

RIPASSO

$$\dot{z} = X(z, t) \quad (*)$$

campo vettoriale $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$z \mapsto X(z)$$



C^∞

def "soluzione" di (*) o "una integrale di X" è funzione (curva) $\gamma: I \rightarrow \Omega$ tale che $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ $\forall t \in I$ ($\gamma' = X \circ \gamma$ in I).

intervallo aperto
 $\subseteq \mathbb{R}$

I è detto "intervallo di esistenza della soluzione"

Dato iniziale z_0 , risolte iniziale $t_0 \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \exists!$ soluzione $\gamma: I \rightarrow \Omega$ tc $\gamma(t_0) = z_0$, $t_0 \in I$

Ripasso di analisi 2:

teorema ($\exists!$) X diff

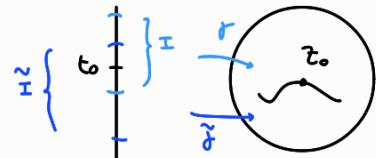
$$1. \forall t_0 \in \Omega, t_0 \in \mathbb{R} \exists$$

• I intervallo $t_0 \in I$

• soluzione di X , $\gamma: I \rightarrow \Omega$ tc $\gamma(t_0) = z_0$

$$2. \text{ se } \gamma: I \rightarrow \Omega, \tilde{\gamma}: \tilde{I} \rightarrow \Omega \text{ sono soluzioni con } \gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0)$$

allora $\gamma = \tilde{\gamma}$ in $I \cap \tilde{I}$



prop Dati $t_0 \in \mathbb{R}, z_0 \in \Omega$ esiste intervallo aperto I_{z_0, t_0} tc

• \exists soluzione $\gamma_{z_0, t_0}: I_{z_0, t_0} \rightarrow \Omega$ tc $\gamma_{z_0, t_0}(t_0) = z_0$

• se $\gamma: I \rightarrow \Omega$ soluzione tc $\gamma(t_0) = z_0$, allora $I \subseteq I_{z_0, t_0}$

I_{z_0, t_0} è intervallo di esistenza massimale e γ_{z_0, t_0} è la soluzione massimale

esempio • $\dot{z} = kz$, $t \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{R}$ costante)

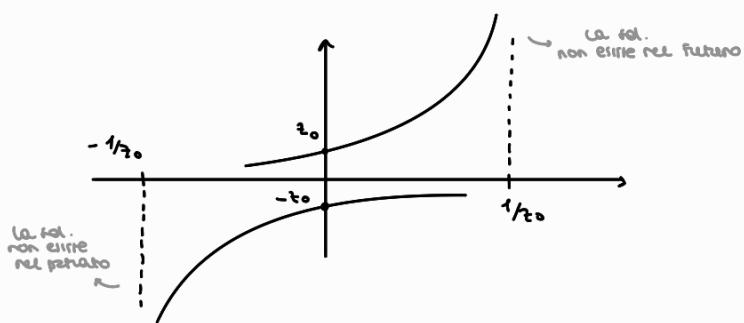
$$\gamma_{z_0, t_0}(t) = e^{kt} z_0$$

$$\gamma_{z_0, t_0}(t) = e^{k(t-t_0)} z_0 \quad I_{z_0, t_0} = \mathbb{R}$$

• $\dot{z} = z^2$, $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{dz}{dt} = z^2 \quad \frac{dt}{z^2} = dt \quad \int_{z_0}^z \frac{dz}{z^2} = \int_{z_0}^z dt \quad -\frac{1}{z} \Big|_{z_0}^z = t \quad -\frac{1}{z(t)} + \frac{1}{z_0} = t$$

$$z(t) = \frac{z_0}{1-tz_0}$$



def x è "completo" se tutte le soluzioni massimali hanno intervallo di esistenza massimale $\equiv \mathbb{R}$ (\Rightarrow esistono nel futuro e nel passato)

- esempio
- tutte le eq. lineari (in \mathbb{R}^n) sono campi vett. completi ($\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$)
 - $\mathcal{L} = \mathbb{R}^n$, x è Lip.
 - campi vettoriali a supporto compatto (diversi da 0 fu uncompatto).

1. Traslatabilità temporale (delle soluzioni)

$$\forall z_0, t_0 \quad \begin{cases} I_{z_0, t_0} = I_{z_0, 0} + t_0 \\ f_{z_0, t_0}(t + t_0) = f_{z_0, 0}(t) \end{cases}$$



(perché la legge del moto non dipende dal tempo!)

Dunque possiamo limitarci a studiare le curve all'istante iniziale $t_0 = 0$ (nello stesso si ottiene come traslazione).

$$I_{z_0} := I_{z_0, 0} = (T_{z_0}^-, T_{z_0}^+) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

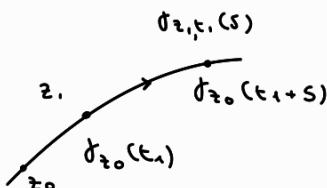
$$f_{z_0} := f_{z_0, 0}$$

si dimostra con l'unicità delle soluzioni dell'PC

2. Proprietà di gruppo

$$f_{z_0, 0} = f_{z_0}$$

$$\text{se } z_1 = f_{z_0, 0}(t_1), \text{ allora } f_{z_1, t_1}(s) = f_{z_0, 0}(t_1 + s) \quad \forall t_1, s$$

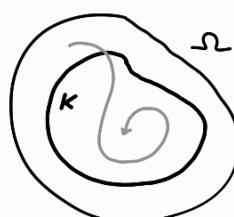


3. Fuga/intraprezzo nel compatto

$$f_z(t) \in K \quad \forall t \geq T \Rightarrow T_z^+ = +\infty$$

$$\forall t \leq T \Rightarrow T_z^- = -\infty$$

K compatto $\subset \mathcal{L}$



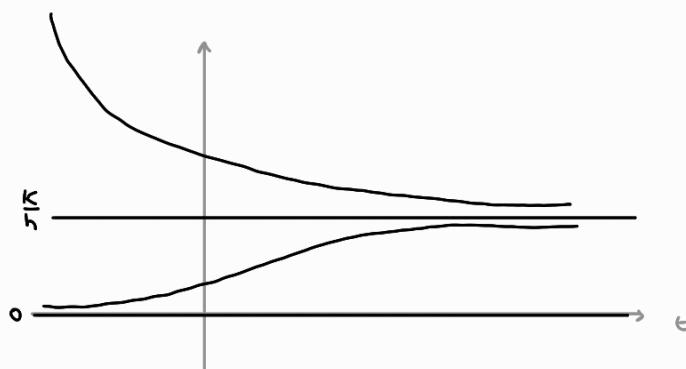
L'unica possibilità per una soluzione di non esistere per tutti i tempi c'è quella di uscire da tutti i compatti e tendere alla frontiera di \mathcal{L} .

Un approccio basato sulla ricerca delle singole soluzioni non è ciò che cerchiamo:

esempio (equazione logistica)

$$z \in \mathbb{R}_{>0} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} &\leftarrow \dot{z} = kz \quad \exists k > 0 \quad (\text{modello esponenziale}) \\ &\text{La crescita} \\ &\text{degli individui} \\ &\text{è proporzionale al} \\ &\text{loro numero} \\ &\Rightarrow z(t) = e^{kt} z(0) \\ &\boxed{\dot{z} = kz - hz^2, h > 0} \\ &\text{bisogna correggere} \\ &\text{per gli "effetti logistici"} \\ &\text{è rilevante per valori di } z \text{ (collera popolazione)} \\ &\text{piccoli ed invece è grande per valori di } z \text{ grandi} \\ &\Rightarrow z(t) = \frac{kz_0}{hz_0 + (k-hz_0)e^{-kt}} \quad (t_0 > 0) \end{aligned}$$



Le soluzioni:

- $z(t) = 0$
 - $z(t) = \bar{z} = \frac{K}{h}$
 - tutte le altre $\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \bar{z}$ in modo monotono (senza oscillazioni)
- \Rightarrow l'andamento tende a stabilizzarsi

domanda Questo risultato dipende dai dettagli dell'eq. scelta?
Ovvero dalla scelta del termine correttivo " $-hz^2$ "?

Cambiando l'approccio: vogliamo capire proprietà importanti di tutte le soluzioni senza determinarle

ANALISI NELLO SPAZIO DELLE FASI

$\text{Th } \exists e! \Rightarrow (t, z_0) \mapsto f_{z_0}(t) \in \Omega$

$$\begin{array}{c} \Omega \\ \subseteq \mathbb{R} \times \Omega \\ = \text{se il campo vett. è completo} \end{array}$$



se X è completo, allora definiamo un "flusso" $\Phi^t : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$

$$(t, z_0) \mapsto \Phi^t(t, z_0) = f_{z_0}(t)$$

Invece di occuparci delle soluzioni, ci occupiamo delle "orbite".

$$O_{z_0} := \{ f_{z_0}(t) : t \in \mathbb{R} \} \text{ orientate con } t.$$

l'insieme delle orbite è detto "ritratto in fase".

prop Ogni punto di Ω appartiene ed è univocamente un'orbita.

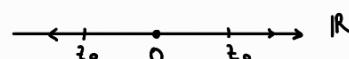
oss L'orbita di una soluzione costante è un punto.

esempi 1) $\dot{z} = kz$, $t \in \mathbb{R}$

$$z(t) = e^{kt} z_0$$

$$k > 0$$

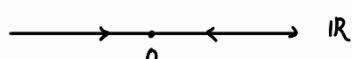
$$O_0 = \{0\}$$



$$O_{z_0} = \mathbb{R} \quad \text{se } z_0 > 0$$

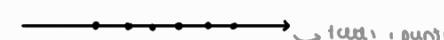
$$O_{z_0} = \mathbb{R} \quad \text{se } z_0 < 0$$

$$k < 0$$

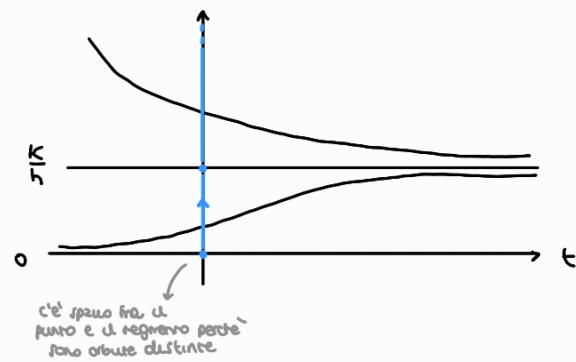
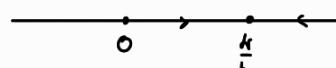


le orbite con verso di percorrenza opposto a quello precedente

$$k = 0$$



$$2) \dot{z} = kz - hz^2 \quad k, h > 0$$

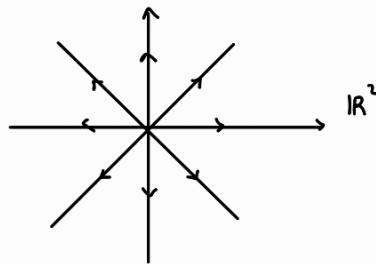


$$3) \Omega = \mathbb{R}^2 \ni (z_1, z_2)$$

$$\dot{z} = z, z \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1 \\ \dot{z}_2 = z_2 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1(t) = e^t z_1(0) \\ z_2(t) = e^t z_2(0) \end{cases}$$

$$t \mapsto e^t z(0)$$

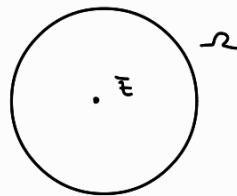


esercizio

scrivere il ritratto infare di $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = x$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (risolvendo l'equazione)

Equilibri

def "soluzione di equilibrio" = soluzione costante
 $t \mapsto r_{\bar{z}}(t) = \bar{z} \quad \forall t$, \bar{z} "punto di equilibrio"



prop \bar{z} è p.t.o di equilibrio di $\dot{z} = X(z) \Leftrightarrow X(\bar{z}) = 0$

dum 1) \bar{z} equilibrio $\Rightarrow t \mapsto \delta(t) = \bar{z}$ è soluzione

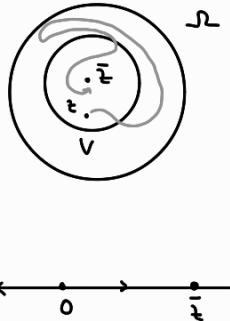
$$X(\bar{z}) = X(\delta(t)) = \delta'(t) = 0 \quad \forall t$$

$$2) X(\bar{z}) = 0 \Rightarrow r_{\bar{z}}(t) = \bar{z} \quad \forall t$$

Serve l'unicità delle soluzioni: considero la curva $t \mapsto \delta(t) = \bar{z}$ e vedo se è soluzione

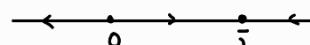
$$\begin{cases} \delta(0) = \bar{z} \\ \delta'(t) = 0 = X(\bar{z}) = X(\delta(t)) \quad \forall t \end{cases}$$

! $\Rightarrow r_{\bar{z}}(t) = \bar{z} \quad \forall t$



def \bar{z} p.t.o di equilibrio è

• "attrattivo" se \exists intorno V di \bar{z} tc $\forall z \in V$ $\lim_{t \rightarrow T_z^+} r_z(t) = \bar{z}$



• "repulsivo" se \exists intorno V di \bar{z} tc $\forall z \in V$ $\lim_{t \rightarrow T_z^-} r_z(t) = \bar{z}$

(esistono punti che sono sia attrattivi che repulsivi e altri che non sono né una né l'altra cosa)

lemme Suppongo $\exists \lim_{t \rightarrow T_z^+} r_z(t) = \bar{z}$, allora $X(\bar{z}) = 0$ e $T_z^+ = +\infty$

dum • $T_z^+ = +\infty$ per la compattezza

• PA $X(\bar{z}) \neq 0 \Rightarrow \exists j \in \mathbb{N} \quad X_j(\bar{z}) \neq 0$
 $\quad \quad \quad (X_1(\bar{z}), \dots, X_n(\bar{z}))$

$\Rightarrow \exists K > 0$ e V intorno limitato di \bar{z} tale che $|X_j(s)| > K \quad \forall s \in V$

So che $\delta_z(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \bar{z}$ $\exists T > 0$ tc $r_z(t) \in V \quad \forall t > T$

$$|\delta_j(t) - \delta_j(T)| = \left| \int_t^T \delta_j'(s) ds \right| = \left| \int_t^T X_j(\delta(s)) ds \right|$$

$$\underbrace{\qquad}_{>0}$$

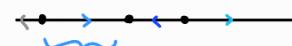
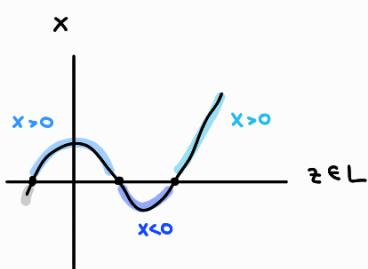
$$= \int_t^T |X_j(\delta(s))| ds > K(t-T) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

perciò $\delta(t) \in V$ unidato.

Ritratto in fase per $n=1$

$$\dot{z} = X(z), \quad z \in L = (z_-, z_+)$$

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$



$t \mapsto t(z)$ monotona crescente

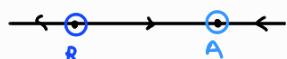
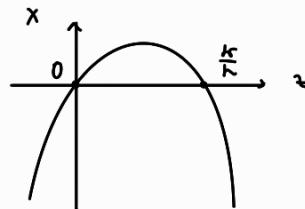
$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \pm\infty} z(t) = \bar{z}_{\pm} \Rightarrow X(\bar{z}_{\pm}) = 0$$

dunque a dx rende un'equilibrio e anche a sx

esempio

(eq. logistica)

$$\dot{z} = \underbrace{kz - hz^2}_{X(z)}, \quad z \in \mathbb{R} \quad (k, h > 0)$$

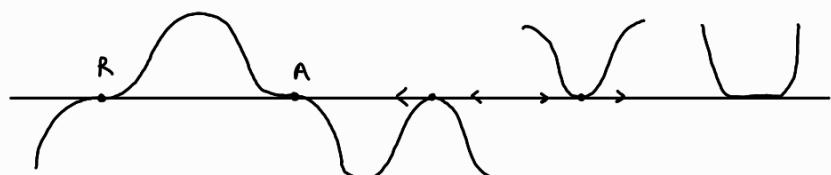


Cerchiamo criteri per equilibri attrattivi / repulsivi nel caso $n=1$.

prop $n=1$, \bar{z} equilibrio di $\dot{z} = X(z)$

- $X'(\bar{z}) > 0 \Rightarrow \bar{z}$ è repulsivo
 X crescente in \bar{z}
- $X'(\bar{z}) < 0 \Rightarrow \bar{z}$ è attrattivo
 X decrescente in \bar{z}

oss $X'(\bar{z}) = 0$ non dà nulla

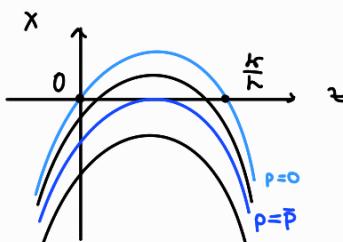


esempio

Introduciamo nello scenario dell'eq. logistica lo ristagnoamento

dei due neri naturali, che supponiamo costante :

$$\dot{z} = kz - hz^2 - p = X_p(z), \quad p > 0$$

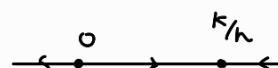


$$p=0$$

$$0 < p < \bar{p}$$

$$p = \bar{p}$$

$$p > \bar{p}$$



qui quadraticamente la dinamica rivira la retta

BIFORCAZIONE

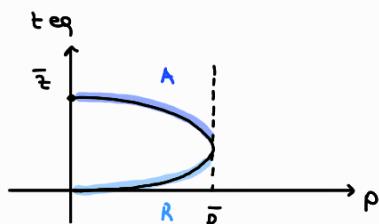


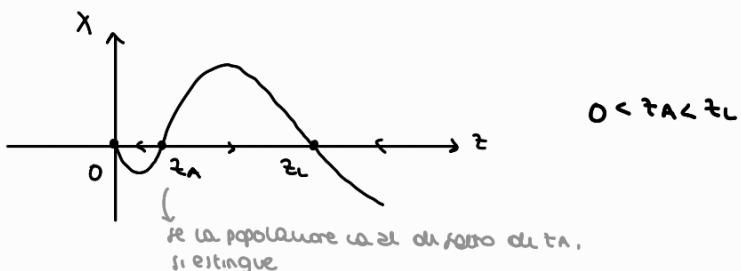
diagramma di biforcazione degli equilibri

Esempio

(effetto Allee)

$$\dot{x}(z) = \dot{z} = kz - hz^2 = kz(1 - \frac{h}{k}z) = kz(1 - \frac{z}{z_L})$$

Velocità di riproduzione =: x



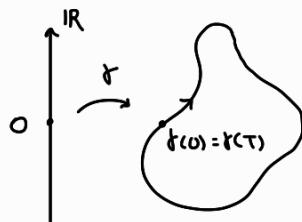
$$\text{Un modello di questo tipo è: } \dot{z} = kz \left(\underbrace{\frac{z}{z_A} - 1}_{\text{rende negativo}} \right) \left(1 - \frac{z}{z_L} \right) \quad \text{il polinomio quando } z < z_A$$

Orbite periodiche

$$\dot{t} = X(t), \quad t \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

$t \mapsto f(t)$ è periodica se $\exists T > 0$ tc $f(t+T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Prop orbita chiusa \Leftrightarrow tot. periodica



Eq. del secondo ordine

$$(II) \quad \ddot{x} = \Psi(x, \dot{x}), \quad x \in C \subseteq \mathbb{R}^m \text{ aperto}, \quad m > 1, \quad \Psi : C \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

def "fattore" di II è curva differenziabile $t \mapsto x(t)$ tc

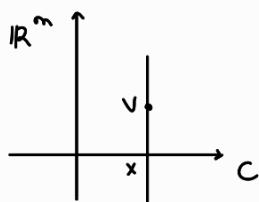
$$x''(t) = \Psi(x(t), x'(t)) \quad \forall t$$

Vogliamo ricondurre ad un sistema di eq. del primo ordine:

$$(I) \quad \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \Psi(x, v) \end{cases} \quad (x, v) \in C \times \mathbb{R}^m$$

$$\dot{z} = c(x, v) \in C \times \mathbb{R}^m = \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2m}$$

$$\dot{z} = X(z) \Rightarrow x(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ \Psi(x, v) \end{pmatrix}$$



prop I è equiv. a II

dum (\Rightarrow) $t \mapsto (x(t), v(t))$ è sol. di I, allora

$$\cdot \quad v(t) = \dot{x}(t) \quad \forall t$$

$\cdot \quad t \mapsto x(t)$ è sol. di II

infatti:
$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = \varphi(x(t), v(t)) \end{cases}$$

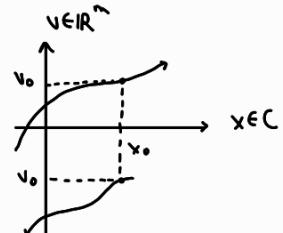
$$\Rightarrow x''(t) = \varphi(x(t), x'(t))$$

$\Rightarrow x$ è sol. di II.

def c'è detto "spazio delle configurazioni (o posizioni)"

$C \times \mathbb{R}^m$ è detto "spazio delle fasi (o degli st. di moto)"

Dato un problema del secondo ordine non bisogna di un dato iniziale delle forme (x_0, v_0) .



oss $\dot{z} = X(z) \quad , \quad z = (x, v) \in C \times \mathbb{R}^m$

$$X(x, v) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(x, v) \\ \varphi(x, v) \end{pmatrix} =$$

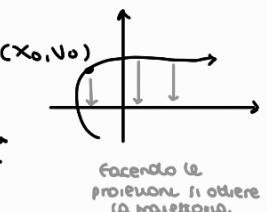
Nelle ep. di secondo ordine si ha $\dot{z} = \begin{pmatrix} v \\ \varphi(x, v) \end{pmatrix}$: è una condizione speciale

Un campo vettoriale di questo tipo è detto "campo vett. del secondo ordine".

Nello spazio di fase l'immagine di $t \mapsto (x(t), v(t))$ è detta "orbita"

Nello spazio delle configurazioni l'immagine di $t \mapsto x(t)$ è detta "traiettoria"

Sono due oggetti diversi: le orbite non si intersecano, le traiettorie invece possono.



"equilibrio del II ordine" \equiv "equilibrio del sistema del I ordine"

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \varphi(x, v) \end{cases}$$

i punti di equilibrio sono tutti a velocità nulla

$$(x, v) \in C \times \mathbb{R}^m \quad \text{tc} \quad \begin{cases} \dot{v} = 0 \\ \varphi(x, 0) = 0 \end{cases}, \quad \bar{x} \text{ è detta "configurazione di equilibrio"}$$

ESEMPIO (oscillatore armonico)

$$m\ddot{x} = -kx, \quad x \in \mathbb{R} = C$$



$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

$$\omega^2 := \frac{k}{m} \quad (\omega = \sqrt{\frac{k}{m}})$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\omega > 0)$$

è un'eq. lineare, dunque cerco soluzione del tipo $x(t) = e^{rt}$

$$r^2 e^{2rt} = -\omega^2 e^{2rt} \Rightarrow r_{\pm} = \pm i\omega$$

L'integrale generale è dato da una comb. lin. di $e^{i\omega t}$ e $e^{-i\omega t}$, dunque:

$$x(t; A, B) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

vogliamo vedere la soluzione nello spazio delle fasi, dunque abbiamo bisogno della velocità

$$\begin{cases} x(t; A, B) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \\ v(t; A, B) = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t) \end{cases}$$

le CI sono: $x(0; A, B) = A = x_0$

$$v(0; A, B) = \dot{w}B = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega}$$

$$(t, (x_0, v_0)) \mapsto \begin{cases} x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \\ v(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t) + v_0 \cos(\omega t) \end{cases}$$

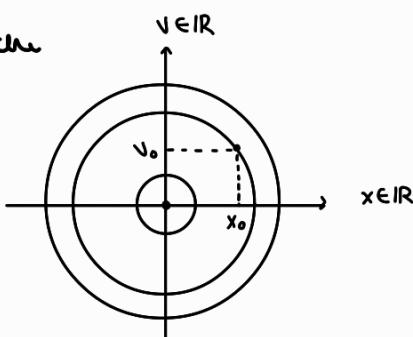
è esattamente u funzio $t \mapsto \Gamma_{(x_0, v_0)}(t)$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \\ -\omega \sin \omega t & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega x \end{cases} \Rightarrow \text{l'unico equilibrio è l'origine}$$

$\omega = 1$ ottengo una matri de rotazione

\Rightarrow le orbite sono cerchi

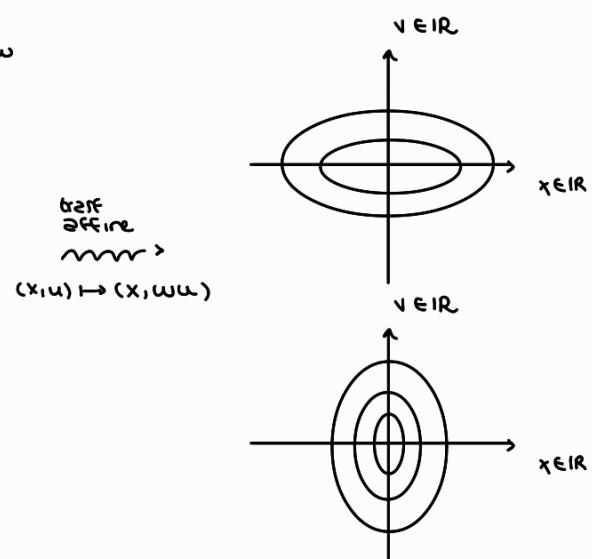
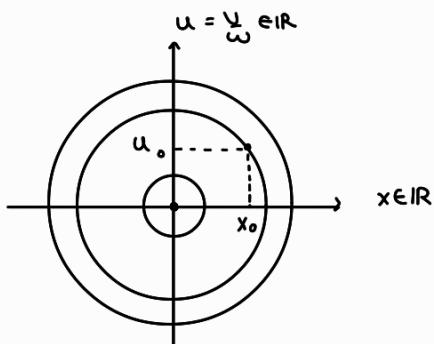


$\omega \neq 1$

le orbite sono elipse, infatti considero:

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \\ -\omega \sin \omega t & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \end{pmatrix}$$



Riflusso

$$\ddot{x} = \Psi(x, \dot{x}) \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \Psi(x, v) \end{cases} \quad (x, v) \in C \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^{2m}$$

$x \in C \subseteq \mathbb{R}^m$

oscillatore armonico: $\ddot{x} = -\omega^2 x, x \in \mathbb{R}, \omega > 0$

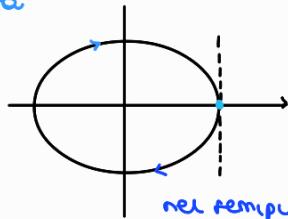
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{\sin \omega t}{\omega} \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

nel semipiano superiore
il verso di percorrenza è
verso destra

Oss

$$t \mapsto (x(t), v(t))$$

$\stackrel{\text{def}}{=} x'(t)$



quando si incontra l'asse
delle x l'unica possibilità è
che lo si incontri in verticale

nel semipiano inferiore
ci si muove verso sinistra

\Rightarrow il verso di percorrenza è orario

Esempio

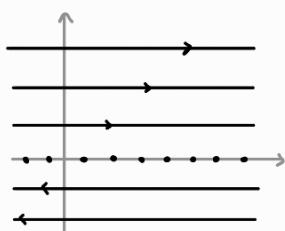
$$\ddot{x} = 0, x \in \mathbb{R}$$



$$\rightsquigarrow \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t$$

$$v(t) = v_0$$



LINEARIZZAZIONE AGLI EQUILIBRI

Linearizzazione ad un equilibrio

$$\dot{z} = X(z), \quad z \in \mathbb{R}$$

0
||

$$X(\bar{z}) = 0, \quad z \text{ vicino a } \bar{z}: \quad X(z) = X(\bar{z}) + X'(\bar{z})(z - \bar{z}) + O(\|z - \bar{z}\|^2)$$

$\approx f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$

"0-grande" di $\|z - \bar{z}\|^2$
oppure "0-piccolo" di $\|z - \bar{z}\|$

Forse l'equazione dell'eq. vicino a \bar{z} sono della forma $\dot{z} = X'(z)(z - \bar{z})$

notazioni $X' = JX :=$ matrice Jacobiana

$$X'_{ij}(z) = \frac{\partial X_i}{\partial z_j}(z), \quad x'_i = Jx_i = dx_i = [dx_i]^t$$

$$X' = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \frac{\partial x_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial z_1} & \dots & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \left[\frac{\partial x}{\partial z_1} \dots \frac{\partial x}{\partial z_n} \right]$$

$$u = z - \bar{z} \in \mathbb{R}^n$$

$$r(t) = \bar{z} + (z(t) - \bar{z}) = \bar{z} + u(t)$$

$$\dot{u} = X'(\bar{z})u, \quad u \in \mathbb{R}^n$$

$$\dot{r}'(t) = u'(t) = X(\dot{z}(t)) = X'(\bar{z})(z(t) - \bar{z}) + \dots$$

$$\dot{u} = Au, \quad u \in \mathbb{R}^n$$

=> le eq. linear. sono importanti perché emergono per linearizzazione

esempio $n=1$

$$\dot{z} = X(z), \quad z \in \mathbb{R}$$

$$X(\bar{z}) = 0$$

$$\xleftarrow{\hspace{-1cm}} \bullet \xrightarrow{\hspace{-1cm}} \quad k > 0$$

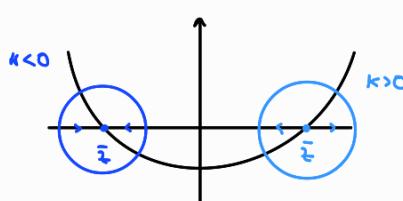
$$\dot{u} = \underbrace{X'(\bar{z})}_{K \in \mathbb{R}} u = Ku, \quad u \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \bullet \bullet \quad k=0$$

$$\xrightarrow{\hspace{-1cm}} \bullet \xleftarrow{\hspace{-1cm}} \quad k < 0$$

=> questa eq. è importante perché emerge come linearizzazione di ogni

eq. diff del primo ordine



se $K \geq 0$, allora la linearizzazione descrive bene l'andamento localmente.

se $K=0$, tuttavia, questo non accade: non si può sperare che la derivata approssimi la funzione

l'andamento della funzione è determinato dalle derivate seconde della funzione, che tuttavia non vengono prese in considerazione nella linearizzazione

ESEMPIO

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} \dot{x} = x^2 - xy \\ \dot{y} = y + xy \end{cases}$$

Cerco gli equilibri: $\begin{cases} x^2(1-y) = 0 & \text{I} \\ y(1+x) = 0 & \text{II} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} x=0 & y=0 \Rightarrow (0,0) \\ y=1 & x=-1 \Rightarrow (-1,1) \end{array}$

Linearizziamo l'eq. $x'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x(1-y) & -x^2 \\ y & 1+x \end{pmatrix}$

$$x'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

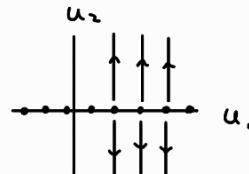
$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$(0,0) \stackrel{\textcircled{1}}{\Rightarrow} \begin{cases} \dot{u}_1 = 0 \\ \dot{u}_2 = u_2 \end{cases}$$

$$x'(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(-1,1) \stackrel{\textcircled{2}}{\Rightarrow} \begin{cases} \dot{u}_1 = -u_2 \\ \dot{u}_2 = u_1 \end{cases}$$

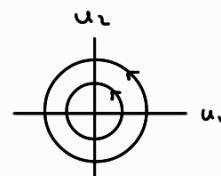
① equilibri: i punti dell'asse u_1



soltuone: $\begin{cases} u_1(t) = u_1(0) \\ u_2(t) = e^t u_2(0) \end{cases}$

② è un oscillatore armonico!
con verso di percorrenza opposto

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -u_2 \\ \ddot{u}_1 = -\dot{u}_2 = u_1 \end{cases}$$



Linearizzazione di equazioni del II ordine

$$\ddot{x} = \psi(x, \dot{x})$$

$$(I) \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \psi(x, v) \end{cases}$$

$$\psi(x, v) = \psi(\bar{x}, 0) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(\bar{x}, 0) \frac{x-\bar{x}}{v} + O(||v||^2 + ||x-\bar{x}||^2)$$

$$\psi(\bar{x}, 0) = 0$$

↓ linearizzazione del sistema
di primo ordine equivalente

linearizz. attorno a $(\bar{x}, 0)$: (*) $\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \psi(\bar{x}, 0) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(\bar{x}, 0)(x-\bar{x}) + \frac{\partial \psi}{\partial v}(\bar{x}, 0)v + O(||v||^2 + ||x-\bar{x}||^2) \end{cases}$

$$x'(\bar{x})(\bar{x}-\bar{x}): \quad x = \begin{pmatrix} v \\ \psi(x, v) \end{pmatrix}, \quad Jx = \begin{pmatrix} 0_m & 1L_m \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix}$$

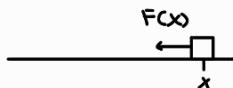
$$Jx \begin{pmatrix} x-\bar{x} \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(\dots)(x-\bar{x}) + \frac{\partial \psi}{\partial v}(\dots)v \end{pmatrix}$$

linearizzazione tramite sviluppo di Taylor della funzione $(x, v) \mapsto \psi(x, v)$
centrata in $(\bar{x}, 0)$

La lin. è il sistema del primo ordine (*), cioè l'eq. del secondo ordine:

$$\ddot{x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}(\bar{x}, 0)(x-\bar{x}) + \frac{\partial \psi}{\partial v}(\bar{x}, 0)v$$

Esempio $m\ddot{x} = F(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$



$$\ddot{x} = \Psi(x) \quad , \quad \Psi = \frac{F}{m}$$

Considero un equilibrio $(\bar{x}, 0)$ tc $\Psi(\bar{x}) = 0$ e linearizzo

$$\ddot{x} = F'(\bar{x})(x - \bar{x}) = k(x - \bar{x}) \Rightarrow \ddot{u} = ku \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad , \quad k \text{ cost}$$

$$1) \quad \omega^2 := k > 0$$

$$\ddot{u} = \omega^2 u$$

repulsore armonico
(o iperbolico)

→ un sistema meccanico di questo tipo "tola quando si hanno forte centri pote"

$$2) \quad -\omega^2 := k < 0$$

$$\ddot{u} = -\omega^2 u$$

oscillatore armonico (O.A.)

$$3) \quad k = 0$$

$$\ddot{u} = 0$$

particella libera

Ritengo natale delle R.A.

$$\ddot{x} = \omega^2 x \quad , \quad x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \omega^2 x \end{cases} \quad , \quad (x_0, v_0)$$

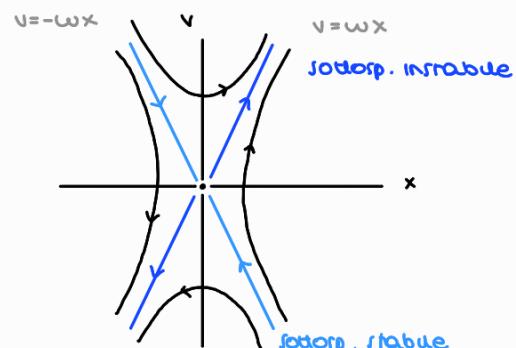
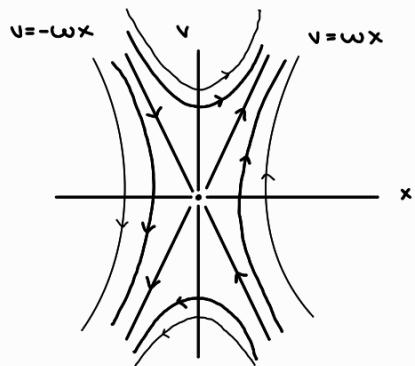
$$x(t) = e^{\pm i\omega t}$$

$$\lambda^2 e^{\pm i\omega t} = \omega^2 e^{\pm i\omega t} \Rightarrow \lambda = \pm \omega$$

$$\text{sol: } \begin{cases} x(t) = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t} \\ v(t) = \omega A e^{i\omega t} - \omega B e^{-i\omega t} \end{cases}$$

$$\text{CI: } \begin{cases} x(0) = A + B = x_0 \\ v(0) = \omega(A - B) = v_0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{v_0}{\omega}) \\ B = \frac{1}{2}(x_0 - \frac{v_0}{\omega}) \end{cases}$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_0 + \frac{v_0}{\omega}) e^{i\omega t} + \frac{1}{2}(x_0 - \frac{v_0}{\omega}) e^{-i\omega t} \\ \frac{\omega}{2}(x_0 + \frac{v_0}{\omega}) e^{i\omega t} - \frac{\omega}{2}(x_0 - \frac{v_0}{\omega}) e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$



Campo di rette $v = \omega x$ si ha $v(t) = \omega x(t) \quad \forall t$, dunque se partiamo da questa retta rimaniamo in questa retta.

Analogo direttivo per $v = -\omega x$. Le quantità rimanete sono dette "separatrici".

Spazio tangente e fibrato tangente

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ → lo vedo come spazio affine

$\dot{z} = X(z)$, $z \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

$r : I \rightarrow \Omega$

$$\dot{r}'(t) = X(r(t))$$

vogliamo capire cosa sia $\dot{r}'(t)$. Suppongo di avere una curva che passa per z_0 e considero che

$$\dot{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h} \in \mathbb{R}_v^n$$

⇒ posso vedere \mathbb{R}_v^n come spazio delle derivate delle curve. Cambiamo termini:

def $T_z \Omega = \{ \dot{r}'(0) : r \text{ è curva per } z \text{ è "sp. tangente a } \Omega \text{ in } z\}$
 $(\dot{r}'(0), \dots, \dot{r}'(0))$

$\dot{r}'(0) \in T_z \Omega$ è "vettore tangente a Ω in z "

oss $T_z \Omega \equiv \mathbb{R}_v^n$

$$\stackrel{\psi}{\longrightarrow} r(t) = z + tv \quad \text{con } \dot{r}'(0) = v$$

dunque ogni vettore di \mathbb{R}_v^n può essere visto come derivata di una curva per t

viceversa, $(\dot{r}'(0), \dots, \dot{r}'(0)) \in T_z \Omega$ sono delle n -uple reali

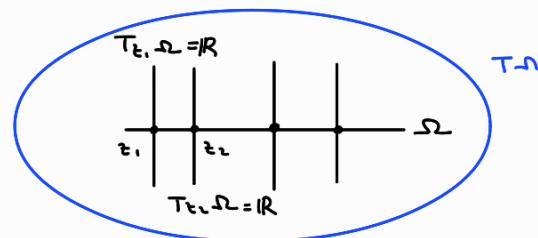
⇒ $T_z \Omega$ è sp. vettoriale

↪ ovviamente, non c'è corrispondenza biunivoca, perché varie curve danno lo stesso vettore tangente

$\dot{r}'(t) \in T_{r(t)} \Omega$ e $\dot{r}'(t) = X(\dot{r}(t))$, dunque $\forall z \in \Omega \Rightarrow X(z) \in T_z \Omega$

def $T \Omega := \{ (z, v) : z \in \Omega, v \in T_z \Omega \} \underset{\Omega}{\cong} \Omega \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$, detto "fibrato tangente"

esempi (a) $n=1$



(non è possibile vederlo in dimensione più grande)

pagina 25-26:

(b) eq. del secondo ordine:

$$C \subset \mathbb{R}^n \ni x$$

$$C \times \mathbb{R}^n \ni (x, v)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \ddot{x} = \varphi(x, v) \end{cases}$$

$$t \mapsto (x(t), v(t)) = (x(t), \dot{x}(t))$$

soluzione dell'eq. del secondo ordine

$$\Rightarrow \Omega = C \times \mathbb{R}^n = TC$$

perché dato $(x, v) \in C \times \mathbb{R}^n$ si ha che la seconda metà delle componenti uguaglia la derivata della prima metà

Rivediamo cos'è un campo vettoriale su Ω

$$x: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$z \longmapsto X(z) \in T_z \Omega$$

mappa più
precisa
cambia al
varare del z

$$\stackrel{\uparrow}{X}: \Omega \longrightarrow T\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$$

$$z \longmapsto X(z) = (\underbrace{z}_{\text{punto}}, \underbrace{X(z)}_{\text{vettore}})$$

Riflettiamo

- derivate di curve sono vettori tangent (e viceversa)
- in ogni punto di $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ c'è uno sp.vett. tangente
- mettendo insieme tutti quei sp.vett. tangent formano il fibrato tangente
- lo spazio degli zeri di moto è un fibrato tangente

↳ a dà un modo duoro
di distinguere posizion e velocità

pagina 31:

Un ulteriore riguardo alla linearizzazione:

$$\dot{t} = X(t), t \in \Omega$$

$$x(\bar{t}) = 0$$

$$x(t) = x(\bar{t}) + x'(\bar{t})(t - \bar{t}) + \dots$$

"

$$\dot{x} = x'(\bar{t})(t - \bar{t}) \Rightarrow \dot{u} = x'(\bar{t})u$$

" " " " " " "
 $u \in T_{\bar{t}} \Omega$
perché differenzia
di punti in Ω

Dunque la linearizzazione "vive" in $T\bar{t}\Omega$

I vantaggi di parlare di spazio e fibrato tangente sono:

- sono definizioni generalizzabili (alle foliazioni e alle varietà arredate)
- questo punto di vista permette di tenere conto del punto in cui è applicato lo sp.vett. tangente

(continuazione pagina 6)

$$\dot{t}(t) = \bar{t} + u(t)$$

\bar{t}

soluzione vicina a \bar{t}
è approssimata bene da
 $u(t)$, soluzione di $\dot{u} = x'(\bar{t})u$

TEORIA QUALITATIVA DELLE EQ. LINEARI

Esponenziale di matrice

$\dot{z} = Az$, $z \in \mathbb{R}^n$, A matrice

Esempio $\ddot{x} = -\omega^2 x$, $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 v \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

"
A

$B \in M(n, \mathbb{R}) = L(n, \mathbb{R}) = L(n)$ sp. vett. di dim n^2 su \mathbb{R}
 $\in M(n, \mathbb{C})$

"norma operatoriale": $\|B\|_{op} := \sup_{z \neq 0} \frac{\|Bz\|}{\|z\|}$ escludendo in \mathbb{R} / hermitiana in \mathbb{C}

$$= \max_{\|z\|=1} \|Bz\|$$

ha due buone proprietà rispetto alla struttura algebrica degli sp. vett.

$$\|B^k\|_{op} \leq \|B\|_{op}^k \quad \forall k > 0, \text{ infatti per induzione si ha}$$

$$\underline{k=0} \quad \|B^0\|_{op} = \|1L\|_{op} = 1 = (\|B\|_{op})^0 \quad (B \neq 0)$$

$$\underline{k+1} \quad \|B^{k+1}\|_{op} = \sup \frac{\|B^{k+1}z\|}{\|z\|} = \sup \frac{\|B^k Bz\|}{\|Bz\|} \cdot \frac{\|Bz\|}{\|z\|} \quad \text{se } z \notin \ker B^k$$

$$\leq \sup \frac{\|B^k Bz\|}{\|Bz\|} \cdot \sup \frac{\|Bz\|}{\|z\|}$$

$$\leq \|B^k\|_{op} \|B\|_{op} \leq \|B\|_{op}^{k+1}$$

↓
hp induzione

(Si puo' dim in modo analogo che $\|BC\|_{op} \leq \|B\|_{op} \|C\|_{op}$)

la serie delle norme converge

prop $\forall B \in L(n, \mathbb{R} \cup \mathbb{C})$ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k = 1L + B + \frac{1}{2!} B^2 + \dots$ converge assolutamente

La somma si chiama "esponentiale di B " e scrivere $\exp(B) = e^B$

$$\text{dim} \quad \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \right\|_{op} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|B^k\|_{op} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|B\|_{op}^k = \exp(\|B\|_{op})$$

Proprietà / conseguente:

$$1. A, P \in L(n), \text{ det } P \neq 0 \Rightarrow \exp(P^{-1}AP) = P^{-1} \exp(A) P$$

$$\text{dim} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (P^{-1}AP)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\underbrace{P^{-1}AP \ P^{-1}AP \ \dots \ P^{-1}AP}_{k \text{ volte}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} P^{-1} A^k P = P^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right) P$$

$$2. AB \stackrel{?}{=} BA \Rightarrow \exp(A+B) = \exp(A) \exp(B)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k = \dots = \quad (\text{formula binomiale})$$

$$3. \det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$$

oss L'esponentiale di una matrice è sempre diverso da 0

$$\begin{array}{ccc} & \text{GRUPPO DI LIE} & \\ \exp: L(n) & \longrightarrow & GL(n) \\ & & \text{gruppo rispetto al prodotto} \end{array}$$

$$4. \exp\left(\begin{smallmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{smallmatrix}\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} d_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^2 \end{smallmatrix}\right) + \dots = \left(\begin{smallmatrix} e^{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{d_n} \end{smallmatrix}\right)$$

oss Per calcolare l'esponentiale di una matrice è utile ridursi alla sua matrice diagonale!

$$A \text{ diagononizable} \iff \exists P \in L(n), \det P \neq 0: P^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{smallmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{smallmatrix} e^{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{d_n} \end{smallmatrix}\right) = \exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$$

$$\Rightarrow \exp(A) = P \left(\begin{smallmatrix} e^{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{d_n} \end{smallmatrix}\right) P^{-1}$$

$$5. B = \left(\begin{smallmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_n \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow \exp(B) = \left(\begin{smallmatrix} \exp(B_1) & & & \\ & \exp(B_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp(B_n) \end{smallmatrix}\right)$$

prop $A \in L(n, \mathbb{R}) \text{ (o } \mathbb{C})$. L'andamento di $\dot{z} = Az, z \in \mathbb{R}^n$ condato iniziale

$z_0 \in \mathbb{R}^n$ ($\dot{z}_0 = 0$) è $t \mapsto \exp(tA)z_0$

$$\text{dim} \quad f(t) := \exp(tA)z_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(pagina 36)

$$f(0) = \exp(0)z_0 = z_0$$

$$f'(t) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{t^k}{k!}}_{\textcircled{3} \text{ converge}} A^k z_0 = A \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}}_{\textcircled{2} \text{ le derivate sono continue}} A^{k-1} z_0 = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} A^h z_0 = A \exp(tA) z_0$$

$\textcircled{3} \text{ converge uniformemente}$
 il raggio di conv. è $+\infty$, dunque la funzione def è analitica
 \Rightarrow è possibile derivare termine a termine

$\textcircled{2} \text{ le derivate sono continue}$

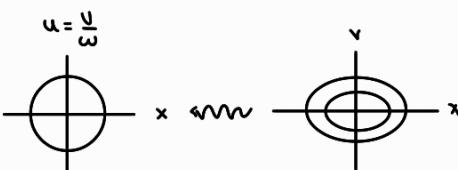
$\textcircled{3} \text{ converge uniformemente}$
 $\text{su } [-T, T]$ per il criterio di Weierstrass

esempio

(oscillatore armonico)

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega u \\ \dot{u} = -\omega x \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \beta y \\ \dot{y} = -\beta x \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{R}$$



(1) Calcolare l'esponentiale di A:

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \beta^k}{k!} J^k = (*) , \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{J}^0 = \mathbb{1L} = \mathbb{J}^1$$

$$\mathbb{J}^2 = -\mathbb{1L}$$

$$\mathbb{J}^1 = \mathbb{J}$$

$$\mathbb{J}^3 = -\mathbb{J}$$

Speriamo le tante inquelle che contengono l'unità simplettica e quella normale:

$$\begin{aligned} (*) &= \left(1 - \frac{t^2 \beta^2}{2} + \frac{t^4 \beta^4}{4!} - \dots \right) \mathbb{1L} + \left(t\beta - \frac{t^3 \beta^3}{3!} + \dots \right) \mathbb{J} \\ &= \cos(t\beta) \mathbb{1L} + \sin(t\beta) \mathbb{J} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \exp\begin{pmatrix} 0 & t\beta \\ -t\beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t\beta) & \sin(t\beta) \\ -\sin(t\beta) & \cos(t\beta) \end{pmatrix}$$

(2) Calcolare la matrice esponentiale di:

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

"

$$= \alpha \mathbb{1L} + \beta \mathbb{J}, \text{ inoltre } \alpha \mathbb{1L}, \beta \mathbb{J} \text{ commutano}$$

$$\Rightarrow \exp(B) = \exp(\alpha \mathbb{1L}) \exp(\beta \mathbb{J}) = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = e^\alpha \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

↓
matanore ↓
rotanore

naturale

$$\dot{z} = Az, z \in \mathbb{R}^n$$

$$r_z(t) = \exp(tA) z \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} " \frac{t^k A^k}{k!}$$

\Rightarrow l'integrazione dell'eq. diff. $\dot{z} = Az$ si riduce al calcolo dell'esponentiale della matrice tA

oss $\forall t \quad z \mapsto \exp(tA) z$ è eq. lineare

Sottospazi invarianti e diagonalizzazione di matrice

def $\dot{z} = X(z), z \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Sottosistema $M \subseteq \Omega$ è "invariante" (per X , per $\dot{z} = X(z)$), per Φ^t) se $z_0 \in M \Rightarrow r_{z_0}(t) \in M \quad \forall t \in I_{z_0}$.



comunque lo prendo
un punto di M , la
soluzione sta sempre
dentro M

$\Omega = \mathbb{R}^n$ sp. vett. Michiediamo quali siano i sottospazi V di \mathbb{R}^n invarianti.

prop Sottospazio V di \mathbb{R}^n è invariante per $\dot{z} = Az$ se e solo se $AV \subseteq V$

oss Bisogna mostrare che $AV \subseteq V \Leftrightarrow \forall t \quad \exp(tA)V \subseteq V$

dimo 1) V stabile per A , $AV \subseteq V \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} A^k V \subseteq V \Rightarrow \exp(tA)V \subseteq V$

Verifichiamo che $\forall t \quad (tA)V \subseteq V$: $\forall v \in V \quad (tA)v = \underset{\in V}{\underset{\in V}{A(tv)}} \in AV \subseteq V$
 $\Rightarrow \exp(tA)V \subseteq V \quad \forall t$

2) V inv. per $\exp(tA) \quad \forall t$

$$t \in V : f_2(t) = \exp(tA)t \in V \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f'_2(t) \in V$$

$$\Rightarrow f'_2(0) = At \in V \Rightarrow AV \subseteq V$$

□

Strategia (Studio del flusso di sistemi lineari)

- Linearità: $\exp(tA)(u+v) = \exp(tA)u + \exp(tA)v$

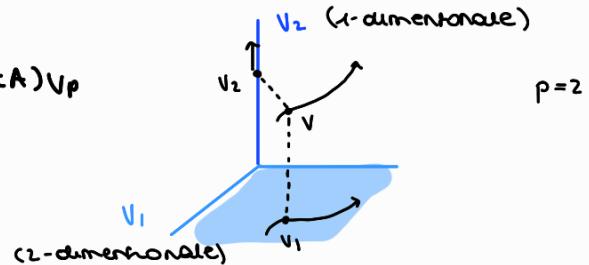
- Sottoinsiemi A -stab sono invarianti per l'eq. diff

\Rightarrow possiamo considerare la decomposizione $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus \dots \oplus V_p$

con V_i sottosp. invarianti (per quali il flusso è semplice).

$$\mathbb{R}^n \ni v = v_1 + \dots + v_p$$

$$\exp(tA)v = \exp(tA)v_1 + \dots + \exp(tA)v_p$$



Studiamo a caso più facile: sia A matrice diagonalizzabile su \mathbb{R} o \mathbb{C}

(\Rightarrow \exists base di \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n fatta di autovettori di A)

Esempio • tutti gli autovettori semplici (\rightarrow non necessariamente reali)

• $A = A^T$ su \mathbb{R} (teorema spettrale)

• $A = -A^T$ su \mathbb{C}

Considero gli autovettori di A :

- $k \geq 0$ copie di autovettori complessi coniugati $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_k \pm i\beta_k, \beta_j > 0$

- $n-2k$ autovettori reali $\alpha_{2k+1}, \dots, \alpha_n$

$\Rightarrow \exists$ base di \mathbb{C}^n fatta di autovett.: $\mathbb{C}^n \ni v_j = \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\mathbb{R}^n}{v_j}} + i w_j$

gli autovett. relativi ad autovettori reali si prendono reali: $v_1, \dots, v_{2k}, v_{2k+1}, \dots, v_n$
 quindi si deve scegliere base

$$\bar{d}\bar{u} = \bar{A}\bar{u} = \bar{A}\bar{u} = \bar{A}\bar{u}$$

Areale : $Au = du \Rightarrow A\bar{u} = \bar{d}\bar{u}$

mentre posso prendere la base $v_1 \pm iw_1, \dots, v_k \pm iw_k, v_{2k+1}, \dots, v_n$

dim \nsubseteq autovalore mult. m
 non lo chiede) $\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{C}$ autoval. mult. m

u_1, \dots, u_m autorettori lin. indip. relativi a λ

$\Rightarrow \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m$ autorettori lin. indip. relativi a $\bar{\lambda}$

$$0 = \sum_i c_i \bar{u}_i \Rightarrow \sum_i \bar{c}_i u_i = 0 \Rightarrow \bar{c}_i = 0 \Rightarrow c_i = 0$$

$$\langle u_1, \dots, u_m \rangle \neq \langle \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m \rangle$$

$u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2, \dots, u_m, \bar{u}_m$ sono 2m autorett. lin. indip

Quindi è base di \mathbb{C}^n nella forma $\{v_1 \pm iw_1, \dots, v_k \pm iw_k, v_{2k+1}, \dots, v_n\}$

$\Rightarrow B = \{v_1, w_1, \dots, v_k, w_k, v_{2k+1}, \dots, v_n\}$ è base di \mathbb{R}^n

infatti $\{u_1, \bar{u}_1, \dots, u_k, \bar{u}_k, v_{2k+1}, \dots, v_n\} \rightarrow \left\{ \frac{u_i + \bar{u}_i}{2}, \frac{u_i - \bar{u}_i}{2i}, v_{2k+1}, \dots, v_n \right\}$
 base di \mathbb{C}^n ($\Rightarrow \mathbb{R}^n$)

Risultato autodioni di A : $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_n \pm i\beta_n, v_{2k+1}, \dots, v_n$

con autorettori: $v_1 \pm iw_1, \dots, v_k \pm iw_k, v_{2k+1}, \dots, v_n$

base di \mathbb{R}^n : $B = \{v_1, w_1, \dots, v_k, w_k, v_{2k+1}, \dots, v_n\}$

"sottosp.
spettrali"

Potrò decomporre $\mathbb{R}^n = \langle v_1, w_1 \rangle \oplus \langle v_2, w_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_k, w_k \rangle \oplus \langle v_{2k+1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n \rangle = (*)$

e verifico che sono sottoinvarianti per l'eq. diff. $\dot{z} = \lambda z$, ovvero per A

• $\alpha_j \in \mathbb{R} \Rightarrow Av_j = \alpha_j v_j \Rightarrow \langle v_j \rangle$ è autoappuro (avvuo)

• $\langle v_j, w_j \rangle$ sono invarianti :

$$Av_j + iAw_j = A(v_j + iw_j) = (\alpha_j + i\beta_j)(v_j + iw_j)$$

$$= \underbrace{\alpha_j v_j}_{\mathbb{R}^n} - \underbrace{i\beta_j w_j}_{\mathbb{R}^n} + i(\underbrace{\beta_j v_j}_{\mathbb{R}^n} + \underbrace{\alpha_j w_j}_{\mathbb{R}^n})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Av_j = \alpha_j v_j - \beta_j w_j & \in \langle v_j, w_j \rangle \\ Aw_j = \beta_j v_j + \alpha_j w_j & \in \langle v_j, w_j \rangle \end{cases} \Rightarrow A(\langle v_j, w_j \rangle) \subseteq \langle v_j, w_j \rangle$$

Ora basta determinare l'azione di $\exp(tA)$ su cui ciascuna sottosp. della decomposizione $(*)$

lavoriamo sulla base $B = \{v_1, w_1, \dots, v_n\}$:

$$A \rightsquigarrow P^{-1}AP, \quad P = [v_1, w_1, \dots, v_n]$$

se $\{f_1, \dots, f_n\}$ bare e $P = [f_1, \dots, f_n]$ suona

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \uparrow & \dots & \uparrow \end{bmatrix}$$

componenti dei vettori Af_1, \dots, Af_n nella base f_1, \dots, f_n

$$\begin{aligned} 1^{\text{a}} \text{ colonna di } P^{-1}AP : & \left(\begin{array}{c} d_1 \\ -\beta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \\ 2^{\text{a}} \text{ colonna di } P^{-1}AP : & \left(\begin{array}{c} \beta_1 \\ d_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \\ & \vdots \\ n^{\text{a}} \text{ colonna di } P^{-1}AP : & \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_n \end{array} \right) \end{aligned} \quad \left. \right\}$$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} d_1 & \beta_1 & & & \\ -\beta_1 & d_1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \beta_K & \\ & & & -\beta_K & d_K \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \alpha_{2K+1} \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$B_i := \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & d_i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \text{diag}(B_1, \dots, B_K, \alpha_{2K+1}, \dots, \alpha_n)$$

$$\begin{aligned} P^{-1} \exp(tA) P &= \exp(tP^{-1}AP) = \exp \left(\begin{array}{cccc} tB_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & tB_K & \\ & & & t\alpha_{2K+1} \\ & & & & \ddots \\ & & & & & t\alpha_n \end{array} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \exp(tB_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \exp(tB_K) & & \\ & & & e^{\alpha_{2K+1}t} & \\ & & & & \ddots e^{\alpha_n t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\exp(tB_i) = \exp \begin{pmatrix} t\alpha_i & t\beta_i \\ -t\beta_i & t\alpha_i \end{pmatrix} = e^{\alpha_i t} \begin{pmatrix} \cos(\beta_i t) & \sin(\beta_i t) \\ -\sin(\beta_i t) & \cos(\beta_i t) \end{pmatrix} = e^{\alpha_i t} R(\beta_i t)$$

$$P^{-1} \exp(tA) P = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} R(\beta_1 t) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & e^{\alpha_K t} R(\beta_K t) & & \\ & & & e^{\alpha_{2K+1} t} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & e^{\alpha_n t} \end{pmatrix}$$

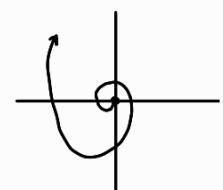
$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}^2 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}^2}_{\text{triviale}} \oplus \mathbb{R} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}$$

$$\langle v_j, w_j \rangle \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_j \\ y_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \langle v_j \rangle \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) $\langle v_j \rangle$ ^{sottospazio reale unidimensionale} $z \mapsto e^{\alpha_j t} z$

\Rightarrow la dinamica è una dilatazione di fattore $e^{\alpha_j t}$

(2) $\langle v_j, w_j \rangle \qquad z \mapsto e^{\alpha_j t} R(\beta_j t) z$

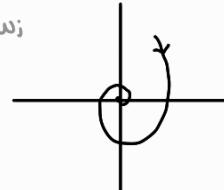


$$\alpha_j > 0$$

$$\begin{cases} \dot{v}_j = \alpha_j v_j - \beta_j w_j \\ \dot{w}_j = \beta_j v_j + \alpha_j w_j \end{cases}$$

d. campo vett. punto
verso il baricentro
 \Rightarrow FOCO INSTABILE

$$\alpha_j = 0$$



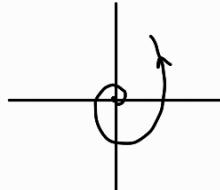
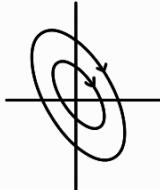
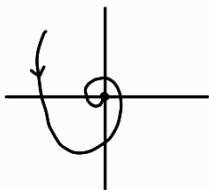
$$\alpha_j < 0$$

FUOCO INSTABILE

CENTRO

FUOCO INSTABILE

Ritornando alla matrice originale si ottengono delle deformazioni lineari, ad esempio:



Oss 1 Il comportamento asintotico per $t \rightarrow +\infty$ è determinato dal $\text{sgn}(\text{rel}(autovalore))$
 \rightsquigarrow segno parte reale

Oss 2 Gli equilibri di $\dot{z} = Az$, $z \in \mathbb{R}^n$ sono gli z : $Az = 0$, ovvero z tali A

esempio

(oscillatore armonico)

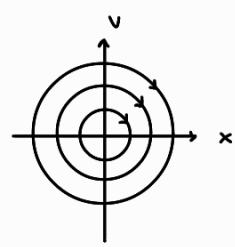
$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{u} = -\omega^2 x \end{cases} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = \pm i\omega$$

impongo che sia 0

\Rightarrow il risultato infatti è un centro



Sistemi lineari in \mathbb{R}^2 (caso generico)

Se $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ con A diagonaleabile, allora ci sono 2 casi:

- $\alpha + i\beta, \beta > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{fuoco stabile} & \alpha < 0 \\ \text{centro} & \alpha = 0 \\ \text{fuoco instabile} & \alpha > 0 \end{cases}$
- $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Dobbiamo studiare il secondo: siano v_1 e v_2 i vettori associati ad α_1 e α_2 .

Ci sono 3 casi:



ESEMPIO (repulsore armonico)

Abbiamo già visto un ritardo infare da questo tipo:

vediamo se RA $\ddot{x} = \omega^2 x$, $\omega > 0$, $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \omega^2 x \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \omega^2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = \pm \omega \Rightarrow \text{SELLA!}$$

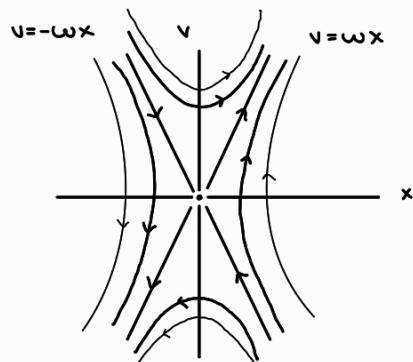
Troviamo gli autovettori:

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ottengo che } \begin{pmatrix} u_2 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega u_1 \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_2 = \omega u_1$$

$$\Rightarrow u_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \pm i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \omega \end{pmatrix}$$



$$e^{\alpha_1 t} = e^{-|\alpha_1| t} \quad \forall t > 0$$

$$e^{\alpha_2 t} = e^{-|\alpha_2| t} \ll e^{-|\alpha_1| t} \quad \text{dato che } |\alpha_2| > |\alpha_1|$$

$$t \mapsto (e^{\alpha_1 t} y_1^0, e^{\alpha_2 t} y_2^0) \quad (y_1^0 \neq 0 \neq y_2^0)$$

$y_1(t)$ $y_2(t)$

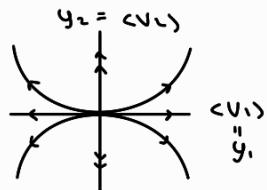
$$y_1 = e^{\alpha_1 t} y_{1,0} \Rightarrow \frac{y_1}{y_{1,0}} = e^{\alpha_1 t} = e^{-\operatorname{Im} \alpha_1 t} > 0$$

$$e^{-t} = \left(\frac{y_1}{y_{1,0}} \right)^{\frac{1}{\operatorname{Im} \alpha_1}} \Rightarrow e^{-\operatorname{Im} \alpha_2 t} y_2 = \left(\frac{y_1}{y_{1,0}} \right)^{-\frac{|\alpha_2|}{\operatorname{Im} \alpha_1}} y_{2,0}$$

$\frac{|\alpha_2|}{\operatorname{Im} \alpha_1} > 1$

$$\Rightarrow y_2 = C y_1 \quad \text{le curve sono \sim parabole}$$

(3) $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$



NODO INSTABILE

Abbiamo considerato tutti i casi in cui gli autovalori sono reali, distinti e $\neq 0$, i casi "generici".

(caso non generico)

(1) 2 autovalori uguali

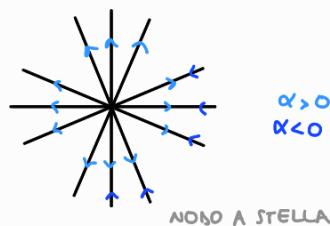
(2) 1 autovalore = 0

(3) A non è diagonalizzabile

(1) $\alpha_1 = \alpha_2 \neq 0$

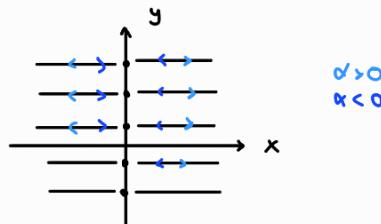
$$A \text{ diagonalizzabile} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x \\ \dot{y} = \alpha y \end{cases}$$



(2) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$



(3) A non diagonalizzabile

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Integriamo l'eq. diff.

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + b y \\ \dot{y} = \alpha y \end{cases} \Rightarrow y(t) = e^{\alpha t} y_0$$

$\dot{x} = \alpha x + b y_0 e^{\alpha t}$ è eq. non autonoma perché dipende dal tempo
è eq. lineare non omogenea

$$x_g = x_{g0} + x_p$$

integrale generale integrale particolare

integrale gen. dell'omogenea associata

$$x_{g0} = e^{\alpha t} c$$

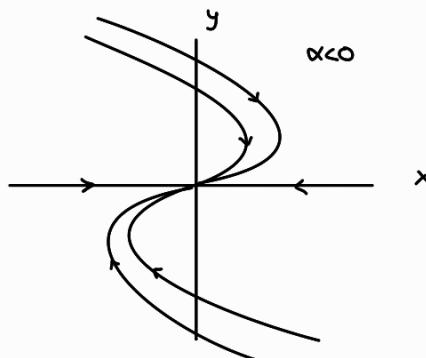
Potrei provare a cercare $x_p = k e^{\alpha t}$, ma non funziona, dunque cerco $x_p = k t e^{\alpha t}$
 $k e^{\alpha t} + \alpha k t e^{\alpha t} = \alpha k t e^{\alpha t} + b y_0 e^{\alpha t}$ (eq. diff.)

$$\Rightarrow k = b y_0$$

$$x_g = (c + b y_0 t) e^{\alpha t}$$

$$x_g(0) = x_0 \stackrel{!}{=} c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = (x_0 + b y_0 t) e^{\alpha t} \\ y(t) = e^{\alpha t} y_0 \end{cases}$$



NODO DEGENERATO

↪ potrei immaginarlo come deformazione del nodo stabilito (rambolo sullo zero)

Oscillatore smorzato

ad esempio un oscillatore armonico con attrito

$$m \ddot{x} = \Psi(x, \dot{x}), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{x} = 0$$

$$\Psi(0, 0) = 0$$

$$\text{lineare: } m \ddot{x} = \underbrace{\frac{\partial \Psi}{\partial x}(0,0)}_k x + \underbrace{\frac{\partial \Psi}{\partial v}(0,0)}_h \dot{x} + \dots$$

$$\Rightarrow m \ddot{x} = k x + h \dot{x}$$

$$\text{Studiamo il caso: } m \ddot{x} = -k x - h \dot{x} \quad (k > 0, h > 0)$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x - \frac{h}{m} \dot{x} = -\omega^2 x - 2\mu \dot{x}$$

$\omega^2 = \frac{k}{m}$ $2\mu > 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 x - 2\mu v \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix}$$

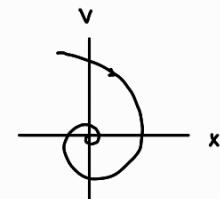
Cerchiamo gli autovalori:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \\ = ad + \lambda^2 - ad - b\lambda - bc = \\ = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = \\ = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A)$$

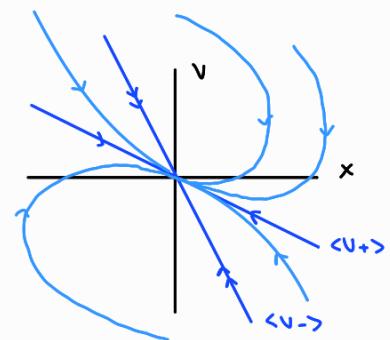
pol. caratteristico: $\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega^2 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{\pm} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$$

① $\mu < \omega$ "soprattutto debole" (poca dissipazione)
 $\lambda_{\pm} = -\mu \pm i\sqrt{\omega^2 - \mu^2}$ $\in \mathbb{C} \Rightarrow$ fuoco stabile



② $\mu > \omega$ "soprattutto forte"
 $\lambda_- < \lambda_+ < 0 \Rightarrow$ nodo stabile
 $u_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{\pm} \end{pmatrix}$

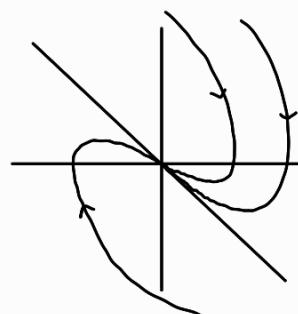


③ $\mu = \omega$ "soprattutto critico":
non generico
 $\lambda_{\pm} = -\mu$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix}$$

$$(A + \mu \mathbf{1}\mathbf{1}^T) = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu + \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -\mu^2 & -\mu \end{pmatrix}$$

Ie non sono lin indip. dunque $\ker(A) \neq 0 \Rightarrow A$ non è diagonabile
 \Rightarrow nodo degenero



Esercizio

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+y} - 1 \\ \dot{y} = -4\cos x - 2\cos y \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

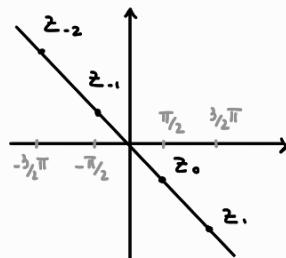
Cercare gli equilibri:

$$\begin{cases} e^{x+y} = 1 \\ -4\cos x - 2\cos y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

$$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow z_k = (x_k, -x_k)$$



Linearizzazione: $x'(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ 4\sin x & 2\sin y \end{pmatrix}$

valori regolari equilibri: $\rightarrow x'(x_k, -x_k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4\sin(x_k) & -2\sin(x_k) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'(z_{k \text{ pari}}) = x'(z_0) \\ x'(z_{k \text{ dispari}}) = x'(z_1) \end{cases}$$

$$(1) \quad x'(z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

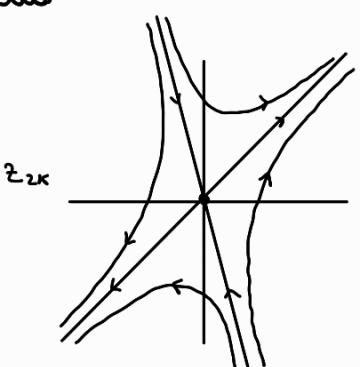
$$\lambda \pm = \frac{1}{2} (-1 \pm \sqrt{1+24}) = \frac{-1 \pm 5}{2} \quad \begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix} \Rightarrow \text{reale}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$x+4y = dx$$

$$y = (d-1)x$$

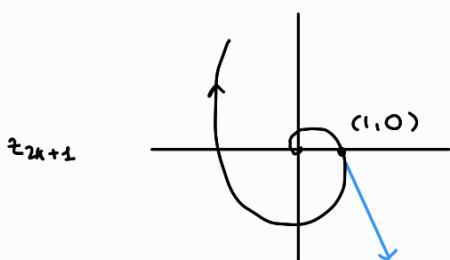
$$U_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad U_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$



$$(2) \quad x'(z_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda \pm = \frac{1}{2} (3 \pm i\sqrt{15}) \Rightarrow \text{fuoco instabile}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

calcolo la linearizzazione in un punto qualunque delle spire delle foci, in modo da ottenere il verso di percorrenza

Esempi su: dal lineare al nonlineare

Esercizio svolto a lezione: determinare gli equilibri, e la linearizzazione ad essi, del sistema in \mathbb{R}^2

$$x' = e^{x+y} - 1$$

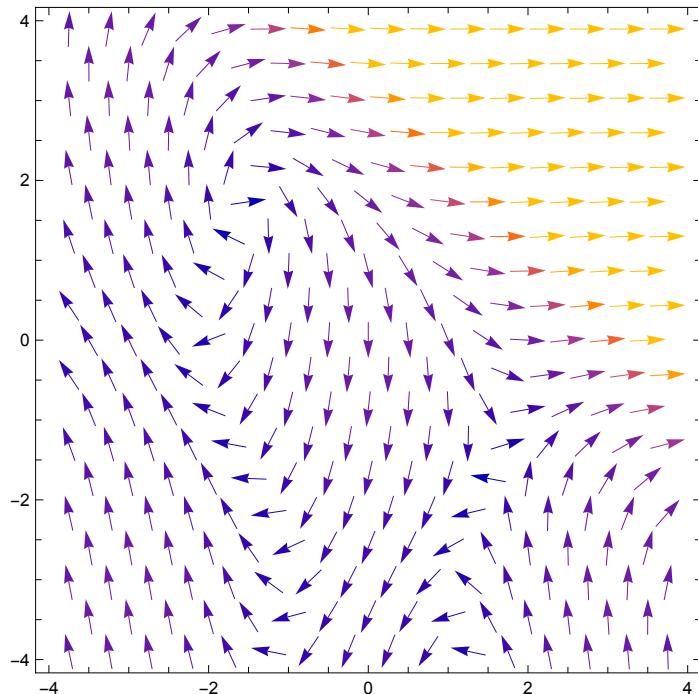
$$y' = -4\cos(x) - 2\cos(y)$$

Numericamente, esploriamo la relazione fra il ritratto in fase del sistema nonlineare e quelli delle sue linearizzazioni agli equilibri.

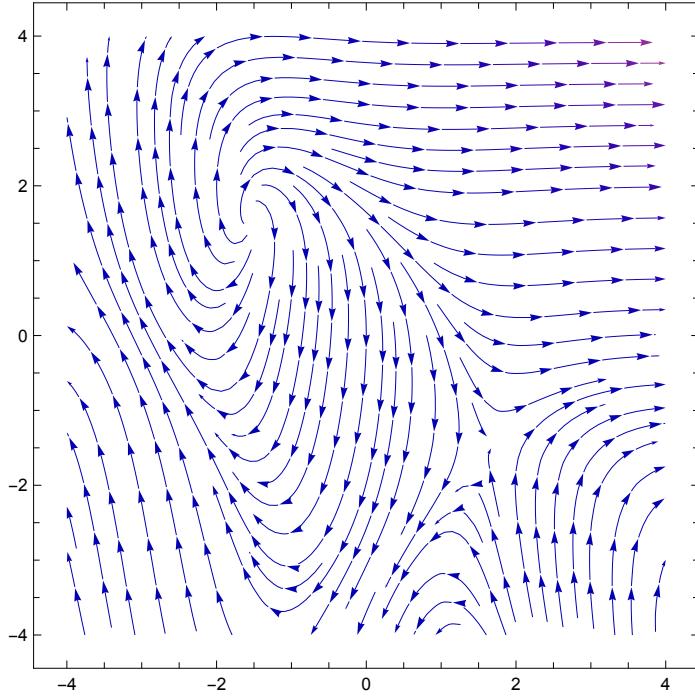
Primo Sguardo:

```
In[38]:= VectorPlot[{E^{x+y} - 1, -4 Cos[x] - 2 Cos[y]}, {x, -4, 4}, {y, -4, 4}]
```

```
Out[38]=
```



```
In[39]:= StreamPlot[{Ex+y - 1, -4 Cos[x] - 2 Cos[y]}, {x, -4, 4}, {y, -4, 4}]
Out[39]=
```



Esplorazione interattiva

```
In[2]:= Needs["EquationTrekker`"]
In[4]:= EquationTrekker[
  {x'[t] == Ex[t]+y[t] - 1, y'[t] == -4 Cos[x[t]] - 2 Cos[y[t]]},
  {x, y}, {t, -10, 10},
  PlotRange → 2 {{-Pi, Pi}, {-Pi, Pi}}, ImageSize → {800, 800}]
```

Ritratto in fase sistema nonlineare - regione con 2 equilibri

```
In[40]:= sol1[{x0_, y0_}, t1_, t2_] := NDSolve[
  {x'[t] == Ex[t]+y[t] - 1, y'[t] == -4 Cos[x[t]] - 2 Cos[y[t]], x[0] == x0, y[0] == y0},
  {x, y}, {t, t1, t2}]
In[41]:= R[α_] := {{Cos[α], -Sin[α]}, {Sin[α], Cos[α]}}
In[42]:= plot[pt_, t1_, t2_] := ParametricPlot[
  Evaluate[{x[t], y[t]} /. sol1[pt, t1, t2]],
  {t, t1, t2},
  PlotRange → {{-π, π}, {-π, π}}]
In[43]:= plotsep[pt_, t1_, t2_] := ParametricPlot[
  Evaluate[{x[t], y[t]} /. sol1[pt, t1, t2]],
  {t, t1, t2},
  PlotRange → {{-π, π}, {-π, π}},
  PlotStyle → {Red}]
```

```
In[44]:= eq = {\pi / 2, -\pi / 2};
raggio = {.2, 0};
pl[1] = plot[eq + R[0].raggio, -1, .8];
pl[4] = plot[eq + R[.25 \pi].(raggio + .15), -10, .68];
pl[2] = plot[eq + R[.9 \pi].raggio, -7, 3];
pl[3] = plot[eq + R[1.4 \pi].(raggio + 0.1), -10, 4];

In[50]:= raggio2 = {1, 0};
pl[5] = plot[eq + R[.3 \pi].raggio2, -1, .2];
pl[6] = plot[eq + R[.9 \pi].raggio2, -2, .9];
pl[7] = plot[eq + R[1.4 \pi].raggio2, -1, .9];
pl[8] = plot[eq + R[0 \pi].raggio2, -1, .2];

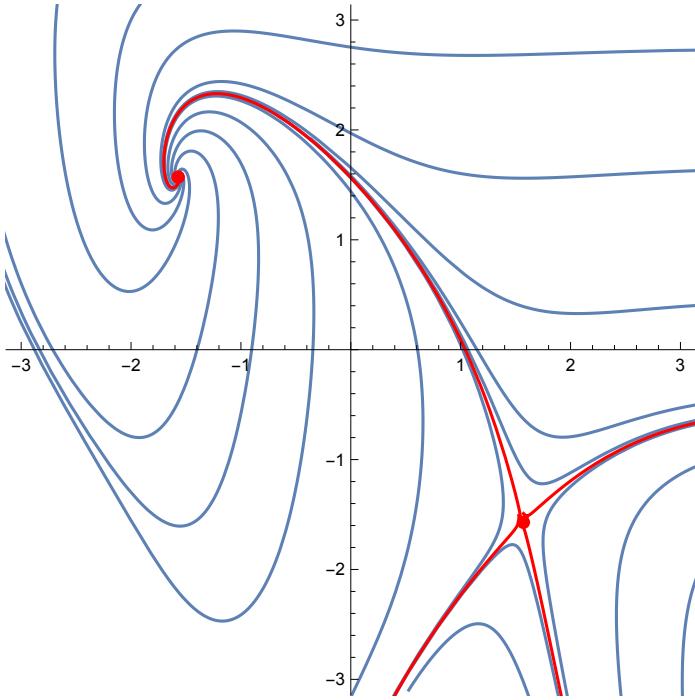
In[55]:= raggio3 = {2, 0};
pl[9] = plot[eq + R[0 \pi].raggio3, -1, .1];
pl[10] = plot[eq + R[.4 \pi].raggio3, -6, .07];

In[58]:= eq2 = {-\pi / 2, \pi / 2};
pl[11] = plot[eq2 + R[.4 \pi].raggio3, -6, .07];
pl[12] = plot[eq2 + R[-.4 \pi].raggio3, -6, 3];
pl[13] = plot[eq2 + R[.33 \pi].raggio2, -6, .44];
pl[14] = plot[eq2 + R[1.6 \pi].raggio2, -6, 2.5];
pl[15] = plot[eq2 + R[0].raggio2, -6, 4];
pl[16] = plot[eq2 + R[1.1 \pi].raggio2, -6, .6];
pl[17] = plot[eq2 + R[.55 \pi].raggio2, -6, .425];

In[31]:= pl[18] = plotsep[eq + R[.59 \pi].raggio, -6, .425];
pl[19] = plotsep[eq + R[1.57 \pi].raggio, -6, .425];
pl[20] = plotsep[eq + R[1.25 \pi].raggio, -1, 1.7];
pl[21] = plotsep[eq + R[.2475 \pi].raggio, -1, .84];
```

```
In[66]:= Show[Table[pl[n], {n, 1, 21}],
Graphics[{PointSize[Large], Red, {Point[eq], Point[eq2]}}]]
```

Out[66]=



Ritratto in fase sistema nonlineare - regione con 3 equilibri

```
In[67]:= plot2[pt_, t1_, t2_] := ParametricPlot[
Evaluate[ {x[t], y[t]} /. sol1[pt, t1, t2]],
{t, t1, t2},
PlotRange → {{-2 π, π}, {-π, 2 π}}]
```

```
In[68]:= plotsep2[pt_, t1_, t2_] := ParametricPlot[
Evaluate[ {x[t], y[t]} /. sol1[pt, t1, t2]],
{t, t1, t2},
PlotRange → {{-2 π, π}, {-π, 2 π}},
PlotStyle → {Red}]
```

```
In[69]:= eq = {π / 2, -π / 2};
raggio = {.2, 0};
pl[1] = plot2[eq + R[0].raggio, -1, .8];
pl[4] = plot2[eq + R[.25 π].(raggio + .15), -10, .68];
pl[2] = plot2[eq + R[.9 π].raggio, -7, 3];
pl[3] = plot2[eq + R[1.4 π].(raggio + 0.1), -10, 10];
```

```
In[75]:= raggio2 = {1, 0};
pl[5] = plot2[eq + R[.3 π].raggio2, -1, .2];
pl[6] = plot2[eq + R[.9 π].raggio2, -2, 3.9];
pl[7] = plot2[eq + R[1.4 π].raggio2, -1, 3.9];
pl[8] = plot2[eq + R[0 π].raggio2, -1, .275];
```

```

In[80]:= raggio3 = {2, 0};
pl[9] = plot2[eq + R[0 π].raggio3, -1, .1];
pl[10] = plot2[eq + R[.4 π].raggio3, -6, .07];

In[83]:= eq2 = {-π/2, π/2};
pl[11] = plot2[eq2 + R[.4 π].raggio3, -6, .088];
pl[12] = plot2[eq2 + R[-.4 π].raggio3, -6, 3.48];
pl[13] = plot2[eq2 + R[.33 π].raggio2, -6, .44];
pl[14] = plot2[eq2 + R[1.6 π].raggio2, -6, 3.0827];
pl[15] = plot2[eq2 + R[0].raggio2, -6, 4.5549];
pl[16] = plot2[eq2 + R[1.1 π].raggio2, -6, .77319];
pl[17] = plot2[eq2 + R[.55 π].raggio2, -6, .426344];

In[91]:= pl[18] = plotsep2[eq + R[.59 π].raggio, -6, .425];
pl[19] = plotsep2[eq + R[1.57 π].raggio, -6, .425];
pl[20] = plotsep2[eq + R[1.25 π].raggio, -1, 1.7];
pl[21] = plotsep2[eq + R[.2475 π].raggio, -1, .845];

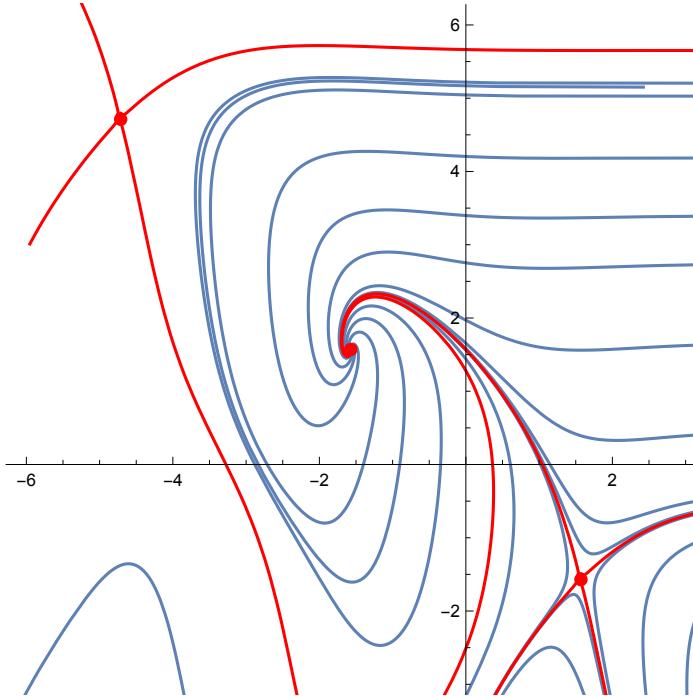
In[95]:= eq3 = {-3 π/2, 3 π/2};

In[96]:= pl[22] = plotsep2[eq3 + R[.59 π].raggio, -6, .425];
pl[23] = plotsep2[eq3 + R[1.57 π].raggio, -16, .425];
pl[24] = plotsep2[eq3 + R[1.25 π].raggio, -1, 1.7];
pl[25] = plotsep2[eq3 + R[.2475 π].raggio, -1, .8455];

In[100]:= Show[Table[pl[n], {n, 1, 25}],
Graphics[{PointSize[Large], Red, {Point[eq], Point[eq2], Point[eq3]}}]]

```

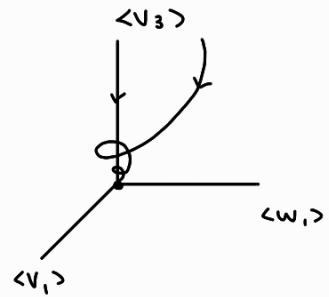
Out[100]=



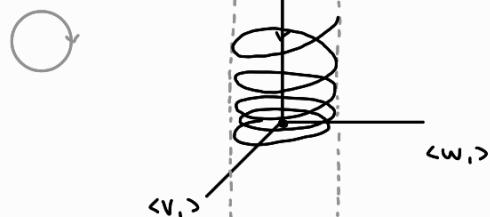
esempio $n=3$ $\dot{z} = Az, z \in \mathbb{R}^3$

$$1) \quad \alpha, \pm i\beta_1 \quad \beta_1 \neq 0 \quad \alpha < 0 \quad v, \pm iw_1, \quad \begin{matrix} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{matrix}$$

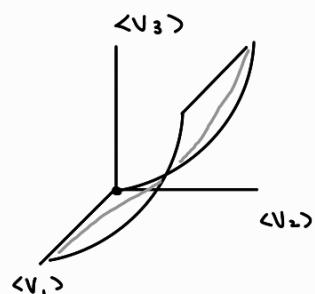
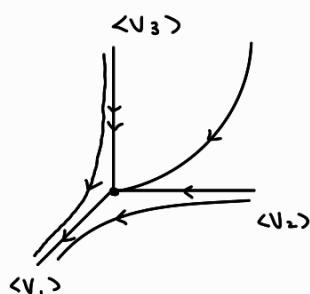
$$\alpha_3 \quad \alpha_3 < 0 \quad v_3 \quad v_3$$



$$2) \quad \pm i\beta_2 \quad \alpha_3 < 0$$



$$3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$



$$\mathbb{R}^n = \langle v_1, w_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n \rangle = e_1 \oplus \dots \oplus e_n$$

$$E^s = \underset{\text{"stabile"} \curvearrowleft}{\bigoplus} E_j; \quad \text{SOTTOSPazio STABILE}$$

$$\text{Re}(d_j) < 0 \quad t \rightarrow +\infty$$

$$E^u = \underset{\text{"unstabile"} \curvearrowleft}{\bigoplus} E_j; \quad \text{SOTTOSPazio INSTABILE}$$

$$\text{Re}(d_j) > 0 \quad t \rightarrow -\infty$$

$$E^c = \underset{\text{Re}(d_j)=0}{\bigoplus} E_j; \quad \text{SOTTOSPazio CENTRALE}$$

$$t \rightarrow \infty$$

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$$

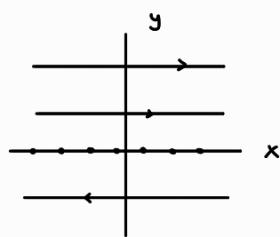
esempio (particella libera)

A non diagonalizzabile con $\mathbb{R}^n = E^c$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0, 0$$

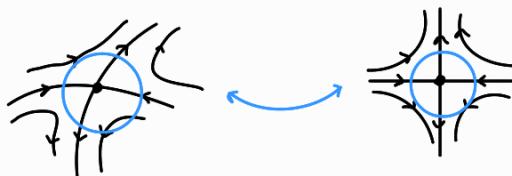
$$\mathbb{R}^2 = E^c \oplus E^s \oplus E^u$$



Passaggio dal lineare al non lineare

$$\dot{z} = X(z), z \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$X(\bar{z}) = 0$$



Vorremo riuscire a capire quando la linearizzazione attorno ad un equilibrio approssima bene il campo vettoriale dell'eq. diff.

Avevamo già visto nel caso $n=1$ che questo non è sempre garantito

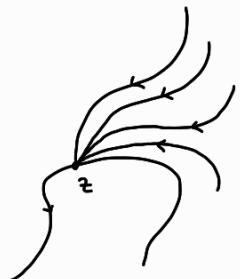
def \bar{z} equilibrio di X

- 1. \bar{z} è "iperbolico" se tutti gli autovalori di $X'(\bar{z})$ hanno $\operatorname{Re} \neq 0$
- 2. \bar{z} è "ellittico" se tutti gli autovalori di $X'(\bar{z})$ hanno $\operatorname{Re} = 0$

$n=2$
focali
node
fuochi
centri

TEOREMA (Grobman-Hartman) Il riferito in fare, e anti, i soluzioni del sistema lineare attorno ad un equilibrio iperbolico approssima bene quello del sistema vicino all'equilibrio

def "insieme stabile" di \bar{z} $\Sigma^s(\bar{z}) := \{ z \in \Omega : \gamma_z(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \bar{z} \}$
"insieme instabile" di \bar{z} $\Sigma^u(\bar{z}) := \{ z \in \Omega : \gamma_z(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} \bar{z} \}$



TEOREMA (della varietà stabile) \bar{z} è iperbolico

1. $\Sigma^{s,u}(\bar{z})$ sono sottovarietà (immerte) di Ω
2. $\dim \Sigma^{s,u} = \dim \Sigma^{s,u}(\bar{z})$
3. $T_{\bar{z}} \Sigma^{s,u}(\bar{z}) = E^{s,u}$

spazio stabile
della linearizzazione