolico standard

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

dim (esercizio).

Induzione su m.

Notare che

$$V = \bigoplus \text{piani iperbolici standard}$$
$$\quad\; = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i \qquad \dim(V_i) = 2$$

$h = h_1 \oplus \dots \oplus h_m$, h_i: forma iperbolica standard su V_i

In generale, dato $V \times V \xrightarrow{h_1} K$

$W \times W \xrightarrow{h_2} K$

$h_1 \oplus h_2 : (V \oplus W) \times (V \oplus W) \longrightarrow K$

$(h_1 \oplus h_2)((v_1, w_1)(v_2, w_2)) = h_1(v_1, v_2) + h_2(w_1, w_2)$

Forme alternanti

def (V,ω), V sv su K e $\omega: V\times V \to K$ alternante non degenere.
Allora (V,ω) è detto SPAZIO SIMPLETTICO.

prop (V,ω) sp. simplettico. Allora $\dim_K(V)$ è pari: $\dim_K(V)=2m$. Inoltre, V ammette una base $\{u_1,v_1,u_2,v_2,\dots,u_n,v_n\}$ tc

$$\omega(u_i,v_i)=1$$

$$\omega(v_i,u_i)=-1$$

$$\omega(u_i,v_j)=\omega(u_i,u_j)=\omega(v_i,v_j)=0 \quad \forall i\neq j.$$

Quindi

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{matrix}} \end{pmatrix}$$

In altre parole, $V \simeq \bigoplus$ spazi simplettici del tipo $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.
In altre parole, nella base $\{u_1,\dots,u_m,v_1,\dots,v_m\}$ ho matrice

$$\sim \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1}_m \\ \hline -\mathbb{1}_m & 0 \end{array}\right)$$

dim ω non degenere: dato u, posso trovare v tc $\omega(u,v)=1$.
Perciò $\omega|_{\langle u,v\rangle}$ è $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.
Decompongo $V=U\oplus U^\perp$, $U=\langle u,v\rangle$ e applico l'hp induttiva.
(Notare che se $\dim_K(V)=1$, allora ω sarebbe degenere).

oss Se considero gli isomorfismi che preservano la forma simplettica, ottengo il GRUPPO SIMPLETTICO

$$Sp_{2m}(K)=\{P\in GL_{2m}(K) \mid {}^tP\, J_m P = J_m\}$$

con $J_m=\begin{pmatrix}0 & \mathbb{1}_m\\ -\mathbb{1}_m & 0\end{pmatrix}$

<u>esempio</u> • $V = K^2$. $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J_2$

• V sp. vett su K, $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$

$W = V \oplus V^*$

$\omega : (V \oplus V^*) \times (V \oplus V^*) \longrightarrow K$

$\qquad\quad W \times W \longmapsto K$

$\omega((v, \varphi), (w, \psi)) = \psi(v) - \varphi(w)$

Mostrare che ω è alternante (ovvio) e non degenere (esercizio).

Se scelgo una base $\mathbb{E} = (e_1, \dots, e_n)$ di V e denoto $\mathbb{E}^* = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base duale, allora posso considerare la base $\mathbb{F}$ di $W = V \oplus V^*$ così fatta $\mathbb{F} = \{(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, \varepsilon_1), \dots, (0, \varepsilon_n)\}$.

Rispetto a $\mathbb{F}$, ω ha matrice J_n.

AGGIUNZIONE

[pg. 265]

Sia $\beta : V \times V \longrightarrow K$, $\mathrm{char}(K) \neq 2$, forma bilineare simmetrica non degenere.

$\beta \iff \quad B : V \xrightarrow{\sim} V^*$ t.c. $(B(v))(w) = \beta(v,w)$, $v,w \in V$.

Supponiamo di avere due spazi con forme bil. simm. non deg. $(V,\beta), (W,\delta)$

Supponiamo $V \xrightarrow{\varphi} W$ f. lineare.

def La FUNZIONE LINEARE AGGIUNTA $T(\varphi) : W \longrightarrow V$ e' la funzione lineare definita da:

$$\begin{aligned} T(\varphi) : W &\longrightarrow V \\ w &\longmapsto T(\varphi)(w) \end{aligned}$$

tramite

$$\beta(T(\varphi)(w), v) = \delta(w, \varphi(v)) \qquad \forall v \in V$$

esercizio verificare:

(i) Fissato $w \in W$, $\begin{aligned} V &\longrightarrow K \\ v &\mapsto \delta(w, \varphi(v)) \end{aligned}$ e' lineare, ovvero $\in V^*$.

Perciò l'elemento $T(\varphi)(w)$ e' ben definito tramite l'isomorfismo

$$\begin{aligned} B : V &\longrightarrow V^* \\ v' &\mapsto [w' \mapsto \varphi(v', w')] \end{aligned}$$

Cioè, siccome $\begin{aligned} V &\to K \\ v &\mapsto \delta(w, \varphi(v)) \end{aligned}$ e' un elemento di V^*, a questo elemento corrisponde tramite $B : V \longrightarrow V^*$ un unico elemento di V, che e', per definizione, l'elemento $T(\varphi)(w)$ che voglio definire.

(ii) $\begin{aligned} W &\longrightarrow V \\ w &\mapsto T(\varphi)(w) \end{aligned}$ e' lineare

(iii) Consideriamo $B : V \to V^*$, $D : W \to W^*$ e l'applicazione trasposta

$$\begin{aligned} {}^T\varphi : W^* \to V^*, \quad & f \in W^* \\ ({}^T\varphi(f))(v) = & f(\varphi(v)) \end{aligned}$$

Mostrare che

$$^T\varphi \circ D = B \circ T(\varphi)$$

cioè

$$\begin{tikzcd} W^* \arrow[r, "T\varphi"] & V^* \\ W \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "T\varphi"] & V \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

l'aggiunta coincide con la trasposta tramite gli isomorfismi β e δ.

(iv) Fissata una base $\mathbb{E}$ di V e $\mathbb{F}$ di W,

A = matrice di φ

B = matrice di β

D = matrice di δ

si ha $\underbrace{(T\varphi)}_{\text{matrice di } T\varphi \text{ nelle basi scelte}} = B^{-1}\, {}^tA D$

<u>def</u> Un endomorfismo $\varphi: V \to V$ si dice AUTOAGGIUNTO se $\varphi = T(\varphi)$ cioè se $\beta(\varphi(v), w) = \beta(v, \varphi(w))$. Fisso una base $\mathbb{E}$ di V, A = matrice di φ, B = matrice di β, allora φ è autoaggiunto se e solo se

$$\beta(\varphi(\mathbb{E}x), \mathbb{E}y) = \beta(\mathbb{E}x, \varphi(\mathbb{E}y))$$

$$\iff {}^t(Ax) B y = {}^tx B A y$$

$$\iff x^t({}^tAB) y = {}^tx (BA) y \quad \forall x, y$$

$$\iff {}^tAB = BA$$

$$\iff B^{-1}\, {}^tA B = A$$

In particolare, se $B = \mathbb{1}_n$ (esempio: nel prodotto scalare standard) allora ${}^tA = A$, cioè A è simmetrica.

PRODOTTI SCALARI ED HERMITIANI

Prodotto scalare

V sp. vett. su $\mathbb{R}$

$\langle , \rangle$ forma bil. simm. def. positiva

Possiamo definire una norma

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} \quad \text{che verifica}$$

(i) $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \iff v = 0$

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$

(iii) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

(iv) Cauchy-Schwarz $\langle v, w\rangle \leq \|v\| \|w\|$ (posso definire angoli...)

Uno spazio affine di uno spazio vettoriale associato sia dotato di un prodotto scalare e' detto SPAZIO EUCLIDEO.

Spazi Hermitiani

V sp. vett. su $\mathbb{C}$

def $\sigma : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice HERMITIANA se

SESQUILINEARE
(i) $\sigma(\alpha v_1 + \mu v_2, w) = \alpha \sigma(v_1, w) + \mu \sigma(v_2, w) \quad \forall \alpha, \mu \in \mathbb{C}, \forall v_1, v_2 \in V$

(ii) $\sigma(v, \alpha w_1 + \mu w_2) = \bar{\alpha} \sigma(v, w_1) + \bar{\mu} \sigma(v, w_2)$

(iii) $\sigma(v, w) = \overline{\sigma(w, v)}$

Fisso base $E = (e_1, \dots, e_n)$ di V, $A = (a_{ij}) = (\sigma(e_i, e_j))_{ij}$, allora voglio che

$$\sigma(Ex, Ey) = \overline{\sigma(Ey, Ex)}$$
$$ {}^t x A y = \overline{{}^t y A x} = {}^t \bar{y} \bar{A} \bar{x} \quad \forall x, y$$

Calcolato sulla base canonica questo vuol dire

$$A = {}^t \bar{A}$$

infatti si ha $\forall i, j$ $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$.

def se $A = {}^t \bar{A}$, allora A e' detta MATRICE HERMITIANA

oss Per (iii) so che $\sigma(v,v) \in \mathbb{R}$, $\forall v$ (perché $\sigma(v,v) = \overline{\sigma(v,v)}$).

Data σ, dico che σ è **DEFINITA POSITIVA** se $\sigma(v,v) > 0$, $\forall v \neq 0$

è **DEFINITA NEGATIVA** se $\sigma(v,v) < 0$, $\forall v \neq 0$.

TEOREMA (Sylvester). Sia (V, σ) uno spazio hermitiano (i.e. V sp vett su $\mathbb{C}$, σ è forma hermitiana). Allora $\exists\ (p,q)$ interi, $p \geq 0$, $q \geq 0$ tc ogni base ortogonale ha p vettori $v_1, \dots, v_p$ tc

$$\sigma(v_i, v_i) > 0 \quad , i = 1, \dots, p$$

e q vettori $w_1, \dots, w_q$ tc

$$\sigma(w_i, w_i) < 0, \quad i = 1, \dots, q$$

Inoltre posso completare $\{v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q\}$ ad una base di V rispetto alla quale σ abbia matrice

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & & 0 \\ & -\mathbb{1}_q & \\ 0 & & \mathbb{0}_{n-(p+q)} \end{pmatrix}$$

perché ci sono anche i valori negativi?

$$e_i \rightsquigarrow \frac{e_i}{\sqrt{h(e_i,e_i)}}$$

$$h\left(\frac{e_i}{\sqrt{h(e_i,e_i)}}, \frac{e_i}{\sqrt{h(e_i,e_i)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{h(e_i,e_i)}} \cdot \left(\overline{\frac{1}{\sqrt{h(e_i,e_i)}}}\right) h(e_i,e_i)$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{h(e_i,e_i)}}\right|^2 h(e_i,e_i)$$

$\uparrow$ $\mathbb{R}^+$ non modifica il segno di $h(e_i,e_i)$

dim Analoga al caso standard

def Si dicono **ISOMETRIE** le $\varphi: V \to V$ tc $\sigma(\varphi(v), \varphi(w)) = \sigma(v,w)$

Questo si traduce, nel caso in cui σ sia prodotto hermitiano, $\mathcal{E}$ b.o.n.

$\varphi(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \cdot A$, nell'equazione

$$^t A \bar{A} = \mathbb{1}_n$$

cioè

$$A^{-1} = {}^t\bar{A} = A^*$$

In particolare, i φ che rispettano questa condizione formano il gruppo unitario

$$U(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : {}^t\bar{A} = A^{-1}\}$$

$V =$ sp vett $/ \mathbb{C}$

$\sigma : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma(\alpha v, w) = \bar{\alpha}\, \sigma(v,w) \\ \sigma(v, \alpha w) = \alpha\, \sigma(v,w) \end{array}\right\}$$ forma sesquilineare

$\mathbb{E} = (e_1, \dots, e_n)$ base di V su $\mathbb{C}$

$$\Sigma = (\sigma_{jk} = \sigma(e_j, e_k)) \qquad \in M_n(\mathbb{C})$$

$$\sigma(\mathbb{E}x, \mathbb{E}y) = {}^t\bar{x}\, \Sigma\, y$$

è forma hermitiana $\iff \sigma(y,x) = \overline{\sigma(x,y)}$

$\iff \bar{\Sigma}^t = \Sigma^{-1} \quad \in M_n(K)$

<u>TEOREMA</u> (Sylvester). $h : V \times V$ hermitiana. $\exists\, (p,q) \in \mathbb{N}^2$ tc ogni base h-ortogonale ammette p vettori in forma positiva e q vettori in forma negativa cioè

p vettori $\quad e_{i_1}, \dots, e_{i_p} \quad$ tc $\quad h(e_{i_k}, e_{i_k}) > 0$

q vettori $\quad e_{j_1}, \dots, e_{j_q} \quad$ tc $\quad h(e_{j_k}, e_{j_k}) < 0$

Normalizzando, cioè sostituendo e_i con $\dfrac{e_i}{\sqrt{h(e_i, e_i)}}$ otteniamo la matrice

$$H = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & & \\ & -\mathbb{1}_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

<u>def</u> $\quad h : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ è prodotto hermitiano o matrice hermitiana una forma hermitiana definita positiva, cioè con segnatura $(n, 0)$ cioè tc $h(v,v) > 0 \ \forall\, v \neq 0 \in V$.

<u>def</u> $\quad$ isometrie (op. unitari) le $\varphi : V \longrightarrow V$ tc $\forall\, v, w \in V \quad h(v,w) = h(\varphi(v), \varphi(w))$

<u>oss</u> $\quad$ In particolare, se h prodotto hermitiano, allora $\exists$ b.o.n. $(\mathbb{E} = (e_1, \dots, e_n)$ tc $h(e_j, e_k) = \delta_{jk})$.

In ogni bon un operatore $\varphi : V \to V$ è unitario

$\iff \varphi(\mathbb{E}) = \mathbb{E}A \quad$ con $\quad {}^tA\bar{A} = \mathbb{1} \quad$ cioè $\quad A^{-1} = \bar{A}^t = A^*$

def (OPERATORE AGGIUNTO). $\varphi : V \to W$ $\mathbb{C}$-lineare; V, W sp. vett con prodotto hermitiano $\langle v, v' \rangle$ su V e $\langle w, w' \rangle$ su W. Allora definiamo $T(\varphi) : W \to V$ $\mathbb{C}$-lineare definita tramite

$$w \mapsto T(\varphi)(w)$$

$\langle T(\varphi)(w), v \rangle = \langle w, \varphi(v) \rangle$ (*) $\forall v \in V$.

esercizio i) (*) definisce un vettore $T(\varphi)(w) \in V$, $\forall w$

ii) $T(\varphi) : V \to W$ è un'appl. lineare

iii) attenzione (diverso dal caso reale!). L'applicazione

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V)$$
$$\varphi \longmapsto T(\varphi)$$

è $\mathbb{C}$-antilineare.

iv) Descrivere la matrice dell'aggiunta

def Un operatore $\varphi : V \to V$ $\mathbb{C}$-lineare si dice HERMITIANO se $T\varphi = \varphi$ cioè se $\langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \varphi(w) \rangle$ $\forall v, w \in V$

oss Sia $(V, \langle , \rangle)$ sp. vett. hermitiano con base ortonormale $\mathbb{E} = (e_1, \dots, e_n)$. Allora $\varphi : V \to V$ $\mathbb{C}$-lineare con matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, cioè $\varphi(\mathbb{E}) = \mathbb{E}A$, è hermitiano $\iff A = \bar{A}^t = A^*$

TEOREMA SPETTRALE

i) V sp. vett $/\mathbb{R}$ con prodotto scalare $\langle , \rangle$. Allora $\exists$ b.o.n. di autovettori per $\varphi : V \to V \iff \varphi$ è un operatore simmetrico.

ii) V sp. vett. $/\mathbb{C}$ con prodotto hermitiano $\langle , \rangle$ e $\varphi : V \to V$ operatore hermitiano, allora $\exists$ b.o.n. di autovettori con autov. reali

def Un operatore $\varphi : V \to V$ su V sp. vett. hermitiano si dice NORMALE se φ commuta con $T(\varphi)$, cioè $T(\varphi) \circ \varphi = \varphi \circ T(\varphi)$.
Una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ è NORMALE se $A\,{}^t\bar{A} = {}^t\bar{A}A$

OSS
- se V sp. vett. hermitiano, $\mathcal{E}$ base o.n., $\varphi: V \to V$ in base $\mathcal{E}$ ha matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$. Allora φ operatore normale $\iff$ A è matrice normale.
- In particolare se $A = {}^t\bar{A} = A^*$ è matrice hermitiana $\Rightarrow$ A matrice normale
- se $A \in M_n(\mathbb{C})$ è tc $A({}^t\bar{A}) = \mathbb{1} \Rightarrow {}^t\bar{A}A = \mathbb{1}_n \Rightarrow A$ normale
- se $A = -A^* \Rightarrow$ A è normale.

TEOREMA SPETTRALE

V sp. vett. hermitiano, $\varphi: V \to V$ $\mathbb{C}$-lineare. Allora $\exists$ b.o.n. di autovettori $\iff \varphi$ è normale.

OSS
- se φ unitario, cioè $\langle\varphi(v), \varphi(w)\rangle = \langle v, w\rangle$, allora tutti gli autovalori $\lambda \in \mathbb{C}$ verificano $|\lambda| = 1$:
  $\lambda \in \mathbb{C}$ autov. $\Rightarrow \exists\, v: \varphi(v) = \lambda v$
  $\langle v, v\rangle = \langle\varphi(v), \varphi(v)\rangle = \langle\lambda v, \lambda v\rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle v, v\rangle = |\lambda|\langle v, v\rangle \Rightarrow |\lambda| = 1.$
- se φ hermitiano, allora tutti gli autovettori sono reali
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & -i & 0 \\ i & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono matrici normali

OSS $\varphi: V \to V$ endomorfismo ($\mathbb{C}$-lineare), V sp. vett. hermitiano.

$\exists$ base $\mathcal{E}$ o.n. di autovettori per $\varphi \iff \varphi$ è normale

$\iff \varphi(\mathcal{E}) = \mathcal{E}A$ con $\mathcal{E}$ b.o.n., $A \in M_n(\mathbb{C})$ normale

$\iff \exists$ b.o.n. di autovett.

$\iff \exists\, P \in U_n(\mathbb{C})$ tc $P^{-1}AP = \Delta$ diagonale

$\iff \exists\, P \in U_n(\mathbb{C})$ tc ${}^t\bar{P}AP = \Delta$ diagonale

Quindi $A \in M_n(\mathbb{C})$ normale $\iff$ A unit. simile ad una matrice diagonale

$\iff$ A unit. congruente ad ad una matrice normale

Su $\mathbb{R}$ $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica $\iff$ A ortog simile ad una matrice diagonale

$\iff$ A ortog congruente ad una matrice diagonale

<u>esercizio</u> i) $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ simmetriche con A def. positiva.

$\Rightarrow \exists\, P \in GL_n(\mathbb{R})$ t.c. $P^{-1}AP$ e $P^{-1}BP$ diagonali

ii) stessa cosa con matrici hermitiane su $\mathbb{C}$.

Forme hermitiane e simplettiche

V sp. vett $/ \mathbb{C}$ $\quad \dim_{\mathbb{C}} V = n$

$h : V \times V \to \mathbb{C}$ una f. hermitiana

Scriviamo $h(v,w) = Re(h(v,w)) + Im(h(v,w))$ e chiamiamo

$$s : V \times V \to \mathbb{R} \qquad e \qquad a : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$(v,w) \mapsto Re(h(v,w)) \qquad\qquad (v,w) \mapsto Im(h(v,w))$$

<u>oss</u>

- Sono additive rispetto a v e w.
- Inoltre se $c \in \mathbb{R}$: $s(cv,w) + i\,a(cv,w) = h(cv,w)$

$$= c\,h(v,w)$$
$$= c\,s(v,w) + ic\,a(v,w)$$

$\Rightarrow s$ e a sono due forme $\mathbb{R}$-bilineari $V \times V \to \mathbb{R}$

<u>attenzione</u> $\quad \dim_{\mathbb{R}} V = 2n$

Inoltre $\quad s(w,v) = s(v,w) \quad \Rightarrow s$ simmetrica

$a(w,v) = -a(v,w) \quad \Rightarrow a$ antisimmetrica $\overset{\mathbb{R}}{\Rightarrow} a$ alternante

- $s(v,iw) + i\,a(v,iw) = h(v,iw) = -i\,h(v,w) = -i\,(s(v,w) + i\,a(v,w))$

$s(iv,w) + i\,a(iv,w) = h(iv,w) = i\,h(v,w) = i\,(s(v,w) + i\,a(v,w))$

$\Rightarrow \quad s(v,iw) = a(v,w) = -s(iv,w) \qquad (*)$

$\qquad a(iv,w) = s(v,w) = -a(v,iw) \qquad (**)$

Dunque s individua a tramite $(*)$ e a individua s tramite $(**)$

- $h(iv,iw) = h(v,w)$

$\Rightarrow \quad s(iv,iw) = s(v,w) \qquad (*)$

$\qquad a(iv,iw) = a(v,w) \qquad (**)$

<u>conclusione</u> Quindi partiamo da $h : V \times V \to \mathbb{C}$ hermitiana e otteniamo $s : V \times V \to \mathbb{R}$ simmetrica e $a : V \times V \to \mathbb{R}$ alternante che verifichino $(*)$ e $(**)$.
Viceversa, partendo da $s : V \times V \to \mathbb{R}$ simmetrica tc $(*)$ otteniamo $h(v,w) = s(v,w) + i\,s(iv,w)$ e da $a : V \times V \to \mathbb{R}$ alternante tc $(**)$ otteniamo $h(v,w) = a(v,iw) + i\,a(v,w)$.

esercizio i) h è f. hermitiana

ii) $\underbrace{\mathrm{Herm}(V)}_{\text{è sp. vett}/\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} S = \{\beta : V\times V \to \mathbb{R} \text{ simm tc } (*)\} \subset \mathrm{Bil}_{\mathbb{R}}(V\times V, \mathbb{R})$

verificare che la biezione è $\mathbb{R}$-lineare.

iii) $\mathrm{Herm}(V) \xrightarrow{\sim} A = \{\beta : V\times V \to \mathbb{R} \text{ alternanti tc } (**)\} \subset \mathrm{Bil}_{\mathbb{R}}(V\times V, \mathbb{R})$

verificare che sono due sp. vett e l'appl. è un isomorfismo ($\mathbb{R}$-lineare)

esercizio $V = \mathbb{C}^n$, base canonica $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$

$h : V\times V \longrightarrow \mathbb{C}$ f. hermitiana con matrice $H = (h_{jk}) \in M_n(\mathbb{C})$ hermit.

i) Determinare una base di V su $\mathbb{R}$. Qual è $\dim_{\mathbb{R}} V$?

ii) Sia $\mathbb{F} = (a_1\ b_1\ a_2\ b_2 \dots a_n\ b_n)$ $a_i \in \mathbb{C}^n$ con $a_j = e_j$ e $b_j = i e_j$.

Mostrare che $\mathbb{F}$ è base di $\mathbb{C}^n$ come $\mathbb{R}$-sp. vett.

iii) se $H = (h_{jk})$ $h_{jk} = \alpha_{jk} + i\beta_{jk}$ $\alpha_{jk}, \beta_{jk} \in \mathbb{R}$

H hermitiana $\Rightarrow$ $\alpha_{jk} = \alpha_{kj}$ e $\beta_{jk} = -\beta_{kj}$

Determinare una matrice di $a : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ e $s : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$

nella base $\mathbb{F}$, in funzione di α_{jk} e β_{jk}

$$\begin{array}{cc} & \qquad\qquad k \\ j \rightarrow & \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix}\beta_{11} & \alpha_{11} \\ -\alpha_{11} & \beta_{11}\end{matrix} & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & \begin{matrix}\beta_{jk} & \alpha_{jk} \\ -\alpha_{jk} & \beta_{jk}\end{matrix} & \\ \hline & & & \end{array}\right) \end{array}$$

in particolare $\beta_{jj} = 0$

iv) verificare che se h è non-degenere ($\Leftrightarrow \det(H) \neq 0$) allora a è

non degenere su V (a è f. simplettica)

v) se h è prodotto hermitiano standard ($H = \mathbb{1}_n$) qual è una base

simplettica per V?

vi) In generale come trovare una base simplettica per V?

vii) $h : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ con $H = (h_{jk})$ hermit.

$z = (t_1 \cdots t_n) \in \mathbb{C}^n$ $\quad z' = (t_1' \cdots t_n') \in \mathbb{C}^n$

scrivere $a(z,z') = \mathrm{Im}(h(z,z')) = -\frac{i}{2}\left(h(z,z') - \overline{h(z,z')}\right)$

$= -\frac{i}{2}\left(h(z,z') - h(z',z)\right)$

verificare $a(z,z') = \overline{a(z,z')} \in \mathbb{R}$

<u>esercizio</u> $V = \mathbb{C}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

$\dim_{\mathbb{C}} V = 2$ e $\dim_{\mathbb{R}} V = 4$.

Consideriamo $H = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ $\quad {}^tH = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ $\quad {}^t\overline{H} = H$

matrice hermitiana $\in M_2(\mathbb{C})$

$h : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ forma hermitiana con matrice H in base canonica

$$\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} \right) \longmapsto (\bar z_1 \ \bar z_2) \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = (\bar z_1 - i\bar z_2 \quad i\bar z_1 + \bar z_2) \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix}$$

$$= \bar z_1 z_1' - i\bar z_2 z_1' + i\bar z_1 z_1' + \bar z_2 z_2'$$

$z_1 = a_1 + ib_1$
$z_2 = a_2 + ib_2$
$z_1' = a_1' + ib_1'$
$z_2' = a_2' + ib_2'$

$= \dots$

$$s\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} \right)$$
$$\shortparallel$$
$$\mathrm{Re}\left(h\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} \right) \right) = a_1 a_1' + b_1 b_1' - a_1 b_2' + a_2 b_1' - b_2 a_1' + a_2 a_2' + b_2 b_2'$$

$$\mathrm{Im}\left(h\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} \right) \right) = a_1 b_1' - b_1 a_1' + a_1 a_2' + b_1 b_2' - a_2 a_1' - b_2 b_1' + a_2 b_2' - b_2 a_2'$$
$$\shortparallel$$
$$a\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} \right)$$
$$\shortparallel$$

$$a\left(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1' + ib_1' \\ a_2' + ib_2' \end{pmatrix} \right) = (a_1 \ b_1 \ a_2 \ b_2) \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{Im}(h_{11}) & \mathrm{Re}(h_{11}) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \end{array} \begin{pmatrix} a_1' \\ b_1' \\ a_2' \\ b_2' \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 0i & 0 + i \\ 0 - i & 1 + 0i \end{pmatrix}$$