CONTINUITÀ: $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

DERIVATA: $f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ se $\exists$ finito

$\iff f(z) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(h)$

def $f: \underset{\text{aperto connesso}}{\Omega} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è **olomorfa** in Ω se è derivabile e $\forall z \in \Omega$ con derivata continua in senso complesso.

oss dal teorema di Goursat è sufficiente f derivabile $\forall z \in \Omega$

def f è **intera** se è olomorfa in $\mathbb{C}$

TEOREMA (**condizioni di Cauchy-Riemann**). $f: \underset{\text{aperto connesso}}{\Omega} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, $u,v: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = x+iy$. f è derivabile in $z_0 = x_0 + iy_0$ se e solo se u, v sono differenziabili in (x_0, y_0) e valgono le condizioni

$$\boxed{(CR) \begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) \end{cases}} \qquad (*)$$

dim ($\Rightarrow$) f derivabile in $z_0 = x_0 + iy_0$, $h := h_1 + ih_2$, $f'(z_0) := \alpha + i\beta$. Osservo $o(h) = o(|h|)$.

$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(h)$.

$u(x,y) + iv(x,y) = u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0) + (\alpha+i\beta)(h_1+ih_2) + o(h)$

$u(x,y) + iv(x,y) = u(x_0,y_0) + \alpha h_1 - \beta h_2 + i(v(x_0,y_0) + \alpha h_2 + \beta h_1) + o(h)$

Parte reale ed immaginaria:

$u(x,y) = u(x_0,y_0) + \alpha h_1 - \beta h_2 + o(|h|)$

$\quad = u(x_0,y_0) + \langle \begin{pmatrix}\alpha \\ -\beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\rangle + o(|h|)$

$\quad = u(x_0,y_0) + \langle Du(x_0,y_0), \begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\rangle + o(|h|)$

e analogamente

$v(x,y) = v(x_0,y_0) + \alpha h_2 + \beta h_1 + o(|h|)$

$\quad = v(x_0,y_0) + \langle \begin{pmatrix}\beta \\ \alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\rangle + o(|h|)$

$\quad = v(x_0,y_0) + \langle Dv(x_0,y_0), \begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\rangle + o(|h|)$

$f(z) = \sqrt{|\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re} z|}$
u non è diff in $(0,0)$

Controesempio di funzione per cui valgono le cond. di CR, ma che non è olomorfa:

$f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4} & \mathbb{C}\setminus\{0\} \\ 0 & z=0 \end{cases}$

non è continua in $z=0$.

Ma allora u e v sono differenziabili e vale $u_x = \alpha$, $u_y = -\beta$, $v_x = \beta$, $v_y = \alpha$.
Dunque valgono le condizioni di Cauchy Riemann. Inoltre si ha

$$f'(z_0) = \alpha + i\beta = u_x + iv_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$
$$= v_y - iu_y = -i(u_y + iv_y) = -i\frac{\partial f}{\partial y}$$

($\Leftarrow$) valgono le condizioni di Cauchy-Riemann.
Voglio mostrare $f(z) - f(z_0) = f'(z_0)h + o(|h|)$

$f(z) - f(z_0) = u(x,y) + iv(x,y) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)$

$\quad = u(x,y) - u(x_0,y_0) + i(v(x,y) - v(x_0,y_0))$

$\quad = \langle Du(x_0,y_0), \begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\rangle + i\langle Dv(x_0,y_0), \begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\rangle + o(|h|)$

$\quad = u_x(x_0,y_0)h_1 + u_y(x_0,y_0)h_2 + iv_x(x_0,y_0)h_1 + iv_y(x_0,y_0)h_2 + o(|h|)$

$\quad = (u_x + iv_x)h_1 + (\underset{=u_x}{v_y} - \underset{=iv_x}{iu_y})ih_2 + o(|h|)$

$\quad = (u_x + iv_x)(h_1 + ih_2) + o(h) =: f'(z_0)h + o(h)$ $\square$

(*) Inoltre $\boxed{f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}}$

prop (condizioni di C-R in coord. polari). $\boxed{\rho i \frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial \theta}}$

dim $f(z) = f(\rho e^{i\theta}) =: g(\rho,\theta)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial \rho} = f'(\rho e^{i\theta})\cdot e^{i\theta} \Rightarrow f'(z) = \frac{\partial g}{\partial \rho} e^{-i\theta} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} = f'(\rho e^{i\theta})\cdot \rho i e^{i\theta} \Rightarrow f'(z) = \frac{\partial g}{\partial \theta}\cdot\frac{e^{-i\theta}}{\rho i} \end{array}\right\} \frac{\partial g}{\partial \rho}\cdot \rho i = \frac{\partial g}{\partial \theta}$$

Con un piccolo abuso di notazione abbiamo $\frac{\partial f}{\partial \rho}\cdot\rho i = \frac{\partial f}{\partial \theta}$ □

prop $f: \underset{\text{aperto connesso}}{\Omega} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa in Ω e $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$, allora f è conforme.

dim Siano γ_1, γ_2 curve regolari tc $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = z_0$ e
$\theta = \arg(\gamma_1'(t_0)) - \arg(\gamma_2'(t_0))$. Sia $\omega_i(t) = f(\gamma_i(t))$.

$$\begin{cases} \omega_1'(t) = f'(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t) \neq 0 \\ \omega_2'(t) = f'(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t) \neq 0 \end{cases}$$

$\varphi = \arg(\omega_1'(t_0)) - \arg(\omega_2'(t_0)) = \arg(f'(\gamma_1(t_0))\gamma_1'(t_0)) - \arg(f'(\gamma_2(t_0))\gamma_2'(t_0))$
$= \cancel{\arg(f'(\gamma_1(t_0)))} + \arg(\gamma_1'(t_0)) - \cancel{\arg(f'(\gamma_2(t_0)))} - \arg(\gamma_2'(t_0)) = \theta$ □

def $f: \underset{\text{aperto connesso}}{\Omega} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è **analitica** in Ω se $\forall z_0 \in \Omega \ \exists \varepsilon > 0$ tc f coincide con una serie di potenze in $B_\varepsilon(z_0)$, cioè $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \ \forall z \in B_\varepsilon(z_0)$

prop
- f analitica $\Rightarrow f$ olomorfa (in Ω)
- f analitica $\Rightarrow f$ C^∞

INTEGRALE DI LINEA: $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \underset{\text{prodotto in } \mathbb{C}}{\cdot} \gamma'(t)\,dt$

[integrale di linea di $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $\int_\gamma f(x)\,dx = \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt$
integrale di linea di 1-forma $\omega: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: $\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t)) \underset{\text{prodotto scalare}}{\cdot} \gamma'(t)\,dt$]

prop $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \max_{t\in\gamma} |f(z)|\, \underbrace{\ell(\gamma)}_{\text{lunghezza della curva}}$

prop Se $f = u+iv$, $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy$. Se f è olomorfa, allora $(u,-v)$, (v,u) sono 1-forme chiuse

dim
- $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$, $\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)$, $z = x+iy$

$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b (u(\gamma_1(t),\gamma_2(t)) + iv(\gamma_1(t),\gamma_2(t)))(\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t))\,dt$
$= \int_a^b u(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\,\gamma_1'(t) - v(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\,\gamma_2'(t)\,dt + i\int_a^b v(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\,\gamma_1'(t) + u(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\,\gamma_2'(t)\,dt$
$= \int_\gamma (u,-v) + i\int_\gamma (v,u)$

- f olomorfa implica $\frac{\partial(-v)}{\partial x} = -v_x \overset{CR}{=} u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ & $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x = v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ □

def F è una primitiva di $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua se F è olomorfa in Ω e $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in \Omega$

prop (Gauss-Green). $F \in C^1(\bar{A}, \mathbb{R}^2)$ (aperto con bordo), $F = (F_1, F_2)$, allora

$$\boxed{\int_{\partial A} F \, d\mathcal{H}^1 = \iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy}$$

$d\mathcal{H}^1$: ds; $dxdy$: $d\mathcal{L}^2$

dim teorema della divergenza: $\int_A \operatorname{div}(F) \, d\mathcal{L}^n = \int_{\partial A} F \cdot \vec{n} \, d\mathcal{H}^{n-1}$, $F \in C^1(\bar{A}, \mathbb{R}^n)$

$F := F_1 dx + F_2 dy$ 1-forma

$Q := F_2 dx - F_1 dy$ campo vettoriale

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, $\gamma = \partial A$

$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$ tangente alla curva, $\vec{n}(t) = \dfrac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{|\gamma'(t)|}$ normale alla curva

$$\int_\gamma F = \int_a^b F_1 \gamma_1'(t) + F_2 \gamma_2'(t) \, dt$$
$$= \int_a^b \left\langle Q, \frac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{|\gamma'(t)|} \right\rangle |\gamma'(t)| \, dt$$
$$= \int_a^b \langle Q, \vec{n}(t) \rangle |\gamma'(t)| \, dt$$
$$= \int_{\partial A} \langle Q, \vec{n} \rangle \, d\mathcal{H}^1$$
$$= \int_A \operatorname{div}(Q) \, d\mathcal{L}^2 = \int_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy \qquad \square$$

TEOREMA (dell'integrale nullo di Cauchy). $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (aperto) olomorfa in Ω, γ circuito (chiuso e semplice) regolare a tratti tc $\operatorname{int} \gamma =: D \subseteq \Omega$. Allora

(caso f C^1.)
$$\int_\gamma f(z) \, dz = 0.$$

dim Ricordo $\int_\gamma f(z) \, dz = \int_\gamma (u, -v) \, ds + i \int_\gamma (v, u) \, ds$.

Uso il teorema di Gauss-Green:

$$\int_{\gamma = \partial D} (u, -v) \, ds \overset{GG}{=} \iint_D \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (\underbrace{-v_x - u_y}_{=0}) \, dx dy = 0.$$

$$\int_{\partial D} (v, u) \, ds \overset{GG}{=} \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (\underbrace{u_x - v_y}_{=0}) \, dx dy = 0. \qquad \square$$

prop f olomorfa in $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ semplicemente connesso, allora le due forme $u dx - v dy$ e $v dx + u dy$ sono esatte in Ω, dunque $\exists$ una primitiva F di f in Ω.

TEOREMA (dei circuiti omotopi di Cauchy). $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (aperto) olomorfa in Ω, γ_1, γ_2 circuiti regolari a tratti (percorsi nello stesso verso) tc $D_1 := \operatorname{int} \gamma_1 \subseteq \operatorname{int} \gamma_2 =: D_2$ e $D_2 \setminus D_1 \subset \Omega$. Allora

$$\int_{\gamma_1} f(z) \, dz = \int_{\gamma_2} f(z) \, dz$$

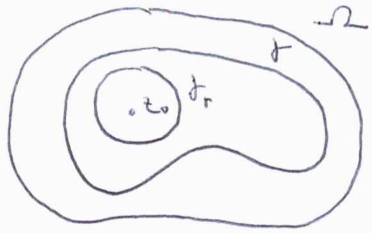
TEOREMA (prima formula integrale di Cauchy). $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (aperto) olomorfa in Ω, γ circuito regolare a tratti tc $\operatorname{int} \gamma =: D \subset \Omega$. Allora $\forall z_0 \in D$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz$$

$r > 0$ tc $B_r(z_0) \subset D$

dim • Sia $z_0 \in D$, allora $\exists r>0$ tc $B_r(z_0)\subset D$. Sia $\gamma_r = \partial B_r(z_0)$. Dal teorema dei cammini omotopi si ha

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$



• Inoltre osservo

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\int_{\gamma_r}\frac{1}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\cdot 2\pi i$$

$$\int_{\gamma_r(0)} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

• Considero

$$\left|\int_{\gamma_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \le \max_{z\in\gamma_r}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|\cdot \ell(\gamma_r)$$

$$= \max_{z\in\gamma_r}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{\cancel{r}}\cdot 2\pi \cancel{r}$$

f è olomorfa in Ω, dunque è continua in Ω, ovvero $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ tc $|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$. Scelgo $r<\delta$ e ottengo

$$\left|\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - \int_{\gamma_r}\frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \le 2\pi\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

(per l'arbitrarietà di ε)

$$\Rightarrow \int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma_r}\frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\cdot 2\pi i \qquad \square$$

def $w: A\subseteq\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è armonica se $w\in C^2(A)$ e $\Delta w = w_{xx}+w_{yy} = 0$.

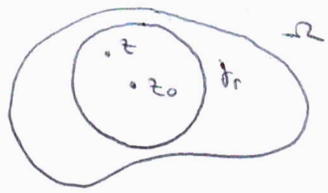
prop f olomorfa in Ω, $f=u+iv$, allora u e v sono armoniche.

TEOREMA $f:\underset{\text{aperto}}{\Omega}\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, f olomorfa in Ω, allora è analitica in Ω, cioè $\forall z_0\in\Omega$ $\exists r>0$ tc $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ $\forall z\in B_r(z_0)$, con

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r(z_0)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw =: \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}$$ $\leftrightarrow$ formula integrale di Cauchy per derivate

dim $z_0\in\Omega$ ed r tc $B_r(z_0)\subset\Omega$.
Dal teorema dei cammini omotopi e dalla prima formula integrale di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r(z_0)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$$



Osservo $|w-z_0| = r > |z-z_0| \Rightarrow \left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$.

Dunque $$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0+z_0-z} = \frac{1}{(w-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r(z_0)}\frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw$$

Noto che siccome $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| = q < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$ converge totalmente e dunque uniformemente su $\gamma_r(z_0)$ permettendomi di scambiare Σ con $\int$ e ottenendo:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(z-z_0)^n \cdot \overbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r(z_0)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw}^{:=a_n} \qquad \square$$

Prop (Stime di Cauchy). $\boxed{|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \|f\|_{\gamma_r(z_0)}}$

dim $f^{(n)}(z_0) = a_n \cdot n! = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{\cancel{2\pi}} \max_{\in \gamma_r(z_0)} \left| \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \right| \cdot \cancel{2\pi} r$$

$$= n! \cdot \max_{w \in \gamma_r(z_0)} \frac{|f(w)|}{r^{n+\cancel{1}}} \cdot \cancel{r}$$

$$= \frac{n!}{r^n} \|f\|_{\gamma_r(z_0)} \qquad \square$$

TEOREMA (di Liouville). f intera e limitata, cioè $|f(z)| \leq \overset{\mathbb{R}_+}{\Downarrow}{K}$ $\forall z \in \mathbb{C}$, allora f costante.

dim f intera: $z_0 = 0$, $\forall r > 0$ $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ $\forall z \in B_r(0)$

$$|a_n| = \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stime di Cauchy}}}{\leq} \frac{\|f\|_{\gamma_r(0)}}{r^n} \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ limitata}}}{\leq} \frac{K}{r^n}$$

Preso $n \geq 1$ si ha $|a_n| \leq \frac{K}{r^n} \xrightarrow{r \to +\infty} 0 \Rightarrow a_n = 0$ $\forall n \geq 1 \Rightarrow f(z) = a_0$ $\forall z \in \mathbb{C}$ $\square$

def $f: \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa. z_0 è uno zero di f se $f(z_0) = 0$.

TEOREMA (fondamentale dell'algebra). Sia $p_n(z)$ un polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi. Allora p_n ha almeno uno zero.

dim PA $p_n(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow f(z) := \frac{1}{p_n(z)}$ è intera

Osservo che $|p_n(z)| \xrightarrow[|z| \to +\infty]{} \infty$, dunque $|f(z)| \xrightarrow[|z| \to +\infty]{} 0$, ovvero $f(z)$ è limitata in $\mathbb{C}$

Ma allora dal teorema di Liouville $f(z) = \frac{1}{p_n(z)}$ è costante $\lightning$ $\square$

TEOREMA (zeri di una funzione analitica). $f: \underset{\text{aperto connesso}}{\Omega \subseteq \mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ olomorfa in Ω. Sia z_0 tc $f(z_0) = 0$, ovvero z_0 è uno zero di f. Allora $f \equiv 0$ in Ω oppure $\exists r > 0$ tc $f(z) \neq 0$ $\forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, ovvero z_0 è uno zero isolato.

dim f olomorfa in Ω, dunque analitica, ovvero $\exists r > 0$ tc $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ $\forall z \in B_r(z_0)$.
$f(z_0) = a_0 = 0$. Abbiamo due possibilità:

1) $a_n = 0$ $\forall n \geq 0 \Rightarrow f \equiv 0$ in $B_r(z_0)$
2) $\exists a_n \neq 0$. Sia N il più piccolo n tc $a_N \neq 0$.

$$f(z) = \sum_{n=N}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^N \underbrace{\sum_{n=N}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n-N}}_{:= g(z)} = (z-z_0)^N \sum_{k=0}^{+\infty} a_{N+k} (z-z_0)^k$$

Osservo che $g(z)$ è olomorfa in $B_r(z_0)$ e $|g(z_0)| = |a_N| \neq 0$.
Siccome $|g(z)|$ è continua, dalla permanenza del segno $\exists r > r' > 0$ tc $|g(z)| > 0$ $\forall z \in B_{r'}(z_0)$.
Ma allora $f(z) = (z-z_0)^N g(z) \neq 0$ $\forall z \in B_{r'}(z_0) \setminus \{z_0\}$

ovvero z_0 è zero isolato.

Mostro ora che se $f \equiv 0$ in $B_r(z_0)$, allora per connessione di Ω $f \equiv 0$ in Ω.
PA $\exists z_1 \in \Omega$ tc $f(z_1) \neq 0$. Sia $\gamma: [0,1] \to \Omega$ cammino continuo tale che $\gamma(0) = z_0$ e $\gamma(1) = z_1$. Osservo $f(\gamma(t))$ continua tc $f(\gamma(0)) = 0$ e $f(\gamma(1)) = 1$.
Sia $t' := \inf\{t \in [0,1] : f(\gamma(t)) \neq 0\}$. Noto:

- $t' \neq 0$, dato che $f \equiv 0$ in $B_r(z_0)$
- $t' \neq 1$, dato che $|f(\gamma(1))| = 1 > 0$ e per la permanenza del segno esiste un intorno di 1 tc $|f(\gamma(t))| > 0$.

Inoltre se $t < t'$, $f(\gamma(t)) = 0$, da cui $f(\gamma(t')) \overset{\text{cont}}{=} \lim_{t \to t'} f(\gamma(t)) = 0$.
Sia $z' = \gamma(t')$: $f(z') = 0$. z' non è zero isolato perché $\gamma(t)$ con $t < t'$ sono zeri, dunque $\exists$ un intorno di z' in cui f si annulla. $\lightning$ □

def z_0 zero di f olomorfa in Ω. La **molteplicità** di f in z_0 è il valore m tc esiste finito $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^m} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Equivalentemente, m è il primo intero tc $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

TEOREMA (principio di identità di funzioni analitiche). $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfe in Ω (Ω aperto connesso). Se $C := \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ contiene una successione di punti convergente in Ω, allora $f \equiv g$ in Ω.

dim Sia $\{z_n\} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a \in \Omega$ ($\{z_n\}$ in C).

$$f(z_n) = g(z_n)$$
per continuità: $\downarrow n \to +\infty \downarrow$
$$f(a) = g(a) \implies a \in C$$

$\implies a$ è zero di $f-g$, ma non è isolato
$\implies f - g \equiv 0$ in $\Omega \implies f \equiv g$ in Ω □

CORONA CIRCOLARE: $C_{R_1,R_2}(a) = \{z \in \mathbb{C} : 0 \le R_1 < |z-a| < R_2 \le +\infty\}$

def La **serie di Laurent** di centro $a \in \mathbb{C}$ è

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} \frac{1}{(z-a)^k}}_{\text{PARTE SINGOLARE}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n}_{\text{PARTE REGOLARE con raggio di conv. } R}$$

se $\sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} (w-a)^k$ con $w - a = \frac{1}{z-a}$ ha raggio di conv. r, allora la parte singolare converge se $\frac{1}{|z-a|} < r \iff |z-a| > \frac{1}{r}$

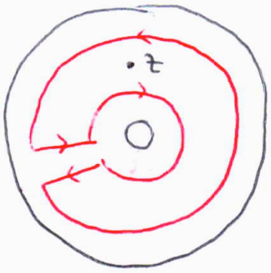
TEOREMA (sviluppo in serie di Laurent in una corona). f olomorfa in $C_{R_1,R_2}(a)$, $0 \le R_1 < R_2 \le \infty$, a fissato. Allora f si può sviluppare in serie di Laurent

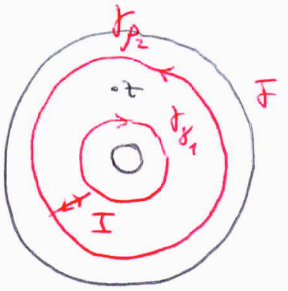
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad \forall z \in C_{R_1,R_2}(a)$$

con

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, dw \quad \text{con } R_1 < r < R_2$$

dim Fisso $z \in C_{R_1,R_2}(a)$, ρ_1, ρ_2 tc $R_1 < \rho_1 < |z-a| < \rho_2 < R_2$.
$\overline{\Gamma}_\varepsilon \to \overline{\gamma}$ e per le proprietà di approssimazione degli integrali $\int_{\overline{\gamma}} (\cdot) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon} (\cdot)$





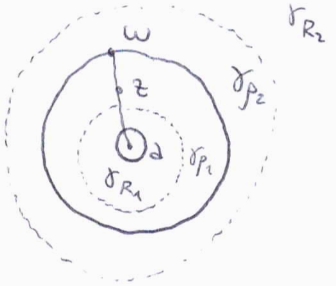
Dalla formula integrale di Cauchy $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}_\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$ e

$$f(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}_\varepsilon}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$\Rightarrow f(z) = \left[\int_{\gamma_{\rho_2}} (\quad)\,dw + \int_I (\quad)\,dw - \int_I (\quad)\,dw - \int_{\gamma_{\rho_1}} (\quad)\,dw\right]\frac{1}{2\pi i}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\rho_2}}\frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\rho_1}}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

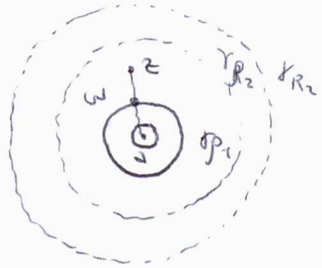
1) $|w-a| = \rho_2 > |z-a| \Rightarrow \left|\frac{z-a}{w-a}\right| < 1$



$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a-(z-a)} = \frac{1}{(w-a)\left(1-\frac{z-a}{w-a}\right)} = \frac{1}{w-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\rho_2}}\frac{f(w)}{w-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\rho_2}}\frac{f(w)}{w-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \overset{\text{scambio } \Sigma \text{ e } \int}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}(z-a)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\rho_2}}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw}_{:= c_n,\ n\geq 0}$$

2) $|w-a| = \rho_1 < |z-a| \Rightarrow \left|\frac{w-a}{z-a}\right| < 1$



$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a+a-z} = -\frac{1}{(z-a)\left(1-\frac{w-a}{z-a}\right)} = -\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\rho_1}}\frac{f(w)}{w-z} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\rho_1}} f(w)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(w-a)^{n-1}}{(z-a)^n}\,dw$$

$$\overset{\text{scambio } \Sigma \text{ e } \int}{=} -\sum_{n=1}^{+\infty}(z-a)^{-n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\rho_1}}\frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}}\,dw$$

$$= -\sum_{k=-1}^{\infty}(z-a)^k \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\rho_1}}\frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\,dw}_{:= c_k,\ k<0}$$

$$\Rightarrow f(z) = (z-a)^n \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\rho_2}}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw + \sum_{k=-1}^{-\infty}(z-a)^k \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\rho_1}}\frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\,dw$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(z-a)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw}_{:= c_n,\ n\in\mathbb{Z}} \quad \text{con } \rho_1 < \rho < \rho_2 \qquad \square$$

cammini omotopi

def f ha una singolarità isolata in $a \in \mathbb{C}$ se $\exists\, r>0$ tc f è olomorfa in $B_r(a) \setminus \{a\}$.

def Sia a singolarità isolata per f. Si dice che a è:

1) eliminabile se $\exists$ finito $\lim_{z \to a} f(z) \in \mathbb{C}$

2) polo di ordine n se $\exists$ finito $\neq 0$ $\lim_{z\to a} (z-a)^n f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

3) essenziale se non è né 1) né 2)

TEOREMA (Casorati–Weierstrass). a singolarità essenziale per f, allora $\forall\, d \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ $\exists\, z_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} a$ tc $f(z_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} d$

TEOREMA Sia a singolarità isolata per f e $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ per $z \in B_r(a) \setminus \{a\}$ serie di Laurent centrata in $a = z$ con r abbastanza piccolo. Allora a è:

1) sing. eliminabile $\iff c_n = 0 \;\; \forall\, n<0$

2) polo di ordine $m \iff c_{-m} \neq 0$ e $c_n = 0 \;\; \forall\, n < -m$

3) sing. essenziale $\iff \exists\; c_n \neq 0$ per infiniti $n<0$

dim 1) ($\Rightarrow$) a singolarità eliminabile: $\lim_{z\to a} f(z) = \ell \Rightarrow f$ è limitata in un intorno di a: $|f(z)| < K \;\; \forall\, z \in B_\rho(a)$ per ρ $<r$ abbastanza piccolo.

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \right|$$

ρ piccolo abbastanza

$$\leq \frac{1}{\cancel{2\pi}} \max_{w \in \partial B_\rho(a)} \frac{|f(w)|}{\rho^{n+\cancel{1}}} \cdot \cancel{2\pi\rho} \leq \frac{K}{\rho^n}$$

Preso $n<0$ si ha $|c_n| \leq \frac{K}{\rho^n} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0 \Rightarrow c_n = 0 \;\; \forall\, n<0$

($\Leftarrow$) $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ in $B_r(a) \setminus \{a\}$, ma allora $\lim_{z\to a} f(z) = c_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow a$ sing. eliminabile

2) ($\Rightarrow$) a polo di ordine m: $\lim_{z\to a} \underbrace{(z-a)^m f(z)}_{:= g(z)} = \ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$g(z)$ è olomorfa in $B_r(a) \setminus \{a\}$

Inoltre $\lim_{z\to a} g(z) = \ell \Rightarrow a$ è sing. eliminabile per $g(z)$

Da 1) $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^{n-m} = \sum_{k=-m}^{+\infty} c_{k+m} (z-a)^k$$

$\Rightarrow c_n = 0 \;\; \forall\, n < -m$

($\Leftarrow$) $f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z-a)^n \Rightarrow \lim_{z\to a} (z-a)^m \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \lim_{z\to a} \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z-a)^{n+m}$

$$= \lim_{z\to a} \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k-m} (z-a)^k$$

$$= c_{-m} \neq 0$$

3) Per esclusione.

$\square$

TEOREMA $f: \underset{\text{aperto}}{\Omega} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa in Ω. Sia a singolarità isolata e

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \qquad \forall z \in B_r(a)\setminus\{a\}$$

sviluppo di Laurent di f in a. Allora $\forall \rho \in (0,r)$ si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho(a)} f(z)\,dz = c_{-1}$$

<u>dim</u> $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho(a)} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho(a)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n\,dz$

la serie di Laurent conv. tot. e quindi uniformemente $\forall \rho>0$ tc $\rho<r$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{\gamma_\rho(a)} (z-a)^n\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot\left(c_{-1}\cdot 2\pi i\right) = c_{-1}$$

$$\int_{\gamma(0)} z^n\,dz = \begin{cases} 2\pi i & n=-1 \\ 0 & n\neq -1 \end{cases}$$

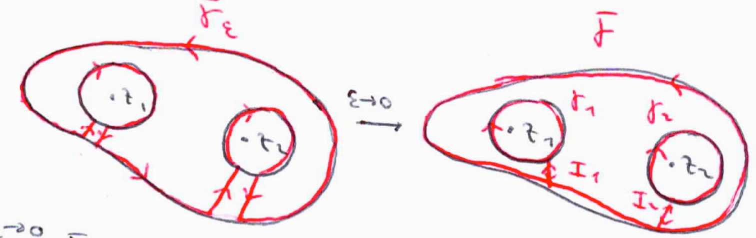
□

<u>def</u> Il coeff c_{-1} dello sviluppo di Laurent di f in una singolarità isolata a si chiama **RESIDUO** di f in a e si scrive $Res(f,a)$

TEOREMA (dei residui). $f: \underset{\text{aperto}}{\Omega} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa in Ω, γ curva chiusa semplice percorsa in senso antiorario, $\gamma \subset \Omega$ e $D = \text{int}\,\gamma$. Se in D ci sono un numero finito di singolarità isolate $z_1,\dots,z_k$ e $D\setminus\{z_1,\dots,z_k\} \subset \Omega$, allora

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(f,z_j)$$

<u>dim</u> $(k=2)$.



$\exists\, r_1$ ed r_2 tc f è olomorfa in $B_{r_1}(z_1)\setminus\{z_1\}$ e $B_{r_2}(z_2)\setminus\{z_2\}$.

Scelgo $\tilde\gamma_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \tilde\gamma = \gamma \cup I_1 \cup \{-\gamma_1\} \cup \{-I_1\} \cup I_2 \cup \{-\gamma_2\} \cup \{-I_2\}$

Siccome f è olomorfa in $D\setminus\{B_{r_1}(z_1)\cup B_{r_2}(z_2)\}$ abbiamo

$$\int_{\tilde\gamma} f(z)\,dz = 0$$

$$= \int_\gamma f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

$$= \int_\gamma f(z)\,dz - 2\pi i\, Res(f,z_1) - 2\pi i\, Res(f,z_2)$$

□

$$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(Res(f,z_1) + Res(f,z_2)\right).$$

<u>prop1</u> a singolarità eliminabile $\Rightarrow Res(f,a) = 0$

<u>dim</u> f ha sviluppo di Laurent con sola parte regolare

<u>prop2</u> a polo semplice $\Rightarrow Res(f,a) = \lim_{z\to a} (z-a)f(z)$

<u>dim</u> $f(z) = \dfrac{c_{-1}}{(z-a)} + \underbrace{g(z)}_{\text{parte regolare}} \Rightarrow \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a} c_{-1} + \underbrace{g(z)(z-a)}_{\to 0} = c_{-1}$ □

prop 3 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ tc $Q(a)=0$ e $Q'(a)\neq 0$, ovvero a zero di molteplicità 1 per Q e $P(a)\neq 0$, allora $\operatorname{Res}(f,a)=\dfrac{P(a)}{Q'(a)}$.

dim a è polo di ordine 1; dunque da (prop 2) si ha

$$\operatorname{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=\lim_{z\to a}\frac{(z-a)P(z)}{Q(z)}\overset{(H)}{=}\lim_{z\to a}\frac{P(z)+(z-a)P'(z)}{Q'(z)}$$
$$=\frac{P(a)}{Q'(a)}\qquad\square$$

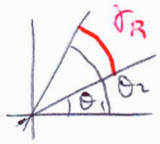
prop 4 a polo di ordine n per f $\Rightarrow$ $\operatorname{Res}(f,a)=\dfrac{1}{(n-1)!}\dfrac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}}\left[(z-a)^n f(z)\right]\Big|_{z=a}$

dim $f(z)=\dfrac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\dfrac{c_{-n+1}}{(z-a)^{-n+1}}+\dots+\dfrac{c_{-1}}{(z-a)}+\underbrace{g(z)}_{\text{parte regolare}}$

$$(z-a)^n f(z)=c_{-n}+c_{-n+1}(z-a)+\dots+c_{-1}(z-a)^n+g(z)(z-a)^n$$
$$\Rightarrow\ c_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}}\left[(z-a)^n f(z)\right]\Big|_{z=a}=$$
$$=c_{-1}+\frac{1}{(n-1)!}\Big[\underbrace{\frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}}g(z)(z-a)^n\Big|_{z=a}}_{=0}\Big]\qquad\square$$

lemma (del grande cerchio). f definita e continua in $\theta_1\leq\arg z\leq\theta_2$ e per $|z|$ abbastanza grande. Se $\lim_{|z|\to+\infty} z f(z)=0$, allora

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz=0$$



dim $\forall\varepsilon>0\ \exists\bar R>0$ tc $|z|>\bar R\Rightarrow |z f(z)|<\varepsilon\Rightarrow|f(z)|<\dfrac{\varepsilon}{|z|}<\dfrac{\varepsilon}{R}$

Scelgo $R>\bar R$ e calcolo

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right|\leq\max_{z\in\gamma_R}|f(z)|\,\underline{(\theta_2-\theta_1)R}<\frac{\varepsilon(\theta_2-\theta_1)\cancel{R}}{\cancel{R}}=(\theta_2-\theta_1)\,\varepsilon\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0\qquad\square$$

lemma (del piccolo cerchio). f definita e continua in $\theta_1\leq\arg z\leq\theta_2$ e per $|z|$ abbastanza piccolo. Se $\lim_{|z|\to0} z f(z)=0$, allora

$$\lim_{r\to0}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz=0$$

lemma (del piccolo cerchio di Jordan). f olomorfa in $B_r(0)\setminus\{0\}$ e in $z=0$ f ha un polo semplice. Allora

$$\lim_{r\to0}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz=(\theta_2-\theta_1)\operatorname{Res}(f,0)$$

dim $f(z)=\dfrac{c_{-1}}{z}+\underbrace{g(z)}_{\text{parte regolare}}$, $g(z)$ analitica in $B_r(0)$

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz=\int_{\gamma_r}\frac{c_{-1}}{z}+\int_{\gamma_r} g(z)$$

$r\to0$ ↓ per il lemma
0 del piccolo cerchio

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = \lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r}\frac{c_{-1}}{z}\,dz$$

$$= \lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r}\frac{c_{-1}}{\cancel{re^{i\theta}}}\cdot \cancel{r}i\cancel{e^{i\theta}}\,d\theta$$

$$= \lim_{r\to 0} c_{-1}\cdot i\cdot(\theta_2-\theta_1) = i(\theta_2-\theta_1)c_{-1}. \qquad \square$$

<u>lemma</u> (del grande cerchio di Jordan). f def e continua in $S=\{0\le\theta_1\le \arg z\le\theta_2\le\pi\}$ $(\{\operatorname{Im} z\ge 0\}\supseteq S)$. Se $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$, allora

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,e^{iz}\,dz = 0$$

<u>dim</u> $M(R) := \sup\{|f(z)| : z\in\gamma_R\} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$ per hp

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)e^{iz}\,dz\right| = \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(Re^{i\theta})\cdot e^{iRe^{i\theta}}\,Rie^{i\theta}\,d\theta\right|$$

$$\le M(R)\,R\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left|e^{Ri\cos\theta - R\sin\theta}\right|\,d\theta$$

$$= M(R)\,R\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-R\sin\theta}\,d\theta$$

$$\le M(R)\,R\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\,d\theta$$

$\sin\theta \ge \frac{2}{\pi}\theta$

$$\le 2M(R)\,R\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}\,d\theta$$

$$\le 2M(R)\,R\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}}\,d\theta$$

$$= 2M(R)\,R\left(-\frac{\pi}{2R}\right)\left[e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 2M(R)\,R\left(-\frac{\pi}{2R}\right)\left(e^{-R}-1\right)$$

$$= \cancel{2}\underbrace{M(R)}_{\to 0}\cancel{R}\,\frac{\pi}{\cancel{2R}}\underbrace{(1-e^{-R})}_{\to 1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0 \qquad \square$$

<u>prop</u>
- $\int_{\gamma_R} f(z)\,e^{-iz}\,dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$ con $\gamma_R \subseteq \{\operatorname{Im} z\le 0\}$
- $\int_{\gamma_R} f(z)\,e^{-z}\,dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$ con $\gamma_R \subseteq \{\operatorname{Re} z\ge 0\}$
- $\int_{\gamma_R} f(z)\,e^{z}\,dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$ con $\gamma_R \subseteq \{\operatorname{Re} z\le 0\}$

TEOREMA (di convergenza monotona). $\{f_n\}$ misurabili, $f_n \geq 0$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, allora $\int f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx$

TEOREMA (di convergenza dominata). $\{f_n\}$ misurabili, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$, $\exists\, g \geq 0$ integrabile tc $\forall n$ $|f_n(x)| \leq g(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0$$

TEOREMA (disuguaglianza di Young). Siano $A, B \geq 0$, $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$. Allora

$$AB \leq \frac{1}{p} A^p t^p + \frac{1}{p'} B^{p'} t^{-p'} \qquad \forall t > 0$$

dim Definisco $F(t) := \frac{1}{p} A^p t^p + \frac{1}{p'} B^{p'} t^{-p'}$.

$$0 \overset{!}{=} F'(t) = (A^p t^p - B^{p'} t^{-p'}) \frac{1}{t} \Rightarrow t^{p+p'} = B^{p'} A^{-p} \Rightarrow t_0 = A^{-\frac{p}{p+p'}} B^{\frac{p'}{p+p'}} = A^{-\frac{1}{p'}} B^{\frac{1}{p}}$$

$$F''(t) = (p-1) A^p t^{p-2} + (p'+1) B^{p'} t^{-p'-2} > 0 \Rightarrow F \text{ è convessa}$$

$$F(t_0) = \frac{1}{p} A^p B A^{-\frac{p}{p'}} + \frac{1}{p'} B^{p'} B^{-\frac{p'}{p}} A = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right) AB = AB$$

Siccome $\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty$ e $\lim_{t\to 0^+} F(t) = +\infty$, $F(t_0)$ è minimo (assoluto) di F e abbiamo la disuguaglianza desiderata.

def $p' := \frac{p}{p-1}$ è detto ESPONENTE DI HÖLDER CONIUGATO a p

TEOREMA (Hölder's inequality). Siano $p, q \in (1, \infty)$ tc $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ovvero $q = p'$. Allora per ogni f, g funzioni misurabili vale

$$\int |f(x) g(x)|\,dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

dim Posso assumere $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_q$. Sostituisco $f \to \frac{f}{\|f\|_p}$, $g \to \frac{g}{\|g\|_q}$ cosicché $\|f\|_p = 1 = \|g\|_q$ e rimane da mostrare $\int |f(x) g(x)|\,dx \leq 1$.

Pongo $A = |f(x)|$, $B = |g(x)|$, $t = 1$ e applico la disuguaglianza di Young:

$$|f(x) g(x)| \leq \frac{1}{p} |f(x)|^p + \frac{1}{q} |g(x)|^q$$

$$\Rightarrow \int |f(x) g(x)| \leq \frac{1}{p} \underbrace{\int |f(x)|^p}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\int |g(x)|^q}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

prop In $\mathbb{R}^d$, la disuguaglianza $\int |f(x) g(x)|\,dx \leq \left(\int |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int |g(x)|^q dx\right)^{1/q}$, con $p, q \in (1, \infty)$ implica $q = p'$.

dim Posso supporre $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_q$.

Sia $t > 0$, $f_t(x) := f(tx)$, $g_t(x) = g(tx)$

$\forall t>0$: $\int |f_t(x)\, g_t(x)|\, dx \le \|f_t\|_p \|g_t\|_q$

- $\int |f_t(x)\, g_t(x)|\, dx = \int |f(tx)\, g(tx)|\, dx \overset{\substack{y=tx \\ x=1/t\, y}}{\underset{dx=\frac{1}{t^d}dy}{=}} \frac{1}{t^d}\int |f(y)\, g(y)|\, dy$
- $\left(\int |f_t(x)|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int |f(tx)|^p dx\right)^{1/p} \overset{y=tx}{=} \left(\frac{1}{t^d}\int |f(y)|^p dy\right)^{1/p} = t^{-\frac{d}{p}}\left(\int |f(y)|^p dy\right)^{1/p}$
- $\left(\int |g_t(x)|^q dx\right)^{1/q} = t^{-\frac{d}{q}}\left(\int |g(y)|^p dy\right)^{1/p}$

$\overset{\forall t>0}{\Longrightarrow}$ $t^{-d}\int |f(y)\, g(y)|\, dy = \int |f_t(x) g_t(x)|\, dx \le \|f_t\|_p \|g_t\|_q = t^{-\frac{d}{p}-\frac{d}{q}} \|f\|_p \|g\|_q$

$\overset{\forall t>0}{\Longrightarrow}$ $t^{d\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\right)} \int |f(y)\, g(y)|\, dy \le \|f\|_p \|g\|_q \Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Infatti, se $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \gtrless 1$, $\lim_{t\to +\infty \atop 0} t^{d\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\right)} = +\infty$ ↯

PROP (disuguaglianza di Minkowski). Per $1 \le p \le \infty$ vale la disuguaglianza triangolare $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

dim Posso assumere $f \neq 0 \neq g$

- $|f(x)+g(x)|^p = |f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1} \le (|f(x)|+|g(x)|)\,|f(x)+g(x)|^{p-1}$
- $\int |f(x)+g(x)|^p dx \le \int |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1} dx + \int |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1} dx$
- Applico la disuguaglianza di Hölder su $|f(x)|$, $|f(x)+g(x)|^{p-1}$ con $p, p' = \frac{p}{p-1}$

$$\int |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1} dx \le \|f\|_p \left(\int |f(x)+g(x)|^{\cancel{p-1}\cdot\frac{p}{\cancel{p-1}}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}}$$
$$= \|f\|_p \, \|f+g\|_p^{p-1}$$

$$\Rightarrow \|f+g\|_p^p \le \|f\|_p \|f+g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{p-1}$$
$$= (\|f\|_p + \|g\|_p)\, \|f+g\|_p^{p-1}$$

$\Rightarrow \|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

TEOREMA Per $1 \le p \le \infty$, L^p è completo, ovvero $\forall \{f_n\}$ tc $\|f_n - f_m\|_p \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$ $\exists f \in L^p$ tc $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

dim (cenno). Vediamo il caso $p<\infty$.

- Sappiamo $\|f_n - f_m\|_p \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$, dunque $\exists \{f_{n(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tc $\|f_{n(k+1)} - f_{n(k)}\|_p < \frac{1}{2^k}$.
  Sostituisco $f_{n(k)} =: f_k$ e scrivo $f_k(x) = f_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (f_{k+1}(x) - f_k(x))$.
- Sia $g_n(x) := |f_1(x)| + \sum_{k=1}^{n-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$. Ottengo $g_n(x) \ge 0$, $g_n(x) \le g_{n+1}(x)$
  e per q.o. x $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) \in [0,+\infty]$.

$\underset{\text{monotona}}{\overset{\text{converg.}}{\Longrightarrow}}$ $\int g(x)^p dx = \lim_{n\to\infty} \int g_n(x)^p dx = \lim_{n\to\infty} \|g\|_p^p$

$\underset{\text{di Minkowski}}{\overset{\text{disuguagl.}}{\Longrightarrow}}$ $\|g_n\|_p \le \|f_1\|_p + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\|f_{k+1} - f_k\|_p}_{\wedge\, 1/2^k} \le \|f_1\|_p + 1 \quad \forall n$

$\Rightarrow \|g\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_p^p \le (\|f_1\|_p + 1)^p < \infty \Rightarrow g \in L^p \Rightarrow g(x) = |g(x)| < \infty$ per q.o. x

$\Rightarrow f(x) := f_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{k+1}(x) - f_k(x))$ è assolutamente convergente per q.o. x

$|f(x)|^p \le g(x)^p \in L^1 \Rightarrow |f(x)|^p \in L^1 \Rightarrow f \in L^p$

- inoltre ottengo $|f_n(x) - f(x)|^p \le (|f(x)| + |f_n(x)|)^p \le 2^p \max\{|f(x)|^p, |f_n(x)|^p\} \le 2^p \underbrace{g(x)^p}_{\in L^1}$

$\xrightarrow[\text{dominata}]{\text{converg.}}$ $0 = \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \int |f_n(x) - f(x)|^p dx$

e $|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ per q.o. x

<u>oss</u> In generale non è vero che se $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$, allora $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per q.o. x

↳ conv. in norma non implica conv. puntuale, ma nella dim. sopra abbiamo costruito una $\{f_n\}_n$ che converge in norma ($\Rightarrow$ completezza) e anche puntualmente

<u>def</u> f è **LOCALMENTE INTEGRABILE**, e scriveremo $f \in L^1_{loc}$, se $\int_K |f| < \infty$ $\forall K$ compatto.

<u>def</u> Data $f \in L^1_{loc}$, definiamo l'**OPERATORE MASSIMALE** e la **FUNZIONE MASSIMALE di HARDY-LITTLEWOOD**

$$Mf(x) = f^*(x) := \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy$$

<u>lemma 1</u> f^* è misurabile.

<u>dim</u> Mostro che $\forall \alpha > 0$ $\{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}$ è aperto

Sia $\alpha < f^*(x)$, allora $\exists$ una palla aperta $B \ni x$ tc $\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)| dy > \alpha$

$\forall y \in B$ si ha $\alpha < \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)| dy \le \sup_{\tilde{B} \ni y} \int_{\tilde{B}} |f(y)| dy = f^*(y)$

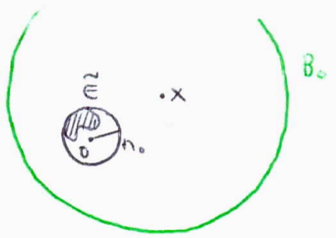
$\Rightarrow B$ è intorno aperto di x

<u>lemma 2</u> Se vale $\|Mf\|_1 \le C\|f\|_1$, allora $f = 0$ q.o.

<u>dim</u> PA esista $f \in L^1$ con $|f(x)| \ge \varepsilon > 0$ $\forall x \in E$, $|E| > 0$.

$\mathbb{R}^d = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(0,n) \Rightarrow \exists n_0$ tc $|E \cap B(0,n_0)| > 0$. Pongo $\tilde{E} := E \cap B(0,n_0)$ e vale ancora $|\tilde{E}| > 0$, $|f(x)| \ge \varepsilon$ $\forall x \in \tilde{E}$. Ottengo $|f(x)| \ge \varepsilon \mathbb{1}_{\tilde{E}}(x)$

Sia $|x| > n_0$ e $B_0 = B(x, 5|x|) \supseteq \tilde{E}$.



Allora

$$\frac{1}{|B_0|}\int_{B_0} |f| = \frac{1}{|B_0|}\int_{\tilde{E}} |f|$$
$$\ge \frac{\varepsilon}{|B_0|}\int_{\tilde{E}} 1$$
$$= \frac{\overbrace{\varepsilon|\tilde{E}|}^{>0}}{|B(0,1)| 5^d |x|^d} \approx \frac{1}{|x|^d} \left(= \frac{c}{|x|^d}\right)$$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} |Mf| \gtrsim \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|x|^d} dx = +\infty$ ↯

lemma 3 (di ricoprimento di Vitali). Da una famiglia finita di palle $\{B_1, \dots, B_m\}$ possiamo estrarre un sottoinsieme $\{\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_n\}$ tc

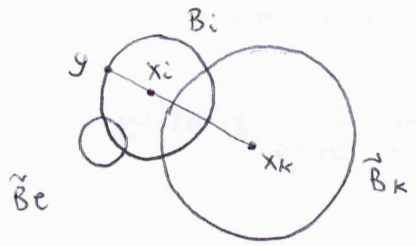
1) se $j \neq k \Rightarrow \tilde{B}_j \cap \tilde{B}_k = \emptyset$ (disgiunte a due a due)

2) $\left| \bigcup_{i=1}^{m} B_i \right| \leq 3^d \sum_{k=1}^{n} |\tilde{B}_k| = 3^d \left| \bigcup_{k=1}^{n} \tilde{B}_k \right|$

dim 1) Sia $\tilde{B}_1$ una palla di raggio massimale e scartiamo le palle che intersecano $\tilde{B}_1$. Tra le palle rimaste chiamiamo $\tilde{B}_2$ una palla di raggio massimale e scartiamo le palle che la intersecano. Ripetiamo questo procedimento finché esauriamo le palle date. Le palle selezionate sono disgiunte a due a due.

2) Dimostriamo che se B_i è una palla che non è stata selezionata, allora $\exists \tilde{B}_k$ tc $B \subset 3\tilde{B}_k$ con $3\tilde{B}_k$ che indica una palla di centro $\tilde{B}_k$ e raggio 3 volte quello di $\tilde{B}_k$.

Se B_i è stata scartata, significa che $\exists \tilde{B}_e$ tc $\tilde{B}_e \cap B_i \neq \emptyset$. Sia k il più piccolo indice in $\{1, \dots, n\}$ tc $B_i \cap \tilde{B}_k \neq \emptyset \Rightarrow$ raggio$(B_i) \leq$ raggio$(\tilde{B}_k)$
$\qquad\quad r_i \qquad\qquad r_k$



$\forall y \in B_i \quad |y - x_k| \leq |y - x_i| + |x_i - x_k| \leq r_k + 2r_i \leq 3r_k$

$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad B_i \subset \bigcup_{j=1}^{n} 3\tilde{B}_j$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{m} B_i \subset \bigcup_{j=1}^{n} 3\tilde{B}_j$

$\Rightarrow \left| \bigcup_{i=1}^{m} B_i \right| \leq \left| \bigcup_{j=1}^{n} 3\tilde{B}_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |3\tilde{B}_j| = 3^d \sum_{j=1}^{n} |\tilde{B}_j| = 3^d \left| \bigcup_{j=1}^{n} \tilde{B}_j \right|$.

TEOREMA (Hardy-Littlewood).

1) Esiste $C = C_d$ che dipende solo dalla dimensione d tc $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $\forall \alpha > 0$

$$|\{x : f^*(x) > \alpha\}| \leq \frac{C_d}{\alpha} \|f\|_1$$

2) Se $p > 1$, esiste $C = C_{d,p}$ tc

$$\|f^*\|_p \leq C_{d,p} \|f\|_p$$

dim 1) Fisso $\alpha > 0$. Sia x tc $\alpha < f^*(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f| \Rightarrow \exists B_x \ni x$ tc $\frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} |f(y)| dy > \alpha$. (*)

$E_\alpha := \{x : f^*(x) > \alpha\} \subseteq \bigcup_{x \in E_\alpha} B_x$.

Per la regolarità della misura di Lebesgue $|E_\alpha| = \sup\{|K| : K \text{ compatto}, K \subset E_\alpha\}$, dunque per dimostrare il risultato è sufficiente dimostrare che $\forall K \subset E_\alpha$ compatto si ha $|K| \leq \frac{C_d}{\alpha} \|f\|_1$.

Fisso K compatto, $K \subset E_\alpha \subset \bigcup_{x \in E_\alpha} B_x$ palle aperte $\xRightarrow{K \text{ compatto}} \exists \{B_{x_1}, \dots, B_{x_m}\}$ tc $\overset{K}{\overset{\cap}{E_\alpha}} \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_{x_j}$

ricoprimento di Vitali $\Rightarrow$ $\exists \{\tilde B_1, \dots, \tilde B_n\}$ disgiunte 2 a 2 e tale $\left|\bigcup_{j=1}^m B_{x_j}\right| \le 3^d \sum_{k=1} |\tilde B_k|$

$$\Rightarrow |K| \le \left|\bigcup_{j=1}^m B_{x_j}\right| \le 3^d \sum_{k=1}^n |\tilde B_k| \overset{(*)}{\le} 3^d \cdot \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^n \int_{\tilde B_k} |f(y)|\, dy$$

$i \neq j \Rightarrow \tilde B_i \cap \tilde B_j = \emptyset$

$$\le \frac{3^d}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f|$$

$$= \frac{3^d}{\alpha} \|f\|_1$$

2) Da quanto visto sopra sappiamo che $\exists \{B_j\}_{j=1}^n$ con

(1) B_j disgiunte tra loro

(2) $|\{x : f^*(x) > \alpha\}| \le 3^d \sum_{j=1}^n |B_j| = 3^d \left|\bigcup_{j=1}^n B_j\right|$

(3) $\alpha < \frac{1}{|B_j|} \int_{B_j} |f(y)|\,dy \quad \forall j = 1, \dots, n$

<u>lemma 4</u> $|\{x : f^*(x) > \alpha\}| \le \frac{2 \cdot 3^d}{\alpha} \int_{\{x : |f(x)| > \frac{\alpha}{2}\}} |f| \lesssim \frac{1}{\alpha} \int_{\{x : |f(x)| > \frac{\alpha}{2}\}} |f|$

<u>dim</u> • $\alpha |B_j| \overset{(3)}{<} \int_{B_j} |f(y)|\, dy$

$$= \int_{B_j \cap \{y : |f(y)| \le \frac{\alpha}{2}\}} |f(y)|\, dy + \int_{B_j \cap \{y : |f(y)| > \frac{\alpha}{2}\}} |f(y)|\, dy$$

$$\int_{B_j \cap \{\dots\}} |f(y)|\,dy \le \int_{B_j \cap \{\dots\}} \frac{\alpha}{2} \le \int_{B_j} \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} |B_j|$$

$$\le \frac{\alpha}{2} |B_j| + \int_{B_j \cap \{y : |f(y)| > \frac{\alpha}{2}\}} |f(y)|\, dy$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} |B_j| \le \int_{B_j \cap \{y : |f(y)| > \frac{\alpha}{2}\}} |f(y)|\, dy$$

• $|\{x : f^*(x) > \alpha\}| \overset{(2)}{\le} 3^d \sum_{j=1}^n |B_j|$

$$\le 3^d \cdot \frac{2}{\alpha} \sum_{j=1}^n \int_{B_j \cap \{y : |f(y)| > \frac{\alpha}{2}\}} |f(y)|\, dy$$

$$\overset{(1)}{\le} \frac{2 \cdot 3^d}{\alpha} \int_{\{y : |f(y)| > \frac{\alpha}{2}\}} |f(y)|\, dy$$

<u>oss</u> stima forte $\Rightarrow$ stima debole

$\|Tf\|_q \le C \|f\|_p$

$|\{x : |Tf(x)| > \alpha\}| = |\{x : \frac{|Tf(x)|}{\alpha} > 1\}|$

$= \int_{\{x : \frac{|Tf(x)|}{\alpha} > 1\}} dx$

$\le \int_{\{x : \frac{|Tf(x)|}{\alpha} > 1\}} \left(\frac{|Tf(x)|}{\alpha}\right)^q dx$

$\le \frac{1}{\alpha^q} \int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^q\, dx$

$\le \frac{\|Tf\|_q^q}{\alpha^q}$

$\le \frac{C^q}{\alpha^q} \|f\|_p^q$

$p = q = 1 \Rightarrow |\{x : |Tf(x)| > \alpha\}| \le \frac{C}{\alpha} \|f\|_1$

$T_\alpha := \{x : \alpha \le f^*(x) < 2\alpha\}$, $E_\alpha := \{x : f^*(x) > \alpha\}$

$$\|f^*\|_p^p = \int |f^*(y)|^p\, dy \le 2^p \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{kp} |T_{2^k}| \le 2^p \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{kp} |E_{2^k}|$$

Per il lemma 4 $\underbrace{|\{x : f^*(x) > 2^k\}|}_{= |E_{2^k}|} \lesssim \frac{1}{2^k} \int_{\{y : |f(y)| > 2^{k-1}\}} |f(y)|\, dy$, dunque

$$\Rightarrow \|f^*\|_p^p \lesssim \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(p-1)} \int_{\{y : |f(y)| > 2^{k-1}\}} |f(y)|\, dy$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(p-1)} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \mathbb{1}_{\{y : |f(y)| > 2^{k-1}\}}(y)\, dy$$

serie geometrica $\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ 2^k < 2|f(y)|}} 2^{k(p-1)}$ è controllata dal suo termine più grande

$$= \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k(p-1)} \mathbb{1}_{\{y : |f(y)| > 2^{k-1}\}}(y)\, dy$$

$$\lesssim \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\, |f(y)|^{p-1}\, dy = \|f\|_p^p$$

lemma 5 $g \in C_{com}(\mathbb{R}^d)$, allora $\forall x \in \mathbb{R}^d$ $\lim_{\substack{|B|\to 0 \\ B \ni x}} \int_B g(y)\, dy = g(x)$

dim $\varepsilon > 0$. $g \in C_{com}$, in particolare g è continua: $\exists r > 0$ tc $|x-y| < r \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \frac{1}{|B|} \int_B \underbrace{|g(y) - g(x)|}_{<\varepsilon}\, dy < \varepsilon \text{ se } \operatorname{diam}(B) < r$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{|B|\to 0 \\ B \ni x}} \frac{1}{|B|} \int_B |g(y) - g(x)|\, dy = 0$$

lemma 6 le funzioni continue a supporto compatto sono dense in L^p, $p < \infty$, ovvero $\forall f \in L^p$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists g \in C_{com}$ tc $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

TEOREMA (di differenziazione dell'integrale di Lebesgue). $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, allora

$$\lim_{\substack{|B|\to 0 \\ B \ni x}} \frac{1}{|B|} \int_B f(y)\, dy = f(x) \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}^d$$

dim Dimostriamo che $\limsup_{\substack{B \ni x \\ |B|\to 0}} \left| \frac{1}{|B|} \int_B f(y)\, dy - f(x) \right| \overset{(*)}{=} 0$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$

è sufficiente mostrare che $\forall \alpha > 0$ l'insieme $E_\alpha := \{x : \limsup_{\substack{|B|\to 0 \\ B \ni x}} \left| \frac{1}{|B|} \int_B f(y)\, dy - f(x) \right| > \alpha\}$ ha misura nulla. Infatti: l'insieme delle x tc $(*)$ non vale è contenuto in $\bigcup_{n=1}^\infty E_{1/n} =: C$, dunque se $|E_\alpha| = 0$ $\forall \alpha$ otteniamo $|C| \leq \sum_{n=1}^\infty |E_{1/n}| = 0$ (subadditività).

Dato $\varepsilon > 0$ $\exists g \in C_{com}$ tc $\|g - f\|_1 < \varepsilon$.

$$\left| \frac{1}{|B|} \int_B f(y)\, dy - f(x) \right| = \left| \frac{1}{|B|} \int_B (f(y) - g(y))\, dy + \frac{1}{|B|} \int g(y)\, dy - g(x) + g(x) - f(x) \right|$$

$$\leq \frac{1}{|B|} \int |f(y) - g(y)|\, dy + \left| \frac{1}{|B|} \int_B g(y)\, dy - g(x) \right| + |g(x) - f(x)|$$

$$\Rightarrow \limsup_{\substack{|B|\to 0 \\ B \ni x}} \left| \frac{1}{|B|} \int_B f(y)\, dy - f(x) \right| \leq \limsup_{\substack{|B|\to 0 \\ B \ni x}} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - g(y)|\, dy + \underbrace{\limsup_{\substack{|B|\to 0 \\ B \ni x}} \left| \frac{1}{|B|} \int_B g(y)\, dy - g(x) \right|}_{\overset{\text{(lemma 5)}}{=} 0} + |f(x) - g(x)|$$

$$\leq \limsup_{\substack{|B|\to 0 \\ B \ni x}} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - g(y)|\, dy + |f(x) - g(x)|$$

$$\leq \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - g(y)|\, dy + |f(x) - g(x)|$$

$$\leq (f - g)^*(x) + |f(x) - g(x)|$$

Supponiamo $x \in E_\alpha \implies \alpha < (f-g)^*(x) + |f(x)-g(x)| \implies (f-g)^*(x) > \frac{\alpha}{2} \ \vee\ |f(x)-g(x)| > \frac{\alpha}{2}$

$\implies E_\alpha \subset \{x : (f-g)^*(x) > \frac{\alpha}{2}\} \cup \{x : |f(x)-g(x)| > \frac{\alpha}{2}\}$

$\implies |E_\alpha| \le |\{x : (f-g)^*(x) > \frac{\alpha}{2}\}| + |\{x : |f(x)-g(x)| > \frac{\alpha}{2}\}|$

$\wedge$ (Hardy-Littlewood 1)

$3^d \frac{2}{\alpha} \|f-g\|_1$

$$|\{x : |f(x)-g(x)| > \tfrac{\alpha}{2}\}| = \int_{\{x : |f(x)-g(x)| \quad\}} 1 \, dx \le \int_{\{x : |f(x)-g(x)| \frac{2}{\alpha} > 1\} \subseteq \mathbb{R}^d} \frac{2}{\alpha} |f(x)-g(x)| \, dx \le \frac{2}{\alpha} \|f-g\|_1$$

$$< \left(3^d \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\alpha}\right) \|f-g\|_1 \le \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

$\implies |E_\alpha| = 0$.

corollario $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, allora $\lim_{\substack{B \ni x \\ |B| \to 0}} \frac{1}{|B|} \int f(y)\,dy = f(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$

dim $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(0,n)$. $f_n := f \mathbb{1}_{B(0,n)} \in L^1$, dunque $\exists E_n$ con $|E_n| = 0$ tc se $x \notin E_n$

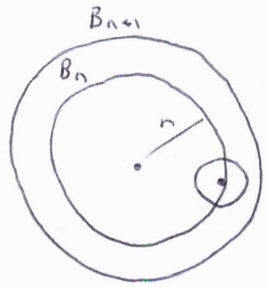
allora $\lim_{\substack{|B| \to 0 \\ B \ni x}} \frac{1}{|B|} \int_B f_n(y)\,dy = f_n(x)$ (teo. diff. int. Leb.)

$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \implies |E| \le \sum_{n=1}^{\infty} |E_n| = 0$.

Sia $x \in E^c$, $\exists n$ tc $x \in B(0,n)$. Allora

$$\lim_{\substack{|B| \to 0 \\ B \ni x}} \frac{1}{|B|} \int_B f_{n+1}(y)\,dy = f_{n+1}(x) = f(x)$$

$$\| \quad \lim_{\substack{|B| \to 0 \\ B \ni x \\ \text{raggio}(B) < \frac{1}{100}}} \frac{1}{|B|} \int_B \underbrace{f_{n+1}(y)}_{= f(y)} \,dy$$



def $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$ è PUNTO DI LEBESGUE se valgono (1) $f(x) \in \mathbb{C}$,

(2) $\lim_{\substack{|B| \to 0 \\ B \ni x}} \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f(y)|\,dy = 0$

prop $f \in L^1_{loc}$, allora q.o. $x \in \mathbb{R}^d$ è punto di Lebesgue di f

dim WLOG $f(x) \in \mathbb{C}$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$, infatti se f non è definita in $E \subset \mathbb{R}^d$, $|E| = 0$,

considero $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$.

Ricordo che $\mathbb{C}$ è separabile, ovvero $\exists \{z_n\} \subset \mathbb{C}$ denso in $\mathbb{C}$

Considero $x \longmapsto |f(x) - z_n| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

$\xRightarrow{\text{corollario}}$ $\exists E_n \subset \mathbb{R}^d$, $|E_n| = 0$ tc $\forall x \notin E_n$ $\lim_{\substack{|B| \to 0 \\ B \ni x}} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - z_n|\,dy = |f(x) - z_n|$

$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \implies |E| = 0$

Sia $x \in E^c$, $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, z_n$ t.c. $|f(x) - z_n| < \varepsilon$
$(\Rightarrow x \quad E_n^c)$

$$\Rightarrow \frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - f(y)|\,dy \le \frac{1}{|B|}\int_B |f(y) - z_n|\,dy + \frac{1}{|B|}\int_B \underbrace{|f(x) - z_n|}_{<\varepsilon}\,dy$$

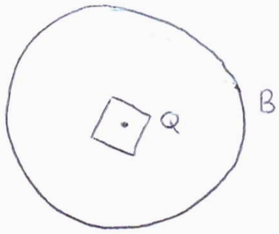
$$\le \frac{1}{|B|}\int_B |f(y) - z_n|\,dy + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{|B|\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - f(y)|\,dy \le \lim_{\substack{|B|\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y) - z_n|\,dy + \varepsilon$$

$$= |f(x) - z_n| + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

<u>prop</u> Sia Q un cubo, x p.to di Lebesgue di f, $f \in L^1_{loc}$, allora

$$\lim_{\substack{Q\ni x\\ |Q|\to 0}} \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)\,dy = f(x)$$



<u>dim</u> Dimostriamo che $\displaystyle\lim_{\substack{Q\ni x\\ |Q|\to 0}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f(y)|\,dy = 0$

$x \in Q \subset B$, $|B| < C_d |Q|$, infatti se ℓ = lato di Q, allora raggio$(Q) = \sqrt{d}\,\ell$ e prendo B centrata in x di raggio $10\sqrt{d}\,\ell$, ottenendo $|B| = |B(0,1)|\,((10\sqrt{d}\,\ell)^d = C_d\,\ell^d = C_d|Q|$

Allora

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f(y)|\,dy \le \frac{1}{|Q|}\int_B |f(x) - f(y)|\,dy$$

$$\le \frac{C_d}{|B|}\int_B |f(x) - f(y)|\,dy \xrightarrow[|Q|\to 0]{Q\ni x} 0$$

dato che $0 \le |B| < C_d|Q| \xrightarrow[|Q|\to 0]{Q\ni x} 0$ e dunque anche $|B| \to 0$.

<u>def</u> Date $f, g \in C_{com}(\mathbb{R}^d)$ la loro CONVOLUZIONE è data dall'integrale

$$f * g(x) = \int f(x-y)\,g(y)\,dy = \int f(y)\,g(x-y)\,dy = g * f(x)$$

<u>prop</u> $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, allora $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$, ovvero $(L^1, *)$ è un'algebra

<u>dim</u> Segue dal teorema di Tonelli.

TEOREMA (Tonelli). $h(x,y)$, $x, y \in \mathbb{R}^d$. Supponiamo che $(x,y) \mapsto h(x,y)$ sia misurabile e $h(x,y) \ge 0$, allora $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{2d}} h(x,y)\,dx \otimes dy = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} h(x,y)\,dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} h(x,y)\,dy\right)dx$

TEOREMA (disuguaglianza di Young). Siano $f \in L^p$, $g \in L^q$ e $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, allora

$$\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$$

<u>prop</u> Se $f, g \in C_{com}(\mathbb{R}^d)$ e $\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$, allora $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

<u>dim</u> $t > 0$, $f_t(x) := f(tx)$, $g_t(x) := g(tx)$

$\forall\, t > 0$: $\|f_t * g_t\|_r \le \|f_t\|_p \|g_t\|_q$

- $\displaystyle\|f_t\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(tx)|^p\,dx\right)^{1/p} \underset{dx = t^{-d}dy}{\overset{\substack{tx = y\\ x = y/t}}{=}} t^{-\frac{d}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p\,dy\right)^{1/p} = t^{-\frac{d}{p}}\|f\|_p$
- $\|g_t\|_q = t^{-\frac{d}{q}}\|g\|_q$

$$\bullet\ (f_t * g_t)(x) = \int f(t(x-y))\, g(ty)\, dy \overset{\substack{z=ty \\ dy = t^{-d}dz}}{=} t^{-d} \int f(tx-z)\, g(z)\, dz$$

$$= t^{-d} (f*g)(tx)$$

$$= t^{-d} (f*g)_t(x)$$

$$\Rightarrow \|f_t * g_t\|_r = t^{-d} \|(f*g)_t\|_r = t^{-d}\, t^{-\frac{d}{r}} \|f*g\|_r$$

$$\overset{\forall t>0}{\Rightarrow} \quad \|f_t * g_t\|_r \le \|f_t\|_p \|g_t\|_q$$

$$\overset{\forall t>0}{\Rightarrow} \quad t^{-d-\frac{d}{r}} \|f*g\|_r \le t^{-\frac{d}{p}}\, t^{-\frac{d}{q}} \|f\|_p \|g\|_q$$

$$\overset{\forall t>0}{\Rightarrow} \quad t^{d\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r}-1\right)} \|f*g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r}-1 = 0 \Rightarrow 1+\frac{1}{r} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}.$$

__def__ Una famiglia di funzioni $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ che soddisfi $\int K_\delta(x)\, dx = 1$ è una APPROSSIMAZIONE DELL'UNITA' se $\exists\, A>0$ t.c.

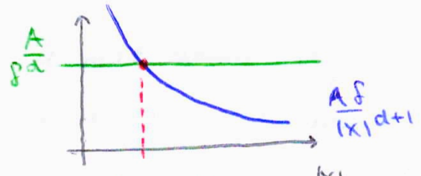
(1) $|K_\delta(x)| \le \frac{A}{\delta^d}$

(2) $|K_\delta(x)| < \frac{A\delta}{|x|^{d+1}}$ se $x \neq 0$

__oss__ Per definizione K_δ è integrabile $\forall\, \delta>0$

__prop__ Se $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ è un'approssimazione dell'unità, allora $\exists\, c$ t.c. $\|K_\delta\|_1 \le c$ $\forall\, \delta>0$, ovvero le funzioni K_δ sono uniformemente integrabili.

__dim__ Osservo $|K_\delta(x)| \le \min\left(\frac{A}{\delta^d}, \frac{A\delta}{|x|^{d+1}}\right)$



$$\frac{A}{\delta^d} = \frac{A\delta}{|x|^{d+1}} \iff \delta = |x|$$

$$\|K_\delta\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |K_\delta(x)|\, dx \le \int_{\mathbb{R}^d} \min\left(\frac{A}{\delta^d}, \frac{A\delta}{|x|^{d+1}}\right) dx$$

$$\le \int_{|x|\le\delta} \frac{A}{\delta^d}\, dx + \int_{|x|>\delta} \frac{A\delta}{|x|^{d+1}}\, dx$$

$$\int_{|x|\le\delta} \frac{A}{\delta^d}\, dx = \frac{A}{\delta^d} |B(0,1)|\, \delta^d$$

$$\int_{|x|>\delta} \frac{A\delta}{|x|^{d+1}}\, dx = \int_\delta^\infty \int_{S^{d-1}} \frac{A\delta}{r^{d+1}} \cdot r^{d-1}\, d\sigma\, dr = A\delta \int_\delta^\infty |S^{d-1}| \frac{1}{r^2}\, dr = |S^{d-1}|\, A\cancel{\delta} \cdot \frac{1}{\cancel{\delta}}$$

coarea:

$$= \int_\delta^\infty \int_{S_r^{d-1}} \frac{A\delta}{r^{d+1}}\, d\sigma\, dr$$

$$= \int_\delta^\infty \frac{A\delta}{r^{d+1}} A(S_r^{d-1})\, dr$$

$$= \int_\delta^\infty \frac{A\delta}{r^{d+1}} r^{d-1} A(S^{d-1})\, dr$$

$$= A\delta \int_\delta^\infty A(S^{d-1}) \frac{1}{r^2}\, dr$$

$$\le A\left(|B(0,1)| + |S^{d-1}|\right) \lesssim A \quad \forall\, \delta>0$$

dim considero $\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, K_\delta(y)\, dy - f(x)\right| \overset{\int K_\delta = 1}{=\!=} \left|\int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y)-f(x))\, K_\delta(y)\, dy\right|$

$$\le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)-f(x)|\,|K_\delta(y)|\, dy$$

Dato $r>0$, sia $\Phi(r) := \frac{1}{r^d}\int_{|y|<r} |f(x-y)-f(x)|\, dy$

lemma (1) $\lim_{r\to 0} \Phi(r) = 0$

(2) $\exists M>0$ t.c. $|\Phi(r)|<M \quad \forall r>0$

dim (1) Ricordo che x è p.to di Lebesgue di f, dunque

corollario del teorema di differenziazione dell'integrale di Lebesgue

$$0 = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|\, dy$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(0,r)|}\int_{B(0,r)} |f(x-y)-f(x)|\, dy$$

$$= \frac{1}{|B(0,1)|}\cdot \frac{1}{r^d}\int_{|y|<r} |f(x-y)-f(x)|\, dy = \frac{1}{|B(0,1)|}\,\Phi(r)$$

(2) $r\ge 1$ $\quad |\Phi(r)| \le \frac{1}{r^d}\int_{|y|<r} |f(x-y)|\, dy + \frac{1}{r^d}\int_{|y|<r} |f(x)|\, dy$

$$\le \frac{1}{r^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\, dy + |f(x)|\cdot\frac{1}{r^d}\int_{|y|<r} dy$$

$$\le \underset{\le 1}{\frac{1}{r^d}}\,\|f\|_1 + |f(x)|\cdot \frac{1}{\cancel{r^d}}\cdot |B(0,1)|\,\cancel{r^d}$$

$$= \|f\|_1 + |f(x)|\,|B(0,1)|$$

$0<r\le 1$ Dimostro che $\Phi(r)$ è continua in $(0,1]$.

Dimostro che $\psi(r) = \int_{|y|<r} |f(x-y)-f(x)|\, dy$ è continua in $(0,1)$

Sia $r\in(0,1]$:

$$|\psi(s)-\psi(r)| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)-f(x)|\left(1\!\!1_{\{|y|<s\}}(y) - 1\!\!1_{\{|y|<r\}}(y)\right) dy\right|$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)-f(x)|\,\left|1\!\!1_{\{|y|<s\}}(y) - 1\!\!1_{\{|y|<r\}}(y)\right| dy$$

posso assumere $s<2$

$$\le \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)-f(x)|\,\left|1\!\!1_{\{|y|<s\}}(y) - 1\!\!1_{\{|y|<r\}}(y)\right| 1\!\!1_{\{|y|<2\}}(y)\, dy}_{(*)}$$

Ottengo $|f(x-y)-f(x)|\underbrace{\left|1\!\!1_{\{|y|<s\}}(y) - 1\!\!1_{\{|y|<r\}}(y)\right|}_{\le 2} 1\!\!1_{\{|y|<2\}}(y)$

$$\le 2\,|f(x-y)-f(x)|\, 1\!\!1_{\{|y|<2\}}(y) \in L^1(dy)$$

Dunque per il teorema di conv. dominata posso scambiare limite ed integrale ed ottenere

$$\lim_{s\to r} |\psi(s)-\psi(r)| \le \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{s\to r} (*)\, dy = 0$$

Ora $\lim_{r\to 0}\Phi(r) = 0$ e $\Phi(r)$ è continua per $r\in(0,1]$. Possiamo estenderla a $\tilde\Phi(r) = \begin{cases} \Phi(r) & 0<r\le 1 \\ 0 & r=0 \end{cases}$ continua su $[0,1]$

$\xrightarrow{\text{Weierstrass}}$ $\tilde\Phi$ è limitata. $\Longrightarrow$ unito con il caso $r\ge 1$ ottengo Φ è limitata

Riprendendo:

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|\,|K_\delta(y)|\,dy}_{J_\delta} \leq \underbrace{\int_{|y|\leq\delta} |f(x-y) - f(x)|\,|K_\delta(y)|\,dy}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{|y|>r} |f(x-y) - f(x)|\,|K_\delta(y)|\,dy}_{\mathrm{II}}$$

$$\mathrm{I} = \int_{|y|<\delta} |f(x-y) - f(x)|\,|K_\delta(y)|\,dy$$

$|K_\delta(x)| < \frac{A}{\delta^d}$

$$\leq \frac{A}{\delta^d} \int_{|y|<\delta} |f(x-y) - f(x)| = A\,\Phi(\delta)$$

$$\mathrm{II} = \int_{|y|>\delta} |f(x-y) - f(x)|\,|K_\delta(y)|\,dy$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k\delta \leq |y| < 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(y)|\,|K_\delta(y)|\,dy$$

$|K_\delta(x)| < \frac{A\delta}{|x|^{d+1}}$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k\delta \leq |y| < 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(y)| \frac{A\delta}{|y|^{d+1}}\,dy$$

$$\leq A\delta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k\delta)^{d+1}} \int_{2^k\delta \leq |y| < 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(y)|\,dy$$

$$\leq A\delta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k\delta)^{d+1}} \int_{|y|<2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(y)|\,dy$$

$$= A\,2^d \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \underbrace{\frac{1}{(2^{k+1}\delta)^d} \int_{|y|<2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(y)|\,dy}_{\Phi(2^{k+1}\delta)}$$

$$\Rightarrow J_\delta \leq 2^d A \left(\Phi(\delta) + \sum_{k=0} \frac{1}{2^k} \Phi(2^{k+1}\delta) \right)$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Sia N tc $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$.

$$J_\delta \leq 2^d A \Big(\underbrace{\Phi(\delta) + \sum_{k=0}^{N} \Phi(2^{k+1}\delta)}_{= \sum_{k=0}^{N+1} \Phi(2^k\delta)} + \underbrace{\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \Phi(2^{k+1}\delta)}_{\wedge (2)} \Big)$$

$$M \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{M}{2^N} \leq \varepsilon M$$

Da (1) $\exists\, r_0 > 0$ tc se $r < r_0$, allora $\Phi(r) < \frac{\varepsilon}{N+1}$. Se δ è tc $2^{N+1}\delta < r_0$, allora $\Phi(\delta 2^k) < \frac{\varepsilon}{N+1}$ $\forall k = 0, \dots N+1$. Allora

$$J_\delta \leq 2^d A \left(\sum_{k=0}^{N+1} \Phi(2^k\delta) + \varepsilon M \right)$$

$$\leq 2^d A \left(\sum_{k=0}^{N+1} \frac{\varepsilon}{N+1} + \varepsilon M \right)$$

$$\leq 2^d A\, \varepsilon (M+1).$$

def $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la ==TRASFORMATA DI FOURIER== di f è definita per $\xi \in \mathbb{R}^d$ con

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx$$

con $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_d \xi_d$

oss $|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx = \|f\|_1 \overset{\forall \xi \in \mathbb{R}^d}{\Longrightarrow} \|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$

lemma (==Riemann-Lebesgue==). $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, allora $\hat{f}$ è una funzione continua di ξ e $\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

dim • (continuità). Fisso $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ e considero $\lim_{\xi \to \xi_0} \hat{f}(\xi) = \lim_{\xi \to \xi_0} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx$

Dall'osservazione sopra $|f(x)\, e^{-2\pi i x \cdot \xi}| \leq |f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^d)$, dunque per il teorema di convergenza dominata possiamo scambiare limite ed integrale ottenendo

$$\lim_{\xi \to \xi_0} \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{\xi \to \xi_0} f(x)\, e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x \cdot \xi_0}\, dx = \hat{f}(\xi_0)$$

• $(\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0)$. Data $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, definisco $\tau_y f(x) = f(x-y)$, $y \in \mathbb{R}^d$.

Ottengo $\|\tau_y f\|_p = \|f\|_p$

lemma $y \in \mathbb{R}^d$, $\lim_{y \to 0} \|f - \tau_y f\|_p = 0 \quad \forall\ 1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$

dim Se $\varphi \in C_{com}(\mathbb{R}^d)$, allora φ è uniformemente continua, dunque $\forall \varepsilon > 0\ \exists r_0$ t.c. $|x - z| < r_0 \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(z)| < \varepsilon$

Dunque
$$\|\tau_y \varphi - \varphi\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x-y) - \varphi(x)|^p\, dx$$
$$\underset{\substack{K = \bigcup_{|y|<1} \operatorname{supp} \tau_y \varphi \\ \& \ |y| < r_0}}{=} \int_K \underbrace{|\varphi(x-y) - \varphi(x)|^p}_{\wedge \atop \varepsilon^p}\, dx$$
$$\leq \varepsilon^p |K|.$$

Fisso $\delta > 0$. $\exists\ \varphi \in C_{com}(\mathbb{R})$ con $\|f - \varphi\|_p < \delta$

$$\|f - \tau_y f\|_1 \leq \|\tau_y f - \tau_y \varphi\|_1 + \|\tau_y \varphi - \varphi\|_1 + \|\varphi - f\|_1$$
$$= 2\|f - \varphi\|_1 + \|\tau\ \varphi - \varphi\|_1$$
$$\leq 2\delta + \underbrace{\|\tau_y \varphi - \varphi\|_1}_{\wedge \atop \delta} \leq 3\delta$$

per $|y|$ abbastanza piccolo

$$\Rightarrow \lim_{y \to 0} \|f - \tau_y f\|_1 = 0.$$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx + \frac{1}{2}(-e^{i\pi}) \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx - \frac{1}{2} e^{2i\pi \xi \cdot \left(\frac{\xi}{2|\xi|^2}\right)} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i \xi \left(x - \frac{\xi}{2|\xi|^2}\right)}\, dx$$

$x - \frac{\xi}{2|\xi|^2} = y$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} f\left(y + \frac{\xi}{2|\xi|^2}\right) e^{-2\pi i \xi \cdot y}\, dy$$
$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left(f(y) - f\left(y + \frac{\xi}{2|\xi|^2}\right)\right) e^{-2\pi i \xi \cdot y}\, dy$$

$$|\hat{f}(\xi)| = \frac{1}{2}\left| \int_{\mathbb{R}^d} \left(f(y) - f\left(y + \frac{\xi}{2|\xi|^2}\right)\right) e^{-2\pi i \xi \cdot y}\, dy \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left|f(y) - f\left(y + \frac{\xi}{2|\xi|^2}\right)\right| dy$$

$$= \frac{1}{2} \left\| f - \tau_{-\frac{\xi}{2|\xi|^2}} f \right\|_1 \xrightarrow{|\xi| \to \infty} 0$$

prop sia $p \in [1, \infty]$. se vale la disuguaglianza $\|\hat{f}\|_p \leq \|f\|_1 \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, allora $p = \infty$

dim sia $0 \neq f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f_\delta(x) := \delta^d f(\delta x)$.

$\|\hat{f}\|_p \leq \|f\|_1 \implies \forall \delta > 0 \quad \|\hat{f}_\delta\|_p \leq \|f_\delta\|_1$

- $\|f_\delta\|_1 = \int |\delta^d f(\delta x)| dx = \delta^d \int |f(\delta x)| dx \overset{\substack{\delta x = y \\ x = y/\delta \\ dx = \delta^{-d} dy}}{=\!=} \int |f(y)| dy = \|f\|_1$
- $\hat{f}_\delta(\xi) = \int \delta^d f(\delta x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \overset{\substack{\delta x = y \\ x = y/\delta \\ dx = \delta^{-d} dy}}{=\!=} \int f(y) e^{-2\pi i \frac{y}{\delta} \cdot \xi} dy = \int f(y) e^{-2\pi i y \cdot \frac{\xi}{\delta}} dy \overset{!}{=} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right)$

$$\|\hat{f}_\delta(\xi)\|_p = \left\|\hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right)\right\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi/\delta)|^p d\xi\right)^{1/p} \overset{\substack{\xi/\delta = \eta \\ \xi = \delta\eta \\ d\xi = \delta^d d\eta}}{=\!=} \left(\delta^d \int |\hat{f}(\eta)|^p d\eta\right)^{1/p} = \delta^{\frac{d}{p}} \|\hat{f}\|_p$$

$\implies \delta^{\frac{d}{p}} \|\hat{f}\|_p \leq \|f\|_1 \quad \forall \delta > 0$

$\implies p = \infty$, infatti se fosse $p < \infty$, $\lim_{\delta \to \infty} \delta^{\frac{d}{p}} = +\infty$ $\lightning$

oss $T \in GL(\mathbb{R}^d)$, $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\widehat{(f \circ T)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(Tx) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

$$\overset{\substack{Tx = y \\ x = T^{-1}y \\ dx = |\det T^{-1}| dy \\ = \frac{1}{|\det T|} dy}}{=\!=} \frac{1}{|\det T|} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i T^{-1} y \cdot \xi} dy$$

$$= \frac{1}{|\det T|} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i y \cdot (T^{-1})^t \xi} dy = \frac{1}{|\det T|} \hat{f}\left((T^{-1})^t \xi\right)$$

dato $\delta > 0$, se $T_\delta x = \delta x$ dilatazione avremo

$$\widehat{f \circ T_\delta}(\xi) = \frac{1}{\delta^d} \hat{f}(\xi/\delta)$$

In particolare, se definiamo $f_\delta(x) := \delta^d f(\delta x)$ otteniamo

$$\hat{f}_\delta(\xi) = \delta^d \widehat{f \circ T_\delta}(\xi) = \hat{f}(\xi/\delta)$$

oss $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\tau_h f(x) = f(x-h)$. Allora

$$\widehat{\tau_h f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-h)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx$$

$$\overset{x-h=y}{\underset{x=y+h}{=}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, e^{-2\pi i (y+h)\cdot\xi}\, dy$$

$$= e^{-2\pi i h\cdot\xi} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, e^{-2\pi i y\cdot\xi}\, dy = e^{-2\pi i h\cdot\xi}\, \hat{f}(\xi)$$

Sia $e_h(\xi) = e^{-2\pi i h\cdot\xi}$. Allora

prodotto puntuale

$$\widehat{e_h f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i h\cdot x} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot(h+\xi)}\, dx = \hat{f}(h+\xi)$$

def $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ è di tipo TENSORIALE se $\exists\, f_1, \dots, f_d : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tc $f(x) = f_1(x_1) \cdots f_d(x_d)$

lemma Se $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ è una funzione tensoriale $f(x) = f_1(x_1) \cdots f_d(x_d)$, allora anche $\hat{f}$ lo è e vale $\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi_1) \cdots \hat{f}_d(\xi_d)$

dim $e^{-2\pi i x\cdot\xi} = e^{-2\pi i x_1\xi_1} \cdots e^{-2\pi i x_d \xi_d}$

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{d} f_j(x_j)\, e^{-2\pi i x_j\xi_j}\, dx$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} f_j(x_j)\, e^{-2\pi i x_j \xi_j}\, dx_j = \prod_{j=1}^{d} \hat{f}_j(\xi_j)$$

prop Data $G(x) = e^{-\pi|x|^2}$ si ha $\hat{G}(\xi) = G(\xi)$

dim
- $G(x) = e^{-\pi|x|^2} = e^{-\pi x_1^2} e^{-\pi x_2^2} \cdots e^{-\pi x_d^2}$ è di tipo tensoriale, dunque è sufficiente calcolare la trasformata di $g(s) = e^{-\pi s^2}$, $s \in \mathbb{R}$
- $\varphi(t) := \hat{g}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi s^2} e^{-2\pi i s t}\, ds$
- Osservo che $|\partial_t (e^{-\pi s^2} e^{-2\pi i s t})| = |-2\pi i s\, e^{-\pi s^2} e^{-2\pi i s t}| = 2\pi|s| e^{-\pi s^2} \in L^1(ds)$

dunque dalla proposizione sulla derivazione sotto il segno di integrale abbiamo

$$\varphi'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t (e^{-\pi s^2} e^{-2\pi i s t})\, ds = i \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi s) e^{-\pi s^2} e^{-2\pi i s t}\, ds$$

- Osservo $\varphi'(t) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_s (e^{-\pi s^2})\, e^{-2\pi i s t}\, ds$

integro per parti

$$= \underbrace{i \lim_{R\to\pm\infty} \left[e^{-\pi s^2} e^{-2\pi i s t}\right]_{-R}^{R}}_{=0} - i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi s^2}\, \partial_s (e^{-2\pi i s t})\, ds$$

$$= -i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi s^2} (-2\pi i t)\, e^{-2\pi i s t}\, ds$$

$$= -2\pi t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi s^2} e^{-2\pi i s t}\, ds = -2\pi t\, \varphi(t)$$

$\Rightarrow \varphi'(t) + 2\pi t\, \varphi(t) = 0$ eq. diff. del primo ordine con soluzione $\varphi(t) = A e^{-\pi t^2}$

$\Rightarrow A = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi s^2}\, ds = 1 \quad \Rightarrow \hat{g}(t) = \varphi(t) = e^{-\pi t^2}$

Dunque le Gaussiane sono punti fissi della trasformata di Fourier:

$$\hat{G}(\xi) = \prod_{j=1}^{d} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x_j^2} e^{-2\pi i x_j \xi_j} dx_j \right) = \prod_{j=1}^{d} e^{-\pi \xi_j^2} = e^{-\pi|\xi|^2} = G(\xi)$$

OSS $\delta>0$. L'approx dell'unità associata alla Gaussiana è

$$G_\delta(x) := \frac{1}{\delta^d} G\left(\frac{x}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta^d} e^{-\pi \frac{|x|^2}{\delta^2}}$$

$$\hat{G_\delta}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\delta^d} e^{-\pi \frac{|x|^2}{\delta^2}} e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \underset{dx=\delta^d dy}{\overset{x/\delta = y}{=}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|y|^2} e^{-2\pi i \delta y\cdot\xi} dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|y|^2} e^{-2\pi i y\cdot\delta\xi} dy = \hat{G}(\delta\xi) = G(\delta\xi) = e^{-\pi\delta^2|\xi|^2}$$

(Lo si può ottenere anche attraverso una delle oss. precedenti, infatti se $f(\xi) = G(\xi)$, allora $G_\delta(x) = f_{\delta^{-1}}(x)$, da cui

$$\hat{G_\delta}(\xi) = \hat{f_{\delta^{-1}}}(\xi) = \hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta^{-1}}\right) = \hat{f}(\delta\xi) = \hat{G}(\delta\xi) = G(\delta\xi) = e^{-\pi\delta^2|\xi|^2})$$

TEOREMA (Fubini). Se $f \in L^1(\mathbb{R}^{2d}, dx \otimes dy)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^{2d}$, $x,y \in \mathbb{R}^d$, allora

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f(x,y)\, dx dy = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\, dx\right) dy = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\, dy\right) dx$$

TEOREMA (formula di inversione). Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e supponiamo che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, allora

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi$$

dim
- Vogliamo mostrare che $f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\cdot\xi} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i y\cdot\xi} dy\right) d\xi$
- Sia $\delta>0$. $I_\delta(x) := \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i (x-y)\cdot\xi} f(y) e^{-\pi\delta^2|\xi|^2} dy\right) d\xi$

Osservo che $|e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} f(y) e^{-\pi\delta^2|\xi|^2}| = |f(y)|\, e^{-\pi\delta^2|\xi|^2} \in L^1(dy\otimes d\xi)$

Per il teorema di Fubini troviamo

$$I_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\Bigg(\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{e^{-\pi\delta^2|\xi|^2}}_{=\hat{G}(\delta\xi) = \hat{G_\delta}(\xi)} e^{-2\pi i(y-x)\cdot\xi} d\xi\Bigg) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \underbrace{\hat{\hat{G}}_\delta(y-x)}_{=G_\delta(y-x)} dy$$

infatti

$$\hat{\hat{G}}_\delta(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{G}_\delta(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{G}(\delta x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\delta^2|x|^2} e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \underset{x=y/\delta}{\overset{\delta x=y}{=}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\delta^d} e^{-\pi|y|^2} e^{-2\pi i y\cdot\xi/\delta} dy$$

$$= \frac{1}{\delta^d}\hat{G}\left(\frac{\xi}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta^d} e^{-\pi\frac{|\xi|^2}{\delta^2}} = G_\delta(\xi)$$

Ma allora

$$I_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, G_\delta(y-x)\, dy$$

Gaussiana è simmetrica

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, G_\delta(x-y)\, dy$$

$$= f * G_\delta(x)$$

G_δ è un'approssimazione dell'unità e siccome $f \in L^1$, se x è p.to di Leb. di f, allora

$$\lim_{\delta \to 0^+} I_\delta(x) = \lim_{\delta \to 0^+} f * G_\delta(x) = f(x)$$

- Considero nuovamente

$$I_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i (x-y)\cdot\xi} f(y)\, e^{-\pi\delta^2|\xi|^2}\, dy\right) d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\delta^2|\xi|^2} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, e^{-2\pi i y\cdot\xi}\, dy\right)}_{=\hat{f}(\xi)} e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\delta^2|\xi|^2} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi$$

Adesso considero

$$\lim_{\delta \to 0^+} I_\delta(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\delta^2|\xi|^2} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi$$

Osservo $\left|e^{-\pi\delta^2|\xi|^2} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\right| = e^{-\pi\delta^2|\xi|^2} |\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi)| \in L^1(\mathbb{R}^d)$

dunque per il teorema di conv. dominata posso scambiare derivata ed integrale

$$\lim_{\delta \to 0^+} I_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{\delta \to 0^+}\left(e^{-\pi\delta^2|\xi|^2} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\right) d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi$$

$\Rightarrow f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi$ per x p.to di Lebesgue di f

<u>oss1</u> se $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R}^d)$ la dimostrazione ci fornisce comunque un metodo per calcolare $f(x)$

<u>oss2</u> $f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\, e^{-2\pi i (-x)\cdot\xi}\, d\xi = \hat{\hat{f}}(-x)$

dunque se f e $\hat{f}$ sono integrabili, allora per il lemma di Riemann-Lebesgue f è continua e ha limite nullo all'infinito.

<u>oss3</u> La trasformata di Fourier è iniettiva su L^1: se $f \in L^1$ e $\hat{f} = 0$ q.o. $\Rightarrow f = 0$ q.o.

<u>prop1</u> $f, g \in L^1$, allora $\widehat{f*g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi)$

<u>dim</u> $\widehat{f*g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} (f*g)(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, g(y)\, dy\right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, g(y)\, e^{-\pi i (x-y)\cdot\xi}\, e^{-2\pi i y\cdot\xi}\, dy\right) dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, e^{-2\pi i \xi\cdot(x-y)}\, dx}_{\substack{\text{ponendo } z=x-y \text{ vedo che} \\ \text{è } = \hat f(\xi)}}\Big)\, e^{-2\pi i \xi\cdot y}\, dy$$

$$= \hat f(\xi) \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\, e^{-2\pi i \xi\cdot y}\, dy = \hat f(\xi)\, \hat g(\xi)$$

<u>prop c</u> $f, g \in L^1$, $\hat g \in L^1$, allora $\widehat{f\cdot g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx = (\hat f * \hat g)(\xi)$

prodotto puntuale

<u>dim</u> (*) $\int f(x)\, g(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx \overset{\text{formula di inversione}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\Big(\int_{\mathbb{R}^d} \hat g(\eta)\, e^{2\pi i x\cdot\eta}\, d\eta\Big)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \hat g(\eta)\Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{2\pi i x\cdot(\eta-\xi)}\, dx\Big)\, d\eta$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \hat g(\eta)\, \hat f(\xi-\eta)\, d\eta = \hat g * \hat f(\xi)$$

<u>OSS 4</u> L'algebra $(L^1, *)$ non ha l'identità.

Assumo per assurdo che $\exists\, e \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tc $f*e = f \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$\Rightarrow \widehat{f*e} = \hat f\, \hat e = \hat f \Rightarrow \hat e = 1$ q.o. $\lightning$

perchè il lemma di Riemann-Lebesgue dice che la trasformata di Fourier di una funzione integrabile si annulla all'infinito.

(*) Manca da dimostrare $f\cdot g \in L^1$: $g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat g(\xi)\, e^{2\pi i \xi\cdot x}\, d\xi$

$\Rightarrow |g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\hat g(\xi)| = \|\hat g\|_1 < \infty$

$\Rightarrow |f(x)\, g(x)| \leq |f(x)|\, \|\hat g\|_1 \in L^1$

esempio (il nucleo di Poisson)

- sia $K_\delta(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\delta}{x^2+\delta^2}$, $x\in\mathbb{R}$, $\delta>0$. E' un'approssimazione dell'identità

$$\int_{\mathbb{R}} K_\delta(x)\,dx \underset{dx=\delta\,dy}{\overset{y=x/\delta}{=\!=}} \frac{1}{\pi}\int\frac{dy}{1+y^2} = 1$$

$$|K_\delta(x)| \le \frac{1}{\pi}\frac{\delta}{\delta^2} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\delta}$$

$$|K_\delta(x)| \le \frac{1}{\pi}\frac{\delta}{x^2} = \frac{\delta}{x^2\pi}, \quad x\neq 0$$

- La funzione $P_y(x) = P(x,y) = K_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$, $x\in\mathbb{R}$, $y>0$ è armonica nel semipiano superiore $H_+=\{(x,y): x\in\mathbb{R}, y\in(0,+\infty)\}$.

Sappiamo che se $f(z) = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ è olomorfa in Ω aperto connesso, allora $u(x,y)$ e $v(x,y)$ sono armoniche. Ricordo che $f(z)=\frac{1}{z}$ è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ e in particolare in $H_+ = \{z: \operatorname{Im}(z)>0\} = \{x+iy: y>0\}$

Osservo che $f(z) = f(x+iy) = \frac{1}{x+iy} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + i\Big(\underbrace{-\frac{y}{x^2+y^2}}_{v(x,y)}\Big)$

$\Rightarrow$ $-\pi P(x,y) = v(x,y)$ è armonica in $H_+=\{(x,y): y>0\}$

$\Rightarrow$ $P(x,y)$ è armonica in H_+

- vale $\Delta(f*P) = f*\Delta P$ $\forall y>0$ e dunque $u(x,y) := f*P_y(x)$ è armonica in H_+ (con $f\in L^1(\mathbb{R})$).

Osservo che $|\partial_x P(x,y)|$, $|\partial_x^2 P(x,y)|$ sono limitate $\forall x\in\mathbb{R}$, infatti:

$$|\partial_x P(x,y)| = \left|-\frac{y}{\pi}\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right| = \frac{1}{\pi}\left|\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right| \overset{\text{AM-GM}}{\le} \frac{1}{\pi}\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+y^2} \le \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{y^2}$$

$$|\partial_x^2 P(x,y)| = \left|-\frac{2}{\pi}\frac{y^3-3x^2y}{(x^2+y^2)^3}\right| \le \frac{2}{\pi}\frac{y(y^2+3x^2)}{(x^2+y^2)^3} \le \frac{6}{\pi}\frac{y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{6}{\pi}\frac{y}{(x^2+y^2)^2} \le \frac{6}{\pi}\cdot\frac{1}{y^3}$$

Dunque dalla proposizione vista in classe abbiamo

$$\partial_x^2(f*P) = f*\partial_x^2 P$$

Osservo inoltre che, fissato $y_0>0$, $|\partial_y P(x,y)|$, $|\partial_y^2 P(x,y)| \le C_{y_0}$ $\forall\ y\ge y_0>0$ infatti:

$$|\partial_y P(x,y)| = \left|\frac{1}{\pi}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| \le \frac{1}{\pi}\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \le \frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+y^2} \le \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{y^2} \le \frac{1}{\pi}\frac{1}{y_0^2}$$

$$|\partial_y^2 P(x,y)| \overset{P\text{ armonica}}{=} |\partial_x^2 P(x,y)| \le \frac{6}{\pi}\cdot\frac{1}{y^3} \le \frac{6}{\pi}\cdot\frac{1}{y_0^3}$$

Dunque dal teorema per la derivazione sotto il segno di integrale segue

$$\partial_y^2(f*P) = f*\partial_y^2 P$$

$\Rightarrow$ $\Delta(f*P) = f*\Delta P$

Da questo segue banalmente che $\Delta u(x,y) = \Delta(f*P_y)(x) = f*\Delta P(x,y) = 0*f = 0$, ovvero u è armonica sul semipiano H^+.

- Se $f\in L^1(\mathbb{R})\cap C(\mathbb{R})$ si dimostri che u soddisfa il problema di Dirichlet $\begin{cases}\Delta u(x,y) = 0 & y>0\\ u(x,0) = f(x) & y=0\end{cases}$

Dal teorema sulle approssimazioni dell'identità segue che se x è p.to di Lebesgue di $f\in L^1(\mathbb{R})$ allora $\lim_{y\to0^+} u(x,y) = f(x)$. Se $f\in L^1(\mathbb{R})\cap C(\mathbb{R})$, allora $\forall x\in\mathbb{R}$ $\lim_{y\to0^+} u(x,y) = f(x)$ e $u(x,y) = f*P_y(x)$ si estende ad una funzione continua sul semipiano $\overline{H_+}$ chiuso con $u(x,0) = f(x)$. Dunque u soddisfa il problema dato.

NB 1 In generale non è vero che se $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ allora $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$

Ad esempio, la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita come $f_1 = \mathbb{1}_{[0,1/2]}$, $f = \mathbb{1}_{[1/2,1)}$

$f_3 = \mathbb{1}_{[0,1/4]}$, $f_4 = \mathbb{1}_{[1/4,1/2]}$, $f_5 = \mathbb{1}_{[1/2,3/4]}$, $f_6 = \mathbb{1}_{[3/4,1]}$, $f_7 = \mathbb{1}_{[0,1/8]}$, ...

è tale che $\|f_n\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$, ma non c'è convergenza puntuale a $f(x)=0$.

NB 2 In generale non è vero che $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ammette limite all'infinito

Ad esempio, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \, \mathbb{1}_{[n, n+n^{-3}]}(x) \in L^1(\mathbb{R})$, ma $\lim_{x\to\infty} f(x) \nexists$

NB 3 In generale non è vero che $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ implica che f sia continua per qualche $x \in \mathbb{R}^d$

Ad esempio, data $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ un'enumerazione dei razionali in $[0,1]$,

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{\sqrt{|x-r_n|}} \mathbb{1}_{\{y : |y-r_n| \leq 1\}}(x) \in L^1(0,1)$, ma non è continua in nessun punto di $[0,1]$.

NB 4 Una funzione integrabile e uniformemente continua ha limite nullo all'infinito.

Mentre se è solo integrabile e continua non ha limite nullo all'infinito in generale.