SPAZI METRICI E SPAZI NORMATI

Definizione

def Una coppia (X, d) con X un insieme, $d: X \times X \to [0, \infty)$ una funzione si dice SPAZIO METRICO se si verifica:

i) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \iff x = y$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (simmetria)

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in X$ (disuguaglianza triangolare)

esempio

1) $X = \mathbb{R}$ $\quad d(x,y) = |x-y|$ è SM

2) $X = \mathbb{C}$ $\quad d(z,w) = |z-w|$ è SM

3) $X = \mathbb{R}$ $\quad d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ è SM → verificalo

4) $X = \mathbb{R}^n$ $\quad d(x,y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$ è SM (euclideo)

5) X insieme qualsiasi

Sia $d: X \times X \to [0, \infty)$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

è SM (discreto).

oss Se (X,d) è uno SM e $Y \subset X$ allora (Y, d) è uno SM.

def Sia (X,d) uno SM. Per $x_0 \in X$ e $r > 0$ fissati definiamo

$$B(x_0, r) = B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\} \subset X$$

la PALLA centrata in x_0 di raggio r.

Sullo spazio metrico ristretto (Y, d) avremo: $B_Y(y_0, r) = B_X(y_0, r) \cap Y$

$\mathbb{R}^n$ con dist. euclidea

Indichiamo con $\langle \cdot , \cdot \rangle$ il prodotto scalare

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Definiamo $\quad |\cdot| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$

$$|x| \longmapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

So che vale la disuguaglianza di CS : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x|\,|y|$$

Lemma Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, vale la subadditività della norma Euclidea:

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

dim $\quad |x+y|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$

$$= |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2$$

$$\overset{CS}{\leq} |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$$

$$\leq (|x| + |y|)^2$$

$$\Rightarrow \quad |x+y| \leq |x| + |y| \qquad \square$$

Ora su $\mathbb{R}^n$ definiamo

$$d(x, y) = |x - y| \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$

Affermo che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno SM: verifichiamolo.

i) $\quad d(x, y) \geq 0 \quad$ e $\quad d(x, y) = 0 \iff x = y \qquad$ ✓

ii) $\quad d(x, y) = d(y, x) \qquad$ ✓

iii) $\quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n \qquad$ ✓

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$$

Spazi normati

def Una coppia $(V, \|\cdot\|)$ è uno SPAZIO NORMATO se V è uno sp. vett. (su $\mathbb{R}$) e $\|\cdot\| : V \longrightarrow [0,\infty)$ è una funzione (detta NORMA) che verifica :

i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall\, x \in V$ e $\|x\| = 0 \iff x = 0$

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall\, x \in V \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ (positiva omogeneità della norma)

iii) $\forall\, x, y \in V$ vale

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(subadditività della norma)

oss Sia $(V, \|\cdot\|)$ spazio normato posso definire $d : V \times V \longrightarrow [0,\infty)$

$$d(x,y) = \|x-y\| \qquad x, y \in V$$

Allora (V, d) è SM

Convergenza in SM

Sia (X, d) uno SM. Consideriamo $x : \mathbb{N} \longrightarrow X$

$$x(k) = x_k \in X \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Potremmo indicarla $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Dato $x_\infty \in X$ diremo che

$$x_k \xrightarrow[k \to \infty]{(X,d)} x_\infty$$

se e solo se

$$\lim_{k \to \infty} d(x_k, x_\infty) = 0$$

Potremmo anche scrivere

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x_\infty$$

oss Su $\mathbb{R}^n$ fissiamo la distanza standard. Sia $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di punti $x_k \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$. Avremo che

$$x_k \xrightarrow[k \to \infty]{(\mathbb{R}^n, d)} x_\infty \in \mathbb{R}^n \quad \left(\iff |x_k - x_\infty| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \right)$$

se e solo se

coordinata i-esima di x_k

$$\forall\, i = 1, \dots, n \qquad x_k^i \longrightarrow x_\infty^i$$

Esempio

$V = C([0,1])$ è uno SV. Definiamo $\|\cdot\|_\infty : V \to [0,\infty)$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

$(V, \|\cdot\|)$ è SN.

Sia $d_\infty(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.

Allora $f_n^{\in V} \xrightarrow[n\to\infty]{d_\infty} f^{\in V} \iff f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ convergenza uniforme!

Esercizi

esercizio Sia $\ell^\infty(\mathbb{R}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R} \ \forall n\in\mathbb{N} \text{ tc } \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty\}$.
è sp. vett. Sia $\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$

$$\|a_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

Provare che $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ è uno SN.

esercizio Siano $a_1, \dots, a_n > 0$. Provare che $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2$.

considero i vettori di $\mathbb{R}^n$

$$x = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n}) \in \mathbb{R}^n$$

$$y = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) \in \mathbb{R}^n$$

Uso la dis. di CS

$$\langle x, y\rangle \leq |x|\cdot|y|$$

$$n = \sum_{i=1}^n \cancel{a_i}\cdot\frac{1}{\cancel{a_i}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)^{1/2}$$

TOPOLOGIA DI UNO SPAZIO METRICO

Sia (X,d) uno SM.

def Sia $A \subset X$.

i) Diciamo che $x \in X$ è un **P.TO INTERNO** di A se $\exists\, r>0$ tc $B_r(x) \subset A$. L' **INTERNO** di A è

$$\mathrm{int}(A) = \mathring{A} = \{x \in X : \exists\, r>0 \text{ tc } B_r(x) \subset A\}.$$

oss $\mathrm{int}(A) \subset A$

ii) Diciamo che A è un **INSIEME APERTO** se $\mathrm{int}(A) = A$ ($\Leftrightarrow$ tutti i suoi punti sono interni).

Indichiamo $\tau(X) = \{A \subset X : A \text{ è aperto}\} \subset \mathcal{P}(X)$, detta **TOPOLOGIA** di X.

def Sia $A \subset X$.

i) Diremo che $x \in X$ è un **P.TO DI CHIUSURA** di A se $\forall r>0$ si ha che $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$

Definiamo la **CHIUSURA** di A come

$$\bar{A} = \{x \in X : x \text{ p.to di chiusura di } A\}$$

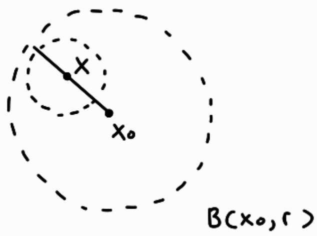
oss $A \subset \bar{A}$

ii) Diremo che $A \subset X$ è **INSIEME CHIUSO** se $A = \bar{A}$ ($\Leftrightarrow$ tutti i punti di chiusura sono contenuti in A).

prop (X,d) SM, $x_0 \in X$, $r>0$. Allora $B(x_0,r) \subset X$ è aperto.

dim Sia $x \in B(x_0,r)$ e provo che è punto interno: cerco $s>0$ tc $B(x,s) \subset B(x_0,r)$.

Basta scegliere $0 < s < r - d(x,x_0)$.



Voglio verificare che $B(x,s) \subset B(x_0,r)$.

Sia $y \in B(x,s) \Leftrightarrow d(y,x) < s$

Stimo $d(y,x_0) \leq d(y,x) + d(x,x_0) < s + d(x,x_0) < r$ $\square$

prop (X,d) SM e sia $A\subset X$. Allora A è aperto $\iff$ $\underset{\overset{\shortparallel}{C}}{X\setminus A}$ è chiuso.

dim A aperto $\iff A=\mathrm{int}(A)$

$\iff A=\{x\in X:\ \exists r>0 \text{ tc } B(x,r)\subset A\}$

$\iff X\setminus A=\{x\in X:\ \nexists r>0 \text{ tc } B(x,r)\subset A\}$

$\iff X\setminus A=\{x\in X:\ \forall r>0\ \ B(x,r)\cap(X\setminus A)\neq\emptyset\}$

$\iff C=\{x\in X:\ \forall r>0\ \ B(x,r)\cap C\neq\emptyset\}$

$\iff C=\overline{C}$

$\iff C$ è chiuso $\square$

def Sia $A\subset X$ SM. Definiamo la FRONTIERA di A come

$$\partial A=\{x\in X:\ \forall r>0 \text{ si ha } B(x,r)\cap A\neq\emptyset \text{ e } B(x,r)\cap(X\setminus A)\neq\emptyset\}=\overline{A}\cap\overline{X\setminus A}$$

esercizio sia $X\in\mathbb{R}^2$ con distanza standard. Consideriamo $A=\{x\in\mathbb{R}^2: |x|<1\}$

1) A è aperto ✓
2) $\overline{A}=\{x\in\mathbb{R}^2:\ |x|\leq 1\}$ ✓
3) $\partial A=\{x\in\mathbb{R}^2:\ |x|=1\}$ ✓

TEOREMA Sia (X,d) SM con topologia $\tau(X)\subset\mathcal{P}(X)$. Allora

A1) $\emptyset, X\in\tau(X)$

A2) $A_1,A_2,\dots,A_n\in\tau(X)\Rightarrow\bigcap_{i=1}^{n}A_i\in\tau(X)$

A3) se $A_\alpha\in\tau(X)$ $\forall\alpha\in\mathcal{A}$ $\Rightarrow\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}A_\alpha\in\tau(X)$

dim A2) $x\in\bigcap_{i=1}^{n}A_i\iff x\in \underset{\text{aperto}}{A_i}\ \forall i=1,\dots,n$

$\iff\exists \underset{i=1,\dots,n}{r_i>0}:\ B(x,r_i)\subset A_i$

sia allora $r=\min\{r_1,\dots,r_n\}>0$.

Avremo $B(x,r)\subset\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ $\square$

esempio $X=\mathbb{R}^2$

$A_k=\{x\in\mathbb{R}^2:\ |x|<1+\frac{1}{k}\}$ aperti $\forall k\in\mathbb{N}$

$\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k=\{x\in\mathbb{R}:\ |x|\leq 1\}$ non è aperto (è chiuso).

oss (X, d) SM. Allora

1) X e $\emptyset$ sono chiusi

2) $C_1, \dots, C_n \in X$ sono chiusi $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} C_i \subset X$ chiuso

3) C_α chiusi $\forall \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha \subset X$ chiuso

Funzioni continue fra SM

Siano (X, d_x) e (Y, d_y) SM. Consideriamo $f: \underset{x_0}{\overset{\cup\!\!|}{X}} \longrightarrow Y$

def Diciamo che $f: X \to Y$ è CONTINUA nel punto $x_0 \in X$ se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tc

$$d_x(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Diremo che f è continua da X in Y se è continua in ogni $x_0 \in X$.

def Sia poi $y_0 \in Y$. Diciamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in X$ si ha che

$$0 < d_x(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), y_0) < \varepsilon$$

Avremo: f continua in $x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

TEOREMA (X, d_x) e (Y, d_y) SM, $x_0 \in X$, $f: X \to Y$. Sono equivalenti:

1) f è continua in x_0

2) f è sequenzialmente continua in x_0:

$$\forall \; x_n \xrightarrow[n \to \infty]{(X, d_x)} x_0 \text{ si ha } f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{(Y, d_y)} f(x_0)$$

dim 2) ⇒ 1) Per assurdo 1) sia falsa (f non continua in x_0).

$\exists \; \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \; \exists \; x \in X : d_x(x, x_0) < \delta$ ma $d_y(f(x), f(x_0)) \underset{0}{\overset{\vee}{\geq}} \varepsilon$

Scelgo $\delta = \frac{1}{n}$:

$\exists \; \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \; \exists \; x_n \in X : d_x(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ ma $d_y(f(x), f(x_0)) \underset{0}{\overset{\vee}{\geq}} \varepsilon$

Ho trovato una successione x_n tc $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{X} x_0$, ma

$f(x_n) \not\longrightarrow f(x_0)$. $\lightning$

TEOREMA (X, d_X) e (Y, d_Y) SM. $f: X \to Y$. Sono equivalenti:

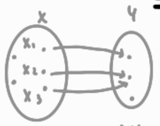
1) $f: X \to Y$ è continua su X

antiimmagine

2) $\forall A \subset Y$ aperto si ha: $f^{-1}(A) \subset X$ è aperto

3) $\forall C \in Y$ chiuso si ha: $f^{-1}(C) \subset X$ è chiuso

dim Ripasso di teoria degli insiemi. Data $f: X \to Y$



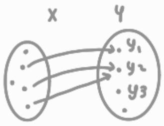
pensa ad una funzione non iniettiva

$f^{-1}(f(\{x_1, x_2\})) = \{x_1, x_2, x_3\}$

i) $A \subset f^{-1}(f(A))$ $\quad A \subset X$

ii) $B \supset f(f^{-1}(B))$ $\quad B \subset Y$

iii) $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$ $\quad B \subset Y$



pensa ad una funzione non suriettiva

$f(f^{-1}(\{y_1, y_2, y_3\})) = \{y_1, y_2\}$

1) $\Rightarrow$ 2). Fisso $A \subset Y$ aperto. $x_0 \in f^{-1}(A)$. Devo trovare $\delta > 0$ tc $B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(A)$.

$x_0 \in f^{-1}(A) \iff f(x_0) \in A$, A aperto

$\Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0$ tc $B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset A$

Ora: f è continua in $x_0 \in X$, ovvero $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tc

$$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

equivalentemente

$$f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset A$$

l'op. di immagine inversa conserva le inclusioni:

$$B(x_0, \delta) \overset{(i)}{\subset} f^{-1}(f(B_X(x_0, \delta))) \subset f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon)) \subset f^{-1}(A)$$

2) $\Rightarrow$ 1). Dimostriamo che f è continua nel punto $x_0 \in X$.

Dato $\varepsilon > 0$ devo trovare $\delta > 0$ tc

$$f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon), \text{ aperto di } Y\ \forall \varepsilon > 0$$

$$\overset{(hp)}{\Rightarrow} \underset{\substack{\Downarrow \\ x_0}}{f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))} \subset X \quad \text{aperto di } X$$

$\Rightarrow$ x_0 p.to interno, ovvero $\exists\ \delta > 0$ tc

$$B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$$

$$f(B_X(x_0, \delta)) \subset f(f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))) \overset{(ii)}{\subset} B_Y(f(x_0), \varepsilon)$$

Ho trovato che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tc

$$f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon) \qquad \square$$

esercizio (2.6 - quaderno degli esercizi)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e consideriamo:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x)\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$$

Dimostrare o confutare:

1) f continua $\Rightarrow A \subset \mathbb{R}^2$ aperto

2) $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto $\Rightarrow f$ continua

3) f continua $\Rightarrow C \subset \mathbb{R}^2$ chiuso

4) $C \subset \mathbb{R}^2$ chiuso $\Rightarrow f$ continua

1) Voglio provare che A è aperto:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - f(x) > 0\}$$

- $y \mapsto y$ è continua da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$
- $(x, y) \mapsto y$ è continua da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$
- $x \mapsto f(x)$ è continua
- $(x, y) \mapsto f(x)$ è continua da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$

segue che

$$(x, y) \mapsto y - f(x) = F(x, y) \text{ è cont. da } \mathbb{R}^2 \text{ a } \mathbb{R}$$

Ho finito perché:

$$A = F^{-1}(\underbrace{]0, \infty)}_{\mathbb{R} \text{ aperto}}) \subset \mathbb{R} \text{ aperto.}$$

2) Falso, ad esempio considero $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.

Non è continua in $x = 0$.

Provo che $A = \{y > f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$ è aperto.

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = \{x < 0\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ aperto} \\ A_2 = \{y > 0\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ aperto} \end{array}\right\} A_1 \cap A_2 \text{ aperto}$$

$A_3 = \{y > 1\} \subset \mathbb{R}^2$ aperto

$\Rightarrow (A_1 \cap A_2) \cup A_3 = A$ aperto

Trasformazioni lineari e continue

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due SN. Consideriamo $T: X \to Y$ lineare.

Definiamo $\|T\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y \in [0, \infty]$.

Se $\|T\| < \infty$ diremo che $T : X \xrightarrow{\text{lin}} Y$ è limitata.

def Sia $\mathcal{L}(X,Y) = \{T : X \to Y \mid T \text{ lineare e limitata}\}$.

oss Se T è limitata: $\overset{0}{\underset{\not=}{}} x \in X$.

$$\frac{1}{\|x\|_X} \|Tx\|_Y = \left\| \frac{1}{\|x\|_X} Tx \right\|_Y \overset{T \text{ lineare}}{=} \left\| T \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_Y \overset{\text{def di } T}{\leq} \|T\|$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in X \quad \|Tx\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X$$

TEOREMA Nelle notazioni precedenti, sono equivalenti:

A) T è limitata

B) T è continua da X in Y nel punto $x = 0$

C) T è continua da X in Y in tutti i punti

dim A) $\Rightarrow$ C). $x_0 \in X$.

$$\|Tx - Tx_0\|_Y = \|T(x - x_0)\|_Y \leq \underset{\wedge \atop \infty}{\|T\|} \cdot \|x - x_0\|_X \quad \forall x \in X$$

In effetti, la funzione T è Lipschitz.

B) $\Rightarrow$ A). T continua in $x_0 = 0$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tc $\|Tx - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{T0}}\|_Y \leq \varepsilon$ per $\|x - 0\| \leq \delta$

ovvero

$$\|x\| \leq \delta \Rightarrow \|Tx\|_Y \leq \varepsilon.$$

Sia ora $x \in X$ con $\|x\|_X \leq 1$. Ma allora

$$\|\delta x\|_X \leq \delta \Rightarrow \|T(\delta x)\|_Y \leq \varepsilon$$

concludo

$$\|Tx\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{\delta} < \infty \qquad \forall \, x \in X, \ \|x\|_X \leq 1$$

Deduco che $\|T\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$. $\square$

SPAZI METRICI COMPLETI E COMPATTI

Compattezza in SM

(X, d) SM

def Un insieme $K \subset X$ si dice SEQUENZIALMENTE COMPATTO se $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K esiste una sottosuccessione che converge ad un elemento di K.

prop Se $K \subset X$ è seq. compatto allora K è chiuso e limitato.

dim Provo che $K = \overline{K}$. Sia $x \in \overline{K}$.

caratterizzazione sequenziale della chiusura

Esiste succ. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in K\ \forall n$ tale che

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} x$$

$\exists$ sottosucc di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che converge ad un elemento di K. Ma ogni sottosucc di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad x!

ma allora se K seq. compatto $\Rightarrow x \in K$.

Provo che $K \subset X$ è limitato.

Fisso $x_0 \in X$. voglio provare che $\exists\ R>0$ tc $K \subset B(x_0, R)$.

PA $\nexists\ R>0$ tc $K \subset B(x_0,R)$. ovvero

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad K \cap (X \setminus B_X(x_0, n)) \neq \emptyset$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists\ x_n \in K \text{ tc } d(x_n, x_0) \geq n$$

$\Rightarrow$ per compattezza seq. $\exists$ sottosucc $x_{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{X} x \in K$

stima:

$$d(x_0, x) \geq \underbrace{d(x_0, x_{n_j})}_{\downarrow\ \infty} - \underbrace{d(x, x_{n_j})}_{\downarrow\ 0} \quad \text{(disug. triang)}$$

$\Rightarrow d(x_0, x) = \infty$, ma nello spazio metrico due punti fissati hanno distanza finita $\lightning$

Ora su $\mathbb{R}^n$ fissiamo la distanza standard.

TEOREMA (HEINE-BOREL)

Sia $K \subset \mathbb{R}^n$. Sono eq:

A) K è chiuso e limitato

B) K è seq. compatto

dim A) $\Rightarrow$ B) . Sia $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una succ in $K \subset \mathbb{R}^n$:

$$x_m = (x_m^1, \dots, x_m^n) \in K \quad \forall m$$

K è limitato $\Rightarrow (x_m^1)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ è limitata

$\overset{(BW)}{\Rightarrow} \exists$ s.s. $x^1_{m_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x^1_\infty \in \mathbb{R}$

Guardo: $(x^2_{m_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ è limitata

$\overset{BW}{\Rightarrow} \exists$ s.s $x^2_{m_{j_k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} x^2_\infty \in \mathbb{R}$

Dopo n iterazioni del ragionamento deduco che esiste una s.s.

$$\begin{array}{ccc} x_{m_j} & \xrightarrow[j\to\infty]{\mathbb{R}^n} & (x^1_\infty, \dots, x^n_\infty) = x_\infty \in \mathbb{R}^n \\ \cap & & \\ K & \xRightarrow[K \text{ chiuso}]{} & x_\infty \in K \end{array}$$

$\square$

$\exists$ succ di punti $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ in K tale che $x_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x \xRightarrow[\text{della chiusura}]{\text{caratt. seq.}} x \in \bar{K} \xRightarrow{K \text{ chiuso}} x \in K$

<u>esercizio</u> [2.12 - quaderno degli esercizi]

$X = \ell^\infty(\mathbb{R}) = \{\text{succ. in } \mathbb{R} \text{ limitate}\}$

$$\|\underset{x}{\underset{\shortparallel}{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

Provare che

$$K = \{x \in \ell^\infty(\mathbb{R}) : \|x\|_\infty \le 1\}$$

blocca il ragionamento di prima perché ho infinite coordinate

è chiuso, limitato, ma non seq. compatto.

1) verifico $\underset{\underset{x}{\Psi}}{K = \bar{K}} \Rightarrow \exists \underset{\underset{K}{\cap}}{x^m} \xrightarrow[m\to\infty]{X} x$

considero $x \in \bar{K}$

$$\Updownarrow$$

$$= \|x^m - x\|_\infty \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} |a^m_n - a_n| \ge |a^m_n - a_n| \quad \forall n$$

$\downarrow m\to\infty \Rightarrow \downarrow m\to\infty$

$0 \qquad\qquad 0$

mostro che $x \in K$
(è succ. limitata tc $\|x\|_\infty \le 1$)

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N} \lim_{m\to\infty} a^m_n = a_n \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N} \lim_{m\to\infty} |a^m_n| = |a_n|$

$|a^m_n| \le 1 \quad \forall m, n$

$\Rightarrow |a_n| \le 1 \;\; \forall n \overset{\text{passo al sup}}{\Rightarrow} \|x\|_\infty \le 1 \Rightarrow x \in K \Rightarrow K$ chiuso.

2) Considero $x^m = (0, \underline{\quad\quad}, 0, \underset{m}{1}, 0, \dots)$

$x^m \in K \quad \forall m$

Tutte le coordinate conv. a $0 \in \mathbb{R}$. Se ci fosse una $x^{m_j} \xrightarrow[j\to\infty]{\|\cdot\|_\infty} x \in X$

allora $x = 0 \in X$

ma $\|x^{m_j} - 0\|_\infty = 1 \quad \forall j$.

La succ. converge puntualmente, ma non uniformemente.

(Non conv. nella norma!)

$\Rightarrow$ K non è compatto seq.

def (X,d) SM, $K \subset X$. Diciamo che una famiglia di insiemi $A_\alpha \subset X$, $\alpha \in \mathcal{A}$ è un **RICOPRIMENTO** di K se

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$$

se poi $A_\alpha \in \tau(X)$ $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ diremo che il ricoprimento è **APERTO**

def Diremo che un insieme $K \subset X$ è **COMPATTO** se $\forall$ ricoprimento aperto di K $\exists$ un sottoricoprimento finito di K. Ovvero

$$\forall A_\alpha \in \tau(X) \text{ con } \alpha \in \mathcal{A} \text{ e } K \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$$
$$\exists \mathcal{B} \in \mathcal{A} \text{ tc } \operatorname{card}(\mathcal{B}) < \infty \text{ e } K \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}} A_\alpha$$

esempio
- $K = (0,1) \subset \mathbb{R}$ non è compatto, infatti: $(0,1) \overset{=}{\subset} \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n}, 1\right)}_{\text{aperti}}$

  non è seq. comp., infatti posso prendere una succ $\to 0 \notin (0,1)$
- $K = [0,\infty) \subset \mathbb{R}$ non è compatto, infatti: $K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{(-1,n)}_{\text{aperti}}$

TEOREMA Siano (X,d) uno SM e $K \subset X$. Sono equivalenti:

A) K è seq. compatto

B) K è compatto

def Uno SM (X,d) si dice **SEPARABILE** se $\exists$ $X_0 \subset X$ tc

$$\# X_0 = \operatorname{card}(X_0) = \operatorname{card}(\mathbb{N}) \quad \text{e} \quad \overline{X_0} = X.$$

esempi
- $\mathbb{R}$ è separabile : $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^n$ è separabile : $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$

esercizio $C^\infty(\mathbb{R})$ con $\|\cdot\|_\infty$ non è separabile

prop Se (X,d) è compatto, allora è separabile.

dim Fissato $r>0$, la famiglia di palle (aperte) $\{B_r(x) : x \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X che dunque ha un sottoricoprimento finito. Dunque, $\forall k \in \mathbb{N}$ esiste un insieme finito di punti $x_1^k, \dots, x_{n_k}^k \in X$, $n_k \in \mathbb{N}$, tale che

$$X = \bigcup_{i=1}^{n_k} B\left(x_i^k, \frac{1}{k}\right)$$

L'insieme di tutti i centri

$$X_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n_k} \{x_i^k\}$$

è al più numerabile ed è denso in X $(\overline{X_0} = X)$.

esercizio 2.10 Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Prova che sono equivalenti:

A) f è continua

B) $gr(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^2$ è chiuso

A) $\Rightarrow$ B). Chiamo $grf(f) = K$ e sia $(x,y) \in \overline{K}$. Esistono

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1)$ t.c. $(x_n, f(x_n)) \xrightarrow[\mathbb{R}^2]{n\to\infty} (x,y)$.

f è continua dunque $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \underset{\text{continuità}}{=} f(x) = y \Rightarrow (x,y) \in K$.

B) $\Rightarrow$ A). Fisso $x_0 \in [0,1]$ e prendo $\underset{\in[0,1]}{x_n} \xrightarrow{n\to\infty} x_0$. Voglio mostrare che

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Abbiamo $(x_n, f(x_n)) \in K$. Per hp $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ è limitata e per BW $\exists$ una sottosuccessione che converge:

$$f(x_{n_j}) \xrightarrow[j\to\infty]{} y_0 \in \mathbb{R}^2 \quad \text{dunque}$$

$$\underset{K=\overline{K}}{(x_{n_j}, f(x_{n_j}))} \xrightarrow[j\to\infty]{\mathbb{R}^2} (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow (x_0, y_0) \in \overline{K} = K$

$\Rightarrow y_0 = f(x_0)$

SM completi

def Sia (X, d) uno SM. Una succ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X si dice di Cauchy se:

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}\in\mathbb{N} : \forall n,m>\bar{n}$ si ha $d(x_n, x_m)<\varepsilon$

Diremo che X è uno SM **COMPLETO** se tutte le succ. di Cauchy convergono ad un elemento di X.

esempi
- $(\mathbb{R}, d)$ con distanza standard è completo
- $\mathbb{R}^n$ è completo
- $\ell^\infty(\mathbb{R})$ è completo

def Uno spazio normato si chiama **SPAZIO DI BANACH** se è completo come spazio metrico

Sia K SM compatto. compatto $\Rightarrow$ seq. compatto $\Rightarrow$ chiuso e limitato $\Rightarrow$ posso usare Weierstrass

$X = C(K) = \{ f : K \to \mathbb{R} \text{ continue} \}$

$\|f\|_\infty = \sup_{x\in K} |f(x)| \overset{(W)}{=} \max_{x\in K} |f(x)|$

$(X, \|\cdot\|_\infty)$ SN induce una distanza d_∞ su X

TEOREMA $X = C(K)$ con $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in K} |f(x)-g(x)|$ è SM completo.

In altri termini, $C(K)$ è uno SB.

dim Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C(K)$ di Cauchy:

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n} : \forall n,m\geq\bar{n} \quad \|f_n-f_m\|_\infty<\varepsilon$

$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{x\in K} |f_n(x)-f_m(x)|$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x\in K} |f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon$ per $n,m\geq\bar{n}$

Ma allora per $x\in K$ la successione $n\mapsto f_n(x)$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ dunque esiste $\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$. Ho trovato $f: K\to\mathbb{R}$ ↳ dimostro convergenza puntuale

e ora provo che $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Facendo tendere $m\to\infty$ in $(*)$ si ottiene $\forall x\in K$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n>\bar{n}$$

Con il sup su x trovo: $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \ \forall n\geq\bar{n}$, ovvero

$$\underset{C(K)}{f_n} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \underset{C(K)}{f}$$

↳ dimostro convergenza uniforme $\Rightarrow$ continuità della funzione f

def Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due SM. Diremo che $f: X \to Y$ è una ISOMETRIA se

$$d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x') \qquad \forall x, x' \in X$$

Diremo che X e Y sono isometrici se esiste

$$f: X \leftrightarrow Y \text{ isometria (biettiva)}$$

def Sia (X, d) uno SM. Diremo che (Y, d_Y) è un (il) COMPLETAMENTO METRICO di X se $\exists\, f: X \to Y$ isometria tc

$$\overline{f(X)} = Y \quad \text{con } Y \text{ completo}$$

<u>esempio</u> $\mathbb{R}$ è completamento metrico di $\mathbb{Q}$.

<u>esercizio</u> $X = \mathbb{R}$ e $d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)| \quad x, y \in \mathbb{R}$

Studio $(\mathbb{R}, d)$:

i) $d(x,y) \geq 0$ ✓

$d(x,y) = 0 \iff x = y$ ✓ (iniettività $\arctan(x)$)

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ ✓

iii)
$$\begin{aligned} d(x,y) &= |\arctan(x) - \arctan(y)| \\ &= |\arctan(x) - \arctan(z) + \arctan(z) - \arctan(y)| \\ &\leq \underbrace{|\arctan(x) - \arctan(z)|}_{= d(x,z)} + \underbrace{|\arctan(z) - \arctan(y)|}_{= d(z,y)} \end{aligned}$$

Non è completo. Considero $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n = n$: è di Cauchy

$$\begin{aligned} d(a_n, a_m) &= |\arctan(n) - \arctan(m)| \\ &\leq \underbrace{\left|\arctan(n) - \tfrac{\pi}{2}\right|}_{\to 0} + \underbrace{\left|\tfrac{\pi}{2} - \arctan(m)\right|}_{\to 0} \end{aligned}$$

Dunque sicuramente $\exists\, \bar{n} : \forall n, m > \bar{n} \quad d(a_n, a_m) < \varepsilon$. Voglio mostrare che non converge per d in $\mathbb{R}$: PA $\quad a_n \xrightarrow[n \to \infty]{d} a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to \infty} \underbrace{|\arctan(n) - \arctan(a)|}_{\downarrow n \to \infty \;\; 0} = \left|\tfrac{\pi}{2} - \arctan(a)\right| = 0 \text{ , ma } a \text{ è un numero } ↯$$

Calcoliamo ora il completamento di $(\mathbb{R}, d)$:

$$Y = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

$$d_Y(x, x') = |\arctan(x) - \arctan(x')| \quad \forall\, x, x' \in Y$$

dove $\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$ e $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

(Y, d_Y) e' SM. L'isometria tra X e Y e' $f : \mathbb{R} \to Y$ con $f(x) = x$

Voglio vedere che (Y, d_Y) è anche completo

Sia $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una succ di Cauchy in Y:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \bar{n} : \forall\, n, m \geq \bar{n} \qquad d_Y(b_n, b_m) < \varepsilon$$

$$|\underbrace{\arctan(b_n)}_{a_n} - \arctan(b_m)| < \varepsilon$$

La succ $a_n := \arctan(b_n) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ per distanza standard.

$\mathbb{R}$ completo $\Rightarrow \exists\; a_\infty = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \arctan(b_n)$

sfrutto la completezza di $\mathbb{R}$!

$$a_\infty \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

Ma $\arctan : Y \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è iniettiva e suriettiva

$\Rightarrow \exists\; b_\infty \in Y$ tc $a_\infty = \arctan(b_\infty)$

concludo che

bn converge => è di cauchy

$$d_Y(b_n, b_\infty) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

distanza euclidea

Osservo che (Y, d_Y) e $([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], d_E)$ sono isometrici

tramite $\arctan : Y \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ isometria

TEOREMA Sia (X, d_X) uno SM. Allora esiste uno SM (Y, d_Y) tale che

↳ il completamento metrico esiste ed è unico a meno di isometrie

1) (Y, d_Y) è completo

2) Esiste $f: X \to Y$ isometria tale che $\overline{f(X)} = Y$

Inoltre ogni altro completamento di X è isometrico con Y.

dim (abbozzo). 1) Costruire Y

2) Definire d_Y e provare che (Y, d_Y) è SM.

3) (Y, d_Y) è completo

4) Costruire $f: X \to Y$ isometria e verificare che $\overline{f(X)} = Y$

5) verificare l'unicità.

1) Sia $\mathcal{A} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di Cauchy in $X\}$ ($=x$)

Su $\mathcal{A}$ introduco la relazione di equivalenza:

$$x \sim x' \iff d(x_n, x_n') \xrightarrow[n\to\infty]{\exists} 0$$

Indico $\bar{x} = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$ classe di equivalenza.

Pongo $Y := \mathcal{A}/_\sim = \{\bar{x} : x \in \mathcal{A}\}$

2) Definiamo $d_Y: Y \times Y \longrightarrow [0, \infty)$

$$d_Y(\bar{x}, \bar{x}') = \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, x_n')$$

con scelta di rappresentanti. Bisogna mostrare:

- limite esiste
- non dipende dai rappresentanti
- d_Y è una distanza

Mostriamo che il limite esiste.

Sia $a_n = d_X(x_n, x_n')$. Affermo che $(a_n)_{n\in\mathbb{R}}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$.

$$|a_n - a_m| = |d_X(x_n, x_n') - d_X(x_m, x_m')|$$

$$= |d_X(x_n, x_n') - d_X(x_m, x_n') + d_X(x_m, x_n') - d_X(x_m, x_m')|$$

$$\le |d_X(x_n, x_n') - d_X(x_m, x_n')| + |d_X(x_m, x_n') - d_X(x_m, x_m')|$$

$$\overset{(DT)}{\le} \underbrace{d(x_m, x_n)}_{<\,\varepsilon/2 \ \forall n,m \ge \bar{n}}{}^{\to\text{ è di Cauchy}} + \underbrace{d(x_m', x_n')}_{<\,\varepsilon/2 \ \forall n,m \ge \bar{n}'}{}^{\to\text{ è di Cauchy}}$$

$< \varepsilon \quad \forall n,m \ge \max\{\bar{n}, \bar{n}'\}$. È di Cauchy.

4) L'isometria $f: X \to Y$ è semplicemente

$$\underset{\in X}{f(x)} = [\text{succ.} \equiv x]_\sim$$

↳ succ. costantemente uguale a x

Caratterizzazione degli SM compatti

def Uno SM (X, d_X) si dice TOTALMENTE LIMITATO se $\forall r>0$ $\exists\, x_1, \dots, x_n \in X$ tali che
$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$$

TEOREMA Sia (X, d_X) uno SM. Sono equivalenti

1) X è compatto
2) se $A \subset X$ con $\text{card}(A) = \infty$, allora A possiede un punto di accumulazione:
$$\exists\, x \in X \text{ tc } \forall r>0 : A \cap (B(x,r) \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$
3) X è seq. compatto
4) X è completo e totalmente limitato

esercizio Sia X completo. Sia poi $K_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, una succ di insiemi chiusi tc:

1) $\emptyset \neq K_{n+1} \subset K_n \quad \forall n$
2) $\text{diam}\, K_n = \sup_{x,y \in K_n} d(x,y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Allora $\exists\, x \in X$
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}.$$

sugg considero una successione di elementi dentro i K_n e utilizzo il fatto che sono succ. di Cauchy.

dim 1) ⇒ 2). PA sia falsa 2). Esiste $A \subset X$ con $\text{card}(A) = \infty$ che non ha punti di accumulazione. Ovvero,
$$\forall\, x \in X \quad \exists\, r_x > 0 \quad \text{tc} \quad A \cap (B(x, r_x) \setminus \{x\}) = \emptyset$$

Ora $X = \bigcup_{x \in X} B(x, r_x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{x compattezza} \\ \exists x_1, \dots, x_n}}{=} \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i})$

Ora $A = A \cap X$
$$= A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i})\right)$$
$$= \bigcup_{i=1}^{n} A \cap B(x_i, r_{x_i})$$
$$\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\} \quad \Rightarrow \quad \text{card}(A) \leq n \text{ finita} \quad \lightning$$

2) $\Rightarrow$ 3). Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ succ in X. Considero $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\subset X$.

<u>1° caso</u> $\quad$ card$(A)<\infty \Rightarrow$ posso estrarre una sottosucc costante

<u>2° caso</u> $\quad$ card$(A)=\infty \overset{2)}{\Rightarrow} \exists\, x\in X$ p.to di acc. di A

$\Rightarrow \forall r>0 \quad A\cap(B(x,r)\setminus\{x\})\neq\emptyset$

$\Rightarrow \forall k\in\mathbb{N} \ \exists\, n_k$ tc $d_X(x,x_{n_k})<\frac{1}{k}=r$

WLOG $k\longmapsto n_k$ crescente strettamente

Ovvero $x_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{(X,d)} x$.

3) $\Rightarrow$ 4). Provo che X è completo. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una succ di Cauchy in X. Per compattezza seq. $\exists\,(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sottosucc che converge ad $x\in X$.

Provo che $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{(X,d)} x$.

Fisso $\varepsilon>0$:

$$d(x_n,x)\le \underset{\substack{\wedge\\ \varepsilon/2\\ \forall n,n_k>\bar{n}\ \exists\bar{n}}}{d(x_n,x_{n_k})}+\underset{\substack{\wedge\\ \varepsilon/2\\ \forall k>\bar{k}}}{d(x_{n_k},x)}\qquad<\varepsilon$$

$\Rightarrow$ X è completo.

Provo che X è tot. limitato. PA X non è tot. limitato.

$\exists\, r>0$ tc X non si ricopre con finite palle di raggio r.

Scelgo $x_1\in X$ a piacere

$\exists\, x_2\in X\setminus B(x_1,r)\neq 0$

$\exists\, x_3\in X\setminus(B(x_1,r)\cup B(x_2,r))\neq 0$

Per induzione $\exists\, x_{n+1}\in X\setminus\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i,r)$

Ora $d(x_n,x_m)\ge r>0$ se $n\neq m$, ma allora non c'è sottosuccessione che converge. $\lightning$

4) $\Rightarrow$ 1). PA X non è compatto.

$\exists\, A_\alpha\in\mathcal{T}(X)$ con $\alpha\in\mathcal{A}$ tc $X=\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}A_\alpha$

ma $X\supsetneq\bigcup_{\alpha\in B}A_\alpha$ se card$(B)<\infty$.

Per $r=1$ trovo palle $B_1^1,B_2^1,\dots,B_{n_1}^1$ palle di raggio 1 tali che
$$\bigcup_{i=1}^{n_1}B_i^1=X$$

Esiste $i_1\in\{1,\dots,n_1\}$ tale che $B_{i_1}^1$ non si ricopre con finiti aperti A_α.

WLOG le palle sopra elencate sono chiuse.

$B^1_{i_1}$ è tot. limitata. Per $r = 1/2$ esistono

$$B^{1/2}_1 \quad \dots \quad B^{1/2}_{n_2}$$

che ricoprono $B^1_{i_1}$. Ripeto il ragionamento precedente.

Esiste $i_2 \in \{1, \dots, n_2\}$ tale che $B^{1/2}_{i_2}$ non si ricopre con finiti aperti A_α.

Si ha $B^{1/2}_{i_2} \subset B^1_{i_1}$.

Per induzione trovo una successione di insiemi chiusi tale che

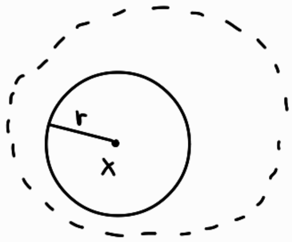
- $B^{1/n+1}_{i_{n+1}} \subset B^{1/n}_{i_n}$
- $\operatorname{diam} B^{1/n}_{i_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$
- ognuna $B^{1/n}_{i_n}$ non si ricopre con finiti aperti A_α.

X completo $\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B^{1/n}_{i_n} = \{x\}$ $\quad \exists x \in X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$

Ma $\exists \alpha \in \mathcal{A}$ t.c. $x \in A_\alpha$ aperto

$\Rightarrow \exists r > 0$ t.c. $B(x, r) \subset A_\alpha$

Per $\frac{2}{n} < r$ avremo $B^{1/n}_{i_n} \subset B(x, r) \subset A_\alpha$



$x \in B^{1/n}_{i_n} \quad \forall n$

$\lightning$

Compattezza e continuità

TEOREMA: $(X, d_X), (Y, d_Y)$ SM. Sia $f: X \to Y$ continua. Allora

$$X \text{ compatto} \Rightarrow f(X) \subset Y \text{ compatto}$$

dim (dimostrazione topologica).

Sia $f(X) \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ con $A_\alpha \in \mathcal{T}(Y)$. (aperto in Y)

$$\Rightarrow X = f^{-1}(f(X)) \subset f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \underbrace{f^{-1}(A_\alpha)}_{\text{aperto di } X}$$

$$\overset{X \text{ compatto}}{=} \bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}} f^{-1}(A_\alpha)$$

$\exists \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ finito

$$\Rightarrow f(X) = f\Big(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}} f^{-1}(A_\alpha)\Big) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}} A_\alpha \qquad \square$$

esercizio: dimostrarlo con la compattezza sequenziale.

TEOREMA Sia X uno SM compatto e sia $f: X \to \mathbb{R}$ continua.

Allora f ammette max e min su X.

<u>dim</u> $\underbrace{\overbrace{f(X)}^{\text{compatto}} \subset \mathbb{R}}_{\text{teorema precedente}}$ (continua $\swarrow$, $\searrow$ compatto) $\overset{HB}{\Longleftrightarrow}$ $f(X)$ chiuso e limitato

$\Rightarrow$ $\exists$ finiti $\sup f(x) \in \mathbb{R}$

$\inf f(x) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\exists$ finiti $\sup f(x) \in f(X)$

$\inf f(x) \in f(X)$ $\square$

TEOREMA X compatto. $f: X \to Y$ continua. Allora f è unif. continua su X.

<u>def</u> f unif. cont. se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : d_X(x,y) < \delta \implies d_Y(x,y) < \varepsilon$$

<u>esercizio</u> [3.7] Sia $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tc $\varphi(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$, $x \in \mathbb{R}$

e sia $(\mathbb{R}, d)$ con

$$d(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$$

i) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è SM

ii) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ non è completo

iii) Calcolare il suo completamento

i) d è distanza:

- DT è facile:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |\varphi(x) - \varphi(y)| \\ &= |\varphi(x) - \varphi(z) + \varphi(z) - \varphi(y)| \\ &\le |\varphi(x) - \varphi(z)| + |\varphi(z) - \varphi(y)| = d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

- simmetria: $d(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi(y) - \varphi(x)| = d(y,x)$

- $d(x,y) \geq 0$ ✓

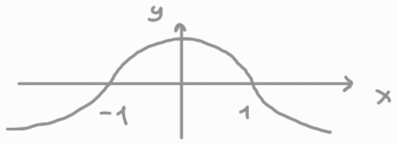
$d(x,y) = 0 \iff x = y$ ($\Leftarrow$ ✓)

$(\Rightarrow)$ $d(x,y) = 0 \iff \varphi(x) = \varphi(y)$

$$\iff \begin{cases} \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2y}{1+y^2} \\ \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1-y^2}{1+y^2} \end{cases}$$

$$x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$$

$$x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$$



$$\Rightarrow \quad x = y$$

ii) non è completo

$$\lim_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = (0, -1)$$

Considero $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. È di Cauchy per d perché $\varphi(n) \in \mathbb{R}^2$ e converge. Ma $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non ha limite in $(\mathbb{R}, d)$.

iii) Provo a considerare

$$Y = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$d_Y(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$$

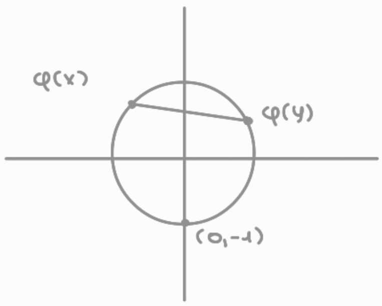
dove se $x = \infty$ oppure $y = \infty$ $d_Y(x,y) = 1$.

Dico che (Y, d_Y) è il completamento di $\mathbb{R}$.

<u>Sostituzioni trigonometriche</u>

$$\cos t = \cos\left(2\,\tfrac{t}{2}\right) = \frac{\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1 - \frac{\sin^2 t/2}{\cos^2 t/2}}{1 + \frac{\sin^2 t/2}{\cos^2 t/2}} \underset{x = \tan t/2}{=} \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\sin t = \sin\left(2\,\tfrac{t}{2}\right) = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}} = \frac{2\,\frac{\sin t/2}{\cos t/2}}{1 + \frac{\sin^2 t/2}{\cos^2 t/2}} = \frac{2x}{1+x^2}$$



Conclusione: il completamento di $(\mathbb{R}, d)$ è la circonferenza unitaria di $\mathbb{R}^2$ con la distanza $\mathbb{R}^2$.

Teoremi di punto fisso

def Sia (X,d) SM. Diciamo che una funzione $T: X \longrightarrow X$ è una **CONTRAZIONE** se $\exists\, \lambda \in [0,1)$ tale che

$$d(Tx,Ty) \leqslant \lambda\, d(x,y) \quad \forall x,y \in X \quad (*)$$

TEOREMA (Punto fisso di Banach). Sia X uno SM completo e sia $T: X \longrightarrow X$ una contrazione. Allora esiste unico $x \in X$ tc

$$Tx = x$$

dim Sia $x_0 \in X$ fissato a piacere. Per $n \in \mathbb{N}$ definisco

$$x_n = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n \text{ fattori}}(x_0) = T^n(x_0)$$

Per mostrare che conv. è sufficiente provare che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in (X,d).

Siano $n,p \in \mathbb{N}$ e stimo

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &= d(T^n(x_0), T^{n+p}(x_0)) \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{p-1} d(T^{n+i}(x_0), T^{n+i+1}(x_0)) \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{p-1} \lambda^{n+i}\, d(x_0, Tx_0) \\ &\leqslant \underbrace{\lambda^n}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}} d(x_0,Tx_0) \underbrace{\sum_{i=0}^{p-1} \lambda^i}_{<\infty \ \forall p \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

hp di contrazione: uso $n+i$ volte $(*)$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ tc $\forall n \geqslant \bar{n}$ e $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\leqslant \varepsilon.$$

Ora siccome X completo $\exists\, x \in X$ tc $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} x$.

Dimostro che x è un punto fisso.

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} T^{n+1}(x_0) \\ &= \lim_{n\to\infty} T(T^n(x_0)) \overset{T \text{ è cont.}}{=} T\Big(\lim_{n\to\infty} \underbrace{T^n(x_0)}_{x_n}\Big) = T(x) \end{aligned}$$

Provo che il punto fisso è unico.

Sia $\bar{x} \in X$ un altro p.fisso.

$$d(x,\bar{x}) = d(Tx, T\bar{x}) \leqslant \lambda\, d(x,\bar{x}) \qquad \lambda \in [0,1)$$

$$\Rightarrow d(x,\bar{x}) = 0$$

$$\Rightarrow x = \bar{x}.$$

$\square$

corollario X SM completo, $T : X \to X$. Supponiamo che $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tc

$T^n : X \to X$ sia una contrazione. Allora T ha un unico punto fisso.

dim Per Banach: $\exists\, x \in X$ tc

$$T^n x = x$$

Ora:

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &= d(T^n x, T T^n x) \\ &= d(T^n x, T^n T x) \\ &\le \lambda\, d(x, Tx) \qquad \lambda \in [0,1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad d(x, Tx) = 0 \quad \Rightarrow Tx = x.$

Manca l'unicità (esercizio). □

esercizio 1 Sia $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 1\}$, $n \ge 1$ e $x_0 \in B$ con $|x_0| \le \frac{1}{12}$.

Provare che il sistema di equazioni

$$-\frac{3}{4}x + \frac{1}{9}|x|^2 x + x_0 = 0 \quad , \quad x \in B$$

ha un'unica soluzione $x \in B$.

Riscrivo e definisco $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$T(x) := \frac{1}{4}x + \frac{1}{9}|x|^2 x + x_0 = x \quad , \qquad x \in B$$

Osservo che $B \subset \mathbb{R}^n$ completo e B chiuso: se considero una succ di Cauchy, questa converge perché $\mathbb{R}^n$ completo e converge ad un elemento di B perché B chiuso. Dunque B è SM completo.

Vorrei che:

1) $T : B \longrightarrow B$

per $x \in B$: $$\begin{aligned} |T(x)| &= \left| \frac{1}{4}x + \frac{1}{9}|x|^2 x + x_0 \right| \\ &\le \frac{1}{4}|x| + \frac{1}{9}|x|^3 + |x_0| \\ &\le \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} < 1 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

2) T è una contrazione

caso facile $n = 1$.

$$Tx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{9}x^3 + x_0$$

Vorrei $|Tx - Ty| \le \lambda |x - y| \quad \exists\, \lambda \in [0,1) \quad \forall\, x, y \in [-1, 1]$

Per Lagrange:

$$|T(x)-T(y)| = |T'(\xi)|\,|(x-y)|$$
$$\xi \in [x,y]$$

dove $T'(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}x^2$

e si ha

$$|T'(x)| = \left|\frac{1}{4}+\frac{1}{3}x^2\right| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{3}x^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12} < 1 \quad ✓$$

<u>caso n generale</u>

$$|Tx - Ty| = \left|\frac{1}{4}x + \frac{1}{9}|x|^2 x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{9}|y|^2 y\right|$$
$$\leq \frac{1}{4}|x-y| + \frac{1}{9}\underbrace{\left||x|^2 x - |y|^2 y\right|}_{\leq}$$
$$\left||x|^2 x - |x|^2 y\right| + \left||x|^2 y - |y|^2 y\right|$$
$$=$$
$$\underset{\leq 1}{|x|^2}\,|x-y| + \underbrace{\left||x|^2 - |y|^2\right|}_{\left||x|-|y|\right|\left(|x|+|y|\right)}\underset{\leq 1}{|y|}$$
$$\left||x|-|y|\right| \leq |x-y|, \quad |x|+|y| \leq 2$$
$$\leq \frac{1}{4}|x-y| + \frac{1}{9}\left(|x-y| + 2|x-y|\right)$$
$$\leq |x-y|\,\frac{7}{12}$$

$\Rightarrow T$ è contrazione

2 Sia $h \in C([0,1])$ fissata. Provare che esiste un'unica $f \in C([0,1])$ tale che $f(x) = h(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\int_0^x f(t)\,dt \quad \forall x \in [0,1]$.

$X = C([0,1])$ con $\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$ è uno spazio di Banach.

Sia $T : X \longrightarrow X$ t.c.

$$T(f)(x) = h(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\int_0^x f(t)\,dt \qquad x \in [0,1]$$

è ben definita e continua.

Devo controllare che $\exists\ \alpha \in (0,1)$ tale che

$$\|T(f) - T(g)\|_\infty \leq \alpha\,\|f-g\|_\infty \qquad \forall f,g \in X$$

Fisso $x \in [0,1]$.

$$|Tf(x) - Tg(x)| = \Big|\frac{1}{2}\underset{\leq 1}{\sin(x)}\Big|\left|\int_0^x (f(t)-g(t))\,dt\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^x \underset{\leq \|f-g\|_\infty}{|f(t)-g(t)|}\,dt$$
$$\leq \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty \qquad \forall x \in [0,1]$$

$\overset{\sup_{x\in[0,1]}}{\Longrightarrow} \|Tf - Tg\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty$

$\Rightarrow T : X \to X$ contrazione

3 [4.5] Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tc $\mathrm{Lip}(f) = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} < 1$.

i) Provare che $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = (x + f(y),\ y + f(x)) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

è suriettiva e iniettiva

ii) Provare che $F^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è lipschitziana.

i) Dato $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ voglio risolvere

$$\begin{cases} x + f(y) = \xi \\ y + f(x) = \eta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \xi - f(y) \\ y = \eta - f(x) \end{cases}$$

Considero $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tc $G(x,y) = (\xi - f(y) ; \eta - f(x))$

(continua perché f continua). Se è contrazione, allora

$$(x,y) = G(x,y)$$

ha soluzione unica e finisco.

Mostro che G è contrazione rispetto alla distanza standard.

Siano $(x,y), (\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^2$

$$|G(x,y) - G(\bar{x},\bar{y})| = \sqrt{\underbrace{(f(y)-f(\bar{y}))^2}_{\leq L^2|y-\bar{y}|^2} + \underbrace{(f(x)-f(\bar{x}))^2}_{\leq L^2|x-\bar{x}|^2}}$$

$$\leq L\sqrt{|x-\bar{x}|^2 + |y-\bar{y}|^2} = \underset{\underset{1}{\wedge}}{L}\, |(x,y) - (\bar{x},\bar{y})|$$

$\Rightarrow$ G è contrazione

$\Rightarrow$ il sistema ammette soluzione (suriettività) ed è unica (iniettività).

ii) <u>idea</u> $\exists\, m > 0$ tc $|F(x,y) - F(\bar{x},\bar{y})| \geq m\, |(x,y) - (\bar{x},\bar{y})|$

<u>prop</u> Sia X uno SM compatto e sia $T: X \to X$ tc

$$d(Tx, Ty) < d(x,y) \quad \forall\, x,y \in X$$

Provare che $\exists!\, x \in X$ tc $Tx = x$.

TEOREMA (Brouwer). Siano $B \subset \mathbb{R}^n, n \geq 1$, una palla chiusa e $T: B \longrightarrow B$ continua. Allora esiste $x \in B$ tc $Tx = x$.

TEOREMA (Schauder). Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach, $K \subset X$ un insieme convesso chiuso e $T: K \longrightarrow K$ tale che

i) T è continua

ii) $\overline{T(K)} \subset K$ compatto

Allora esiste $x \in K$ tc $Tx = x$.

Equivalenza fra norme in $\mathbb{R}^n$

prop Due norme $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ in $\mathbb{R}^n$ sono fra loro equivalenti. Ovvero $\exists$: $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ tali che

regola sp. di dim finita le norme sono fra loro sempre equivalenti

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

dim WLOG $\|x\|_1 = |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Considero $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ compatto.

Sia poi $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|_2$. Mostro che è continua.

$$|f(x+h) - f(x)| = \left| \underset{\|x\|_2 + \|h\|_2}{\overset{\wedge}{\|x+h\|_2}} - \|x\|_2 \right|$$

$$\leq \|h\|_2 \quad (*)$$

Fisso la b.o.n. standard in $\mathbb{R}^n$. Sia $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$

$$\overset{(*)}{\leq} \sum_{i=1}^n \|h_i e_i\|_2$$

$$\leq \sum_{i=1}^n |h_i| \, \|e_i\|_2 \xrightarrow{|h| \to 0} 0 .$$

Per Weierstrass esistono

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{è un punto sulla sfera}}}{0 <} C_1 = \min_K f \qquad \text{e} \qquad C_2 = \max_K f < \infty$$

ovvero

$$C_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \qquad \forall x \in K$$

Ma allora $\frac{x}{|x|} \in K$

$$C_1 \leq \left\| \frac{x}{|x|} \right\|_2 \leq C_2$$

$$\Rightarrow \qquad C_1 |x| \leq \|x\|_2 \leq C_2 |x| \qquad \square$$

Teorema di Ascoli-Arzelà

Sia (X,d) uno SM compatto. Sia poi $C(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$ completo rispetto a $\|f\| = \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Voglio capire come sono fatti i compatti di $C(X)$.

__def__ • Diciamo che $K \subset C(X)$ è **EQUILIMITATO** se

$$\sup_{f\in K} \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty$$

ovvero $\|f\|_\infty \leq C < \infty \quad \forall f \in K$

• Diciamo che $K \subset C(X)$ è **EQUICONTINUO** se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall f \in K.$$

↳ δ non dipende da f !

__esempio__ $X = [0,1]$. $K = \{\sin(nx) : n \in \mathbb{N}\}$. Non è equicontinuo

TEOREMA DI ASCOLI-ARZELÀ

X SM compatto e sia $K \subset C(X)$. Sono equivalenti:

A) K è compatto

B) K è chiuso, equilimitato e equicontinuo

__dim__ A) ⇒ B). Provo che K è equicontinuo.

K compatto ⇒ K è tot. limitato ovvero

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists f_1, \dots, f_N \in K$, tale che $K \subset \bigcup_{i=1}^N B(f_i, \varepsilon)$

$f_i : X \to \mathbb{R}$ è continua su un compatto $\forall i$ ⇒ f_i è unif. cont. su X ovvero

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_i > 0$ t.c. $d(x,y) < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$.

Sia $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_N\} > 0$.

Sia ora $f \in K \Rightarrow \exists i = 1, \dots, N$ t.c. $\|f - f_i\| < \varepsilon$.

Ora per $d(x,y) < \delta$ $\|f - f_i\| < \varepsilon$

$$|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f_i(x)|}_{\substack{\wedge \text{ tot. limitatezza} \\ \varepsilon}} + \underbrace{|f_i(x) - f_i(y)|}_{\substack{\wedge \text{ unif. continuità} \\ \varepsilon}} + \underbrace{|f_i(y) - f(y)|}_{\substack{\wedge \text{ tot. limitatezza} \\ \varepsilon}} < 3\varepsilon$$

B) ⇒ A). Provo che K è seq. compatto.

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in K.

X compatto ⇒ $\exists X_0 \subset X$ numerabile e denso : $\overline{X_0} = X$

Sia $X_0 = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Osservo che $f_n(x_1) \in \mathbb{R}$ è limitata

$\overset{BW}{\Longrightarrow} \exists$ ss. $(f_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ tc $f_n^1(x_1) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} \alpha_1 \in \mathbb{R}$

Osservo $f_n^1(x_2) \in \mathbb{R}$ è limitata

$\overset{BW}{\Longrightarrow} \exists$ ss. $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ tc $f_n^2(x_2) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Per induzione

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists \quad f_n^k \text{ ss di } f_n^{k-1} \text{ tale che}$$

$$f_n^k(x_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha_k \in \mathbb{R} \qquad \exists\, \alpha_k$$

e, di più:

$$f_n^k(x_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha_i \quad \forall i = 1, \dots, k \qquad \exists\, \alpha_i$$

$$\begin{array}{ccccc}
f_1^1 & f_1^2 & \cdots & f_1^k & \cdots \\
f_2^1 & f_2^2 & \cdots & f_2^k & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
f_n^1 & f_n^2 & \cdots & f_n^k & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Per selezione diagonale di Cantor definisco la sottosuccessione di $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\bar{f}_n = f_n^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Ora $\bar{f}_n(x_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Ricordo che $C(X)$ con $\|\cdot\|_\infty$ è uno SB.

Affermo che $(\bar{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\|\cdot\|_\infty$.

Fisso $\varepsilon > 0$ e provo che $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq \bar{n}$ si ha $\|\bar{f}_n - \bar{f}_m\|_\infty \leq \varepsilon$.

Per la equicontinuità

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 \ : \ d(x,y) < \delta \Rightarrow |\bar{f}_n(x) - \bar{f}_n(y)| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Per densità $\bar{X}_0 = X$ avremo che

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k, \delta)$$

$\overset{X \text{ compatto}}{\Longrightarrow} \exists\, N$ tc

$$X = \bigcup_{k=1}^{N} B(x_k, \delta).$$

Prendo $x \in X$ ed $\exists\, k \in \{1, \dots, N\}$ tc $x \in B(x_k, \delta)$ (ovvero $d(x, x_k) < \delta$).

Considero

$$|\bar f_n(x)-\bar f_m(x)| \le \underbrace{|\bar f_n(x)-\bar f_n(x_k)|}_{\varepsilon\ \forall n} + \underbrace{|\boxed{\bar f_n(x_k)} - \bar f_m(x_k)|}_{\varepsilon\ \forall n,m>\bar n} + \underbrace{|\bar f_m(x_k)-\bar f_m(x)|}_{\varepsilon\ \forall m}$$

è di Cauchy perché converge a α_k

$\exists \bar n$ indipendente da k (perché $k\in\{1,\dots,N\}$ insieme finito).

$$\le 3\varepsilon \quad \forall n,m \ge \bar n$$

$$\forall \varepsilon \quad \exists \bar n$$

Col sup su x trovo:

$$\|\bar f_n - \bar f_m\|_\infty \le 3\varepsilon \quad \forall n,m\ge \bar n.$$

<u>corollario</u> Ipotesi precedenti. Sia $f_n\in C(X)$, $n\in\mathbb{N}$, equilim. ed equicont. Allora $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una s.s. che conv. unif. ad una $f\in C(X)$.

<u>esercizio</u> 1 [5.4] Sia l'insieme di tutte le $f\in C([0,2\pi])$ della forma
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \quad \text{con} \quad |a_n|\le \frac{1}{n^3} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$
Provare che $V\subset C([0,2\pi])$ con $\|\cdot\|_\infty$ è compatto.

Per il criterio di Weierstrass:
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \sin nx| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} < \infty$$
dunque $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin(nx)$ conv. unif. su $[0,2\pi]$ e f continua.

Devo verificare che:

i) V chiuso (per casa)

ii) V equilimitato
$$|f(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} < \infty \quad \forall x \text{ e } \forall f\in V \quad ✓$$

iii) V equicontinuo

calcolo la derivata: se esiste, deve avere questa forma
$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\sum a_n \sin(nx) = \sum a_n\, n\cos(nx)$$

Nuovamente, per il C(W):
$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\, n\,|\cos(nx)| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$$
la serie conv. unif. dunque la derivata esiste ed è continua.

$$\Rightarrow \quad f \in C^1([0,2\pi]) \\ \Updownarrow$$

$$|f'(x)| \leq L := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \qquad \forall x \in [0,2\pi] \quad \forall f \in U$$

Per Lagrange

$$|f(x)-f(y)| = |f'(\underset{\Downarrow}{\overset{(x,y)}{\xi}})|\,|x-y| \leq L\,|x-y|$$

f è Lipschitziana di costante L $\Rightarrow$ V è equi-Lipschitziano

$\Rightarrow$ V è equicontinuo.

2 [5.6] $X = C([0,1])$

$K : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

Def. $T : X \longrightarrow X$ tc $(Tf)(\underset{[0,1]}{\underset{\Uparrow}{s}}) := \int_0^1 k(s,t) f(t)\, dt$

1) Provare che $s \mapsto (Tf)(s)$ è continua

2) Provare che $T \in \mathcal{L}(X,X)$ lineare e limitata

3) Dare condizioni su K affinché T sia una contrazione.

4) Sia $K \subset X$ limitato. Concludere

$$\overline{T(K)} \subset X$$

È vero che è compatto?

5) Studiare l'equazione

$$T(f) = f$$

1) $|(Tf)(s) - (Tf)(\sigma)| = \left| \int_0^1 (k(s,t) - k(\sigma,t)) f(t)\, dt \right|$

Fisso $\varepsilon > 0$. k è unif. cont. nel quadrato:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad$ tc $\quad |(s,t) - (\sigma,\tilde{t})| < \delta \Rightarrow |k(s,t) - k(\sigma,\tilde{t})| < \varepsilon$

$$\leq \int_0^1 \underbrace{|k(s,t) - k(\sigma,t)|}_{\leq\, \varepsilon}\, \underbrace{|f(t)|}_{\leq\, \|f\|_\infty}\, dt$$

$$\leq \varepsilon \|f\|_\infty$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tc per $|s - \sigma| < \delta \Rightarrow |(Tf)(s) - (Tf)(\sigma)| < \varepsilon \|f\|_\infty$

2) È lineare per linearità dell'integrale.

$$|(Tf)(s)| \leq \int_0^1 \underbrace{|k(s,t)|}_{\substack{\leq\, \|k\|_\infty \\ \text{il max nel quadrato}}}\, \underbrace{|f(t)|}_{\leq\, \|f\|_\infty}\, dt \leq \|k\|_\infty \|f\|_\infty$$

Facendo il sup su S: $\|Tf\|_\infty \leq \|k\|_\infty \|f\|_\infty \quad \forall f \quad (*)$

$$\|T\| := \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|Tf\|_\infty \leq \|k\|_\infty$$

3) se $\|k\|_\infty < 1 \Rightarrow T$ è contrazione

(dovrei fare tutti i conti con Tf e Tg, ma T è lineare, dunque mi basta la stima $(*)$).

4) $T(K) \subset X$. Voglio usare AA.

$$|(Tf)(s)| \leq \int_0^1 |k(s,t)||f(t)|dt \leq \|k\|_\infty \|f\|_\infty \overset{\substack{f\in K \text{ limitato}\\ \downarrow}}{\leq} C < \infty \quad \forall f \in K \quad \forall s.$$

$\Rightarrow T(K)$ è equilimitato.

Per l'equicontinuità vedere il punto 1):

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tc per $|s-\sigma| < \delta \Rightarrow |(Tf)(s) - (Tf)(\sigma)| < \varepsilon \|f\|_\infty \leq \varepsilon C < \infty$

5) Voglio risolvere $T(f) = f$.

X è completo

se $\|k\|_\infty < 1 \Rightarrow T$ contrazione $\overset{B}{\Longrightarrow} \exists! f \in X$ tc $Tf = f$

e si ha che tale $f = 0$ (T lineare).

se $\|k\|_\infty \leq 1 \overset{SCH}{\Longrightarrow} \exists$ p.to fisso, ma è sempre 0