TOPOLOGIA DI UNO SPAZIO METRICO

Sia (X,d) uno SM.

def Sia $A \subset X$.

i) Diciamo che $x \in X$ è un **P.TO INTERNO** di A se $\exists\, r>0$ tc $B_r(x) \subset A$. L' **INTERNO** di A è

$$\operatorname{int}(A) = \mathring{A} = \{x \in X : \exists\, r>0 \text{ tc } B_r(x) \subset A\}.$$

oss $\operatorname{int}(A) \subset A$

ii) Diciamo che A è un **INSIEME APERTO** se $\operatorname{int}(A) = A$ ($\Leftrightarrow$ tutti i suoi punti sono interni).

Indichiamo $\tau(X) = \{A \subset X : A \text{ è aperto}\} \subset \mathcal{P}(X)$, detta **TOPOLOGIA** di X.

def Sia $A \subset X$.

i) Diremo che $x \in X$ è un **P.TO DI CHIUSURA** di A se $\forall r>0$ si ha che $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$

Definiamo la **CHIUSURA** di A come

$$\overline{A} = \{x \in X : x \text{ p.to di chiusura di } A\}$$

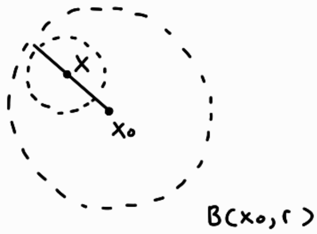
oss $A \subset \overline{A}$

ii) Diremo che $A \subset X$ è **INSIEME CHIUSO** se $A = \overline{A}$ ($\Leftrightarrow$ tutti i punti di chiusura sono contenuti in A).

prop (X,d) SM, $x_0 \in X$, $r>0$. Allora $B(x_0,r) \subset X$ è aperto.

dim Sia $x \in B(x_0,r)$ e provo che è punto interno: cerco $s>0$ tc $B(x,s) \subset B(x_0,r)$.

Basta scegliere $0<s<r-d(x,x_0)$.



Voglio verificare che $B(x,s) \subset B(x_0,r)$.

Sia $y \in B(x,s) \Leftrightarrow d(y,x)<s$

Stimo $d(y,x_0) \leq d(y,x)+d(x,x_0) < s+d(x,x_0) < r$ $\square$

prop (X,d) SM e sia $A\subset X$. Allora A è aperto $\iff \underset{C}{\underset{\shortparallel}{X\setminus A}}$ è chiuso.

dim A aperto $\iff A = \operatorname{int}(A)$

$\iff A = \{x\in X : \exists\, r>0 \text{ tc } B(x,r)\subset A\}$

$\iff X\setminus A = \{x\in X : \nexists\, r>0 \text{ tc } B(x,r)\subset A\}$

$\iff X\setminus A = \{x\in X : \forall\, r>0 \quad B(x,r)\cap(X\setminus A)\neq\emptyset\}$

$\iff C = \{x\in X : \forall\, r>0 \quad B(x,r)\cap C\neq\emptyset\}$

$\iff C = \overline{C}$

$\iff C$ è chiuso $\square$

def Sia $A\subset X$ SM. Definiamo la FRONTIERA di A come

$\partial A = \{x\in X : \forall\, r>0 \text{ si ha } B(x,r)\cap A\neq\emptyset \text{ e } B(x,r)\cap(X\setminus A)\neq\emptyset\} = \overline{A}\cap\overline{X\setminus A}$

esercizio sia $X\in\mathbb{R}^2$ con distanza standard. Consideriamo $A = \{x\in\mathbb{R}^2 : |x|<1\}$

1) A è aperto ✓

2) $\overline{A} = \{x\in\mathbb{R}^2 : |x|\leq 1\}$ ✓

3) $\partial A = \{x\in\mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ ✓

TEOREMA Sia (X,d) SM con topologia $\tau(X)\subset\mathcal{P}(X)$. Allora

A1) $\emptyset, X \in \tau(X)$

A2) $A_1, A_2, \dots, A_n \in\tau(X) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in\tau(X)$

A3) se $A_\alpha\in\tau(X)$ $\forall\,\alpha\in\mathcal{A}$ $\Rightarrow \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha \in\tau(X)$

dim A2) $x\in\bigcap_{i=1}^{n} A_i \iff x\in \underset{\text{aperto}}{A_i}$ $\forall\, i=1,\dots,n$

$\iff \underset{i=1,\dots,n}{\exists\, r_i>0} : B(x,r_i)\subset A_i$

sia allora $r = \min\{r_1,\dots,r_n\}>0$.

Avremo $B(x,r)\subset\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ $\square$

esempio $X = \mathbb{R}^2$

$A_k = \{x\in\mathbb{R}^2 : |x| < 1+\frac{1}{k}\}$ aperti $\forall\, k\in\mathbb{N}$

$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x\in\mathbb{R} : |x|\leq 1\}$ non è aperto (è chiuso).

oss (X,d) SM. Allora

1) X e $\emptyset$ sono chiusi

2) $C_1,\dots,C_n \in X$ sono chiusi $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} C_i \subset X$ chiuso

3) C_α chiusi $\forall \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} C_\alpha \subset X$ chiuso

Funzioni continue fra SM

Siano (X,d_x) e (Y,d_y) SM. Consideriamo $f: \underset{\substack{\cup\\ x_0}}{X} \longrightarrow Y$

def Diciamo che $f: X\to Y$ è CONTINUA nel punto $x_0\in X$ se $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ tc

$$d_x(x,x_0)<\delta \Rightarrow d_y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$$

Diremo che f è continua da X in Y se è continua in ogni $x_0\in X$.

def Sia poi $y_0\in Y$. Diciamo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$$

se e solo se $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall x\in X$ si ha che

$$0<d_x(x,x_0)<\delta \Rightarrow d_y(f(x),y_0)<\varepsilon$$

Avremo: f continua in $x_0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

TEOREMA (X,d_x) e (Y,d_y) SM, $x_0\in X$, $f: X\to Y$. Sono equivalenti:

1) f è continua in x_0

2) f è sequenzialmente continua in x_0:

$$\forall\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,d_x)} x_0 \quad \text{si ha} \quad f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{(Y,d_y)} f(x_0)$$

dim 2)$\Rightarrow$1) Per assurdo 1) sia falsa (f non continua in x_0).

$\exists\ \varepsilon>0 : \forall\delta>0\ \exists\ x\in X : d_x(x,x_0)<\delta$ ma $d_y(f(x),f(x_0))\geq\varepsilon$

Scelgo $\delta = \frac{1}{n}$:

$\exists\ \varepsilon>0 : \forall n\in\mathbb{N}\ \exists\ x_n\in X : d_x(x_n,x_0)<\frac{1}{n}$ ma $d_y(f(x),f(x_0))\geq\varepsilon$

Ho trovato una successione x_n tc $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} x_0$, ma

$f(x_n) \not\to f(x_0)$. ↯

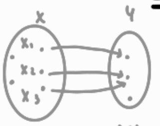
TEOREMA (X, d_X) e (Y, d_Y) SM. $f: X \to Y$. Sono equivalenti:

1) $f: X \to Y$ è continua su X

2) $\forall A \subset Y$ aperto si ha: $f^{-1}(A) \subset X$ è aperto (antimmagine)

3) $\forall C \in Y$ chiuso si ha: $f^{-1}(C) \subset X$ è chiuso

dim Ripasso di teoria degli insiemi. Data $f: X \to Y$



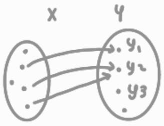
pensa ad una funzione non iniettiva

$f^{-1}(f(\{x_1, x_2\})) = \{x_1, x_2, x_3\}$

i) $A \subset f^{-1}(f(A))$ $\quad A \subset X$

ii) $B \supset f(f^{-1}(B))$ $\quad B \subset Y$

iii) $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$ $\quad B \subset Y$



pensa ad una funzione non suriettiva

$f(f^{-1}(\{y_1, y_2, y_3\})) = \{y_1, y_2\}$

1) $\Rightarrow$ 2). Fisso $A \subset Y$ aperto. $x_0 \in f^{-1}(A)$. Devo trovare $\delta > 0$ tc $B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(A)$.

$x_0 \in f^{-1}(A) \iff f(x_0) \in A$, A aperto

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ tc $B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset A$

Ora: f è continua in $x_0 \in X$, ovvero $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tc

$$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

equivalentemente

$$f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset A$$

L'op. di immagine inversa conserva le inclusioni:

$$B(x_0, \delta) \overset{(i)}{\subset} f^{-1}(f(B_X(x_0, \delta))) \subset f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon)) \subset f^{-1}(A)$$

2) $\Rightarrow$ 1). Dimostriamo che f è continua nel punto $x_0 \in X$.

Dato $\varepsilon > 0$ devo trovare $\delta > 0$ tc

$$f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon), \text{ aperto di } Y\ \forall \varepsilon > 0$$

$$\overset{(hp)}{\Rightarrow} \underbrace{f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))}_{\ni\, x_0} \subset X \quad \text{aperto di } X$$

$\Rightarrow$ x_0 p.to interno, ovvero $\exists\, \delta > 0$ tc

$$B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$$

$$f(B_X(x_0, \delta)) \subset f(f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))) \overset{(ii)}{\subset} B_Y(f(x_0), \varepsilon)$$

Ho trovato che $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tc

$$f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon) \qquad \square$$

esercizio (2.6 - quaderno degli esercizi)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e consideriamo:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x)\}$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$$

Dimostrare o confutare:

1) f continua $\Rightarrow$ $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto

2) $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto $\Rightarrow$ f continua

3) f continua $\Rightarrow$ $C \subset \mathbb{R}^2$ chiuso

4) $C \subset \mathbb{R}^2$ chiuso $\Rightarrow$ f continua

1) Voglio provare che A è aperto:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - f(x) > 0\}$$

- $y \mapsto y$ è continua da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$
- $(x,y) \mapsto y$ è continua da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$
- $x \mapsto f(x)$ è continua
- $(x,y) \mapsto f(x)$ è continua da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$

segue che

$$(x,y) \mapsto y - f(x) = F(x,y) \text{ è cont. da } \mathbb{R}^2 \text{ a } \mathbb{R}$$

Ho finito perché:

$$A = F^{-1}(\underbrace{]0,\infty)}_{\subset\ \mathbb{R} \text{ aperto}}) \subset \mathbb{R} \text{ aperto.}$$

2) Falso, ad esempio considero $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.

Non è continua in $x = 0$.

Provo che $A = \{y > f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$ è aperto.

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \{x < 0\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ aperto} \\ A_2 &= \{y > 0\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ aperto} \end{aligned}\right\} A_1 \cap A_2 \text{ aperto}$$

$A_3 = \{y > 1\} \subset \mathbb{R}^2$ aperto

$\Rightarrow (A_1 \cap A_2) \cup A_3 = A$ aperto

Trasformazioni lineari e continue

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due SN. Consideriamo $T : X \to Y$ lineare.

Definiamo $\|T\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y \in [0, \infty]$.

Se $\|T\| < \infty$ diremo che $T : X \xrightarrow{\text{lin}} Y$ è limitata.

__def__ Sia $\mathcal{L}(X,Y) = \{T : X \to Y \mid T \text{ lineare e limitata}\}$.

__oss__ Se T è limitata: $\overset{\overset{0}{\not=}}{x} \in X$.

$$\frac{1}{\|x\|_X} \|Tx\|_Y = \left\| \frac{1}{\|x\|_X} Tx \right\|_Y \overset{T \text{ lineare}}{=} \left\| T \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_Y \overset{\text{def di } T}{\leq} \|T\|$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in X \quad \|Tx\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X$$

TEOREMA Nelle notazioni precedenti, sono equivalenti:

A) T è limitata

B) T è continua da X in Y nel punto $x = 0$

C) T è continua da X in Y in tutti i punti

__dim__ A) $\Rightarrow$ C). $x_0 \in X$.

$$\|Tx - Tx_0\|_Y = \|T(x - x_0)\|_Y \leq \underset{\overset{\wedge}{\infty}}{\|T\|} \cdot \|x - x_0\|_X \quad \forall x \in X$$

In effetti, la funzione T è Lipschitz.

B) $\Rightarrow$ A). T continua in $x_0 = 0$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tc $\|Tx - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{T0}\|_Y \leq \varepsilon$ per $\|x - 0\| \leq \delta$

ovvero

$$\|x\| \leq \delta \Rightarrow \|Tx\|_Y \leq \varepsilon.$$

Sia ora $x \in X$ con $\|x\|_X \leq 1$. Ma allora

$$\|\delta x\|_X \leq \delta \Rightarrow \|T(\delta x)\|_Y \leq \varepsilon$$

concludo

$$\|Tx\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{\delta} < \infty \qquad \forall x \in X,\ \|x\|_X \leq 1$$

Deduco che $\|T\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$. $\square$

CAPITOLO 2

Topologia di uno spazio metrico e funzioni continue

1. Topologia di uno spazio metrico

In questa sezione definiamo la topologia $\tau(X)$ di uno spazio metrico (X, d). Gli insiemi di $\tau(X) \subset \mathscr{P}(X)$ sono gli aperti di X.

Definizione 2.1.1 (Insiemi aperti. Interno). Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$ un insieme.

i) Un punto $x \in X$ si dice *punto interno* di A se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A$. Quando x è interno ad A si dice che A è un *intorno* di x.
L'*interno di A* è l'insieme dei punti interni di A:
$$\mathrm{int}(A) = \mathring{A} = \big\{x \in X : \text{esiste } r > 0 \text{ tale che } B_r(x) \subset A\big\}.$$
Si ha sempre $\mathrm{int}(A) \subset A$.

ii) Un insieme $A \subset X$ si dice *aperto* se per ogni $x \in A$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A$, ovvero se $A = \mathrm{int}(A)$.

Proposizione 2.1.2. Le palle aperte sono insiemi aperti.

Dim. Consideriamo una palla aperta $B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$, con $x_0 \in X$ ed $r > 0$ e sia $x \in B_r(x_0)$. Possiamo scegliere un numero reale $s > 0$ tale che $s < r - d(x, x_0)$. Per ogni punto $y \in B_s(x)$ segue dalla disuguaglianza triangolare:
$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) \leq s + d(x, x_0) < r.$$
Abbiamo dunque provato che $B_s(x) \subset B_r(x_0)$. Tutti i punti di $B_r(x_0)$ sono punti interni. $\square$

Definizione 2.1.3 (Insieme chiuso. Chiusura). Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$ un insieme.

i) Un punto $x \in X$ si dice *punto di chiusura di A* se per ogni $r > 0$ risulta $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$. La chiusura di A è l'insieme dei punti di chiusura di A
$$\overline{A} = \big\{x \in X : B_r(x) \cap A \neq \emptyset \text{ per ogni } r > 0\big\}.$$
Si ha sempre $A \subset \overline{A}$.

ii) L'insieme A si dice chiuso se contiene tutti i sui punti di chiusura, ovvero se $A = \overline{A}$.

Proposizione 2.1.4. Un insieme A è aperto se e solo se il suo complementare $C = X \setminus A$ è chiuso.

DIM. Infatti, si hanno le equivalenze:

$$\begin{aligned} A \text{ è aperto} \quad &\Leftrightarrow \quad A = \big\{x \in X : \text{esiste } r > 0 \text{ tale che } B_r(x) \subset A\big\} \\ &\Leftrightarrow \quad X \setminus A = \big\{x \in X : \text{non esiste } r > 0 \text{ tale che } B_r(x) \subset A\big\} \\ &\Leftrightarrow \quad X \setminus A = \big\{x \in X : \text{per ogni } r > 0 \text{ si ha } B_r(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \ \big\} \\ &\Leftrightarrow \quad C = \overline{C}. \end{aligned}$$

□

L'insieme $\emptyset$ è aperto, in quanto tutti i suoi punti (non ce ne sono) sono interni. Quindi X è chiuso. D'altra parte, X è banalmente aperto e quindi $\emptyset$ è chiuso. Gli insiemi $\emptyset$ ed X sono pertanto contemporaneamente aperti e chiusi.

ESERCIZIO 2.1.5 (Caratterizzazione sequenziale della chiusura). Siano $A \subset X$ un insieme e $x \in X$. Provare che le seguenti due affermazioni sono equivalenti:

A) $x \in \overline{A}$;

B) Esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,d)} x$.

ESERCIZIO 2.1.6. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$ un insieme. Provare le seguenti affermazioni:

i) L'interno $\mathrm{int}(A)$ è un insieme aperto, ed è il più grande insieme aperto contenuto in A.

ii) La chiusura $\overline{A}$ è un insieme chiuso ed è il più piccolo insieme chiuso che contiene A.

DEFINIZIONE 2.1.7 (Frontiera). La *frontiera di A* $\subset X$ è l'insieme

$$\partial A = \big\{x \in X : B_r(x) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B_r(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \text{ per ogni } r > 0\big\}.$$

Equivalentemente, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$.

Si può controllare che $\overline{A} = A \cup \partial A = \mathrm{int}(A) \cup \partial A$ e l'ultima unione è disgiunta. Talvolta si definisce anche l'*esterno di* $A \subset X$ come l'insieme

$$\mathrm{ext}(A) = \big\{x \in X : \text{esiste } r > 0 \text{ tale che } B_r(x) \subset X \setminus A\big\} = \mathrm{int}(X \setminus A).$$

In questo modo, per ogni $A \subset X$ si ha l'unione disgiunta

$$X = \mathrm{int}(A) \cup \partial A \cup \mathrm{ext}(A).$$

In questo senso si dice che la famiglia di insiemi $\{\mathrm{int}(A), \partial A, \mathrm{ext}(A)\}$ forma una partizione di X.

ESEMPIO 2.1.8 (Topologia della retta reale). Sia $X = \mathbb{R}$ munito della distanza standard.

1) Gli intervalli $A = (a, b) \subset \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a, b \leq \infty$ sono aperti. Ad esempio, nel caso $-\infty < a < b < \infty$ si ha

$$(a, b) = B_r(x_0), \quad x_0 = \frac{a+b}{2}, \ r = \frac{b-a}{2}.$$

Inoltre si ha $\partial A = \{a, b\}$ in quanto

$$B_r(a) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B_r(a) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset \text{ per ogni } r > 0,$$

e analogamente nel punto b. Di conseguenza, risulta $\overline{A} = A \cup \partial A = [a, b]$.

2) Dal punto precedente segue che l'intervallo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ è chiuso (in quanto è la chiusura di un insieme). Alternativamente, è facile verificare che l'insieme

$$\mathbb{R} \setminus [a,b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$$

è aperto.
3) Gli intervalli della forma $A = [a,b)$ con $-\infty < a < b < \infty$ non sono nè aperti nè chiusi. Infatti si ha

$$\mathrm{int}(A) = (a,b) \neq A \text{ e } \overline{A} = [a,b] \neq A.$$

La stessa cosa vale per intervalli della forma $(a,b]$.
4) Intervalli illimitati della forma $(-\infty, a)$ con $a \leq \infty$ sono aperti. Intervalli illimitati della forma $(-\infty, a]$ con $a < \infty$ sono invece chiusi.

Esempio 2.1.9. In $\mathbb{R}^2$ con la distanza Euclidea consideriamo il cerchio aperto $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$. Allora:

i) $A = \mathring{A}$, infatti A è aperto.
ii) La chiusura di A è il cerchio chiuso $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$.
iii) La frontiera di A è la circonferenza-bordo $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$.

Definizione 2.1.10 (Topologia di uno spazio metrico). Sia (X, d) uno spazio metrico. La famiglia di insiemi $\tau(X) \subset \mathscr{P}(X)$

$$\tau(X) = \{A \subset X : A \text{ è aperto in } X\}$$

si dice *topologia* di X.

Teorema 2.1.11. La topologia di uno spazio metrico X verifica le seguenti proprietà:

(A1) $\emptyset, X \in \tau(X)$;
(A2) Se $A_1, \ldots, A_n \in \tau(X)$, $n \in \mathbb{N}$, allora $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \tau(X)$;
(A3) Per ogni famiglia di indici $\mathscr{A}$ risulta

$$A_\alpha \in \tau(X) \text{ per ogni } \alpha \in \mathscr{A} \ \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} A_\alpha \in \tau(X).$$

Dim. Abbiamo già discusso la proprietà (A1). Proviamo (A2). Se $x \in A_1 \cap \ldots \cap A_n$ allora esistono $r_1, \ldots, r_n > 0$ tali che $B_{r_i}(x) \subset A_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Posto $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\} > 0$, si ha allora

$$B_r(x) \subset A_1 \cap \ldots \cap A_n.$$

Anche la verifica di (A3) è elementare. Se infatti $x \in \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} A_\alpha$ allora esiste $\beta \in \mathscr{A}$ tale che $x \in A_\beta$ e quindi esiste $r > 0$ tale che

$$B_r(x) \subset A_\beta \subset \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} A_\alpha.$$

□

ESEMPIO 2.1.12. La proprietà (A2) non si estende ad intersezioni *numerabili* di aperti. Sia $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, con la distanza standard. Gli insiemi

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\} = B_r(0)$$

sono aperti per ogni $r > 0$. L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ non è invece aperto, infatti i punti $x \in A$ tali che $|x| = 1$ verificano

$$B_r(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset \text{ per ogni } r > 0.$$

Ad esempio, il punto $(1 + r/2)x$ appartiene all'intersezione. In effetti $A = \overline{A}$ è un insieme chiuso.

D'altra parte A è un'intersezione numerabile di aperti:

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1 + \frac{1}{k}\Big\}.$$

In modo duale, la famiglia dei chiusi di uno spazio metrico verifica le proprietà descritte nel seguente teorema:

TEOREMA 2.1.13. Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora:

(C1) $\emptyset, X$ sono chiusi;
(C2) Se $C_1, \ldots, C_n$, $n \in \mathbb{N}$, sono insiemi chiusi di X allora $C_1 \cup \ldots \cup C_n$ è un insieme chiuso di X;
(C3) Sia $\mathscr{A}$ una famiglia di indici. Se C_α è un insieme chiuso di X per ogni $\alpha \in \mathscr{A}$ allora $\bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} C_\alpha$ è chiuso in X.

La prova del teorema si ottiene passando ai complementari nel teorema sugli aperti. In generale, l'unione numerabile di chiusi non è un insieme chiuso.

Le proprietà (A1), (A2) e (A3) possono essere utilizzate per definire in modo assiomatico uno spazio topologico.

DEFINIZIONE 2.1.14. Uno spazio topologico è una coppia $(X, \tau(X))$ dove X è un insieme e $\tau(X) \subset \mathscr{P}(X)$ è una famiglia di sottoinsiemi (detti aperti) che verifica le proprietà (A1), (A2) e (A3) del Teorema 2.1.11.

Tutti gli spazi metrici sono dunque spazi topologici. Esistono spazi topologici $(X, \tau(X))$ la cui topologia $\tau(X)$ non è indotta da alcuna metrica su X.

2. Limiti di funzione in spazi metrici

DEFINIZIONE 2.2.1 (Punto di accumulazione). Sia (X, d) uno spazio metrico. Un punto $x_0 \in X$ si dice *punto di accumulazione* di un insieme $A \subset X$ se per ogni $r > 0$ si ha

$$A \cap B_r(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

DEFINIZIONE 2.2.2 (Limite). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, sia $x_0 \in X$ un punto di accumulazione di A, e sia $f : A \to Y$ una funzione. Un punto $y_0 \in Y$ si dice *limite* di f per x che tende a x_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$ si abbia

$$0 < d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon.$$

Scriveremo in questo caso

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0,$$

dove la notazione per le distanze di riferimento è omessa.

Se il limite esiste allora è unico. Per avere l'unicità occorre definire il limite limitatamente ai punti di accumulazione.

TEOREMA 2.2.3 (Caratterizzazione sequenziale del limite). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, $x_0 \in X$ un punto di accumulazione di A, $y_0 \in Y$ ed $f : A \to Y$ una funzione. Sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

A) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$;

B) Per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A \setminus \{x_0\}$ vale l'implicazione:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ in } X \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0 \text{ in } Y.$$

DIM. A)⇒B). Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ vale:

$$0 < d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon.$$

Dalla convergenza della successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a x_0 segue l'esistenza di $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia $d_X(x_n, x_0) < \delta$. Quindi per tali $n \geq \bar{n}$ si ottiene $d_Y(f(x_n), y_0) < \varepsilon$.

B)⇒A). Supponiamo per assurdo che esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ ci sia un punto $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ tale che $d_X(x_n, x_0) < 1/n$ ma $d_Y(f(x_n), y_0) \geq \varepsilon$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad x_0 in (X, d_X) ma la successione $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ non converge ad $f(x_0)$ in (Y, d_Y). Questo contraddice l'affermazione B). □

Supponiamo ora che lo spazio metrico di arrivo sia $Y = \mathbb{R}$ con la distanza standard.

TEOREMA 2.2.4 (Operazioni con i limiti). Sia $x_0 \in X$ un punto di accumulazione dell'insieme $A \subset X$ e siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni. Supponiamo che esistano (finiti) i limiti

$$L = \lim_{x\to x_0} f(x) \ \in \mathbb{R},$$
$$M = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \in \mathbb{R}.$$

Allora si ha:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + g(x) = L + M$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = LM$.

Inoltre, se $M \neq 0$ allora si ha anche:

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

DIM. La dimostrazione segue dalle proprietà delle operazioni rispetto ai limiti di successioni in $\mathbb{R}$ e dal Teorema 2.2.3.

□

3. Funzioni continue fra spazi metrici

Il concetto di limite di funzione è strettamente legato alla nozione di funzione continua.

Definizione 2.3.1 (Funzione continua). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $x_0 \in X$. Una funzione $f : X \to Y$ si dice continua nel punto $x_0 \in X$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ vale

$$d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Equivalentemente: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon)$.

La funzione si dice *continua su* X se è continua in tutti i punti di X.

Osservazione 2.3.2. Da un confronto delle definizioni, segue immediatamente la seguente affermazione. Sono equivalenti:

A) f è continua in x_0;
B) Esiste il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Dunque, negli spazi metrici la continuità è equivalente alla continuità sequenziale, nel senso del seguente teorema.

Teorema 2.3.3 (Caratterizzazione sequenziale della continuità). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, sia $f : X \to Y$ una funzione e sia $x_0 \in X$. Sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

A) f è continua in x_0;
B) f è sequenzialmente continua in x_0. Ovvero, per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X vale l'implicazione:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \text{ in } X \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0) \text{ in } Y.$$

Dim. La dimostrazione è identica a quella per la caratterizzazione sequenziale del limite. $\square$

Osservazione 2.3.4. Il punto B) del Teorema 2.3.3 può essere riassunto nel seguente modo:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n \to \infty} x_n\Big),$$

il limite "passa dentro l'argomento" di una funzione continua.

Per le funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ a valori reali si possono definire in modo naturale le operazioni di somma, moltiplicazione e reciproco. Queste funzioni ereditano la continuità delle funzioni da cui sono composte.

Teorema 2.3.5 (Operazioni sulle funzioni continue). Sia (X, d_X) uno spazio metrico e sia $\mathbb{R}$ munito della distanza Euclidea. Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ funzioni continue in un punto $x_0 \in X$. Allora:

i) La funzione somma $f + g : X \to \mathbb{R}$ è continua nel punto x_0;
ii) La funzione prodotto $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ è continua nel punto x_0;
iii) Se $f \neq 0$ su X, allora la funzione reciproca $1/f : X \to \mathbb{R}$ è continua in x_0.

Dim. La dimostrazione segue dal Teorema 2.3.3 sulla caratterizzazione sequenziale della continuità e dalle proprietà delle operazioni elementari rispetto alle successioni numeriche. $\square$

Osservazione 2.3.6. Un'altra facile conseguenza del Teorema 2.3.3 è la continuità della funzione composta: se $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ sono spazi metrici, $f : X \to Y$ è continua in $x_0 \in X$ e $g : Y \to Z$ è continua in $f(x_0) \in Y$, allora la funzione composta $g \circ f : X \to Z$ risulta continua in x_0. Si veda anche il Teorema 2.5.2.

Esercizio 2.3.7. Siano (X, d) uno spazio metrico discreto ed $\mathbb{R}$ munito della distanza standard. Provare che se $f : \mathbb{R} \to X$ è una funzione continua allora deve necessariamente essere costante.

Soluzione. Fissiamo un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Siccome f è continua, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(B(x_0, \delta)) \subset B_X(f(x_0), \varepsilon) = \{f(x_0)\}$ se $0 < \varepsilon < 1$. In altri termini, si ha $f(x) = f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. (Potremmo dire: f è localmente costante).

Vogliamo provare che $f(x) = f(x_0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Sia $R \in (0, \infty]$ il seguente estremo superiore:

$$R = \sup\big\{\delta > 0 \, : \, f(x) = f(x_0) \text{ per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\big\}.$$

Se $R = \infty$ allora la tesi è provata. Supponiamo per assurdo che $0 < R < \infty$ e si consideri la successione

$$x_n = x_0 + R - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Siccome $x_n < x_0 + R$ si ha $f(x_n) = f(x_0)$, almeno definitivamente. D'altra parte, essendo f continua si ha

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) = f(x_0 + R).$$

In modo analogo si prova che $f(x_0 - R) = f(x_0)$. Ripetendo l'argomento iniziale di continuità si deduce che esiste $\bar\delta > 0$ tale che $f(x) = f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - R - \bar\delta, x_0 + R + \bar\delta)$. Questo contraddice la definizione di R. Quindi deve essere $R = \infty$.

4. Trasformazioni lineari e continue

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati reali. Per ogni trasformazione (operatore) lineare $T : X \to Y$ definiamo

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y.$$

Se $\|T\| < \infty$ diremo che T è una trasformazione *limitata* e chiameremo $\|T\|$ la *norma* di T. Indichiamo con

$$\mathscr{L}(X, Y) = \big\{T : X \to Y \,|\, \text{lineare e limitata}\big\},$$

l'insieme delle trasformazioni lineari e limitate da X a Y. Con le naturali operazioni di somma fra applicazioni e di moltiplicazione per uno scalare, $\mathscr{L}(X, Y)$ è uno spazio vettoriale reale. Osserviamo che dalla definizione di $\|T\|$ segue immediatamente la disuguaglianza

(2.4.1) $$\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X, \quad x \in X.$$

Proviamo che $\|\cdot\|$ è una norma:

i) Se $T = 0$ è l'applicazione nulla, allora $\|T\| = 0$. Se viceversa $\|T\| = 0$ allora dalla (2.4.1) segue che $\|Tx\|_Y = 0$ per ogni $x \in X$, e quindi $T = 0$.

ii) Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\|\lambda T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|(\lambda T)x\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|\lambda(Tx)\|_Y = |\lambda| \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = |\lambda|\|T\|.$$

iii) Infine verifichiamo la subadditività. Se $T, S \in \mathscr{L}(X, Y)$ allora

$$\begin{aligned} \|T + S\| &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|(S+T)x\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Sx + Tx\|_Y \\ &\leq \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Sx\|_Y + \|Tx\|_Y \leq \|S\| + \|T\|. \end{aligned}$$

Proposizione 2.4.1. Sia $T : X \to Y$ lineare. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) T è limitata;
B) T è continua in 0;
C) T è continua da X a Y.

Dim. A)⇒C). Se T è limitata, allora per ogni punto $x_0 \in X$ si ha

$$\|Tx - Tx_0\|_Y = \|T(x - x_0)\|_Y \leq \|T\|\|x - x_0\|_X,$$

e quindi T è continua in x_0. In effetti, T è Lipschitziana.

C)⇒B) è banale. Proviamo che B)⇒A). Se T è continua in 0 allora per ogni $\varepsilon > 0$ (ad esempio per $\varepsilon = 1$) esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|x\|_X \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|Tx\|_Y \leq \varepsilon = 1.$$

Dunque, se $\|x\|_X \leq 1$ si ha $\delta\|Tx\|_Y = \|T(\delta x)\|_Y \leq 1$, da cui $\|Tx\|_Y \leq 1/\delta$. Segue che $\|T\| \leq 1/\delta < \infty$. □

Osservazione 2.4.2. Alla luce della proposizione precedente, possiamo equivalentemente definire

$$\mathscr{L}(X, Y) = \{T : X \to Y \mid \text{lineare e continua}\}.$$

Osservazione 2.4.3. Se X è di dimensione finita, allora la linearità implica automaticamente la continuità; si osservi che in questo caso l'immagine di un'applicazione lineare è anch'essa di dimensione finita, perciò non è restrittivo supporre che anche Y sia di dimensione finita. La continuità segue allora dalla linearità osservando che una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è della forma

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

per opportuni $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, ovvero è un polinomio omogeneo di grado 1.

Quando X non è di dimensione finita, allora la linearità non implica la limitatezza (Esercizi 4.4.21 e 4.4.23).

Esempio 2.4.4. Sia $X = C([0, 1])$ munito della sup-norma e sia $Y = \mathbb{R}$. La trasformazione $T : X \to \mathbb{R}$

$$T(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

è lineare, in quanto l'integrale di Riemann è lineare. Inoltre, T è ovviamente anche limitato

$$|T(f)| = \left| \int_0^1 f(t)dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)|\, dt \leq \|f\|_\infty,$$

e dunque è continuo, $T \in \mathscr{L}(X, \mathbb{R}) = X^*$, dove con X^* si indica il duale di X.

Gli argomenti di questa sezione e della precedente sono il punto di partenza del corso di *Analisi funzionale*.

5. Caratterizzazione topologica della continuità

Concludiamo questo capitolo con un teorema importante: la caratterizzazione topologica della continuità.

Teorema 2.5.1 (Caratterizzazione topologica della continuità). *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f : X \to Y$ una funzione. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

1) *f è continua da X in Y;*
2) *$f^{-1}(A) \subset X$ è aperto in X per ogni aperto $A \subset Y$;*
3) *$f^{-1}(C) \subset X$ è chiuso in X per ogni chiuso $C \subset Y$.*

Dim. Nella dimostrazione useremo le seguenti relazioni insiemistiche, per una funzione $f : X \to Y$:

i) $A \subset f^{-1}(f(A))$ per ogni insieme $A \subset X$;
ii) $f(f^{-1}(B)) \subset B$ per ogni insieme $B \subset Y$;
iii) $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$ per ogni $B \subset Y$.

Proviamo l'implicazione 1)⇒2). Verifichiamo che ogni punto $x_0 \in f^{-1}(A)$ è un punto interno di $f^{-1}(A)$. Siccome A è aperto e $f(x_0) \in A$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset A$. Per la continuità di f esiste $\delta > 0$ tale che $d_X(x, x_0) < \delta$ implica $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. In altre parole, si ha $f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon)$. Ma allora si conclude che

$$B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(f(B_X(x_0, \delta)) \subset f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon)) \subset f^{-1}(A).$$

Abbiamo usato i).

Proviamo l'implicazione 2)⇒1). Controlliamo che f è continua in un generico punto $x_0 \in X$. Fissato $\varepsilon > 0$, l'insieme $B_Y(f(x_0), \varepsilon)$ è aperto e quindi l'antimmagine $f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$ è aperta. Siccome $x_0 \in f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon)),$$

da cui, passando alle immagini, segue che

$$f(B_X(x_0, \delta)) \subset f(f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon).$$

Abbiamo usato ii). La catena di inclusioni provata mostra che se $d_X(x, x_0) < \delta$ allora $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, che è la continuità di f in x_0.

Verifichiamo ad esempio 2)⇒3). Sia $C \subset Y$ chiuso. Allora $A = Y \setminus C$ è aperto e quindi $f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$ è aperto. Ovvero, $f^{-1}(C)$ è chiuso. □

È facile ora provare che la composizione di funzioni continue è ancora una funzione continua.