

SISTEMI LAGRANGIANI

Sistemi Lagrangiani

$U \subseteq \mathbb{R}^n$, $L: TU \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$TU \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ $(q, \dot{q}, t) \mapsto L(q, \dot{q}, t)$

$$\text{equazioni di Lagrange: } \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) (q, \dot{q}, \ddot{q}, t) - \frac{\partial L}{\partial q} (q, \dot{q}, t) = 0$$

$$\text{In particolare } L = T - V = T_2 + T_1 + T_0 - V_0 - V, \quad \text{CAPO MECCANICO}$$

$$\frac{1}{2} \dot{q} \cdot A(q) \dot{q}$$

Si possono mettere in forma normale?

$$\underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i}_{\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}} \right)_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}} \right)_i$, dunque si possono mettere in forma normale se $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}$ è invertibile $A(q, \dot{q}, t)$

def In questo caso si dice che L è **REGOLARE** e si possono scrivere le equazioni del moto come un sistema del primo ordine in $TU \ni (q, \dot{q})$

$$\begin{cases} \dot{q} = u \\ \vdots \end{cases}$$

si definisce un campo vettoriale Z_L in TU (dipendente dal tempo)

oss Le è sempre regolare nel capo meccanico: $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}} (q, \dot{q}, t) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}} (q, t) = A(q, t)$

Sia L regolare e indip. dal tempo, allora il corrispondente campo vett. lagrangiano è:

$$Z_L(q, \dot{q}) = (\dot{q}, \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}} \right)^{-1} \left(- \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial q} \right))$$

↑
non ricambiano
termini perché dipende
qualsiasi riga e quale
colonna

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}} \ddot{q} = - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial q}$$

il termine $\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}}$ non c'è
perché non c'è dipendenza dal tempo

rotazioni capo meccanico: $L = T_2 + T_1 + T_0 - V_0 - V$, $\Rightarrow L = T_2 - V_1 - V_0$

$$\boxed{-W_0 = +\mathcal{E}_0}$$

$$-W_1 = +\mathcal{E}_1$$

EsercizioPotenziale dipendente dal tempo (se L -indip.)

$$V = V_0 + V_1 \quad \text{naive non antisimm}$$

$$Q = -\nabla V_0 + \underbrace{\Psi(q) \dot{q}}_{\text{forte gravitazione}} \quad \text{forte gravitazione}$$

$$T_1 = \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q} \cdot M \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t}$$

Verificare che \mathbf{r} è indipendente dal tempo, produrre termini gravitazionali nell'equazione di Lagrange

Integrali primi

1. "integrale di Jacobi"

prop se $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ (L è indip. da t) allora

$$E(q, \dot{q}) := \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}) - L(q, \dot{q})$$

è integrale primo dell'equazione di Lagrange

dum Soluzioone $t \mapsto q^t$ delle eq. di Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(q^t, \dot{q}^t) &= \sum_{i=1}^n \left(\ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (q^t, \dot{q}^t) \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \underbrace{\left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right)}_{=0 \text{ (eq. lagr.)}} \quad \square \end{aligned}$$

calcolo meccanico : $L = T_2 + T_1 + T_0 - V_0 - V_1$

det $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ è omogenea di grado $p \in \mathbb{R}$ se

$$f(nx) = n^p f(x) \quad \forall x \neq 0 \quad \forall n > 0$$

esempi • $f(x, y) = x^2 + y^2$ ($p=2$)

- pol. omogeneo di grado p

- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($p=1$)

- $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ($p=0$)

- $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ($p=-1$)

TEOREMA (di Euler sulle funzioni quadratiche definite positive) $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ è p -omogenea se e solo se $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = p f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

fatto l'implicazione
de la interessante

dimo $\Leftrightarrow f(dx) = d^p f(x) \quad \forall x \neq 0, d > 0$

$$\frac{d}{dt} f(dx) = \frac{d}{dt} (d^p f(x))$$

" " "

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (dx) x_i = p d^{p-1} f(x)$$

se $d = 1$ ottengo quanto cercavo \square

oss $g: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ p -omog. nelle \dot{q} , ovvero $g(q, \dot{q}) = d^p g(q, \dot{q}) \quad \forall q \in U \quad \dot{q} \neq 0$

 $(q, \dot{q}) \mapsto g(q, \dot{q})$

allora $\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial g}{\partial \dot{q}_i} (q, \dot{q}) = p g(q, \dot{q})$

$L = T_2 + T_1 + T_0 - V_0 - V_1$

integrale di Jacobi: $E_L = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \underbrace{xT_2}_{\text{T}_2 \text{ è 1-coniugato}} + \underbrace{\dot{x}T_1}_{\text{T}_2 \text{ è 2-coniugato}} - \underbrace{V_1}_{V_1 \text{ è 1-coniugata}} - \underbrace{\dot{x}T_2 - \dot{V}_1 - T_0 + V_0}_{L} = \dot{T}_2 - \dot{T}_0 + \dot{V}_0$

oss i termini quadrati rimangono uguali, i termini lineari scompaiono e quelli indipendenti cambiano di segno

- oss ① $L = T_2 - V_0$ "lagrangiane naturali": forze posizionali e conservative, Q varietà
- $E = T_2 + V_0 = \text{energia cinetica} + \text{energia potenziale} = \text{energia totale}$
- ② se usono T_0, T_1, V_1 , allora E non ha il significato (proprio) di energia totale

2. "momenti coniugati alle coord. lagrangiane"

$L(q, \dot{q}, t)$ lagrangiana.

def Il momento coniugato alla coord. q_i è $P_i(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t)$

oss lungo una soluzione $t \mapsto q^t$ delle eq. di Lagrange è

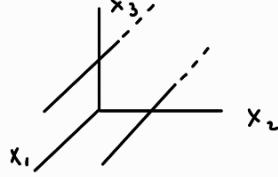
$$\frac{d}{dt} P_i(q, \dot{q}, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q^t, \dot{q}^t, t) \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q^t, \dot{q}^t, t)$$

prop se $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$ (L è indip. da \dot{q}_i), allora P_i è l.p. delle eq. di Lagrange
In realtà vale di più e molto.

esempio 1) $N=1$ libero in coord. cartesiane in \mathbb{R}^3 con forte conservazione
 $L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\|\dot{x}\|^2 - V(x)$

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i \text{ componente } i \text{ della quantità di moto}$$

$$P_1 \text{ è I.P. se } \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \text{ ovvero se}$$



$$L(x_1 + \epsilon_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \quad \forall x_1, \dots, \dot{x}_3$$

dunque L è invariante per traslazione di x_1 .

ricordo $\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0$ e dunque $\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0$, perciò

$$m\dot{x}_1 \text{ è integrale primo} \iff f(x) \cdot e_1 = 0$$

$$- \frac{\partial V}{\partial x_1}$$

= caratterizzatore
della quantità di
moto come integrale
primo vira quando
abbiano parallelo di
sistemi meccanici

2) stesso sistema precedente, ma con coord. sfeniche

$$L(p, \varphi, \theta, \dot{p}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{p}^2 + p^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + p^2 \dot{\theta}^2) - V(p, \varphi, \theta)$$

$$\begin{aligned} P_p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} = m\dot{p} \text{ componente radiale della quantità di moto} \\ &= mx \frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$$

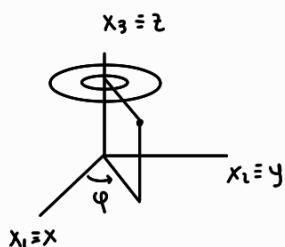
$$\begin{aligned} P_\varphi &= m p^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \text{ componente del momento angolare lungo } x_3 \\ &= m(x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1) \text{ esercizio} \\ &= (mx \wedge \dot{x})_3 \end{aligned}$$

$$P_\theta = mp^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0 : \text{se } \frac{\partial V}{\partial q} = 0, \text{ allora } P_\theta \text{ è I.P.}$$

Il momento angolare lungo z è conservato se $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$, ovvero se

V è costante lungo i cerchi centrati nell'asse z e ormaiiali ad esso,
ovvero se V è invariante per rotazioni attorno all'asse z .



ricordo

$$\begin{cases} m\ddot{\rho} = \dots \\ m\ddot{\theta} = \dots \\ m\ddot{\varphi} = \frac{d}{dt} P_\varphi = \frac{d}{dt} (m\rho^2 \sin\theta \dot{\varphi}) = - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{cases}$$

perché $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$, $L = T - V$ e $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$

"

P_φ

se $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ abbiamo automaticamente l'integrale primo.

Cambi di coordinate nei sistemi Lagrangiani

$$L: TU \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(q, \dot{q}) \mapsto L(q, \dot{q})$$

$$\varphi: U \longrightarrow \hat{U} \quad \rightsquigarrow \quad T\varphi: TU \longrightarrow T\hat{U}$$

$$q \mapsto u = \varphi(q) \quad (q, \dot{q}) \mapsto (\varphi(q), \varphi'(q) \dot{q}) = (u, \dot{u})$$

eq. Lagrange: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ eq. II ordine \rightsquigarrow eq. II ordine in u

prop Diffeo $\varphi: U \rightarrow \hat{U}$ aperti di \mathbb{R}^n . Funzione $L: TU \rightarrow \mathbb{R}$.

1. $T\varphi$ **congiuga** le eq. di Lagrange per L in TU nelle eq. di Lagrange

per $(T\varphi)_* L$ in $T\hat{U}$

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{T\varphi} & T\hat{U} \\ L & \searrow & \nearrow (T\varphi)_* L \\ \mathbb{R} & & \end{array}$$

le eq. per L e per $(T\varphi)_* L$ hanno le stesse soluzioni

2. se L è regolare allora $(T\varphi)_* Z_L = Z_{(T\varphi)_* L}$

oss (pratica) $L(q, \dot{q})$, $\varphi / T\varphi \Rightarrow \hat{L}(u, \dot{u}) = L(\varphi^{-1}(u), (\varphi'^{-1})'(u) \dot{u})$

(ci evitiamo di calcolare $L(q, \dot{q})$).

$$q \mapsto \varphi(q) = u$$

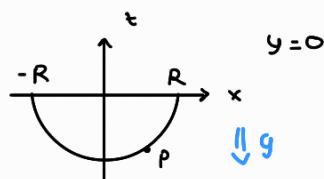
$$L(q, \dot{q}) \rightsquigarrow \hat{L}(u, \dot{u}) = (\varphi'^{-1}(u), (\varphi'^{-1})'(u) \dot{u}) =: (\vartheta(u), \dot{\vartheta}(u) \dot{u})$$

(si estende facilmente a diffeo dipendenti dal tempo).

esempio

(molo pendolo)

$$Q \approx IR$$



$$\begin{aligned} x &\mapsto (x, 0, -\sqrt{R^2-x^2}) \\ (-R, R) &\quad (\dot{x}, \dot{y}=0, \dot{z} = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{R^2-x^2}}) \end{aligned}$$

$$V(x) = mgz \Big|_{z=-\sqrt{R^2-x^2}} = -mg\sqrt{R^2-x^2}$$

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \frac{x^2\dot{x}^2}{R^2-x^2}) + mg\sqrt{R^2-x^2}$$

$$= \frac{1}{2}mR^2 \frac{\dot{x}^2}{R^2-x^2} + mg\sqrt{R^2-x^2}$$

è naturale
det positivo, ok!

Abbiamo 3 parametri: m, R, g . Possiamo eliminare m (è fattore moltiplicativo > 0).

Vogliamo far venir fuori la dipendenza da $\frac{g}{R}$

$$x \mapsto \frac{x}{R} =: u$$

$$u \mapsto Ru$$

$$\begin{aligned} \hat{L}(u, \dot{u}) &= L(Ru, R\dot{u}) = \frac{1}{2}R^2 \frac{R^2\dot{u}^2}{R^2-R^2u^2} + g\sqrt{R^2-R^2u^2} \\ &= \frac{1}{2}R^2 \frac{\dot{u}^2}{1-u^2} + gR\sqrt{1-u^2} \end{aligned}$$

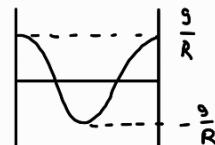
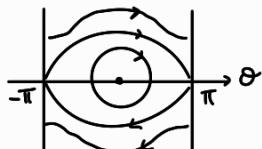
$$\text{Divido per } R^2: \quad \hat{L} = \frac{1}{2} \frac{\dot{u}^2}{1-u^2} + \frac{g}{R} \sqrt{1-u^2}$$

esercizio fare il ritratto in fase

oss

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{R} \cos \theta$$

$$\hat{f} := \frac{g}{R} > 0 \text{ NO biforcazioni}$$



Se $L=T_0-V_0$, allora ha delle soluzioni $t \mapsto q(t)$.

Considero $h>0, k>0$, allora $\hat{L} = hT_0 - kV_0$ ha soluzioni che sono

$$\text{riparam. temporali, ovvero } t \mapsto \hat{q}(t) = q(t \sqrt{\frac{h}{k}})$$

Unicità dei potenziali dipendenti dalle velocità

$$Q(q, \dot{q}, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial V}{\partial q}$$

$$V(Q, \dot{q}, t) = V_0(q, t) + U(q, \dot{q}, t)$$

oss se $\dot{U}(q, \dot{q}, t)$ è tc $\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{U}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \dot{U}}{\partial q} = 0$, allora anche $V + \dot{U}$ è potenziale dipendente dalle velocità per Q

prop $\forall F(q, t)$, $\dot{F}(q, \dot{q}, t) := \frac{dF}{dt}(q, \dot{q}, t)$ soddisfa $\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{F}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \dot{F}}{\partial q} = 0$

dum • $\dot{F} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial t}$

• $\frac{\partial \dot{F}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial t}$

• $\frac{\partial \dot{F}}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i}$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{F}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_i}$$

□

oss il tipo di funzioni che vengono usate sono solo quelle re in cui il dominio delle q è semplicemente connesso.

conseguenza $\forall L(q, \dot{q}, t)$ e $\forall F(q, t)$ $L + \frac{dF}{dt}$ hanno le stesse eq. di Lagrange.
 \Rightarrow la lagrangiana non è mai unica

def/oss L , $L + \frac{dF}{dt}$ sono dette **LAGRAGIANE EQUIVALENTE**.

Due lagrangiane equivalenti sono lagrangiane che differiscono per una derivata totale, non tolto lagrangiane che producono le stesse eq. del moto.

esempio $L + c$ ed L $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$ sono esempi di lagrangiane equiv.

$L + f(t)$ ed L (bisogna scrivere c e $f(t)$ come $\frac{df}{dt} + F$).

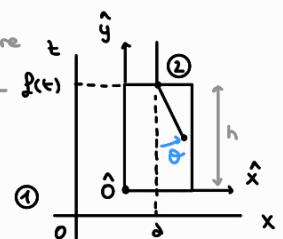
ESEMPIO

(pendolo in ascenso)

legge assegnata
con cui si muove
il punto di sospensione
del pendolo

① vincolo mobile

Forza attiva: peso



$$\begin{cases} x = a + e \sin \theta \\ y = 0 \end{cases}$$

$$z = f(t) - e \cos \theta$$

$$\dot{x} = e \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\dot{y} = 0$$

$$\dot{z} = f'(t) + e \dot{\theta} \sin \theta$$

$$V_{\text{peso}}(\theta) = mgz \Big|_{z=...} = mg(f(t) + e\dot{\theta} \sin \theta)$$

$$L(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{1}{2} m(e^2 \dot{\theta}^2 + f'^2(t) + 2ef'f'(t) \dot{\theta} \sin \theta) - mgf(t) + mge \cos \theta$$

possiamo ignorare
parte sono termini additivi
che dipendono dal tempo

② vincolo fisso

Forze attive $\begin{cases} \text{pero} \\ \text{traiunamento: } -m\ddot{\theta} = -m \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ f''(t) \end{matrix} \right) \end{cases}$

$$\hat{T}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m e^2 \dot{\theta}^2$$

$$\hat{V}_{\text{peso}}(\theta) = mg \hat{z} \Big|_{\hat{z}=h-e \cos \theta} = \cancel{mgh} - mge \cos \theta \Rightarrow -mge \cos \theta$$

$$\hat{V}_\theta(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, t) = -mf''(t) \hat{z}$$

$$\hat{L}(\theta, \dot{\theta}, t) = mf''(t) \hat{z} \Big|_{\hat{z}=h-e \cos \theta} = \cancel{mhf''(t)(h-e \cos \theta)} \Rightarrow -mef'' \cos \theta$$

$$\hat{L}(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{1}{2} m e^2 \dot{\theta}^2 + mge \cos \theta + mef''(t) \cos \theta$$

Confrontiamo L e \hat{L} e troviamo

$$L - \hat{L} = -mef'(t) \dot{\theta} \sin \theta + mef''(t) \cos \theta$$

$$= -me \frac{d}{dt} [f'(t) \cos \theta] = \frac{d}{dt} (-me f'(t) \cos \theta)$$

dunque si tratta di due lagrangiane equivalenti.

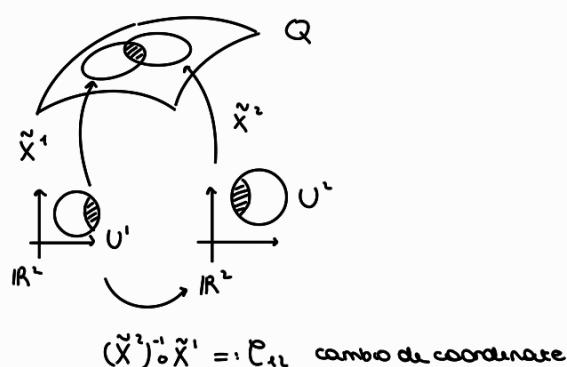
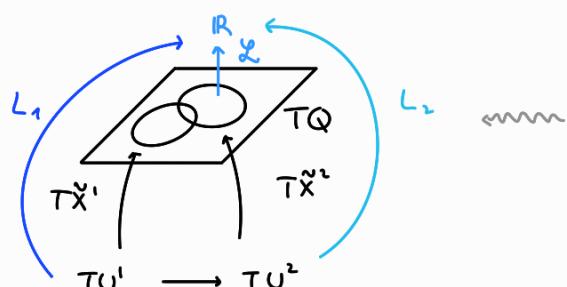
ESEMPIO $L = T_2 - V_0 - V_1$, e $\hat{L} = T_2 - V_0$ sono lagrangiane equivalenti,

$$\text{cioè } V_1 = \frac{dF}{dt} \quad \nabla F(q, t)$$

Natura geometrica delle eq. di Lagrange

Sia Q sottovarietà di \mathbb{R}^m con param. locale $\tilde{x}^i : U^i \rightarrow \tilde{U}^i \subseteq Q$.

$$\mathcal{L} : TQ \rightarrow \mathbb{R}$$



Definiamo $L_i := \mathcal{L} \circ T\tilde{x}^i$

$$L_1 = \mathcal{L} \circ T\tilde{x}^1$$

$$L_2 = \mathcal{L} \circ T\tilde{x}^2$$

$$L_i = L_2 \circ T((\tilde{x}^i)^{-1} \circ \tilde{x}^1)$$

Ma allora in $TU^1 \cap TU^2$ le eq. di Lagrange coincidono

Se disegniamo \mathcal{L} , allora potremo definire un campo vett. lagrangiano su tutto TQ .

Noi lavoriamo a livello locale, ma uscire globalmente.

EQUILIBRI E STABILITÀ NEI SISTEMI LAGRANGIANI

Configurazioni di equilibrio

sols L t-indip.

eq. II ordine con eq. (9*,0) e q* config. di eq.

prop L regolare e t-indip. Allora q^* è config. di eq. se e solo se $\frac{\partial L}{\partial q}(q^*, 0) = 0$

$$\underline{\text{dim}} \quad Z_L(q, \dot{q}) = (\dot{q} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}} \right)^{-1}}_{L \text{ régulière : } \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}} \text{ inversible}} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial q} \dot{q} \right))$$

$$L_L(q^*, 0) = \left(0, \left(\frac{\partial^L L}{\partial q \partial \dot{q}} \right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial q}(q^*, 0) \right) = (0, 0) \iff \frac{\partial L}{\partial q}(q^*, 0) = 0 \quad \square$$

$$\text{corollary 1} \quad L = T_2 - V_0 - V_1 \quad \text{is t-indip. } q^* \text{ e' config. di eq. } \Leftrightarrow V'_0(q^*) = 0$$

(\Rightarrow fono: punti critici di V_0 : $T_2 \in V$, non contano nulla).

$$\underline{\text{dim}} \quad \frac{\partial L}{\partial q} (q^*, 0) = \frac{\partial T_2}{\partial q} (q^*, 0) - \frac{\partial U_0}{\partial q} (q^*, 0) - \frac{\partial U_1}{\partial q} (q^*, 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{1}{2} \dot{q} \cdot A(q) \dot{q} \right] \Big|_{\substack{q=q^* \\ \dot{q}=0}} = \frac{\partial}{\partial q} (b(q) \cdot \dot{q}) \Big|_{\substack{q=q^* \\ \dot{q}=0}}$$

Section 3

sistema meccanico convintoli abnormi e fisi:

$$L = T_2 - V_0 - V_1, \quad Q \subseteq \mathbb{R}^{3N}, \quad F(x, \dot{x}) = -\nabla \tilde{V}_0(x) + \left(\frac{d}{dt} \tilde{\frac{\partial V_1}{\partial \dot{x}}} - \frac{\partial V_1}{\partial x} \right)$$

$$v_0 = \tilde{v}_0 \circ \tilde{x}$$

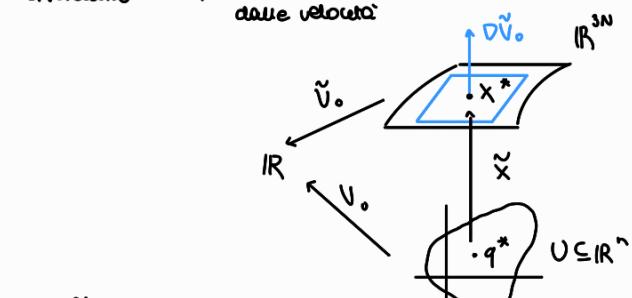
termire
confermativo potenziare dipendente

$$x^* = \tilde{x}(q^*)$$

$$\frac{\partial \tilde{J}_0}{\partial q_i}(q^*) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{J}_0}{\partial q_j}(\tilde{x}(q^*)) \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial q_i}(q^*)$$

$$= \nabla \tilde{V}_0(x^*) \cdot \frac{\partial \tilde{x}}{\partial q_i}(q^*)$$

$$V'_0(q^*) = 0 \iff \frac{\partial V_0}{\partial q_i}(q^*) = 0 \quad \forall i \iff \nabla V_0 \perp T_{x^*} Q$$



• molto rendito: al punto sta ferma perde' i guadagni realizzati, che compensano la perdita e le realizzazioni precedenti sono $\perp T$ xⁿ Q

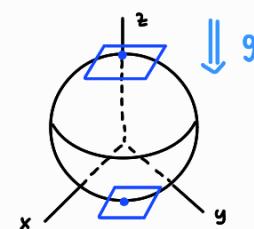
colloquio 2.1 Tutti i punti di minimo e massimo di $\tilde{V}_0|_Q$ sono configurazioni di equilibrio

corollario 2.2 se Q è composta a fuso almeno 2 configurazioni di equilibrio

eterno 1) (pendolo sfeno)

Gli equilibri sono solo polo nord e polo sud,

perché solo lì la grana è perpendicolare al piano tangente!



- Usiamo le coord. se usiamo coord sfidate non possiamo dimostrare l'esistenza di equilibrio nei poli (per def delle coord.).

$$V_0(\varphi, \theta) = mgz \Big|_{z=R\cos\theta} = mgR\cos\theta$$

$$V'_0(\varphi, \theta) = (0, -mgR\sin\theta) \stackrel{!}{=} (0, 0) \Rightarrow \theta = 0, \pi$$

sembra che $(\varphi, 0)$ e (φ, π) siano configurazioni di equilibrio, ma attenere che $0, \pi \notin$ dominio delle coord. Possiamo solo concludere che nel codominio delle coordinate $(\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\})$ non ci sono config. di equilibrio

esercizio Rifare l'esercizio in coordinate cilindriche

- Per dimostrare l'esistenza di equilibri si può possedere altre param. che corrispondono N e S (ad esempio coord. delle due calotte sferiche).

$$\text{coord: } (x, y, \sqrt{R^2-x^2-y^2})$$

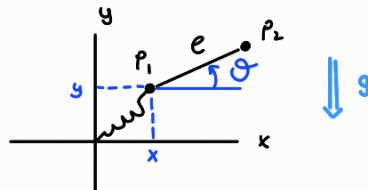
$$V_0(x, y) = mgz \Big|_{z=\dots} = mg\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

$$\nabla V_0(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{mgx}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \\ 0 \\ -\frac{mgy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x=0=y$$

2) (manubrio vincolato ad un piano)

$$N=2, Q \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \Rightarrow n=3$$

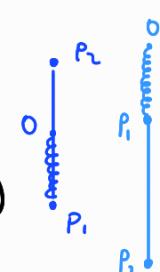
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x \\ y_1 = y \\ z_1 = 0 \\ x_2 = x + R\cos\theta \\ y_2 = y + R\sin\theta \\ z_2 = 0 \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned} V(x, y, \theta) &= \underbrace{\frac{1}{2}k(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)}_{\text{forza elastica}} + m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \Big|_{x_1=\dots, z_1=\dots} \\ &= \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + m_1 g y + m_2 g(y + R\sin\theta) \\ &= \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + (m_1 + m_2)g y + m_2 g R \sin\theta \end{aligned}$$

$$\nabla V(x, y, \theta) = \begin{pmatrix} Kx \\ Ky + (m_1 + m_2)g \\ m_2 g R \cos\theta \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y = -(m_1 + m_2) \frac{g}{K} \\ \theta = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{config. di equilibrio: } \bullet (0, -(m_1 + m_2) \frac{g}{K}, \frac{\pi}{2}), \bullet (0, -(m_1 + m_2) \frac{g}{K}, -\frac{\pi}{2})$$



2) (pendolo doppio) $Q \approx \frac{1}{2}k\dot{\theta}^2 = T$

esercizio scrivere energia cinetica

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = l_1 \sin \theta_1 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = -l_1 \cos \theta_1 \\ x_2 = x_1 + l_2 \sin \theta_2 \\ y_2 = 0 \\ z_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \end{array} \right.$$

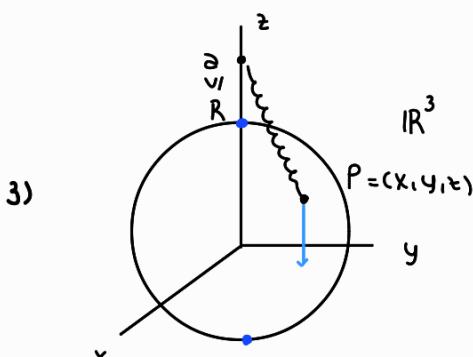
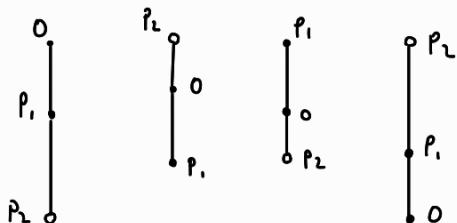
$$V(\theta_1, \theta_2) = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 \Big|_{\substack{z_1 = \dots \\ z_2 = \dots}} = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)$$

$$\text{avr} V = -g l_1 (m_1 + m_2) \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

$$\nabla V(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} -g l_1 (m_1 + m_2) \sin \theta_1 \\ g m_2 l_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\theta_1, \theta_2) \in \begin{cases} \sin \theta_1 = 0 \\ \sin \theta_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_1 = 0, \pi \\ \theta_2 = 0, \pi \end{cases}$$

config. di equilibrio: $(0,0), (0,\pi), (\pi,0), (\pi,\pi)$



sicuramente $(0,0, \pm R)$ sono config. di equilibrio

Potrebbero essercene altri.

Usciamo coord. riferite

$$\left\{ \begin{array}{l} x = R \sin \theta \cos \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \cos \theta \end{array} \right.$$

possiamo ignorare questo contributo (costante)

$$V(\varphi, \theta) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + (z - \bar{z})^2) + mgz \Big|_{\substack{x = \dots \\ y = \dots \\ z = \dots}} = \frac{1}{2}k \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2 + \bar{z}^2 - 2z\bar{z})}_{R^2} + mgz \Big|_{\substack{x = \dots \\ y = \dots \\ z = \dots}}$$

$$= -k\dot{\varphi}^2 + mg^2 \Big|_{\varphi=R\cos\theta} = -(k\dot{\varphi}^2 - mg) R \cos\theta$$

non c'è dipendenza da φ : ha senso, perché c'è simmetria!

$$\nabla V(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ (k\dot{\varphi}^2 - mg) R \sin\theta \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $\theta = 0, \pi$ è dominio delle coord.

Conduttore: non ci sono equilibri $\neq N,S$ se $k\dot{\varphi} \neq mg$, mentre tutti i punti della sfera sono eq. se $k\dot{\varphi} = mg$

Stabilità di equilibrio nei sistemi lagrangiani

$$L = T_2 - V_1 - V_0, \quad t\text{-indip}$$

Ricordo • Integrale di Jacobi, $E = T_2 + V_0$ è integrale primo

⇒ non può esserci stabilità aritmetica

• $\ddot{q} = f(q) + g(q, \dot{q})$
 quadrica nelle \dot{q}
 se esiste $t \mapsto q(t)$ soluzione, allora esiste anche $t \mapsto q(-t)$

moto che va
il contrario

⇒ non può esserci solo stab. nel futuro: se c'è stab., addeve essere $V(t)$

per brevità, d'ora in poi chiameremo "stabilità" la L-stab. L .

Funzioni di Lyapunov: condotta funzione di Lyapunov è $E(q, \dot{q})$ (integrale Jacobi)

Metodo spettrale: può darci solo l'irrabilità in questo caso

Vediamo un risultato base di stabilità e uno di instabilità

Prop (teorema di Lagrange - Dirichlet) $L = T_2 - V_0 - V_1, \quad t\text{-indip}$. Ogni punto

di minimo stretto di V_0 è configurazione di eq. stabile

Dim • q^* p.t. di min stretto di V_0

⇒ q^* config. di eq. ($V'_0(q^*) = 0$)

• Condotta funzione di Lyapunov: $E(q, \dot{q}) = T_2(q, \dot{q}) + V_0(q)$

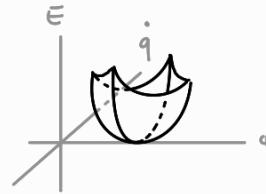
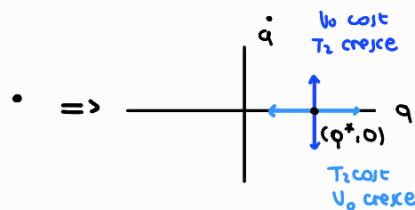
- $L_x E = 0$

- minimo stretto in $(q^*, 0)$?

• \exists intorno di q^* in \mathbb{R}^n nel quale q^*

è punto di min. anziano di V_0 .

• $T_2(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q} \cdot A(q) \dot{q} > 0 \quad \forall q, \forall \dot{q} \neq 0$
 $\dot{q} = 0 \text{ solo se } \dot{q} = 0$

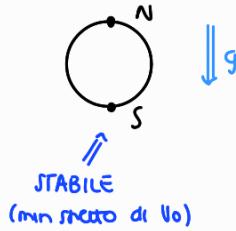


□

prop $L = T_2 - V_0$ (t -indip). q^* p.t.o critico di V_0 ($V'_0(q^*) = 0$). Se $\frac{\partial^2 V_0}{\partial q \partial q}(q^*) = V''(q^*) < 0$
(*) ha almeno un autovalore negativo, $(q^*, 0)$ è instabile

esempio (pendolo sfenco)

$T_2 = T_2 - V_0$
 $\frac{m}{2} \dot{x}^2$



Per N dobbiamo usare l'Hessiana. Usiamo coord. cartesiane $(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$

$$V_0(x, y) = mg \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$\nabla V_0(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{mgx}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ -\frac{mgy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ in } (0, 0)$$

$$V''(0, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{mg}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{mg}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{mg}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{mg}{R} \end{pmatrix} \text{ ha due e.v. } < 0$$

\Rightarrow th instabilità : N è instabile

esercizio Verificare con Hessiana in S ha 2 e.v. $> 0 \Rightarrow$ min stretto

riassunto $L = T_2 - V_1 - V_0$ t -indip

1) Lagrange-Birchler: q^* p.t.o di min. stretto di $V_0 \Rightarrow (q^*, 0)$ è st se

2) $V_1 = 0, V'_0(q^*) = 0$. se $V''_0(q^*)$ ha qualche e.v. $< 0 \Rightarrow (q^*, 0)$ instabile

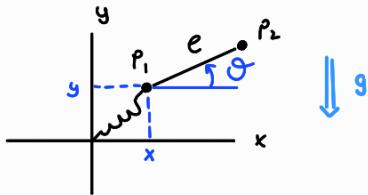
oss1 L-D vale anche se q^* è p.t.o di min. stretto degerere (ad esempio: $V_0(q) = q^4$)

oss2 In molti casi si può far riferimento agli autovalori dell'Hessiana. Consideriamo

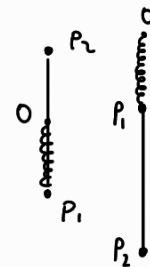
$$L = T_2 - V_0, V'_0(q^*) = 0 :$$

sig di $V''_0(q^*)$	$(q^*, 0)$
tutti > 0	st
almeno un e.v. < 0	instabile
tutti ≥ 0 e almeno uno $= 0$	non possiamo concludere nulla

Esempio 1) (manubrio vincolato ad un piano)



due config. di equilibrio :



Vogliamo studiarne la stabilità.

$$V(x, y, \theta) = (m_1 + m_2)gy + m_2 g e \sin \theta + \frac{1}{2} k(x^2 + y^2)$$

$$\nabla V(x, y, \theta) = \begin{pmatrix} kx \\ ky + (m_1 + m_2)g \\ m_2 g e \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \text{eq: } (0, -\underbrace{(m_1 + m_2) \frac{g}{k}}, \underbrace{\pm \frac{\pi}{2}}_{y^*})$$

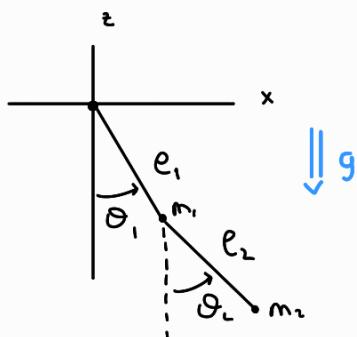
Guardiamo l'hessiana:

$$V''(x, y, \theta) = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & -m_2 g e \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$V''(0, -y^*, \pm \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} k & & \\ & k & \\ & & -m_2 g e \end{pmatrix} \quad \text{c'è un ave} < 0 \Rightarrow \text{instabile}$$

$$V''(0, -y^*, -\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} k & & \\ & k & \\ & & m_2 g e \end{pmatrix} \quad \text{tre ave} > 0 \Rightarrow \text{stabile}$$

2) (pendolo doppio)



$$V(\theta_1, \theta_2) = -(m_1 + m_2)g e_1 \cos \theta_1 - m_2 g e_2 \cos \theta_2$$

$$\nabla V(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)g e_1 \sin \theta_1 \\ m_2 g e_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{equilibri: } (0, 0), (0, \pi), (\pi, 0), (\pi, \pi)$$

Calcoliamo l'hessiana

$$V''(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)g e_1 \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & m_2 g e_2 \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$V''(0, 0) = (+ +) \Rightarrow \text{stabile}$$

$$V''(0, \pi) = (+ -) \Rightarrow \text{instabile}$$

$$V''(\pi, 0) = (- -) \Rightarrow \text{instabile}$$

$$V''(\pi, \pi) = (- +) \Rightarrow \text{instabile}$$

oss

Non è necessario calcolare gli autovalori: a bocca di regno. Nel caso 2×2 è sufficiente guardare traccia e determinante

	$\det V''(q^*)$	$\text{tr } V''(q^*)$	stabilità di q^*
$2 \lambda_{\text{avl}} > 0$	>0	>0	stab lt
$2 \lambda_{\text{avl}} < 0$	>0	<0	instab
$1 \lambda_{\text{avl}} < 0$	<0		instab
$1 \lambda_{\text{avl}} < 0$ $1 \lambda_{\text{avl}} = 0$	=0	<0	instab
$1 \lambda_{\text{avl}} = 0$ $1 \lambda_{\text{avl}} > 0$	=0	>0	?

esercizio

(tratto da un esame)

$N=2$, $\beta > 0$. molle unica forza zettaria, $m_A = m_B = m$

$$Q \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$$

coord: (y, φ)

1. Scrivere la lagrangiana

$$x_A = R \cos \varphi$$

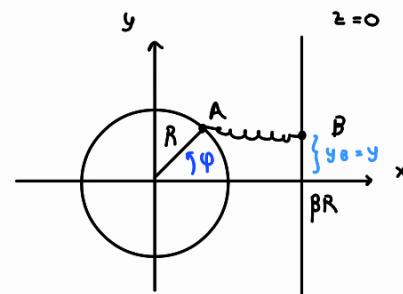
$$x_B = \beta R$$

$$y_A = R \sin \varphi$$

$$y_B = y$$

$$z_A = 0$$

$$z_B = 0$$



$$T(y, \varphi, \dot{y}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

$$V(y, \varphi) = \frac{1}{2} K [(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2] \Big| \begin{array}{l} x_A = \dots \\ z_B = \dots \end{array}$$

$$= \frac{1}{2} K [(R \cos \varphi - \beta R)^2 + (R \sin \varphi - y)^2]$$

$$= \frac{1}{2} K [R^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 R^2 - 2 \beta R^2 \cos \varphi + R^2 \sin^2 \varphi + y^2 - 2 R y \sin \varphi]$$

$$= \frac{1}{2} K \underbrace{[R^2 + \beta^2 R^2]}_{\text{termini costanti che}} + y^2 - 2 \beta R^2 \cos \varphi - 2 R y \sin \varphi$$

possiamo ignorare

$$\Rightarrow L(y, \varphi, \dot{y}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m (\dot{y}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2} K (y^2 - 2 \beta R^2 \cos \varphi - 2 R y \sin \varphi)$$

2. Usare coord $(s = \frac{y}{R}, \varphi)$ per avere una lagrang. che dipende solo da β e $\frac{m}{K} = \mu$

$$\begin{cases} y = R s \\ \dot{y} = R \dot{s} \end{cases}$$

$$\hat{L}(s, \varphi, \dot{s}, \dot{\varphi}) = L(Rs, \varphi, R\dot{s}, \dot{\varphi})$$

$$= \frac{1}{2} m R^2 (\dot{s}^2 + \dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2} K R^2 (s^2 - 2 \beta \cos \varphi - 2 s \sin \varphi)$$

$$\stackrel{\text{divendo per } R^2 \text{ e } K}{\Rightarrow} L_{\beta, \mu}(s, \varphi, \dot{s}, \dot{\varphi}) = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{m}{K} (\dot{s}^2 + \dot{\varphi}^2)}_{T_2} - \underbrace{\frac{1}{2} (s^2 - 2 \beta \cos \varphi - 2 s \sin \varphi)}_{V(s, \varphi)}$$

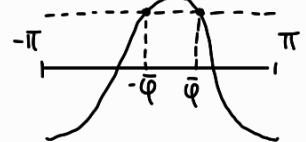
$$V(s, \varphi)$$

3. Trovare eq. e diagramma di biforcazione di φ in funzione di β

calcoliamo p.ti critici di V : $\nabla V(s, \varphi) = \begin{pmatrix} s - s \sin \varphi \\ \beta s \cos \varphi - s \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

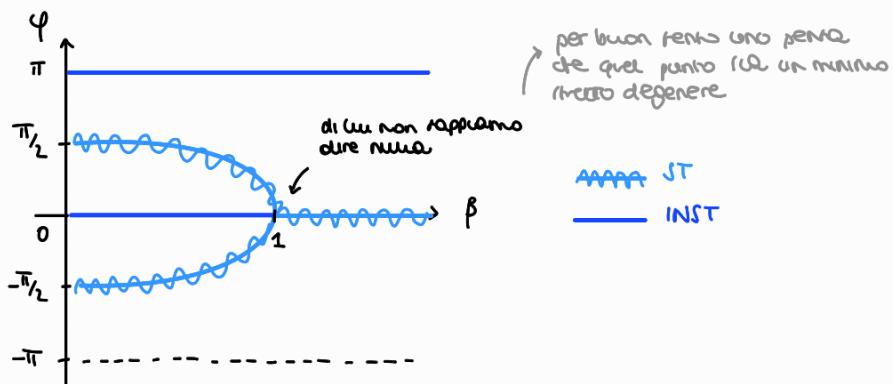
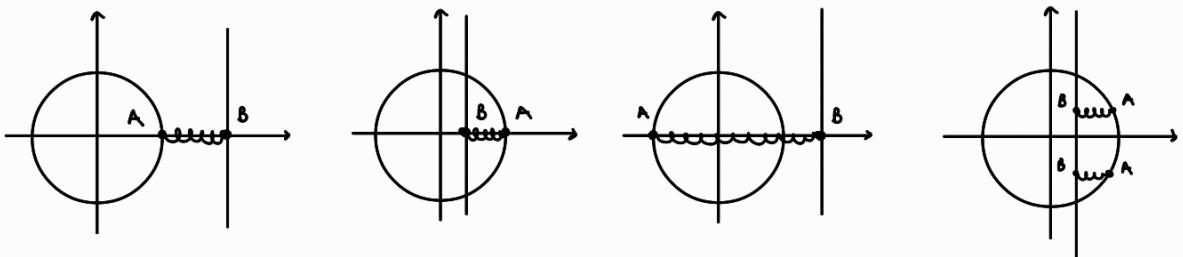
$$\Rightarrow \begin{cases} s = \sin \varphi \\ (\beta - \cos \varphi)s = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} s=0 \\ \cos \varphi = \beta \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{se } \beta \leq 1 \\ \bar{\varphi} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{array}$$

adunare



equilibri: $(s, \varphi) = (0, 0)$ $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \alpha \beta > 0$
 $(0, \pi)$

$$\left. \begin{array}{l} (\sqrt{1-\beta^2}, \bar{\varphi}) \\ (-\sqrt{1-\beta^2}, -\bar{\varphi}) \end{array} \right\} \beta \leq 1$$



4. stabilità degli eq. staz.

Calcoliamo l'hessiana: $V''(s, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \varphi \\ -\cos \varphi & \beta \cos \varphi + s \sin \varphi \end{pmatrix}$

$$V''(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{tr} = 1 + \beta > 0, \det = \beta - 1 \quad \begin{cases} > 0 & \beta > 1 \\ = 0 & \beta = 1 \\ < 0 & \beta < 1 \end{cases}$$

$$V''(0, \pi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\beta \end{pmatrix} \quad \det = -\beta - 1 \Rightarrow \text{int}$$

$$V''(\bar{s}, \bar{\varphi}) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \bar{\varphi} \\ -\cos \bar{\varphi} & \beta \cos \bar{\varphi} + \bar{s} \sin \bar{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & \beta^2 + \bar{s}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{s} = \sqrt{1-\beta^2}$
 $\sin \bar{\varphi} = \bar{s}$
 $\cos \bar{\varphi} = \beta$

$\det = 1 - \beta^2 \quad \begin{cases} > 0 & \beta < 1 \\ = 0 & \beta = 1 \end{cases} \quad , \quad \kappa = 2 > 0$

Risultati sanciti per stabilità ed instabilità

$$L = T_2 - V_0$$

- q^* min stretto di V_0 è stabile
- $V''(q^*) < 0 \Rightarrow$ non minimo stretto, allora c'è instabilità
- $V''(q^*) \geq 0$ e almeno $\lambda=0$. Non sappiamo dire nulla.

Cosa apprendiamo dire della stabilità dei punti critici di V_0 che non sono minimi stretti?

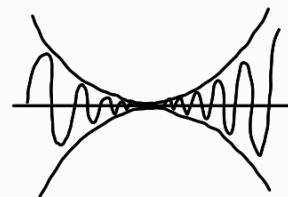


congettura fatta: solo i punti di minimo stretto sono stabili

esempio: $n=1$, $L = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - V(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$$V(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

(e' C^1 in $0 \in \mathbb{R}$)



$V'(0)=0 \Rightarrow 0$ è p.t.critico ma non è minimo stretto

Tuttavia è stabile, perché in ogni intorno attorno delle barriere di potenziale

che non permettono di scappare. Non è un caso legato solo alla diff., infatti..

$$V(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

e' C^∞ e presenta la stessa situazione.

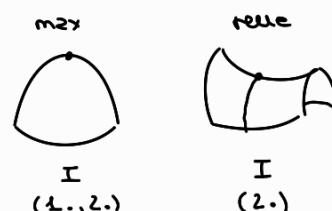
Questa funzione non è analitica!

teoremi: 1. (Hagedorn 1972) $L \in C^2$

q^* minimo \Rightarrow instabile

2. (Palamodov 1973) L analitica
(e anche T_2)

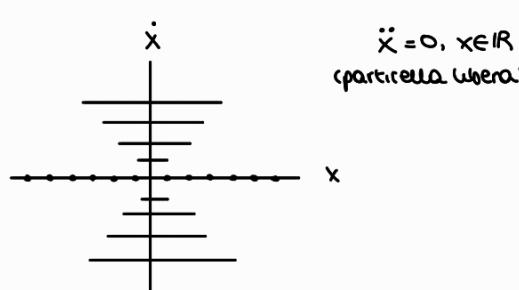
q^* non è minimo \Rightarrow instabile



3. (Leloy-Pfiffer 1982) $L = T_2 - V_0$ analitico, $n=2$ ($\text{e } n=1$)
(e anche T_2)

p.t.c di min non stretto sono instabili

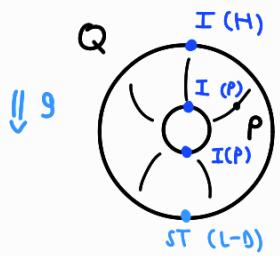
banale



$I \Leftarrow n=2$
 $\Leftarrow n>2 ???$

ESEMPIO

Punto materiale vincolato a toro disposto in posizione verticale con forza di gravità



- La sua legge gravitazionale è analitica \Leftrightarrow param. del toro ha funzioni trigonometriche
- $V = mgz \Big|_Q$

Punto materiale vincolato a toro disposto in posizione orizzontale con forza di gravità



Linearizzazione delle equazioni di Lagrange

$$L = T_2 - V_0$$

$$V_0'(q^*) = 0 \quad , \quad \text{eq. } (q^*, 0)$$

prop $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q} \cdot A(q) \dot{q} - V(q) \quad , \quad q \in \mathbb{R}^n \quad . \quad V'(q^*) = 0 \quad . \quad$ La linearizzazione delle eq. di Lagrange di L in $(q^*, 0)$ è

$$A(q^*) \ddot{q} + V''(q^*)(q - q^*) = 0$$

sono le eq. di Lagrange della lagrangiana "quadratizzata"

$$L^*(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q} \cdot A(q^*) \dot{q} - \frac{1}{2} (q - q^*) \cdot V''(q^*) (q - q^*)$$

$$\text{dim } \cdot Z_L(q, \dot{q}) = (\dot{q}, -A(q)^{-1} [V'(q) + \underbrace{P(q, \dot{q})}_{\text{termine quadratico in } \dot{q}}])$$

$O_K :=$ termini di ordine K in $\|q - q^*\|, \|\dot{q}\|$

$$- V'(q) = V'(q^*) + V''(q^*)(q - q^*) + O_2$$

$$- P(q, \dot{q}) = O_2$$

$$- q \mapsto A(q) \text{ diff. e invertibile} \Rightarrow q \mapsto A(q)^{-1} \text{ diff}$$

$$A(q)^{-1} = A(q^*)^{-1} + O_1$$

$$\cdot Z_L(q, \dot{q}) = (\dot{q}, -[A(q^*)^{-1} + O_1] (V''(q^*)(q - q^*) + O_2 + O_2))$$

$$= (\dot{q}, -A(q^*)^{-1} V''(q^*)(q - q^*) + O_2)$$

$$\Rightarrow \ddot{q} = -A(q^*)^{-1} V''(q^*)(q - q^*)$$

• Rimane da verificare la lagrangiana

matrice dei cofattori

prop $L = T_2 - V_0, \quad V_0'(q^*) = 0. \quad$ se $V_0''(q^*)$ ha 1 zw. < 0 $\Rightarrow (q^*, 0)$ int.

(*)

dim • teorema spettrale: $\dot{z} = X(z), \quad X(z^*) = 0. \quad$ se $X'(z^*)$ ha un zw.

con $\operatorname{Re} z > 0$, allora z^* è instabile

• linearizzazione a $(q^*, 0)$: $\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \Lambda(q^*) \begin{pmatrix} q - q^* \\ v \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = -A(q^*)^{-1} + V''(q^*)(q - q^*) \end{cases}$$

$$\Lambda(q^*) = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_n & \mathbb{I}_n \\ -A(q^*)^{-1} V''(q^*) & \mathbb{O}_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{z.n.}} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -A^{-1} V'' & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

- $\text{Sp}(M) = \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ autovectori connessi a λ matrice M
- polinomio caratteristico: $\det(M - xI) = (-1)^m (x - \mu_1) \dots (x - \mu_m)$ ($x \in \mathbb{C}$)
- $\text{Sp}(-\Lambda) \xrightarrow{(I)} \text{Sp}(A^{-1}U') \xrightarrow{(II)} \text{Sp}(U')$

(I) Lemma $\text{Sp}(A^{-1}U') = \{d_1, \dots, d_n\} \Rightarrow \text{Sp}(\Lambda) = \{\pm \sqrt{-d_1}, \dots, \pm \sqrt{-d_n}\}$

dimm • $B := -A^{-1}V'$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & I \\ B & 0 \end{pmatrix}$, $\text{Sp}(B) = \{-d_1, \dots, -d_n\}$

• pol. caratt. di B :

$$\det(B - xI) = (-1)^n (x + d_1) \dots (x + d_n)$$

$$\bullet \det(\Lambda - \mu I) = \det \begin{pmatrix} -\mu d_{n+1} & I \\ B & -\mu d_n \end{pmatrix}$$

\uparrow \uparrow
 $n+1$ $(n+1) \times n$

$$= \det \begin{pmatrix} -\mu d_{n+1} + \mu d_n & I \\ B - \mu^2 I & -\mu d_n \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ B - \mu^2 I & -\mu d_n \end{pmatrix} = \pm \det(B - \mu^2 I)$$

$$= \pm (\mu^2 + d_1) \dots (\mu^2 + d_n)$$

$$= \pm (\mu \pm \sqrt{-d_1}) \dots (\mu \pm \sqrt{-d_n})$$

$$\Rightarrow \text{Sp}(-\Lambda) \xrightarrow{(I)} \text{Sp}(A^{-1}U') \xrightarrow{(II)} \text{Sp}(U')$$

$$\{\pm \sqrt{-d_1}, \dots, \pm \sqrt{-d_n}\} \quad \{d_1, \dots, d_n\}$$

oss Per calcolare aut e aut di $A^{-1}V'$ non ferire invertire A

$$\det(A^{-1}V' - \lambda I) = \det(A^{-1}V' - \lambda A^{-1}A + \lambda I) = \det(A^{-1}) \det(V' - \lambda A) \neq 0$$

\Rightarrow aut di $A^{-1}V'$ sono gli zeri d_1, \dots, d_n di $\det(V' - \lambda A) = 0$

aut di $A^{-1}V'$ relativo ad aut d_i :

$$v \neq 0 \text{ tc } A^{-1}V' v_j = d_j v_j$$

$$V'' v_j = d_j A v_j$$

def A -aut di $V' =$ aut di $A^{-1}V'$

$$A \text{-aut di } V' = \text{aut di } A^{-1}V'$$

oss se V' simmetrica \Rightarrow aut di V' sono reali

\Rightarrow 3 bare di \mathbb{R}^n formate da aut orthonormali

Lemma se A è simmetrica e definita positiva e V'' è simmetrica allora

- A -avl di V'' sono reali
- \exists base di \mathbb{R}^n fatta di A -avl $\{u_1, \dots, u_n\}$ di V'' che sono A -ortonormali, ovvero $u_i \cdot Au_j = \delta_{ij}$

(II) Lemma A è simmetrica e definita positiva e V'' è simmetrica. se V'' ha un avl < 0, ha anche un A -avl < 0

dum • $k < 0$ avl di V''

$$\exists v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ tc } V''v = kv$$

$$v \cdot V''v = k \|v\|^2 < 0$$

• scelgo base $\{u_1, \dots, u_n\}$ di \mathbb{R}^n fatta di A -avl A -ortonormali di V''

$$v = \sum_{i=1}^n c_i u_i \quad \exists c_1, \dots, c_n \text{ non tutti } = 0$$

$$0 > v \cdot V''v = (\sum_i c_i u_i) \cdot V''(\sum_i c_i u_i)$$

$$= \sum_{ij} c_i c_j u_i \cdot \underbrace{V'' u_j}_{d_j A u_j} = \sum_j c_j c_j d_j u_i \cdot A u_j = \sum_{i=1}^n c_i^2 d_i < 0$$

\Rightarrow Almeno un d_i è < 0.

azione se V'' ha un avl < 0 $\Rightarrow A''V''$ ha un avl $d < 0$, infatti,

se V'' ha un avl < 0 $\Rightarrow A''V''$ ha un avl $d < 0$

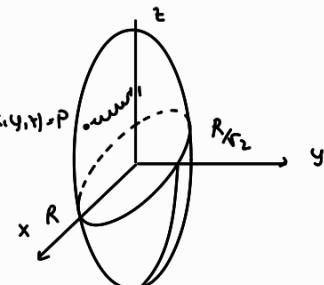
(I) \Rightarrow Λ ha 2 avl $\pm \sqrt{-d} = \pm \sqrt{|d|}$ $\Rightarrow \sqrt{|d|}$ è avl di $\Lambda > 0$

$\stackrel{\text{th}}{\Rightarrow}$ concludere.

□

Esercizio (p. ro vincolato a ellisse) $x^2 + 2y^2 + z^2 = R^2$

forze esterne: peso, molla (resa orizzontale)



Calcolare equilibrio e analisi della stabilità nella

calotta $z > 0$ al variare del parametro $K := \frac{K_R}{mg} > 0$

Usare coordinate (x, y) e param. per $z > 0$ con $t = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

- energia potenziale forte estive

$$U(x, y) = mgz + \frac{1}{2}K(x^2 + y^2) \Big|_{z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = mg\sqrt{R^2-x^2-y^2} + \frac{1}{2}K(x^2 + y^2)$$

- configurazione di equilibrio

$$\nabla U(x, y) = \begin{pmatrix} Kx - mg \frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \\ Ky - mg \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(K - \frac{mg}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}) \\ y(K - \frac{2mg}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} \quad x=y=0 \quad \forall \alpha > 0$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} K = \frac{mg}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \Rightarrow \sqrt{R^2 - x^2} = \frac{mg}{K} \Rightarrow R^2 - x^2 = \frac{m^2 g^2}{K^2} \\ y=0 \end{cases}$$

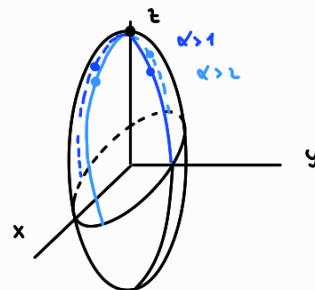
$$x^2 = R^2 - \left(\frac{mg}{K}\right)^2 = R^2 \left(1 - \left(\frac{mg}{KR}\right)^2\right) = R^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)$$

$$\begin{cases} x = \pm R \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}} = \pm \bar{x} \\ y=0 \end{cases}$$

equilibrio $(\pm \bar{x}, 0)$ se $\alpha > 1$

$$\alpha = 1 : \bar{x} = 0$$

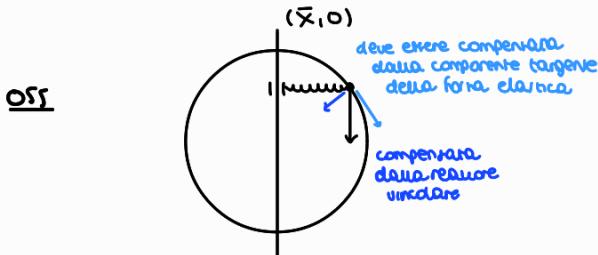
$$\alpha \rightarrow +\infty, \bar{x} \rightarrow R$$



$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} x=0 \\ K = \frac{2mg}{\sqrt{R^2 - 2y^2}} \end{cases}$$

Farendo i conti ritrovano gli equilibri $(0 \pm \frac{R}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{4}{\alpha^2}})$ se $\alpha > 2$

$$\textcircled{4} \quad K = \frac{mg}{\sqrt{\dots}} = \frac{2mg}{\sqrt{\dots}} \quad \text{MAI VERO}$$



$$\bullet \quad V''(x,y) = \begin{pmatrix} \left(K - \frac{mg}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right) - \frac{mgx^2}{(\dots)^{3/2}} & - \frac{2mgxy}{(\dots)^{3/2}} \\ - \frac{2mgxy}{(\dots)^{3/2}} & \left(K - \frac{2mg}{R}\right) - \frac{4mgy^2}{(\dots)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

$$V''(0,0) = \begin{pmatrix} K - \frac{mg}{R} & 0 \\ 0 & K - \frac{2mg}{R} \end{pmatrix} \quad \text{è stabile se } K > 2 \frac{mg}{R} \Rightarrow \alpha > 2$$

$$V''(\bar{x},0) = \begin{pmatrix} -\frac{mg\bar{x}^2}{(\dots)^{3/2}} & 0 \\ 0 & K - \frac{2mg}{R} \end{pmatrix} \quad \text{instabile}$$

analog $V''(0, \pm \bar{y})$ instabile

PICCOLE OSCILLAZIONI

Struttura delle piccole orazioni

$$L = T_2 - V_0$$

$V_0''(q^*) = 0$ e $V_0''(q^*)$ è definita positiva \Rightarrow tutti gli aut > 0 \Rightarrow V_0 minimo $\Rightarrow q^*$ stabile

$$L = \frac{1}{2} \dot{q} \cdot A(q) \dot{q} - V_0(q)$$

$$\text{Linearizzazione è } \Lambda(q^*)\dot{q} + V''(q^*)(q - q^*) = 0$$

sono eq. di Lagrange di una legge di moto nella forma $L^*(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q} \cdot A(q) \dot{q} - \frac{1}{2}(q - q^*) \cdot V'(q^*)(q - q^*)$

$$\tilde{z}_c^{-1}(q^*, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\Lambda(q^*)^{-1}V''(q^*) & 0 \end{pmatrix} =: \Lambda$$

$$\{p(\Lambda) = \{\pm \sqrt{d_1}, \dots, \pm \sqrt{d_n}\} \text{ con } d_1, \dots, d_n \text{ avl di } A^{-1}V\}$$

EIR A-avl di V" ($\det(V'' - dA) = 0$)

aut di $A''V'$, A -aut di V'' , u_1, \dots, u_n sono bare de \mathbb{A}'' ed è scena tc $u_i \cdot A u_i = \delta_{ij}$

Particolari sono ancora $v_0(q^*) > 0$.

$$\underline{\text{prop}} \quad V'(q^*) = 0, \quad V''_0(q^*) \quad d.p.$$

1) Gli A-zeroscalari di $V^{*(q^*)}$ sono tutti > 0

$$w_1^*, \dots, w_n^* \quad \text{con } w_i^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(convenzione: $\omega > 0$)

2) Gli autolatori della linearizzazione Λ sono $\pm i\omega_1, \dots, \pm i\omega_n$

$\Rightarrow (q^*, 0)$ è elut.

dum 1) • A-anz d. V": d₁, ..., d_n

A-avt d. V : u₁, ..., u_n

- Fisso $j = 1, \dots, n$ $u_j \cdot \underbrace{V''(q^*)}_{>0} u_j > 0$ perche' V'' d.p. e $u_j \neq 0$

$$u_j + d_j A u_j$$

$$d; \underbrace{u_j \cdot A u_j}_{}$$

>0 perde A d.p. $\Rightarrow d_j > 0$

$$2) \quad \cdot \quad n_j = \omega^2 j$$

- Ave du \wedge sono $\pm \sqrt{-d_1}, \dots, \pm \sqrt{-d_n}$
 $"$ " "
 $\pm i\omega_1, \dots, \pm i\omega_n$

oss se Λ e' diagonalizzabile con evl. $t_1\omega_1, \dots, t_n\omega_n$, allora esiste una base di aut di \mathbb{C}^{2n}

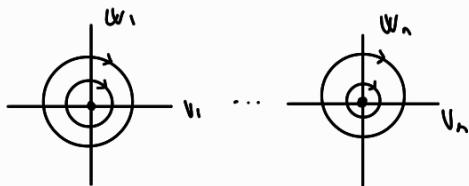
$$v_i \pm iw_i, \dots, v_n \pm iw_n$$

$$\Lambda(v_i \pm iw_i) = \pm i\omega_i(v_i \pm iw_i), \quad v_i, w_i \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow v_1, w_1, \dots, v_n, w_n$ base di \mathbb{R}^{2n}

$\langle v_j, w_j \rangle$ invariante per Λ

$$\mathbb{R}^{2n} = \langle v_1, w_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n, w_n \rangle$$



$$P = [v_1 \ v_1 \ \dots \ v_n \ w_n]$$

$$\Rightarrow P^{-1} \Lambda P = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 \\ -\omega_1 & 0 \\ & \ddots \\ & & 0 & \omega_n \\ & & -\omega_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \exp(t\Lambda) P = \begin{pmatrix} R(t\omega_1) & & \\ & \ddots & \\ & & R(t\omega_n) \end{pmatrix}$$

$$R(t\omega_i) = \begin{pmatrix} \cos t\omega_i & \sin t\omega_i \\ -\sin t\omega_i & \cos t\omega_i \end{pmatrix}$$

$$\text{(*)} \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}: \quad \exp(t\Lambda)(a_j v_j + b_j w_j) = (a_j \cos(\omega_j t) + b_j \sin(\omega_j t)) v_j + (-a_j \sin(\omega_j t) + b_j \cos(\omega_j t)) w_j$$

Λ e' diagonalizzabile, perche' ha i suoi autovettori $v_i \pm iw_i$ con

$$\mathbb{R}^{2n} \ni v_j = \begin{pmatrix} u_j \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \overset{\leftarrow}{w_j u_j} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $v_1 \pm iw_1, \dots, v_n \pm iw_n$ lin. indip. (ovvio)
- $\Lambda(v_i \pm iw_i) = \pm i\omega_i(v_i \pm iw_i)$, infatti

$$\Lambda(v_i \pm iw_i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -A''V'' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ iw_j u_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iw_j u_j \\ -A''V'' \underbrace{u_j}_{d_j A u_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iw_j u_j \\ -\omega_j u_j \end{pmatrix} = i\omega_i \begin{pmatrix} u_i \\ iw_j u_j \end{pmatrix}$$

def • soluzioni (periodiche di periodo $\frac{2\pi}{\omega_i}$) su rotazione invariante

$\langle v_i, w_i \rangle = \langle \begin{pmatrix} u_i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ w_j u_j \end{pmatrix} \rangle$ si chiamano modi NORMALI di oscillazione

• soluzioni del sistema lineare si chiamano piccole oscillazioni

• $\omega_1, \dots, \omega_n$ si chiamano FREQUENZE delle p.o.

Abbiamo dim che ogni P.O. è combinazione lineare di mode normali

def Chiamiamo INTEGRALÉ GENERALE di regente rispetto

$$\left\{ \begin{array}{l} q(t) - q^* = \sum_{j=1}^n (\alpha_j \cos(\omega_j t + b_j; \sin(\omega_j t)) u_j; \\ \dot{q} = \sum_{j=1}^n (-\alpha_j \sin(\omega_j t + b_j) \cos(\omega_j t)) \omega_j u_j; \end{array} \right. , (\alpha, b) \in \mathbb{R}^{2n}$$

verifichiamo che $A\ddot{q} + V''(q^*)(q - q^*) = 0$.

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= \sum_{j=1}^n (-\alpha_j \omega_j^2 \cos(\omega_j t + b_j; \omega_j^2 \sin(\omega_j t)) u_j) \\ &= -\sum_{j=1}^n \omega_j^2 (\alpha_j \cos(\omega_j t + b_j; \sin(\omega_j t)) u_j) \\ A\ddot{q} &= -\sum_{j=1}^n (\alpha_j \cos(\omega_j t + b_j; \sin(\omega_j t)) \underbrace{\omega_j^2}_{V''(q^*)} u_j) = -V''(q(t) - q^*) u_j \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Data } q_0, \dot{q}_0 \exists \alpha, b \in \mathbb{R}^{2n} \text{ tc } \begin{cases} \sum_j \alpha_j u_j = q_0 - q^* \Rightarrow \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha \\ \sum_j \omega_j b_j u_j = \dot{q}_0 \Rightarrow \exists! (b_1, \dots, b_n) = b \end{cases}$$

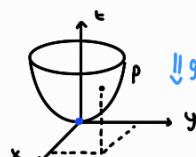
oss • $V(\alpha_j, b_j) \neq (0, 0) \exists c_i > 0, \delta_j \in [0, \pi] \text{ tc } \alpha_j \cos(\omega_j t) + b_j \sin(\omega_j t) = c_i \sin(\omega_j t + \delta_j)$
 $(c_i \cos(\omega_j t + \delta_j))$

$$\bullet q \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} q_1(t) - q_1^* \\ \vdots \\ q_n(t) - q_n^* \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n c_j \sin(\omega_j t + \delta_j) \begin{pmatrix} u_{j1} \\ \vdots \\ u_{jn} \end{pmatrix}$$

esempio 1) $\ddot{z} = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2) \quad a > 0, b > 0, a \neq b$

equilibri, stabilità, piccole oscillazioni, modo normale:

coord: (x, y)



$$\bullet V(x, y) = mgz \mid_{z=...} = \frac{1}{2}mg(ax^2 + by^2)$$

$$\nabla V(x, y) = \begin{pmatrix} mgax \\ mgbx \\ mgay \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$V''(x, y) = \begin{pmatrix} mg a & 0 \\ 0 & mg b \end{pmatrix} \quad 2ab > 0 \Rightarrow \text{è d.p.}$$

$$\bullet T(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \mid_{\dot{z}=...} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (ax\dot{x} + by\dot{y})^2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \cdot A(x, y) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad \text{è un po' laborioso...}$$

$$\Rightarrow A(x,y) = \begin{pmatrix} m(1+\alpha^2 x^2) & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \Rightarrow A(0,0) \dots$$

Invece che fare così, valuto subito

$$T(0,0,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$\Rightarrow A(0,0) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

- u_1 aut relativo a due d.
cerco u_1 tc $(V'' - d_1 A)u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u_1 = 0$
 $\Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- analogamente si trova u_2

- Frequenze delle P.O.:

$$\det(V''(x,y) - dA(0,0)) = \det \begin{pmatrix} mg\alpha - dm & 0 \\ 0 & mgb - dm \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = g\alpha \\ d_2 = gb \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{g\alpha} \\ \omega_2 = \sqrt{gb} \end{cases}$$

A-aut di V'' sono $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

modo normale "1":

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) u_1 = c_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

modo normale "2":

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) \end{pmatrix}$$

Una gerenza piccola oscillazione è un moto del tipo

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) \\ c_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) \end{pmatrix}$$

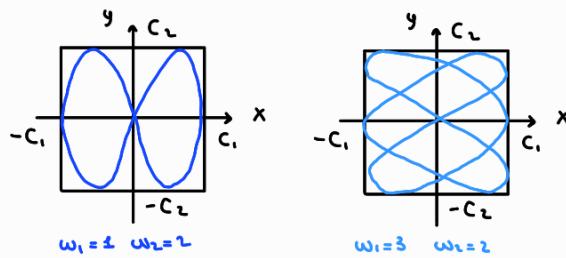
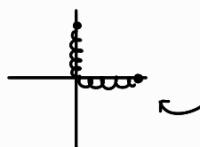


figure de Lissajous

Leggiugno delle P.O.:

$$L^*(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q} \cdot A(q) \dot{q} - \frac{1}{2} (q - q^*) \cdot V''(q^*) (q - q^*)$$

$$\begin{aligned} L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mg\alpha & 0 \\ 0 & mgb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} (mg\alpha x^2 + mgb y^2) \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} mg\alpha x^2 \right)}_{n=1} \underbrace{\left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{1}{2} mgb y^2 \right)}_{n=1} \end{aligned}$$



È come reggono sistema forte carico da due oscillazioni armoniche decapillate.

(*)

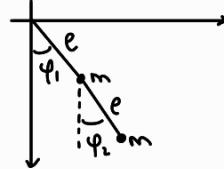
2) (P.O. del pendolo doppio)

Abbiamo visto che l'unica configurazione di equilibrio stabile è

Supponiamo i pendoli abbiano stessa lunghezza e stessa massa

$$V(\varphi_1, \varphi_2) = -mge(2\cos(\varphi_1 + \cos(\varphi_2))$$

$$\nabla V(\varphi_1, \varphi_2) = mge \begin{pmatrix} 2\sin(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_2) \end{pmatrix}$$



$$V''(\varphi_1, \varphi_2) = mge \begin{pmatrix} 2\cos(\varphi_1) & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_2) \end{pmatrix}$$

$$V''(0,0) = \begin{pmatrix} 2mge & 0 \\ 0 & mge \end{pmatrix} \quad \text{def. pos.}$$

$$\omega(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$T(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2(2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)))$$

$$T(0,0, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2(2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2)$$

$$\Rightarrow A(0,0) = m\dot{\varphi}^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V''(0,0) = mge \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Frequenze delle P.O. $\det(V''(0,0) - \lambda A(0,0)) = 0$

Facchiamo uguaglia con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\frac{g}{e} =: \delta$, $V'' = \begin{pmatrix} 2\delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$

$$\det(V'' - \lambda A) = \begin{pmatrix} 2\delta - \lambda & -\delta \\ -\delta & \delta - \lambda \end{pmatrix} = 2(\delta - \lambda)^2 - \delta^2 = (\sqrt{2}(\delta - \lambda) - \delta)(\sqrt{2}(\delta - \lambda) + \delta) = 0$$

$$= (\sqrt{2}\delta - (\sqrt{2}+1)\lambda)(\sqrt{2}\delta - (\sqrt{2}-1)\lambda) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\sqrt{2}\delta}{\sqrt{2}+1} = (2-\sqrt{2})\delta > 0 \\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}\delta}{\sqrt{2}-1} = (2+\sqrt{2})\delta > 0 \end{cases} \quad \text{giusto! se fanno co' misure precise dei conti.}$$

$$\omega_1 = \sqrt{(2-\sqrt{2})\delta}, \quad \omega_2 = \sqrt{(2+\sqrt{2})\delta}$$

$$\underline{\text{numero dimensionale}} \quad \sqrt{r} = \sqrt{\frac{g}{e}} = \frac{1}{S} = \text{dimensione della frequenza : giusto!}$$

• modi normali: $(V'' - \lambda A)u = 0$

$$\begin{pmatrix} 2\delta - \lambda & -\delta \\ -\delta & \delta - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda u_1 + (2\delta - \lambda)u_2 \\ -\lambda u_1 + (\delta - \lambda)u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

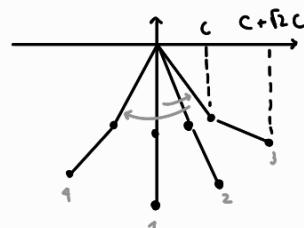
$$u_2 = +\frac{\lambda}{2\delta - \lambda} u_1^2$$

$$\underline{\lambda = \lambda_1} \quad u_1^2 = \frac{\lambda_1}{2\delta - \lambda_1} = \frac{(2-\sqrt{2})\delta}{(1-2+\sqrt{2})\delta} u_1^2 = \frac{(2-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})} u_1^2 = \dots = \sqrt{2} u_1^2$$

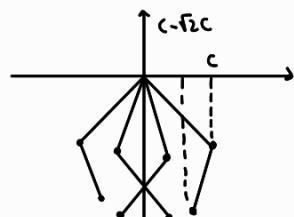
$$u_1' = \pm \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix}$$

modo normale "1":

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = C \sin(\omega t + \delta_1) u_1 = \begin{pmatrix} C_1 \sin(\omega t + \delta_1) \\ f_2 C_1 \sin(\omega t + \delta_1) \end{pmatrix}$$



$$\underline{d_1 = d_2} \quad \dots \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \sin(\omega t + \delta_1) \\ -f_2 C_1 \sin(\omega t + \delta_1) \end{pmatrix}$$

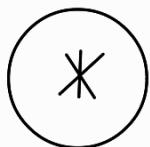


banquettata per $c_1, c_2 > 0$ e $\delta_1, \delta_2 \in [0, 2\pi)$:

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = C_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) \\ \varphi_2(t) = f_2 C_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) - f_2 C_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) \end{cases}$$

(*)

a=b



$d_1 = d_2, \omega_1 = \omega_2 : \text{ogni } u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \text{ è A-aut.}$

Modello "univerrale" per le piccole oscillazioni

$n \geq 2$ ($n=2$ banale)

q^* config. eq. $V'(q^*) = 0, V''(q^*) \text{ d.p.}$

$$L(q-q^*, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q} \cdot A(q^*) \dot{q} - \frac{1}{2} (q-q^*) \cdot V''(q^*) (q-q^*)$$

$$\text{A-aut} \quad d_j = \omega_j^2 \quad \text{con } \omega_j > 0 \text{ di } V''$$

u_1, \dots, u_n A-aut di V'' A-ortonormali ($u_i \cdot A u_j = \delta_{ij}$)

Faremo cambiamento di coordinate: $q \mapsto Q = P^{-1}(q-q^*)$ (eq: $Q^* = 0$) con $P = [u_1, \dots, u_n]$

$$\dot{q} \mapsto \dot{Q} = P^{-1} \dot{q}$$

$$q-q^* = PQ, \dot{q} = P \dot{Q}$$

$$L^{PQ}(Q, \dot{Q}) = L(PQ, P \dot{Q}) = \frac{1}{2} P \dot{Q} \cdot A P Q - \frac{1}{2} P Q \cdot V'' P Q = \frac{1}{2} \dot{Q} \cdot P^T A P Q - \frac{1}{2} Q \cdot P^T V'' P Q$$

i-ehma componente di u_i

$$p_{ii} = (u_i)_i$$

$$(P^t A P)_{ij} = \sum_{hk} (P^t)_{ih} A_{hk} P_{kj} = \sum_{hk} p_{hi} A_{hk} p_{kj} = \sum_{hk} (u_i)_h A_{hk} (u_j)_k = u_i \cdot A u_j = \delta_{ij}$$
$$\Rightarrow P^t A P = I_n$$

$$(P^t V^t P)_{ij} = \dots = u_i \cdot v^t u_j = u_i \cdot d_j A u_j = d_j \delta_{ij} = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$$

oss P = diagonalizza simultaneamente A e V^t .

$$L^{(0)}(\omega, \dot{Q}) = \frac{1}{2} \| \dot{Q} \|^2 - \frac{1}{2} Q \cdot \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n^2 \end{pmatrix} Q = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\frac{\dot{Q}_i^2}{2} - \frac{1}{2} \omega_i^2 Q_i^2 \right)}_{\text{esigenza di OA di frequenza } \omega_i}$$

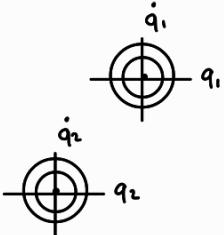
Studiamo la dinamica di $L^{(0)}$ nel caso $n=2$.

Spazio delle configurazioni $\mathbb{R}^4 \ni q$, sp. atti di moto $\mathbb{R}^4 \ni (q, \dot{q}) = (q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$

$$L^{(0)}(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} \dot{q}_i^2 - \frac{\omega_i^2}{2} q_i^2 \right)$$

domande I moti sono tutti periodici?

$$\ddot{q}_1 = -\omega_1^2 q_1$$



$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

$$\ddot{q}_2 = -\omega_2^2 q_2$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$$

? $T > 0$ se $q_1(T) = q_1(0)$, $q_2(T) = q_2(0)$, $\dot{q}_1(T) = \dot{q}_1(0)$, $\dot{q}_2(T) = \dot{q}_2(0)$?

Se esistesse, si dovrebbe avere $T = m_1 T_1 = m_2 T_2$ con $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ma allora } \frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2}{m_1}, m_1, m_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m_2}{m_1} \in \mathbb{Q}$$

conclusore I moti sono tutti periodici se $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$

Se $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$ nessun moto è periodico, eccetto se un oscillatore è fermo.

def Se $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$, allora ω_1 e ω_2 sono detti **RISONANTI**

domande A cosa i.p.? Come sono fatti i loro insiemi di livello?

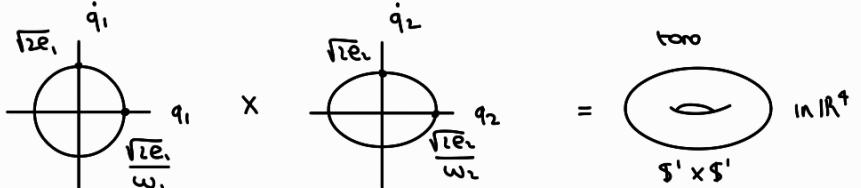
$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \underbrace{L_1(q_1, \dot{q}_1)}_{\in \Gamma_1} + \underbrace{L_2(q_2, \dot{q}_2)}_{\in \Gamma_2}$$

$$\Rightarrow \text{carico 2 I.P. } E_1(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \omega_1^2 q_1^2)$$

$$E_2(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}(\dot{q}_2^2 + \omega_2^2 q_2^2)$$

$$\Sigma_{e_1, e_2} = \text{insieme di tutto da } \begin{cases} E_1 = e_1 \\ E_2 = e_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \omega_1^2 q_1^2) = e_1 > 0 \\ \frac{1}{2}(\dot{q}_2^2 + \omega_2^2 q_2^2) = e_2 > 0 \end{cases}$$



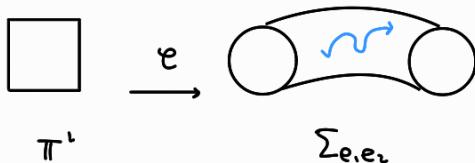
c'è una foliazione di tori! guardando un sotto/verso 3-dim di \mathbb{R}^4 vedo



Parametrizzazione dell'ellisse $\frac{1}{2}(y^2 + \omega^2 x^2) = e > 0 : \mathbb{S}^1 \ni \alpha \mapsto (\frac{\sqrt{2e}}{\omega} \sin \alpha, \frac{\sqrt{2e}}{\omega} \cos \alpha)$

Parametrizzazione di Σ_{e_1, e_2} :

$$\Pi^* : (\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{\sqrt{2e_1}}{\omega_1} \sin \alpha_1, \frac{\sqrt{2e_1}}{\omega_1} \cos \alpha_1, \frac{\sqrt{2e_2}}{\omega_2} \sin \alpha_2, \frac{\sqrt{2e_2}}{\omega_2} \cos \alpha_2 \right)$$

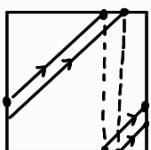


prop I moti su Σ_{e_1, e_2} sono coniugati da \mathbb{C}^* nelle curve

$$t \mapsto (\alpha_1 + \omega_1 t, \alpha_2 + \omega_2 t) \pmod{2\pi}$$

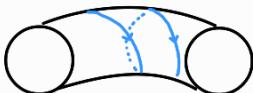
$$\begin{aligned} \text{"dim"} \quad q_1(t) &= \frac{\sqrt{2e_1}}{\omega_1} \sin(\omega_1 t + \delta_1) & \dot{q}_1(t) &= \frac{\sqrt{2e_1}}{\omega_1} \cos(\omega_1 t + \delta_1) \\ q_2(t) &= \dots & \dot{q}_2(t) &= \dots \end{aligned}$$

nel quadro il moto è:



, dunque torna al punto di partenza se e solo se $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$.

Si dimostra che se $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$, allora la curva non solo non è chiusa, ma è densa nel toro.



oss

(Eq. di Newton 1-dim)

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$L^{PO}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} \underbrace{V''(x^*)}_{k>0} (x - x^*)^2$$

$$\left. \begin{array}{l} A = m > 0 \\ V'' = k > 0 \end{array} \right\} \det(V'' - rA) = 0 \Rightarrow r = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Esempio 1) $N=1, z = \frac{xy}{2}, (\bar{z} > 0)$

■ Lagrangiana con

coord: $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\dot{z} = \frac{\dot{x}y + x\dot{y}}{2}$$

$$T(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{(\dot{x}y + x\dot{y})^2}{2})$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x, y, z) &= mgz + \frac{1}{2} K(x^2 + y^2 + (z - \bar{z})^2) = mgz + \frac{1}{2} K(x^2 + y^2 - z^2 - 2\bar{z}z + 4\bar{z}^2) \\ &= (mg - 2\bar{z}K)z + \frac{1}{2} K(x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned}$$

$$V(x, y) = (mg - 2\bar{z}K) \frac{xy}{2} + \frac{1}{2} K(x^2 + y^2 + \frac{x^2y^2}{4})$$

$$L = T - V$$

■ Riscrivere la Lagrangiana con $r = \frac{x}{\bar{z}}, s = \frac{y}{\bar{z}}$ e in modo da ottenerne

$$\beta := \frac{mg}{\bar{z}K}, \mu = \frac{K}{m}$$

$$\hat{L}(r, s, \dot{r}, \dot{s}) = L(r\bar{z}, s\bar{z}, \dot{r}\bar{z}, \dot{s}\bar{z})$$

$$= \frac{1}{2} m \cancel{\dot{z}^2} (\dot{r}^2 + \dot{s}^2 + (\dot{r}s + \dot{s}r)^2) - \cancel{K\dot{z}^2} (\beta - 2)r\dot{s} - \frac{1}{2} \cancel{K\dot{z}^2} (r^2 + s^2 + r^2s^2)$$

$$\Rightarrow L(r, s, \dot{r}, \dot{s}) = \underbrace{\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + \dot{s}^2 + (\dot{r}s + \dot{s}r)^2)}_{T} - \underbrace{[\mu(\beta - 2)r\dot{s} + \frac{1}{2} \mu(r^2 + s^2 + r^2s^2)]}_{V}$$

o^rs β grande = molla debole

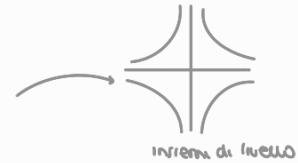
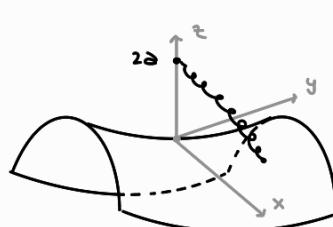
■ Equilibri e stabilità

$$\nabla V(x, y) = \mu \begin{pmatrix} (\beta - 2)s + r + rs^2 \\ (\beta - 2)r + s + sr^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (\beta - 2)(r + s) + (s + r) + rs(r + s) = 0 \\ (\beta - 2)(s - r) + (s - r) + (r - r)rs = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (r + s)(\beta - 2 + 1 + rs) = 0 \\ (s - r)(\beta - 2 - 1 + rs) = 0 \end{cases}$$

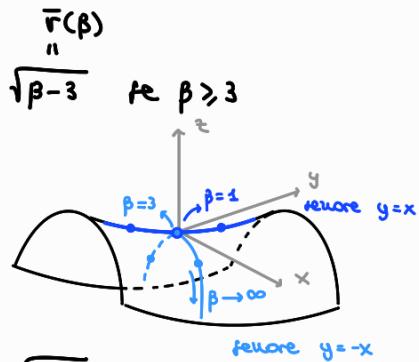
$$\begin{cases} (r + s)(\beta + rs - 1) = 0 \\ (s - r)(\beta + rs - 3) = 0 \end{cases}$$



$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} r+s=0 \\ r-s=0 \end{cases} \Rightarrow (r,s)=(0,0)$$

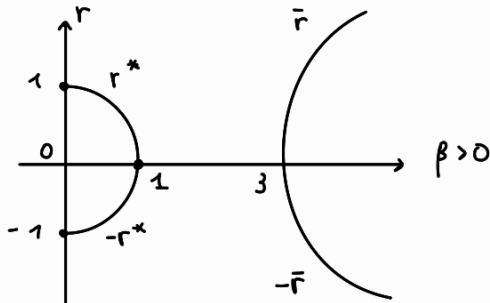
$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} s=-r \\ \beta-3+rs=0 \end{cases} \quad \begin{cases} s=-r \\ r^2=\beta-3 \end{cases} \Rightarrow r = \pm \sqrt{\beta-3} \quad \text{for } \beta > 3$$

$$\beta > 3 : \pm (\bar{r}(\beta), -\bar{f}(\beta))$$



$$\textcircled{3} \quad \beta \leq 1 : \pm (r^*(\beta), f^*(\beta)), r^*(\beta) = \sqrt{1-\beta}$$

diagramme de bifurcation:



$$V''(r,s) = \mu \begin{pmatrix} 1+s^2 & \beta-2+rs \\ \beta-2+2rs & 1+r^2 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} \quad V''(0,0) = \mu \begin{pmatrix} 1 & \beta-2 \\ \beta-2 & 1 \end{pmatrix}$$

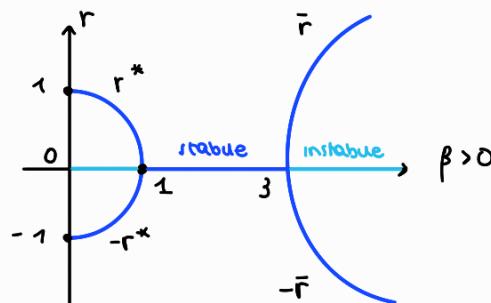
$$\begin{cases} tr=2>0 \\ \det = 1-(\beta-1)^2 = (\beta-1)(3-\beta) \end{cases} \begin{cases} >0 & \beta \in (1,3) \text{ stable} \\ <0 & \beta < 1 \vee \beta > 3 \text{ instable} \\ =0 & \beta = 1,3 \end{cases} ?$$

$$\textcircled{2} \quad V''(\bar{r},\bar{r}) = \mu \begin{pmatrix} 1+\bar{r}^2 & \beta-2-2\bar{r}^2 \\ \beta-2-2\bar{r}^2 & 1+\bar{r}^2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \beta-2 & 4-\beta \\ 4-\beta & \beta-2 \end{pmatrix} \quad \text{per } \beta > 3$$

$$\kappa = \beta-2 > 0$$

$$\det = (\beta-2)^2 - (4-\beta)^2 = (\beta-2+4-\beta)(\beta-2-4+\beta) = 4(\beta-3) > 0$$

\textcircled{1} Analogamente: (r^*, \bar{r}) instabile



■ Studiare le P.O. in $(0,0)$ per $\beta \in (1,3)$

$$V''(0,0) = \mu \begin{pmatrix} 1 & \beta-2 \\ \beta-2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau(0,0, \dot{r}, \dot{s}) = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + \dot{s}^2)$$

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(V'' - \lambda A) = \det \begin{pmatrix} \mu-\lambda & \mu(\beta-2) \\ \mu(\beta-2) & \mu-\lambda \end{pmatrix} = (\mu-\lambda)^2 - \mu^2(\beta-2)^2 = \dots$$

$$\begin{cases} d_1 = (\beta-1)\mu > 0 \\ d_2 = (3-\beta)\mu > 0 \end{cases}, \text{ dato che } \beta \in (1,3)$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{(\beta-1)}\mu \\ \omega_2 = \sqrt{(3-\beta)}\mu \end{cases}, \mu = \frac{k}{m}$$

$$\begin{pmatrix} \mu-\lambda & \mu(\beta-2) \\ \mu(\beta-2) & \mu-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SIMMETRIE

def $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, un' "azione differentiabile" di \mathbb{R} su U è una mappa

$$\varphi: \mathbb{R} \times U \longrightarrow U$$

$$(d, q) \longmapsto \varphi(d, q) =: \varphi_d(q)$$

Le le mappe $\varphi_d: U \rightarrow U$, $d \in \mathbb{R}$, hanno le seguenti proprietà:

i) $\varphi_0 = \text{id}$

ii) $\forall d, \mu \in \mathbb{R} \quad \varphi_{d+\mu} = \varphi_d \circ \varphi_\mu$

iii) $\forall d \in \mathbb{R}$, φ_d è invertibile e $(\varphi_d)^{-1} = \varphi_{-d}$

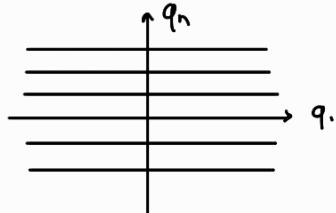
iv) $\forall d \quad \varphi_d: U \rightarrow U$ è diffeo

def "φ-orbita" di q è $\{\varphi_d(q): d \in \mathbb{R}\}$

esempi 1) $U = \mathbb{R}^n$ traslazioni di q_+ .

$$\varphi_d(q_1, q_2, \dots, q_n) = (q_1 + d, q_2, \dots, q_n), \quad d \in \mathbb{R} \quad \text{è azione}$$

Le φ-orbita sono



2) $U = \mathbb{R}^n$ traslazioni in direzione $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\varphi_d(q) = q + de \quad \text{è azione}$$

- $\varphi_0(q) = q$

- $\varphi_{d+\mu}(q) = q + (d+\mu)e = (q + \mu e) + de = \varphi_d(q + \mu e) = \varphi_d \circ \varphi_\mu(q)$

3) rotazioni attorno ad un'azte $e \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $\|e\|=1$

$\varphi_d(q) = R_{d,e}(q)$, con $R_{d,e}$ = matrice di rotazione attorno a e angolo d è azione.

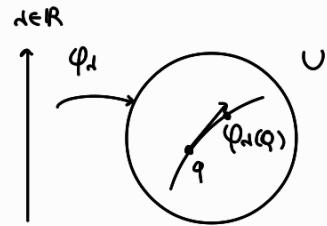
4) flusso di campo vett. completo X , $\phi^t: \mathbb{R} \times U \longrightarrow U$

oss Ogni azione di \mathbb{R} è il flusso di un campo vettoriale

def Il "generatore infinitesimo" di un'ore ξ di \mathbb{R} è il campo vett. definito da

$$\xi(q) = \frac{d}{dt} \varphi_t(q) \Big|_{t=0}$$

con $t \mapsto \varphi_t(q)$ curva che per $t=0$ passa per q .



prop $\varphi = \Phi^\xi$

dum • Φ^ξ è l'unica mappa $\mathbb{R} \times U \rightarrow U$, $(t, q) \mapsto \Phi_t^\xi(q)$ t.c. $\forall q$

$t \mapsto \Phi_t^\xi(q)$ è la soluzione di $\dot{q} = \xi(q)$ condato iniziale q a $t=0$.

Così $\begin{cases} \Phi_0^\xi(q) = q \\ \frac{d}{dt} \Phi_t^\xi(q) = \xi(\Phi_t^\xi(q)) \end{cases}$

• Ora si dimostra che

$$\varphi_0(q) = q, \quad \forall q$$

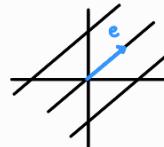
$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(q) \Big|_{t=\bar{t}} = \frac{\partial}{\partial s} \varphi_{s+\bar{t}}(q) \Big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s} \varphi_s(\varphi_{\bar{t}}(q)) \Big|_{s=0} = \xi(\Phi_{\bar{t}}(q)), \quad \forall q, \forall t$$

$\varphi_{t+s}(q) = \varphi_t \circ \varphi_s(q)$ □

esempi

1) traslazioni : $\varphi_d(q) = q + de$ in \mathbb{R}^n

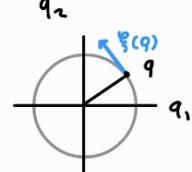
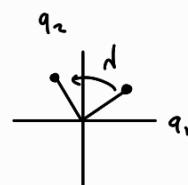
$$\xi = \frac{d}{dt} (q + de) \Big|_{d=0} = e$$



2) rotazioni in \mathbb{R}^2 : $\varphi_d(q) = R_d q = \begin{pmatrix} \cos d & -\sin d \\ \sin d & \cos d \end{pmatrix} q$

$$\xi(q) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \Big|_{d=0} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin d & -\cos d \\ \cos d & -\sin d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \Big|_{d=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_2 \\ q_1 \end{pmatrix} = -J q$$



cont. $\Phi_t(q) = \exp(-tJ) q = \exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} q = \begin{pmatrix} \cos t & \sin(-t) \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} q = \varphi_t$

3) rotazioni in \mathbb{R}^3 : $\varphi_d(q) = \tilde{R}_d q$

matrice di rotazione
di asse e di angolo d a destra

$$\xi(q) = e \wedge q$$



$$\|e\|=1$$

($e \neq 0$) a "base" dimostrarlo per e_3
perché poi, poniamo, si potrà e per e_3 con isometrie

Non lo dimostriamo: lo verifichiamo per $e = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bisogna verificare $\varphi_d = R_d$

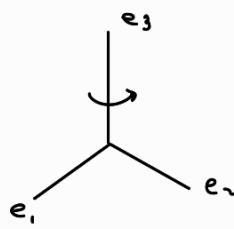
ricordo $\xi(q) = e \wedge q = \hat{e} q$ con $\hat{e} = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & e_2 \\ -e_1 & 0 & e_3 \\ -e_2 & -e_3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \Phi_t^\xi(q) = \underbrace{\exp(t\hat{e})}_{\text{esso: ed è rotazione attorno a } e_3} q$$

esso: ed è rotazione attorno a e_3

$$\exp(t\hat{e}_3) = \exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \exp\left(\frac{t}{2}\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_d$$



def $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ è "invariante" per φ se $f \circ \varphi_t = f \quad \forall t$

$\Leftrightarrow f$ è l.p. di \tilde{f} (gen. infinitesimo di φ)

esempi 1) (traslazioni) $\varphi_d(q) = (q_1 + d, q_2, \dots, q_n)$

$$f \circ \varphi_d(q) = f(q) \quad \forall q, d$$

$$f(q_1 + d, \dots, q_n) = f(q_1, \dots, q_n) \quad \forall q, d$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial q_1}(q) = 0 \quad \text{f indip. da } q_1$$

$$2) (\text{rotazioni in } \mathbb{R}^2) \quad \varphi_d(q) = \begin{pmatrix} \cos d & -\sin d \\ \sin d & \cos d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Le f invariante devono essere costanti lungo le orbite dell'angolo (origine + c.d. centrat. nell'origine).

$$f(x, y) = \hat{f}(x^2 + y^2)$$

$$\text{Però in coord. polari in } \mathbb{R}^2: \quad \tilde{\varphi}_d(r, \varphi) = (r, \varphi + d)$$

$\Rightarrow \tilde{f}(r, \varphi)$ è invariante se \hat{f} è indip. da φ

$$3) \quad \varphi_d(q) = (q_1 + d, q_2 + d) = q + d\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{caso particolare di traslazione}).$$

$$\text{Invariante: } f(q_1 + d, q_2 + d) = f(q_1, q_2) \quad \forall q, \forall d$$

$$f \text{ dipende solo dalla differenza fra } q_1 \text{ e } q_2 \quad f(q_1, q_2) = \tilde{f}(q_1 - q_2)$$

Per verificarlo, posso prendere alle coordinate $y = (y_1, y_2) = (q_1, q_1 - q_2)$:

$$\tilde{\varphi}(y_1, y_2) = (y_1 + d, y_2) \quad \Rightarrow \quad \text{sistema di coord. in cui } \varphi \text{ è}$$

invariante su una coordinata

$$\hat{f}(y_1, y_2) \text{ è l.p.} \Rightarrow \hat{f} \text{ è indip. da } y_1.$$

TEOREMA DI RETTIFICABILITÀ LOCALE

$\dot{z} = X(z), \quad z \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. z^* non un equilibrio, ovvero $X(z^*) \neq 0$.

Azione in un intorno di z^* scrittura coordinate (y_1, y_2, \dots, y_n) nelle quali $\dot{z} = X(z)$ diviene

$$\dot{y}_1 = 1, \quad \dot{y}_2 = 0, \dots, \dot{y}_n = 0$$

così X diventa un campo vett. costante $(1, 0, \dots, 0)$

Junque $y_1(t) = y_1(0) + t$, $y_2(t) = y_2(0), \dots, y_n(t) = y_n(0)$.



oss In generale non vale ancora ad un equilibrio: ripeti ad esempio ad un equilibrio ellittico.

corollario Avore φ di \mathbb{R} su $U \subseteq \mathbb{R}^n$, z^* no p.t.o fisso di φ ($\varphi_\alpha(z^*) \neq z^* \ \forall \alpha$, o $\dot{\varphi}(z^*) \neq 0$)

Allora \exists sistema di coordinate y in un intorno di z^* in cui φ è trasformazione di y_1 .

def Il "rolleamento tangente" di un'azore $\varphi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U, (t, q) \mapsto \varphi_t(q)$ ($U \subseteq \mathbb{R}^n$) è l'azore

$$\varphi^{TU}: \mathbb{R} \times TU \rightarrow TU$$

$$(t, (q, \dot{q})) \mapsto \varphi_t^{TU}(q, \dot{q}) := (\varphi_t(q), \varphi_t'(q) \dot{q}) = (T\varphi_t)(q, \dot{q})$$

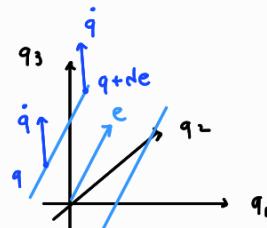
esercizio φ^{TU} è un'azore:

- $\varphi_0^{TU}(q, \dot{q}) = (\varphi_0(q), \varphi_0'(q) \dot{q}) = (\omega(q), \Omega_n \dot{q}) = (q, \dot{q})$
- $\varphi_{s+t}^{TU} = \dots$

esempio 1) $\varphi_d(q) = q + de$

$$\varphi_d'(q) = \Omega_n$$

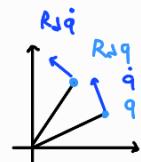
$$\varphi_d^{TU}(q, \dot{q}) = (q + de, \dot{q})$$



2) rot in \mathbb{R}^3 : $\varphi_d(q) = R_d q$

$$\varphi_d'(q) = R_d$$

$$\varphi_d^{TU}(q, \dot{q}) = (R_d q, R_d \dot{q})$$



TEOREMA NOETHER

$L: TU \rightarrow \mathbb{R}, U \subseteq \mathbb{R}^n$. Avore φ di \mathbb{R} su U . Se L è invariante sotto φ^{TU} , cioè

$$L(\varphi_d(q), \varphi_d'(q) \dot{q}) = L(q, \dot{q}) \quad \forall q, \dot{q}, t$$

allora le eq di Lagrange hanno l'I.P.

$$I(q, \dot{q}) = \xi(q) \cdot p(q, \dot{q})$$

con ξ generatore infinitesimo di φ e $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$.

- dimo
- $\varphi_d : U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \varphi_d = (\varphi_d^1, \dots, \varphi_d^n)$
 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$
 - soddisfare $t \mapsto q_t = (q_t^1, \dots, q_t^n)$ delle eq. di Lagrange
 - $L(\varphi_d(q_t), \varphi_d'(q_t) \dot{q}_t) = L(q_t, \dot{q}_t)$
 $\Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial t} L(\varphi_d(q_t), \varphi_d'(q_t) \dot{q}_t) = \frac{\partial}{\partial t} L(\varphi_d(q_t), \frac{\partial}{\partial t} \varphi_d(q_t))$
 $= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} (\dots) \frac{\partial \varphi_d^j}{\partial t} (q_t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} (\dots) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_d^j (q_t) \right)$
↑
scambio l'ordine
di derivazione
 - valuto in $t=0$
 $0 = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_j} (\varphi_0(q_t), \varphi_0'(q_t)) \xi_j(q_t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} (q_t, \dot{q}_t) \frac{\partial}{\partial t} \xi_j(q_t) \right)}_{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} (q_t, \dot{q}_t) \right)}$
 $= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} (q_t, \dot{q}_t) \xi_j(q_t)$
 $= \frac{\partial}{\partial t} I(q_t, \dot{q}_t)$

$\Rightarrow I$ è I.P.

□

def I è detto "momento dell'azione" φ

- esempio
- 1) p.t. materiale, coord. cartesiane, $q \in \mathbb{R}^3$
 $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \|\dot{q}\|^2 - V(q)$
 chiediamo se è invariante per traslazioni lungo e $\varphi_d(q) = q + de$,
 ovvero se $L(q+de, \dot{q}) = L(q, \dot{q}) \quad \forall q, \dot{q}, d$
 $\frac{1}{2} m \|\dot{q}\|^2 - V(q+de) = \frac{1}{2} m \|\dot{q}\|^2 - V(q).$
 Sí, se $V(q)$ è. In questo caso:
 $I(q, \dot{q}) = m \dot{q} \cdot e$ componente della quantità di moto lungo e
 se $V = \text{cost}$, allora c'è invarianza per traslazioni lungo e
 \Rightarrow vett. quantità di moto $m \dot{q}$ è conservato
 - 2) $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q} \cdot A(q) \dot{q} - V(q)$
 $L(\varphi_d(q), \varphi_d'(q) \dot{q}) = L(q, \dot{q}) \quad \forall q, \dot{q}, d$

$$\int \varphi'_d(q) \dot{q} \cdot A(q) \varphi'_d(q) \dot{q} - V(\varphi_d(q))$$

$$\frac{1}{2} \dot{q} \cdot (\varphi'_d(q)^T A(q) \varphi'_d(q)) \dot{q} - V(\varphi_d(q)) = \frac{1}{2} \dot{q} \cdot A(q) \dot{q} - V(q)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V(q) = V(\varphi_d(q)) \text{ , ovvero } V \text{ invariante sotto l'azione} \\ \varphi'_d(q) A(q) \varphi'_d(q) = A(q) \end{cases}$$

$$3) L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \|\dot{q}\|^2 - V(\|q\|) \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

\curvearrowleft V è invariante per rotazioni

A chiediamo se L è invariante per rotazioni attorno alle $e \neq 0$.

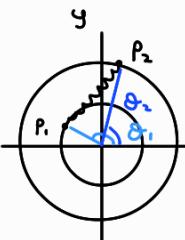
$$\text{Inizianta: } L(R_d q, R_d \dot{q}) = L(q, \dot{q}) \quad \forall q, \dot{q}, d$$

$$\frac{1}{2} m \|\dot{R}_d q\|^2 - V(\|R_d q\|)$$

\curvearrowleft \curvearrowleft
 \downarrow canone
 \downarrow è inv. per rotazioni

$$I(q, \dot{q}) = \tilde{p}(q) \cdot p(q, \dot{q}) = e \wedge q \cdot m \dot{q} = m q \wedge \dot{q} \cdot e = (M_{ang}) \cdot e, \text{ ovvero } e$$

la componente lungo e del momento angolare



$$Q = \Pi_{\mathbb{R}^3}(\theta_1, \theta_2); e_1, e_2 \text{ reggi; } m_1, m_2 \text{ masse}$$

$$(x_1 = e_1 \cos \theta_1, y_1 = e_1 \sin \theta_1, z_1 = 0, x_2 = e_2 \cos \theta_2, \dots)$$

$$T(q, \dot{q}) = T(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2} m_1 e_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 e_2^2 \dot{\theta}_2^2$$

$$\tilde{V}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} k ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)$$

$$(x_1, y_1, z_1) \quad \tilde{V}|_{x_1=...} \quad \tilde{V}|_{x_2=...}$$

$$V(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} k [(e_1 \cos \theta_1 - e_2 \cos \theta_2)^2 + (e_1 \sin \theta_1 - e_2 \sin \theta_2)^2]$$

$$= \frac{1}{2} k (e_1^2 + e_2^2 - 2 e_1 e_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2))$$

$$= -k e_1 e_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \text{cost}$$

$$L(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2} m_1 e_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 e_2^2 \dot{\theta}_2^2 + k e_1 e_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

■ Posiamo riconoscere un'azione di rende invariante la legge di moto?

$$\text{Consideriamo } \varphi_d(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + d, \theta_2 + d) = \begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi'_d(\theta_1, \theta_2) = 1,$$

$$\varphi_d^{-1}(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = (\theta_1 + d, \theta_2 + d, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$$

$$(L \circ \varphi_d^{-1})(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = L(\dots)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 e_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 e_2^2 \dot{\theta}_2^2 + k e_1 e_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$= L(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \quad \forall \theta_1, \dots, \dot{\theta}_2, d$$

Sarà questo sistema ha un IP!

$$I(\dot{\theta}_1, \dots, \dot{\theta}_n) = \underbrace{\xi(\theta_1, \dots, \theta_n)}_{\substack{\text{denso rispetto} \\ \text{ad evoluz. in 0}}} \cdot p(\theta_1, \dots, \dot{\theta}_n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 e_1^2 \dot{\theta}_1 \\ m_2 e_2^2 \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = m_1 e_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 e_2^2 \dot{\theta}_2$$

(è il mom. imp. tot. del sistema)

- Vogliamo avere coordinate in cui l'azione sia la traslazione di una componente:

$$(\theta_1, \theta_2) \mapsto (\psi_1, \psi_2) = (\theta_1, \theta_2 - \theta_1)$$

$$\text{INVERSA: } \theta_1 = \psi_1, \quad \theta_2 = \psi_2 + \theta_1 \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta}_1 = \dot{\psi}_1 \\ \dot{\theta}_2 = \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\theta}_1 = \dot{\psi}_1 \\ \dot{\theta}_2 = \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) &= \frac{1}{2} m_1 e_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 e_2^2 \dot{\theta}_2^2 + k e_1 e_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \Rightarrow \hat{L}(\psi_1, \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2) &= L(\psi_1, \psi_1 + \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \\ &= \frac{1}{2} m_1 e_1^2 \dot{\psi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 e_2^2 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)^2 + k e_1 e_2 \cos(\psi_2) \end{aligned}$$

Adesso la legge di moto non dipende da ψ_1 (è coord. ignorabile)

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\psi}_1} = 0 \Rightarrow p_1 = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\psi}_1} = \dots \text{ (lo stesso di prima con nuove coordinate)}$$

o.s.

(caso particolare di Noether)

q_i coord. ignorabile, avendo $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.

$$\Rightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \text{ è IP}$$

Considero $\varphi_\lambda(q_1, \dots, q_n) = (q_1 + \lambda, q_2, \dots, q_n)$

$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow L$ è invariante per φ_λ (traslazioni di q_i)

$$\text{infatti } I = \xi \cdot p = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot p = p_1$$

Riduzione alla Rouche

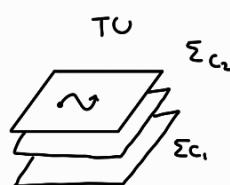
Supponiamo $L: TU \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\frac{\partial L}{\partial q_n} = 0$

$\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_j}$ def. positiva \Rightarrow invertibile (\Rightarrow regolare). Questo è sempre vero nel caso meccanico.

$$U \ni (q_1, \dots, q_{n-1}, q_n) = (Q, \xi), \quad \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0$$

$\Pi := \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}$ è IP. \Rightarrow i punti iniziali di livello sono invarianti.

$$\Sigma_C := \{(Q, \xi, \dot{Q}, \dot{\xi}) : \Pi(Q, \dot{Q}, \dot{Q}, \dot{\xi}) = C\}$$



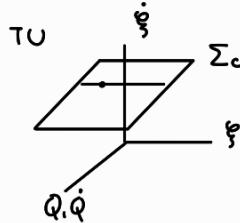
prop $\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = 0, \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \ddot{q}}$ def por. Allora Σ_c

1) Σ_c è una foliaz. di dim $n-1$

2) localmente Σ_c è un grafico di una funzione

$$U_c: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{in realtà}$$

$$(Q, \xi, \dot{Q}) \mapsto U_c(Q, \xi, \dot{Q})$$



3) Σ_c è invariante per traslazioni di ξ

dem 1) cond. suff. che Σ_c sia rottondeggiante è che

$$\pi'(Q, \xi, \dot{Q}, \ddot{\xi}) \neq 0 \quad \forall \text{ punto di } \Sigma_c$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{q} \partial \ddot{q}} &= \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{Q} \partial \dot{Q}} & * \\ \hline * & \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{\xi} \partial \ddot{\xi}} \end{array} \right) \quad \text{è def. pos.} \Rightarrow (\text{piani minori principali sono def pos}) \\ &\Rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial \ddot{\xi}} \neq 0 \Rightarrow \pi' \neq 0 \Rightarrow \Sigma_c \text{ è rottondeg. di dim } n-1. \end{aligned}$$

2) Chiediamo se possiamo ridurre l'equazione $\pi(Q, \xi, \dot{Q}, \ddot{\xi}) = c$ per $\ddot{\xi}$

utile il teorema delle funzioni implicite: è sufficiente che $\frac{\partial \pi}{\partial \ddot{\xi}}(Q, \xi, \dot{Q}, \ddot{\xi}) \neq 0$, che è vero.

$$\Rightarrow \ddot{\xi} = U_c(Q, \xi, \dot{Q})$$

3) La legge di moto non dipende da $\ddot{\xi} \Rightarrow \pi$ non dipende da $\ddot{\xi}$

$$\Rightarrow U_c \text{ non dipende da } \ddot{\xi}$$

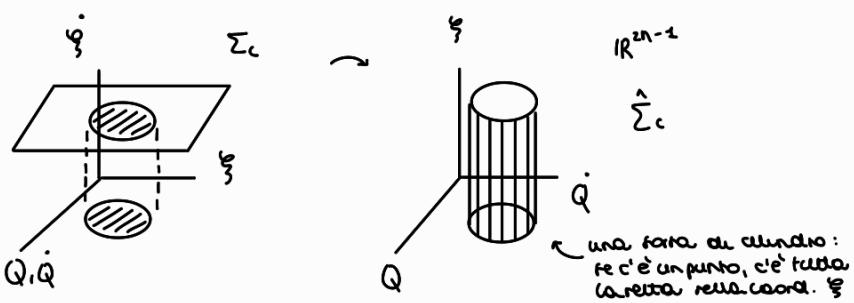
$$\Rightarrow U_c(Q, \xi, \dot{Q}) = U_c(Q, \xi + d, \dot{Q})$$

□

Restringo le equazioni di Lagrange a Σ_c e le scrivo nelle coordinate Q, \dot{Q}, ξ .

eq. di Lagrange in forma normale: $\begin{cases} \ddot{\xi} = \dots \\ \ddot{Q} = \dots \end{cases}$

$$\text{TU} \ni (Q, \xi, \dot{V}, \ddot{V}, \ddot{m}) \quad \text{mu} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\xi} = m \\ \ddot{m} = \dots \\ \ddot{Q} = V \\ \dot{V} = \psi(Q, \dot{Q}, \xi) = \psi(Q, V, m) \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{\xi} = U_c(Q, V) \\ \dot{Q} = V \\ \dot{V} = \psi(Q, V, U_c(Q, V)) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{\xi} = U_c(Q, V) \\ \dot{Q} = V \\ \dot{V} = Y_c(Q, V) \end{cases} \quad (*) \quad \text{EQUAZIONE DI RICOSTRUZIONE}$$

↔

$$\begin{cases} \dot{\xi} = U_c(Q, \dot{Q}) \\ \ddot{Q} = Y_c(Q, \dot{Q}) \end{cases} \quad (***) \quad \text{EQUAZIONE RIDOTTA}$$

e quella che ci permette di ricostruire l'intesa curva

oss L'eq. (*) non contiene $\ddot{\xi}$.

Se $t \mapsto Q(t)$ è sol. di (*), allora $t \mapsto (\xi(t), Q(t))$ con $\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t U_c(Q(s), \dot{Q}(s)) ds$ è soluzione di (*).

In questo tempo abbiamo ridotto lo studio del sistema allo studio di un'eq. su uno spazio $\mathbb{R}^{(n-1)}$ -dim.

1° miracolo: l'inerzia produce integrali primi (Noether)

2° miracolo: (***) è eq. del secondo ordine ed è eq. di Lagrange di una legge

prop (*) è l'eq. di Lagrange della "legge ridotta"

$$L_c^R(Q, \dot{Q}) = L(Q, \dot{\xi}, \dot{Q}, V_c(Q, \dot{Q})) - c U_c(Q, \dot{Q})$$

$$= L - \pi \frac{\partial}{\partial \xi} \Big|_{\Sigma_c} \quad \text{è una legge ridotta, non la restrizione della legge}$$

$$\text{dim } \cdot \frac{\partial L_c^R}{\partial Q_i}(Q, \dot{Q}) = \frac{\partial}{\partial Q_i} [L(Q, \dot{Q}, V_c(Q, \dot{Q})) - c U_c(Q, \dot{Q})]$$

$$= \frac{\partial L}{\partial Q_i}(Q, \dot{Q}, V_c(Q, \dot{Q})) + \frac{\partial L}{\partial \xi} \dots \frac{\partial U_c}{\partial Q_i} - c \frac{\partial U_c}{\partial Q_i}$$

$$\text{f.s. } \Sigma_c \quad \frac{\partial L}{\partial \xi} = \pi = c :$$

$$= \frac{\partial L}{\partial Q_i}(Q, \dot{Q}, V_c(Q, \dot{Q})) + c \frac{\partial U_c}{\partial Q_i} - c \cancel{\frac{\partial U_c}{\partial Q_i}}$$

• Lo stesso vale per $\frac{\partial L_c^R}{\partial \dot{Q}_i}$:

$$\frac{\partial L_c^R}{\partial \dot{Q}_i}(Q, \dot{Q}) = \dots = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}(Q, \dot{Q}, V_c(Q, \dot{Q})) + c \cancel{\frac{\partial U_c}{\partial \dot{Q}_i}} - c \cancel{\frac{\partial U_c}{\partial \dot{Q}_i}}$$

• Considero $t \mapsto (Q^t, \dot{Q}^t, \ddot{Q}^t, \ddot{\xi}^t) \in \Sigma_c$ soluzione delle eq. di Lagrange per L , allora

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_c^R}{\partial Q_i}(Q^t, \dot{Q}^t) \right) - \frac{\partial L_c^R}{\partial \dot{Q}_i}(Q^t, \dot{Q}^t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial Q_i}(Q^t, \dot{Q}^t, \ddot{\xi}^t) \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}(Q^t, \dot{Q}^t, \ddot{\xi}^t) = 0$$

$\Rightarrow t \mapsto (Q^t, \dot{Q}^t)$ è soluzione delle eq. di Lagrange per L_c^R . □

riporto $L(Q, \dot{Q}, Q, \dot{\xi})$, $\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}$ I.P.

$$\Sigma_c = \{ \pi(Q, \dot{Q}, \dot{\xi}) = c \}$$

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t U_c(Q(s), \dot{Q}(s)) ds$$

$$L_c(Q, \dot{Q}) = L(Q, \dot{Q}, U_c(Q, \dot{Q})) - c U_c(Q, \dot{Q})$$

esempio (punto in campo centrale vircolare a un piano)

Campo centrale e conservativo.

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \|\dot{x}\|^2 - V(\|x\|), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

e' invariante per rotazioni attorno all'origine

$$\xrightarrow{\text{Noether}} m(x\dot{y} - y\dot{x}) \quad (\text{mom. ang. } \text{et. } z)$$

■ Vogliamo vedere qual è la coord. generalizzata. Passiamo a coord. polari (r, φ)

$$L(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r) \Rightarrow Q = r, \quad \xi = \varphi, \quad \pi = P\varphi$$

$$P\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \quad \text{e' I.P.} \quad \text{accidentalmente!}$$

$$P\varphi = c = mr^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{c}{mr^2} = U_c(r, \xi)$$

$$t \mapsto \varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \frac{c}{mr(s)^2} ds$$

$$\text{In questo caso, se } c \neq 0 \Rightarrow \dot{\varphi}(t) = \frac{c}{mr^2} \text{ è sempre } > 0 \text{ o } < 0$$

\Rightarrow il moto sarà sempre orario o antiorario

■ Studiamo il sistema ridotto. Abbiamo capito come cambia r :

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{Routh}} L_c^R(r, \dot{r}) &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r) - \frac{c^2}{mr^2} \Big|_{\dot{\varphi} = \frac{c}{mr^2}} \\ &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{c^2}{2mr^2} - V(r) - \frac{c^2}{mr^2} \\ &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - V(r) - \frac{c^2}{2mr^2} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{r}^2}_{T_2} - \underbrace{[V(r) + \frac{c^2}{2mr^2}]}_{U_c(r)} = \text{potenziale effettivo} \end{aligned}$$

oss

(calcolo di L_c^R). caso meccanico.

$$L = L_2 + L_1 + L_0$$

\hookrightarrow l'indip. da ξ
 \hookrightarrow linear in $\dot{\xi}$
 \hookrightarrow quadratica in $\dot{\xi}$

$$L_c^R = L - \xi \frac{\dot{\xi}}{\partial \dot{\xi}} \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} \right|_{\dot{\xi} = U_c(Q, \dot{Q})}$$

$$\begin{aligned} &= L_2 + L_1 + L_0 - \xi \frac{\dot{\xi}}{\partial \dot{\xi}} \left. \frac{\partial L_2}{\partial \dot{\xi}} \right|_{\dot{\xi} = U_c(Q, \dot{Q})} - \xi \frac{\dot{\xi}}{\partial \dot{\xi}} \left. \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\xi}} \right|_{\dot{\xi} = U_c(Q, \dot{Q})} - \xi \frac{\dot{\xi}}{\partial \dot{\xi}} \left. \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\xi}} \right|_{\dot{\xi} = U_c(Q, \dot{Q})} \\ &\xrightarrow{\text{essendo}} \quad \begin{matrix} " \\ L_2 \\ " \\ L_1 \\ 0 \end{matrix} \\ &= \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1 \left. \right|_{\dot{\xi} = U_c(Q, \dot{Q})} \end{aligned}$$

\Rightarrow cambia di segno ai termini quadratica, eliminano quelli lineari e lascia maneggiare quelle indipendenti da $\dot{\xi}$ (come con l'integrale di Jacobi).

- oss
- sistema di partenza con n gradi di libertà e sp. delle forze in-dim $(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}, \ddot{\dot{Q}})$ con integrale primo si riduciamo a $2n-1$ (Q, \dot{Q}, \ddot{Q})
e poi a $n-1$ grado di libertà con sp. delle forze $2(n-1)$ -dim (Q, \dot{Q})
 - se \exists 2 coord. integrabili si passerebbe ad un sistema con $n-2$ gradi di libertà
 - se \exists $n-1$ coord. integrabili \Rightarrow sistema con 1 grado di libertà \Rightarrow integrabile
(sappiamo fare il resto in forte e calcolare tutto al resto).

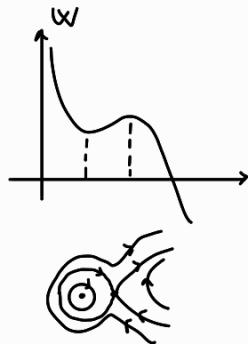
In realtà non è così facile, ma no. non lo vediamo.

esempio continuo quello precedente: capiamo come si muove la coord. ridotta

$$L_c^R(r, \dot{r}) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - W_c(r), \quad M\ddot{r} = C$$

$$W_c(r) = V(r) - \frac{C^2}{2mr^2}$$

chiaramente dipende se $C=0$ o $C \neq 0$. Supponiamo di avere una curva di questo tipo:

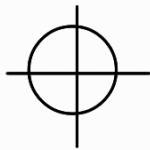


- caso importante/temibile: r^* config. di eq. del sistema ridotto

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \frac{c}{m\dot{r}(s)} ds$$

$$t \mapsto r(t) = r^*$$

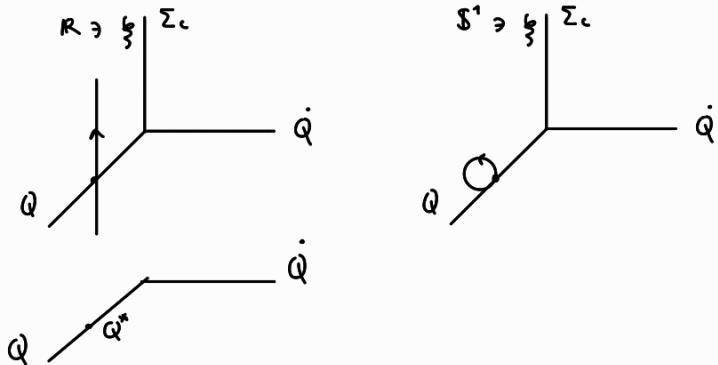
$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{ct}{m(r^*)} \Rightarrow \text{l'ipolo si muove con velocità costante}$$



orbita circolare uniforme

$$\text{In generale, } \dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}(0) + \int_0^t U_c(Q(s), Q'(s)) ds$$

Se Q^* è config. di equilibrio del sistema rotolato, allora $\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}(0) + t U_c(Q^*, 0)$
↳ come con velocità costante

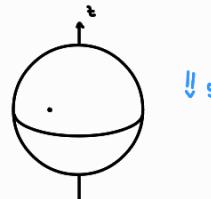


polo cartesiano $\dot{\varphi}(0)$

def I moti del sistema completo $t \mapsto (Q^*, \dot{\varphi}(0) + t U_c(Q^*, 0))$ che corrispondono a equilibri del sistema rotolato si chiamano **equilibri relativi**

esempio (pendolo sfenco) $n=2$

→ riduttore ad 1 gr. di libertà



■ Utilizziamo coord. sfenche (escludiamo i poli)

$$0 < \theta < \pi$$

$$\dot{\theta} > 0$$

$$L(\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}) = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - mg R \cos \theta / R$$

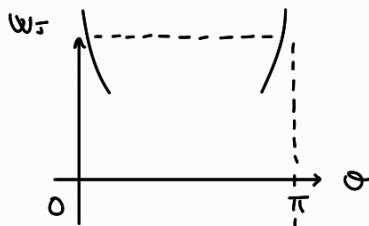
$$P_\varphi = \underbrace{\dot{\varphi} \sin^2 \theta}_\text{componente z del mom. ang.} = J \quad \begin{array}{l} \text{fisso} \\ \text{J=0} \Rightarrow \dot{\varphi}=0 \Rightarrow \text{il punto si muove lungo un meridiano (non lo studiamo)} \\ \text{J} \neq 0 \end{array}$$

$$\dot{\psi} = \frac{J}{\sin^2 \theta} \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$$



■ sistema rotolato :

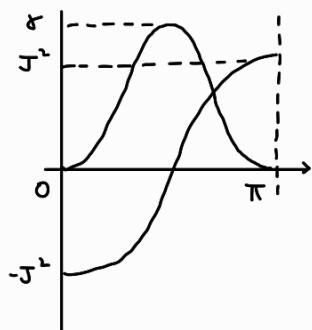
$$\begin{aligned} L_J^R(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - J \cos \theta \Big|_{\dot{\varphi} = \frac{J}{\sin^2 \theta}} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \underbrace{\left(J \cos \theta + \frac{J^2}{2 \sin^2 \theta} \right)}_{W_J(\theta)} \end{aligned}$$



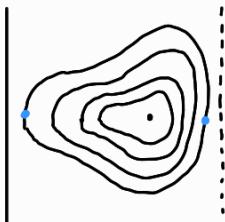
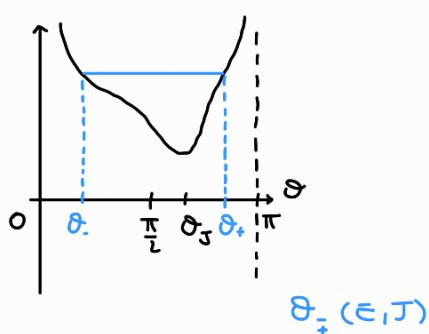
\Rightarrow ha almeno 1 p.to di min.

or se $J \neq 0$ la rotazione è costante: l'azimuto θ non varia
mai oltre $0, \pi$, dunque non si muove rispetto alla destra delle
coord (i poli)

$$\begin{aligned} w'_J(\theta) &= -\left(r \sin \theta + \frac{J^2}{\sin^3 \theta} \cos \theta\right) \\ &= -\frac{1}{\sin^3 \theta} (r \sin^3 \theta + J^2 \cos \theta) = 0 \end{aligned}$$



\Rightarrow i! zero θ_J da w'_J , inoltre osserviamo che: $\theta_J \rightarrow \pi/2 \ \& \ |J| \rightarrow +\infty$
 $\theta_J \rightarrow \pi \ \& \ |J| \rightarrow 0$



\Rightarrow dinamica del sistema ridotto è periodica ($J \neq 0$)

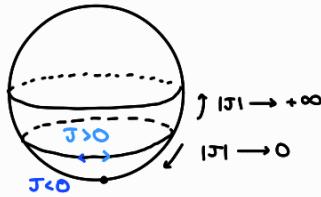
$$\theta_{-(\epsilon, J)} \leq \theta(\epsilon) \leq \theta_+(\epsilon, J)$$

- ricordo $\varphi(\epsilon) = \varphi(0) + \int_0^\epsilon \frac{J}{\sin(\theta(t))^2} dt$

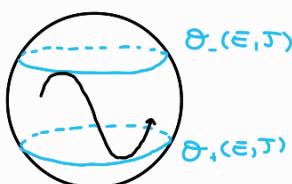
1) eq. relativo :

$$t \mapsto \theta(t) = \theta_J$$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{Jt}{\sin^2 \theta_J}$$



2) J, ϵ



■ Ci chiedono se questi moti sono periodici

Lo spazio delle fasi $T(\mathbb{S}^1 \setminus \{N, S\})$ ha dimensione 4

$$(\theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) \in (0, \pi) \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Gli interpreti primi ci permettono di capire come è fatto lo spazio delle fasi.

$$\text{IP} \quad \begin{cases} J = \dot{\varphi} \sin^2 \theta \\ \epsilon = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + t \cos \theta \end{cases}$$

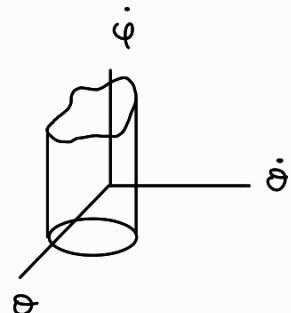
↓ funzione

$$\sum_{J,\epsilon} = \{(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) : \dot{\varphi} \sin^2 \theta = J, (\dots) = \epsilon\}$$

$$\approx \{\varphi \in \mathbb{S}^1\} \times \{\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}\} : \varphi = \frac{J}{\sin^2 \theta}, \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{J^2}{2 \sin^2 \theta} + t \cos \theta = \epsilon\}$$

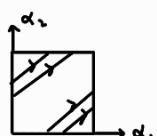
$$\approx \mathbb{S}^1 \times \{(\theta, \dot{\theta}) : \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{J^2}{2 \sin^2 \theta} + t \cos \theta = \epsilon\} \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

curve di livello dell'energia
del sistema rotatorio
 $\approx \mathbb{S}^1 \times \epsilon \in W_J(\theta_J)$
(=> è un cerchio topologicamente)



$$\Rightarrow \sum_{J,\epsilon} \underset{\text{diffeo}}{\approx} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

Fatto Su ogni $\sum_{J,\epsilon}$ la dinamica è conjugata al "flusso lineare" su \mathbb{T}^2



$$t \mapsto (\alpha_1(0) + t \omega_1(\epsilon, J), \alpha_2(0) + t \omega_2(\epsilon, J))$$

\Rightarrow periodico se e solo se $\frac{\omega_1(J, \epsilon)}{\omega_2(J, \epsilon)} \in \mathbb{Q}$

■ a chiediamo che $(\epsilon, \tau) \mapsto \frac{\omega_1(\tau, \epsilon)}{\omega_2(\tau, \epsilon)} \in \mathbb{Q}$,

ma c'è funzione continua su \mathbb{R}^2 , dunque si continua a perire da $\mathbb{Q} \cong \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
 \Rightarrow per alcuni valori il moto è denso e per altri è periodico.

$T_{\epsilon, \tau}$ periodo di θ

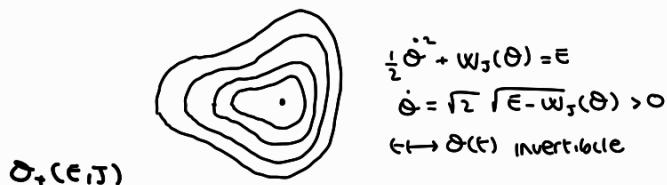


$\phi_{\epsilon, \tau} = \text{angolo da cui avanza } \phi \text{ nel tempo } T_{\epsilon, \tau}$

$$\Rightarrow t = m T_{\epsilon, \tau} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

In questo tempo ϕ varia di $m \phi_{\epsilon, \tau}$, dunque i moti sono periodici se e solo se

$$m \phi_{\epsilon, \tau} = n 2\pi \quad \text{se e solo se} \quad \frac{\phi_{\epsilon, \tau}}{2\pi} \in \mathbb{Q}$$



$$T_{\epsilon, \tau} = \sqrt{2} \int_{\theta_-(\epsilon, \tau)}^{\theta_+(\epsilon, \tau)} \frac{d\theta}{\sqrt{\epsilon - \omega_1(\theta)}}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\tau}{(\sin(\theta(t)))^2}$$

$$\phi_{\epsilon, \tau} = \int_0^{T(\epsilon, \tau)} \frac{\tau dt}{(\sin(\theta(t)))^2} = 2 \int_{\theta_-(\epsilon, \tau)}^{\theta_+(\epsilon, \tau)} \frac{\tau}{\sin^2 \theta \sqrt{\epsilon - \omega_1(\theta)}} d\theta$$

Ci aspettiamo più moti non periodici (\mathbb{Q} ha misura nulla su \mathbb{R})