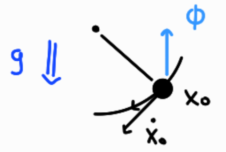
ESEMPIO PROTOTIPICO

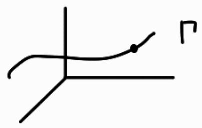
Intro (pendolo)



forza che costringe il punto a ruotare lungo la circonferenza

Domanda a cui cercheremo di rispondere: $\exists!\ \phi(x,\dot{x})$ forza t.c. $m\ddot{x} = f(x) + \phi(x,\dot{x})$ con dati iniziali $x_0 \in \Gamma$, $\dot{x}_0 \in T_{x_0}\Gamma$ e tale che i moti rimangano su Γ?

Queste forze non sono normali, perché non soddisfano il principio di sovrapposizione: (se cambio f, ϕ cambia). Parliamo di "reazioni vincolari", opposte alle "forze attive".

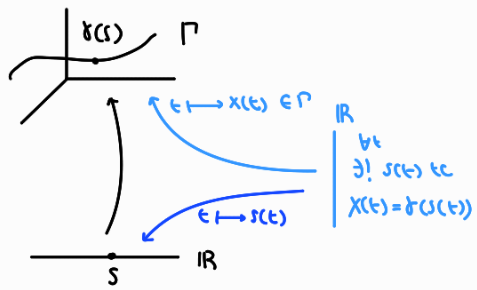


esempio $N = 1$

$\ddot{x} = f(x,\dot{x}) + \phi(x,\dot{x}) \quad \forall x_0 \in \Gamma,\ \forall \dot{x}_0 \in T_{x_0}\Gamma,\ t \longmapsto x(t) \in \Gamma\ \forall t$

Parametrizzo Γ : $\mathbb{R} \ni s \longmapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^3$

$$" = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \\ \gamma_3(s) \end{pmatrix}$$



oss Ci stiamo chiedendo se con l'aggiunta di ϕ, Γ diventa invariante

È comodo scegliere γ con parametro d'arco (vel. unitaria).

In ogni punto, vogliamo scegliere una base "comoda", come la base di Frenet (attenzione: propriamente, è una base per lo spazio tangente, non un riferimento)

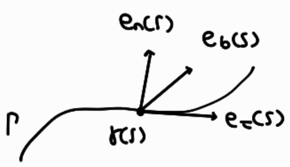
derivo $\|e_\tau(s)\|^2 = 1$

$e_\tau(s) := \gamma'(s) \qquad \|e_\tau(s)\| = \|\gamma'(s)\| = 1 \quad \forall s$

$\Rightarrow e_\tau'(s) \perp e_\tau(s)$

raggio di curvatura principale

$e_n(s) := \rho(s)\, \underbrace{e_\tau'(s)}_{\text{suppongo } \neq 0}$ con $\rho(s) = \dfrac{1}{\|e_\tau'(s)\|}$



$e_b(s) := e_\tau(s) \times e_n(s)$

Considero un moto $t \longmapsto x(t) = \gamma(s(t)) \in \Gamma$, allora

$\dot{x}(t) = \gamma'(s(t))\, \dot{s}(t) = \dot{s}\, e_\tau(s)$

$$\ddot{x} = \ddot{s}\, e_\tau + \dot{s}\, e_\tau'(s)\, \dot{s} = \ddot{s}\, e_\tau(s) + \frac{\dot{s}^2}{\rho(s)}\, e_n(s)$$

Riscriviamo l'eq. di Newton $m\ddot{x} = f(x,\dot{x}) + \phi(x,\dot{x})$ nella base di Frenet

$x = \gamma(s) \in \Gamma, \quad \dot{x} = \dot{s}\, e_\tau(s) \in T_x\Gamma$

$$f(x,\dot x) = f_\tau(s,\dot s)\, e_\tau(s) + f_n(s,\dot s)\, e_n(s) + f_b(s,\dot s)\, e_b(s)$$

$$\phi(x,\dot x) = \phi_\tau(s,\dot s)\, e_\tau(s) + \phi_n(s,\dot s)\, e_n(s) + \phi_b(s,\dot s)\, e_b(s)$$

se il moto $t \longmapsto x(t) \in \Gamma$, allora $x(t) = \gamma(s(t))$ con $t \longmapsto s(t)$ t.c.

componente τ:
componente n:
componente b:

$$\begin{cases} \boxed{m\ddot s = f_\tau(s,\dot s) + \phi_\tau(s,\dot s)} & \text{(tg)} \\ m\dfrac{\dot s^2}{\rho(s)} = f_n(s,\dot s) + \phi_n(s,\dot s) \\ 0 = f_b(s,\dot s) + \phi_b(s,\dot s) \end{cases}$$

Per ogni scelta di $(s,\dot s) \longmapsto \phi_\tau(s,\dot s)$ (tg) è eq. del II ord. (si può scrivere in forma normale), $x_0 = \gamma(s_0) \in \Gamma$, $\dot x_0 = \dot s_0 e_\tau \in T_{x_0}\Gamma$

$\exists!$ soluzione $t \longmapsto s(t)$ con dati iniziali $s_0, \dot s_0$.

Le altre due eq. ci permettono di determinare le restanti componenti di ϕ.

Dunque ϕ non è unica! Ciò permette di descrivere diverse situazioni:

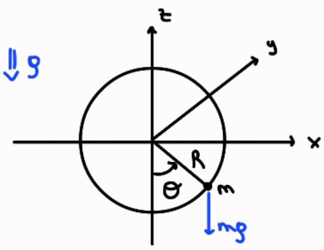
ϕ produce una forza tangente alla curva, che può essere, ad esempio, una forza d'attrito, che dipende dal materiale.

- $\phi_\tau(s,\dot s) = 0 \quad \forall s,\dot s \Rightarrow$ guida liscia (senza attrito)

  $\forall$ moto vincolato $t \longmapsto x(t) \in \Gamma$

  $$\phi(x(t),\dot x(t)) \cdot \underbrace{\dot x(t)}_{\parallel e_\tau(s(t))} = 0 \quad \forall t$$

esempio (pendolo) ≡ guida circolare liscia $\phi_\tau(s,\dot s) = 0$



$$\theta \overset{\hat r}{\longmapsto} (R\sin\theta,\ 0,\ -R\cos\theta)$$

$$\hat r'(\theta) = (R\cos\theta,\ 0,\ R\sin\theta), \quad \|\hat r'(\theta)\| = R$$

$$\theta \longmapsto s = R\theta$$

$$\gamma(s) = \hat r\left(\frac{s}{R}\right) = \left(R\sin\left(\frac{s}{R}\right),\ 0,\ -R\cos\left(\frac{s}{R}\right)\right)$$

$$e_\tau(s) = \gamma'(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{R}\right),\ 0,\ \sin\left(\frac{s}{R}\right)\right)$$

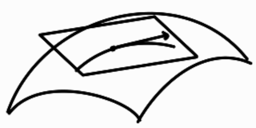
$$f_\tau(s) = f(\gamma(s)) \cdot e_\tau(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s}{R}\right) \\ 0 \\ \sin\left(\frac{s}{R}\right) \end{pmatrix} = -mg\sin\left(\frac{s}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{m}\ddot s = -g\sin\left(\frac{s}{R}\right)\cancel{m}$$

$$\ddot\theta = \frac{\ddot s}{R} = -\frac{g}{R}\sin(\theta)$$

VINCOLI OLONOMI IDEALI (FISSI)

Fibrato tangente a sottovarietà



M sottovarietà k-dim di $\mathbb{R}^m$

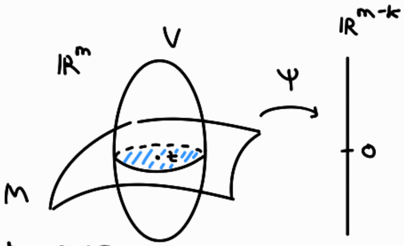
$z \in M$

$T_zM = \{\gamma'(0) : \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M \ , \ \gamma(0) = z\} \underset{\substack{\text{sottosp.} \\ \text{vettoriale}}}{\subset} T_z\mathbb{R}^m$ spazio tangente

se $M = \psi^{-1}(0)$ loc. allora $T_zM = \ker \psi'(z)$

def $TM := \{(z,v) : z \in M \ , \ v \in T_zM\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{2m}$ fibrato tangente a sottovarietà M

prop TM è sottovarietà di $\mathbb{R}^{2m}$ di dimensione $2k$ ($k = \dim M$)



dim Mostro che, loc, TM è 0 di una sommersione.

loc. M è 0 di sommersione $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^{m-k}$

La candidata sommersione per TM è il sollevamento tangente

$$T\psi : TV = V \times \mathbb{R}^m \longrightarrow T\mathbb{R}^{m-k} = \mathbb{R}^{m-k} \times \mathbb{R}^{m-k}$$

$$(z,v) \longmapsto (\psi(z), \psi'(z)v)$$

1) voglio mostrare che $\{(z,v) : z \in M \cap V \ , \ v \in T_z(M \cap V) = T_zM\} = T\psi^{-1}(0,0)$

$z \in M \cap V \ : \ \psi(z) = 0$

$v \in T_z(M \cap V) = T_zM \ : \ v \in \ker \psi'(z) \Rightarrow \psi'(z)v = 0$

2) $T\psi$ è una sommersione:

$(z,v) \longmapsto T\psi(z,v) = (\psi(z), \psi'(z)v)$

calcoliamo la matrice Jacobiana

$$(T\psi)'(z,v) = \begin{pmatrix} \boxed{\psi'(z)} & 0 \\ * & \boxed{\psi'(z)} \end{pmatrix}$$

hanno rango m-k

$\Rightarrow$ ha rango $2m-k$ $\Rightarrow$ $T\psi$ è sommersione □

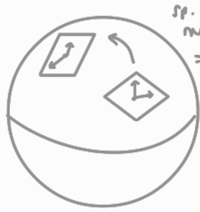
oss $M \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto $\Rightarrow TM = M \times \mathbb{R}^m$

o meglio: TM non è necessariamente diffeomorfo ad $M \times \mathbb{R}^k$ globalmente (localmente sì)

M sottovarietà di $\mathbb{R}^m$ di dim $k < m \Rightarrow TM \neq M \times \mathbb{R}^k$

esempio $TS^1 = S^1 \times \mathbb{R}$

ma $\underbrace{TS^2}_{\substack{\text{è campo vett} \\ \text{sulla sfera}}} \neq S^2 \times \mathbb{R}^2$ (non sono omeomorfi!)



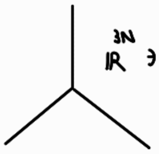
voglio spostare la base dello sp. tangente in modo continuo
$\Rightarrow$ torno con una base diversa
$\Rightarrow$ non vale l'identificazione

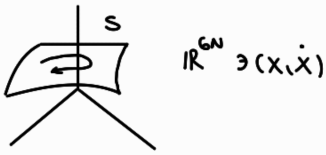
HAIRY BALL THEOREM : non esiste alcun campo vett. continuo ovunque $\neq 0$ su S^2

Vincoli fissi olonomi e ideali

$P_1, \dots, P_N$

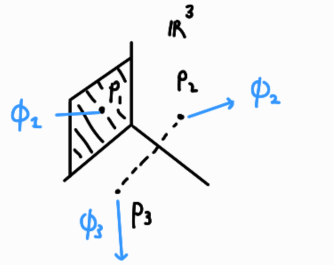
$M\ddot{x} = F(x, \dot{x})$





- sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^{6N}$
- forze che agiscono sui punti materiali

$\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_N)$ "reazioni vincolari"



S sia quasi-invariante per $M\ddot{x} = F(x, \dot{x}) + \Phi(x, \dot{x})$

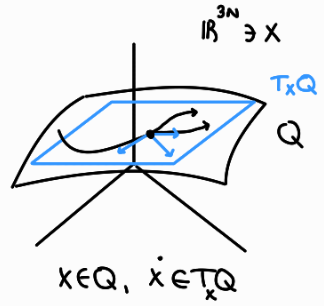
$\Downarrow$

speriamo che questo ci permetta di avere una dinamica differenziabile

1) S sia sottovarietà $T\mathbb{R}^{3N}$

2) $S = TQ$ di una sottovarietà Q di $\mathbb{R}^{3N} \ni x$

(vincolo olonomo)



def Matrice massa M, forze attive $F = (f_1, \dots, f_N)$

1) "vincolo olonomo" (fisso)

- sottov. (connessa) Q di $\mathbb{R}^{3N} \ni x$
- mappa $\Phi : T\mathbb{R}^{3N} \longrightarrow \mathbb{R}^{3N}$

t.c. TQ sia quasi-invariante per $M\ddot{x} = F(x, \dot{x}) + \Phi(x, \dot{x})$, cioè per

$$(*) \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = M^{-1} F(x, \dot{x}) + M^{-1} \Phi(x, \dot{x}) \end{cases} \quad \text{in } T\mathbb{R}^{3N} = \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$$

2) Q è "varietà della configurazione" o "varietà vincolare"

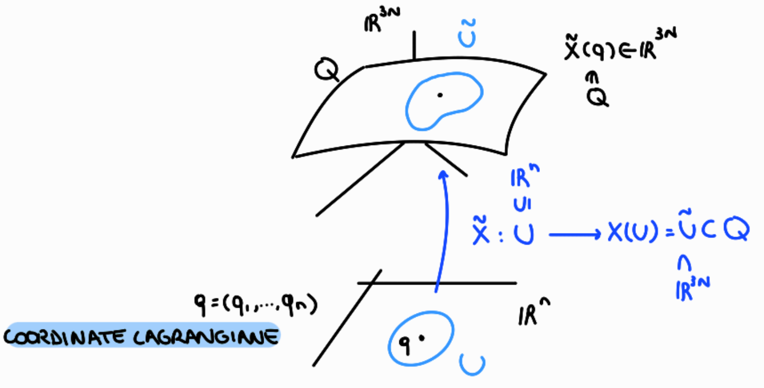
$(x, v) \in TQ$ "atti di moto vincolati"

3) $\dim Q =: n$ numero dei "gradi di libertà"

4) "sistema vincolato a Q"
"sistema olonomo" } restrizione di $(*)$ a TQ

(pagina 242)

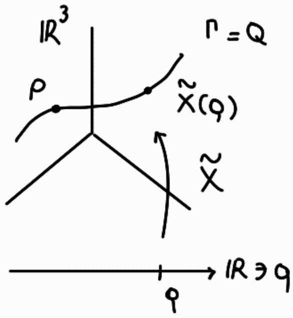
Descrizione dei moti vincolati (moti su Q):



$\tilde{x} = (\underbrace{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3}, \dots, \tilde{x}_{3N})$
$= (\tilde{\mathbf{x}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_N)$

esempio

1) 1 p.to materiale vincolato a curva Γ

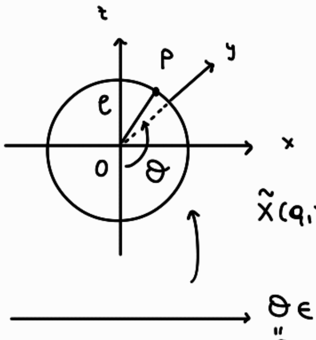


$N = 1$

$\Gamma = Q$

$n = 1$ grado di libertà

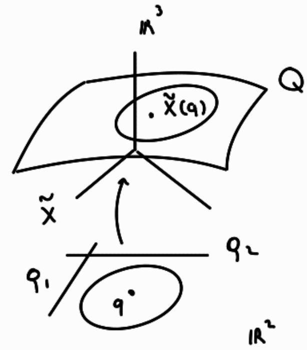
Ad esempio, Γ cerchio di raggio ℓ nel piano $y=0$



$$\tilde{X}(q_1) = \begin{pmatrix} \ell \sin(q_1) \\ 0 \\ -\ell\cos(q_1) \end{pmatrix} \quad \text{param di } \Gamma = Q$$

$\theta \in S^1$
$\overset{\shortparallel}{q_1}$

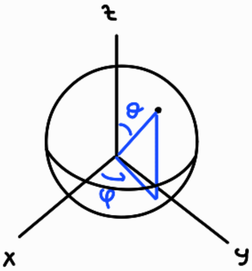
2) 1 punto mat. vincolato a superficie



$N = 1$

$n = 2$

Ad esempio, Q sfera di raggio R (pendolo sferico)

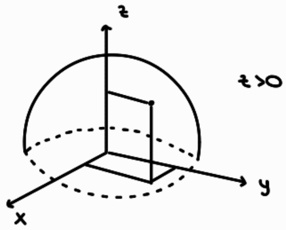


$\Downarrow g$

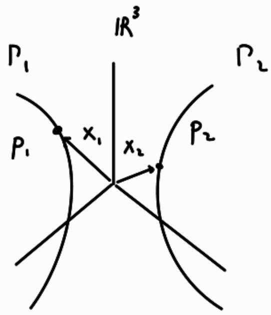
$\theta \in (0, \pi)$
$\varphi \in S^1$
$\quad q_1 \quad q_2$

$$\tilde{X}(\overset{q_1}{\theta}, \overset{q_2}{\varphi}) = (R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta)$$

$$\tilde{X}(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$$



3) due punti vincolati ciascuno ad una curva



$N = 2$

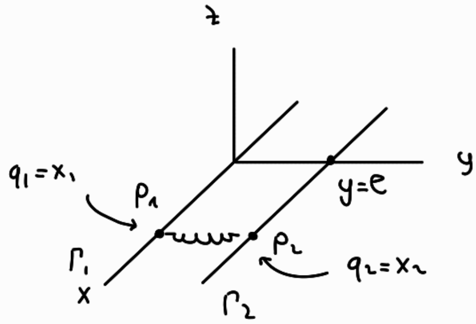
$P_1 \text{ e } P_2 \quad , \quad Q \in \mathbb{R}^3$
$\;\Uparrow \quad\;\; \Uparrow$
$\Gamma_1 \neq \Gamma_2$

$$Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \; x_1 \in \Gamma_1,\; x_2 \in \Gamma_2\}$$

$$= \{x_1 \in \mathbb{R}^3 : x_1 \in \Gamma_1\} \times \{x_2 \in \mathbb{R}^3 : x_2 \in \Gamma_2\}$$

$$\underset{\text{diffeo}}{\cong} \underbrace{\Gamma_1 \times \Gamma_2}_{\text{dim } 2} \quad \text{in } \mathbb{R}^6$$

Ad esempio, Γ_1 asse x e Γ_2 retta $\begin{cases} y = e \neq 0 \\ z = 0 \end{cases}$



$\Gamma_1 = \mathbb{R}$

$\Gamma_2 = \mathbb{R}$

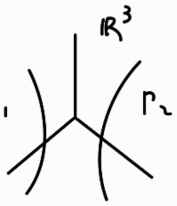
$Q = \Gamma_1 \times \Gamma_2 = \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^6$

$\tilde{X}(q_1, q_2) = (\overset{x_1}{q_1}, \overset{y_1}{0}, \overset{z_1}{0}, \overset{x_2}{q_2}, \overset{y_2}{e}, \overset{z_2}{0})$

per questo sono dette "coordinate libere"

- Γ_1, Γ_2 curve non chiuse $\underset{\text{diffeo}}{\cong} \mathbb{R}, \mathbb{R}$

  $\Rightarrow Q \simeq \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^6$

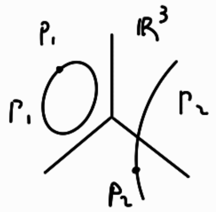


$\mathbb{R}^6$

$Q \sim \mathbb{R}^2$

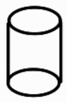
PIANO

- Γ_1 chiusa, Γ_2 non chiusa $\Rightarrow Q \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^6$



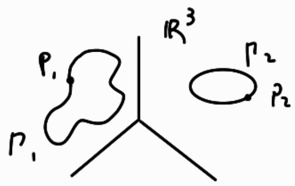
$\mathbb{R}^6$

$Q \sim S^1 \times \mathbb{R}$



CILINDRO

- Γ_1, Γ_2 chiuse $\simeq S^1, S^1 \Rightarrow Q \simeq \mathbb{T}$ in $\mathbb{R}^6$



$\mathbb{R}^6$

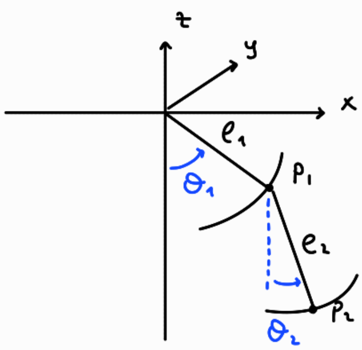
$Q \sim \mathbb{T}$

TORO

3.1) (pendolo doppio)

$N = 2$

P_1, P_2 con $\begin{cases} y_1 = 0 \\ x_1 + z_1^2 = e_1^2 \end{cases}$ e $\|P_1 P_2\| = e_2$



$P_1 \in$ cerchio, $P_2 \in$ cerchio

$Q \simeq S^1 \times S^1 = \mathbb{T}$

la ~ viene usata per denotare oggetti in $\mathbb{R}^{3N}$

$\tilde{X}(\theta_1, \theta_2) = (\tilde{x}_1(\theta_1, \theta_2), \tilde{y}_1(\theta_1, \theta_2), \tilde{z}_1(\theta_1, \theta_2), \tilde{x}_2(\dots), \tilde{y}_2(\dots), \tilde{z}_2(\dots))$

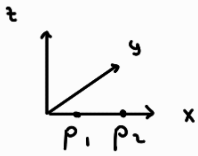
$$
\begin{cases}
x_1 = e_1 \sin\theta_1 \\
y_1 = 0 \\
z_1 = -e_1 \cos\theta_1
\end{cases}
\quad \text{dipendono solo da } \theta_1
\qquad
\begin{aligned}
&= \tilde{x}_1(\theta_1,\theta_2) = \tilde{X}_1(\theta_1,\theta_2) \\
&= \tilde{y}_1(\theta_1,\theta_2) = \tilde{X}_2(\theta_1,\theta_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
x_2 = e_1 \sin\theta_1 + e_2 \sin\theta_2 \\
y_2 = 0 \\
z_2 = -e_1 \cos\theta_1 - e_2 \cos\theta_2
\end{cases}
\quad \text{dipendono sia da } \theta_1 \text{ che da } \theta_2
\qquad = \tilde{z}_2(\theta_1,\theta_2) = \tilde{X}_6(\theta_1,\theta_2)
$$

4) N=2 p.ti materiali vincolati alla stessa curva in $\mathbb{R}^3$

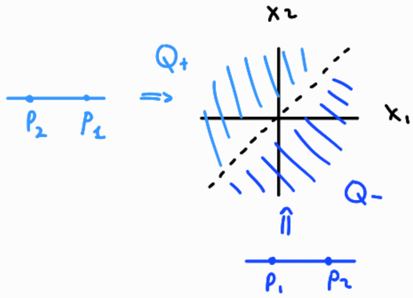
Se P_1, P_2 possono passare per lo stesso punto, $Q = \Gamma \times \Gamma$, altrimenti:

Γ = asse x



$$Q = \{(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^6 : y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0,\ x_1 \neq x_2\}$$

$$Q = Q_+ \cup Q_- \quad \text{con} \quad Q_\pm = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \gtrless x_2\} \simeq \mathbb{R}^2$$



Per capire quale sia la varietà delle configurazioni bisogna guardare le condizioni iniziali.

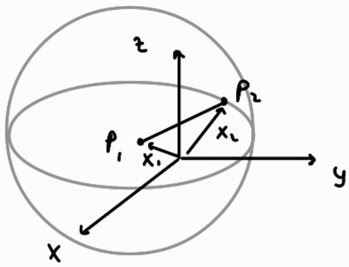
In entrambi i casi il sistema ha due gradi di libertà.

5) (manubrio)

$N=2$, $d(P_1,P_2) = \text{cost}$

$P_1 \in \mathbb{R}^3$

Fissato $P_1 \in \mathbb{R}^3$. P_2 può stare su una sfera



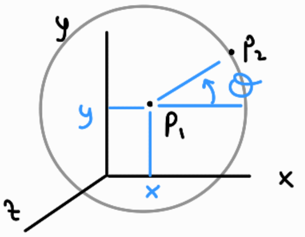
si dimostra $\rightsquigarrow Q \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$, $n = 5$

$$\psi(\underset{\mathbb{R}^3}{x_1}, \underset{\mathbb{R}^2}{x_2}) = \|X_1 - X_2\|^2 - e^2, \quad \psi : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$D\psi(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} X_1 - X_2 \\ X_2 - X_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \begin{cases} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{cases} \end{matrix} \neq 0 \text{ nei punti di } Q \Rightarrow \text{sottov. 5-dim}$$

6) (manubrio vincolato ad un piano)

$d(P_1,P_2) = \text{cost}$, $\quad P_1, P_2 \in$ piano x,y



$Q = \mathbb{R}^2 \times S^1$

$n = 3$

eq vincolo: $\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \\ (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = \ell^2 \end{cases}$

$Q = \psi^{-1}(0)$ con $\psi : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

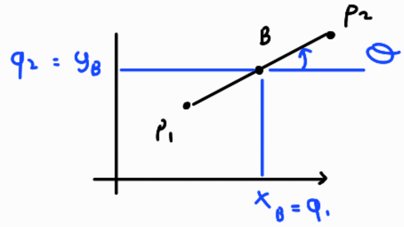
$$\psi(x_1,\dots,z_2) = \left(z_1, z_2, (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 - \ell^2\right)$$

$$\psi'(x_1,\dots,z_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2(x_1-x_2) & 2(y_1-y_2) & 0 & 2(\dots) & 2(\dots) & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \ (P_1 \neq P_2)$$

Possiamo prendere la parametrizzazione:

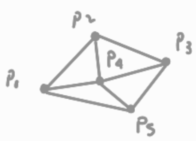
$\tilde{x}(\overset{x_{P_1}}{x}, \overset{y_{P_1}}{y}, \theta) = (x, y, 0, x+\ell\cos\theta, y+\ell\sin\theta, 0) \quad (\rightsquigarrow \mathbb{R}^2 \times S^1 \simeq Q)$

oppure anche con le seguenti coordinate



$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = q_1 - \frac{\ell}{2}\cos\theta \\ y_1 = q_2 - \frac{\ell}{2}\sin\theta \\ z_1 = 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$

7) vincolo di rigidità



$N \geq 2$

Permette di descrivere un insieme di punti rigido, dunque tutti i corpi rigidi.

Immaginiamo di fissare $P_1 \in \mathbb{R}^3$ e poi fissiamo una base in cui i punti del sistema siano fissi: posso quindi determinare la posizione di tutti i punti guardando l'orientazione della base. Si ottiene che il sistema è $\simeq \mathbb{R}^3 \times SO(3)$

ripasso vincolo olonomo:

- sottov. $Q \subseteq \mathbb{R}^{3N}$
- $\underline{\Phi} : \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow \mathbb{R}^{3N}$

tc $M\ddot{X} = F + \underline{\Phi} \longleftrightarrow \begin{cases} \dot{X} = V \\ \dot{V} = F + \underline{\Phi} \end{cases}$ abbia TQ come sottov. q-invariante (tangente a TQ)

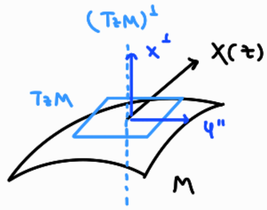
Vogliamo capire se, comunque venga assegnata Q, esiste una $\underline{\Phi}$ che renda TQ quasi-invariante.

oss $\dot{z} = X(z)$, $z \in \Omega$

sottov. M di Ω

Esiste un campo vett. Y su Ω tc M sia quasi-invariante per $\dot{z} = X(z) + Y(z)$,

cioè X+Y tangente a M? Sì! $X(z)+Y(z) \in T_zM \;\; \forall z \in M$



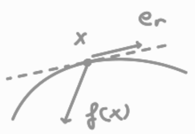
$T_z\Omega = T_zM \oplus (T_zM)^\perp$
$\;\;\;\;\;\;\; \Downarrow$
$\;\;\;\; V \;\;\; = \;\; V^{\parallel} \oplus V^{\perp}$ "parallelo" "ortogonale"

$X+Y = X'' + Y'' + \underbrace{X^\perp + Y^\perp}_{=0} \iff X+Y$ tangente ad M

Ogni Y tc $Y^\perp = -X^\perp$ rende il campo vett. X+Y tangente a M

$\forall Y''$ trovo un Y che rende X+Y tangente ad M (la scelta di Y'' è completamente arbitraria). C'è una scelta speciale per $Y''=0$: la restrizione su M è determinata solo da X e non da Y.

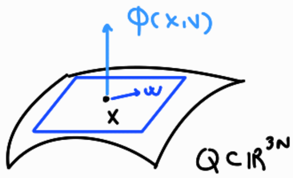
ricordo



$\phi \cdot e_r = \phi_r = 0$
in questo caso Γ è anche guida liscia (senza attrito)

def Vincolo olonomo $(Q, \underline{\Phi})$ è **IDEALE** se $\forall x \in Q$, $\forall V \in T_xQ$ si ha

$\underline{\Phi}(x,v) \perp T_xQ$ ("principio di d'Alembert")



oss 1 $\underline{\Phi}(x,v) \cdot w = 0 \quad \forall x \in Q, \forall v, w \in T_xQ$ velocità virtuale

$\overset{*}{\Longrightarrow} \underline{\Phi}(x,v) \cdot v = 0 \quad \forall (x,v) \in TQ$ idealità = lavoro virtuale della reazione vincolare è =0.

$\Longrightarrow \underline{\Phi}$ ha potenza nulla

oss 2 se $X = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^3 \times \dots \times \mathbb{R}^3$,

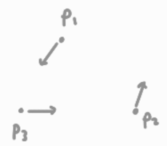
$V = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^3 \times \dots \times \mathbb{R}^3$

$\underline{\Phi} = (\phi_1, \dots, \phi_N)$

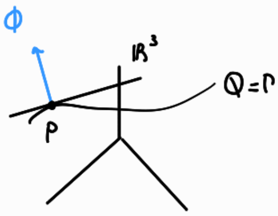
si ha $\underbrace{\underline{\Phi} \cdot V}_{\text{in } \mathbb{R}^{3N}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \phi_\alpha \cdot v_\alpha = 0$

se in qualche punto la forza cede energia al sistema, in qualche altro la assorbe

ovvero: le reazioni vincolari possono compiere lavoro sui singoli punti materiali, ma la loro somma deve essere nulla



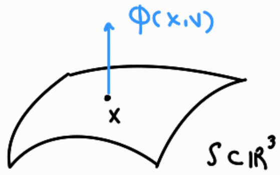
esempio 1) $N=1$ su curva



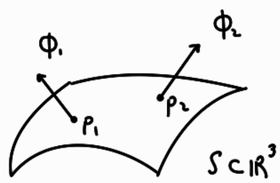
$\underline{\Phi}$ reazione vincolare su P non ha componente tangente a Γ

$\Leftrightarrow$ Γ è liscia (no attrito)

$N=1$ su superficie è analogo



2) $N=2$ punti materiali vincolati a superficie



$X = (x_1, x_2) \in Q = \{x_1 \in S,\ x_2 \in S\} = S \times S$

$\underline{\Phi} = (\phi_1, \phi_2)$

ci chiediamo sotto quali condizioni $\underline{\Phi}(x,v) \cdot w = 0 \quad \forall (x,v) \in TQ\ ,\ \forall w \in T_xQ$

Individuiamo T_xQ , con $x = (x_1, x_2) \in Q$

$$T_xQ = T_{(x_1,x_2)}(S \times S)$$

si può scrivere Q come 0 di sommersione, oppure, più semplicemente:

$t \longmapsto \gamma(t) = (\underbrace{x_1(t)}_{\substack{\text{curva} \\ \in S\ \forall t}}, \underbrace{x_2(t)}_{\substack{\text{curva} \\ \in S\ \forall t}})$ curva su $S \times S$

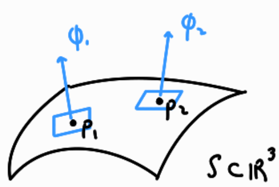
$\Rightarrow \gamma'(0) = (\underset{\substack{\cap \\ T_{x_1(0)}S}}{x_1'(0)}, \underset{\substack{\cap \\ T_{x_2(0)}S}}{x_2'(0)})$

$\Rightarrow T_{(x_1,x_2)}(\overset{=Q}{S \times S}) = T_{x_1}S \times T_{x_2}S$

$\underline{\Phi}(x,v) \cdot w = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1, x_2, v_1, v_2) \\ \phi_2(x_1, x_2, v_1, v_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall w_1 \in T_{x_1}S\ ,\ \forall w_2 \in T_{x_2}S$

$\Leftrightarrow \quad \phi_1 \perp T_{x_1}S\ ,\quad \phi_2 \perp T_{x_2}S$

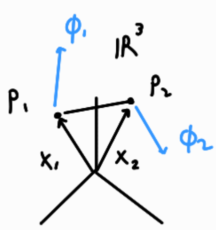
$\Leftrightarrow \quad S$ è liscia



3) (manubrio)

$Q = \mathbb{R}^3 \times S^2$

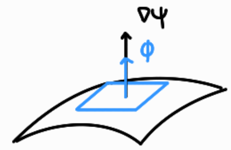
$\dim Q = 5$



$\underline{\Phi} = (\phi_1, \phi_2)$, $\quad X = (X_1, X_2) \in Q$

capiamo quando si verifica $\Phi(X,V) \perp T_X Q \quad \forall (X,V) \in TQ$:

$Q = \psi^{-1}(0)$ con $\psi(X_1, X_2) = \|X_1 - X_2\|^2 - e^2$



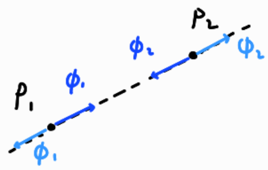
perché Q ha codim = 1

$T_X Q = \ker J\psi(X)$

$(T_X Q)^\perp = \text{span}(\nabla\psi(X))$

$\Rightarrow \phi(X_1, X_2, V_1, V_2) \parallel \nabla\psi(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} 2(X_1 - X_2) \\ -2(X_1 - X_2) \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} 2(X_{11} - X_{21}) \\ 2(X_{12} - X_{22}) \\ 2(X_{13} - X_{23}) \end{cases}$

$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} X_1 - X_2 \\ -(X_1 - X_2) \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$



$\Rightarrow \phi_1 = -\phi_2 \parallel X_1 - X_2$

Ovvero: il vincolo è ideale se e solo se i due vettori ϕ_1 e ϕ_2 sono diretti come la congiungente i due punti P_1 e P_2 e sono uguali e opposti.

OSS se così non fosse, il manubrio sarebbe messo in moto, ma allora le reazioni vincolari eserciterebbero un lavoro sul sistema

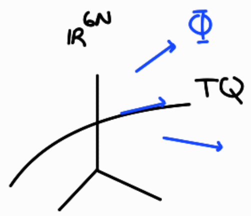
$\Rightarrow$ il vincolo non potrebbe essere ideale

In generale, la condizione di idealità non ha nulla a che fare con l'assenza di attrito.

Inoltre, l'ortogonalità è nello spazio delle configurazioni, non in quello tridimensionale.

Equazioni di Lagrange di I specie

∃! R.V. ideale che rende TQ q-inv? Sì



Prop N p.ti materiali, matrice masse M, forze attive F

$\forall$ sottov. Q di $\mathbb{R}^{3N}$

ESISTENZA: 1. $\exists\ \Phi : \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow \mathbb{R}^{3N}$ tc

- $\phi(x,v) \perp T_x Q$, $\forall (x,v) \in TQ$ ← è ideale
- $(v, M^{-1}(F+\phi))$ è tangente a TQ

campo vettoriale $\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = M^{-1}(F+\phi) \end{cases}$

"UNICITÀ": 2. se Φ_1 e Φ_2 sono tali, allora $\Phi_1|_{TQ} = \Phi_2|_{TQ}$.

dim 1) $n = \dim Q$

a rigore lo è localmente

Suppongo $Q = \psi^{-1}(0)$ con $\psi : \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow \mathbb{R}^{3N-n} = \mathbb{R}^r$ sommersione

sappiamo $TQ = (T\psi)^{-1}(0)$

$T_{(x,v)}(TQ) = \ker (T\psi)'(x,v) \qquad x \in Q,\ v \in T_x Q$

$T\psi(x,v) = (\psi(x), \psi'(x)(v))$

$$T\psi'(x,v) = \begin{pmatrix} \psi'(x) & 0 \\ B(x,v) & \psi'(x) \end{pmatrix}$$

vogliamo $(v, M^{-1}(F(x,v) + \Phi(x,v))) \in T_{(x,v)} TQ$, ovvero

$$\begin{pmatrix} \psi' & 0 \\ B & \psi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ M^{-1}(F+\Phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vogliamo trovare Φ

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi'(x)\, v = 0 & \text{, vera perché } v \in T_x Q \\ Bv + \psi' M^{-1} F + \psi' M^{-1} \Phi = 0 \end{cases}$$

vogliamo $\underbrace{\psi' M^{-1}}_{(r\times 3N)\times(3N\times 3N) \,=\, r \times 3N} \Phi = -(\psi' M^{-1} F + Bv)$ + idealità

cerco soluzione $\Phi(x,v) \perp T_x Q$

$(T_x Q)^\perp = \operatorname{span}(\nabla\psi_1(x), \dots, \nabla\psi_r(x))$

$$\Phi = \sum_{i=1}^{r} d_i(x,v) \nabla\psi_i(x) = (\psi'(x))^t\, d(x,v)$$

→ MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

? $\exists\ d : TQ \longrightarrow \mathbb{R}^r$ tc

simmetrica → $\psi' M^{-1} (\psi')^t d = -(\psi' M' F + Bv)$

$\underbrace{(r \times 3N) \times (3N \times 3N) \times (3N \times r)}_{r \times r \text{ invertibile se } M>0 \text{ (def positiva)}}$

rk = r, invertib. M>0, rk = r

$$\Rightarrow d = -(\psi' M^{-1} (\psi')^t)^{-1} (\psi' M^{-1} F + Bv)\big|_{TQ}$$

def $\quad d_{id} := -(\psi' M^{-1} (\psi')^t)^{-1} (\psi' M^{-1} F + B v) : \mathbb{R}^{6N} \longrightarrow \mathbb{R}^r$

$\Phi_{id} := (\psi'(x))^t \, d_{id} \quad : \mathbb{R}^{6N} \longrightarrow \mathbb{R}^r$

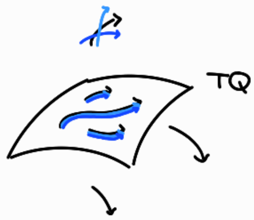
è def non solo in TQ, ma su tutto $\mathbb{R}^{6N}$

Allora il campo vettoriale $(v, M^{-1}F + M^{-1}\Phi_{id})$ è tg a TQ

2) Φ_{id} qualunque $\Rightarrow \Phi_{id}|_{TQ} = (\psi')^T d \quad \exists d$

$(v, M^{-1}F + M^{-1}\Phi_{id})$ è tg a TQ $\iff d = d_{id}|_{TQ}$ $\square$

↳ è tutto ben def: d non dipende da ψ, ma non lo dim



se R.V. sono ideali $\Rightarrow \exists!$ reazione Φ_{id} tc $\boxed{M\ddot{x} = F(x,v) + \Phi_{id}(x,v)}$ abbia TQ q-invariante.

"equazioni di Lagrange di prima specie"