SISTEMI MECCANICI

Nozioni ed ipotesi di base

<u>concetti chiave</u>

- **spazio-tempo ASSOLUTI** : $\underbrace{\mathbb{E}^3}_{\substack{\text{spazio affine 3-dim} \\ \text{con struttura euclidea}}} \times \mathbb{R} \ni (P, t)$

  $\mathbb{E}^3$ ha sp. vett. associato $\mathbb{V}^3$

- **punti materiali** dotati di massa >0 tali che

  $\forall t$ un punto materiale occupa esattamente un punto di $\mathbb{E}^3$

- **forze** che agiscono sui singoli punti materiali

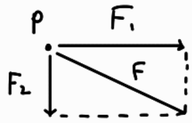
Il campo vett. associato a $\mathbb{E}^3$ è
$$\mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{V}^3$$
$$(P_1, P_2) \longmapsto P_1P_2 = P_1 - P_2$$

(si ha che $\forall P_1$ fissato $\begin{aligned} \mathbb{E}^3 &\longrightarrow \mathbb{V}^3 \\ P &\longmapsto P_1P_2 \end{aligned}$ è affine)

$\mathbb{V}^3$ ha prodotto scalare $\bullet$, che permette di definire :

- norma $\|\cdot\|_3$
- lunghezza, angoli, ...
- prodotto vettore $\times$

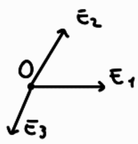
Le forze sono vettori di $\mathbb{V}^3$ e vale il principio di sovrapposizione delle forze



I "**moti**" sono curve
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$$
$$t \longmapsto P(t)$$
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto (P(t), t)$$

Sistemi di riferimento

"**sistema di riferimento**" di $\mathbb{E}^3$: $\{\overset{\mathbb{E}_3}{\overset{\Psi}{O}}; \overbrace{E_1, E_2, E_3}^{\mathbb{V}_3 \atop \Psi}\}$, $\overbrace{E_i \bullet E_j = \delta_{ij}}^{\text{ortonormali}}$, $\overbrace{E_1 \times E_2 = E_3}^{\text{equiorientata base canonica}}$



Propriamente, è la mappa differenziabile
$$\Sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3 \times \mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3$$
$$t \longmapsto \Sigma_t = \{O(t); E_1(t), E_2(t), E_3(t)\}$$

1. Scelto $\Sigma = \{O; E_1, E_2, E_3\}$, si possono fare le seguenti identificazioni:

$$\mathbb{V}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$U = \sum_{i=1}^{3} \underset{\in \mathbb{R}}{u_i} E_i \longmapsto (U_1, U_2, U_3) = u \quad \text{"rappresentazione di } U \text{ in } \Sigma\text{"}$$

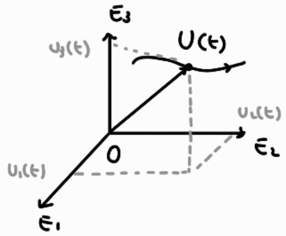
$$\mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$P \longmapsto \underset{\mathbb{V}^3}{\overset{\cap}{OP}} = \sum_{i=1}^{3} x_i E_i \longmapsto \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{\text{coordinate affini (o cartesiane) di } P \text{ relative a } \Sigma} = x$$

è la "rappresentazione di OP in Σ"

2. Derivate temporale di funzione vettoriale

$$U : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{V}^3$$
$$t \longmapsto U(t)$$



<u>def</u> La "derivata temporale relativa a Σ" di $U : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{V}^3$ è definita così:

- $\forall t,\ \Sigma_t = \{O(t);\ E_1(t), E_2(t), E_3(t)\}$
- $\forall t,\ U(t) = \sum_{i=1}^{3} u_i(t) E_i(t)$

$$\Rightarrow \left.\frac{dU}{dt}\right|_{\Sigma}(t) := \sum_{i=1}^{3} \dot{u}_i(t)\, E_i(t)$$

$$\dot{u}_i = \frac{du_i}{dt}, \quad u_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

<u>def</u> "velocità relativa a Σ" di moto $t \longmapsto P(t) \in \mathbb{E}^3$ è $V_P^{\Sigma}(t) := \left.\frac{d\,OP}{dt}\right|_{\Sigma}(t)$

"accelerazione relativa a Σ" è $A_P^{\Sigma} := \left.\frac{dV_P}{dt}\right|_{\Sigma}(t)$

<u>oss</u> Se $OP = \sum_i x_i E_i$, allora $V_P^{\Sigma} = \sum_i \dot{x}_i E_i$ e $A_P^{\Sigma} = \sum_i \ddot{x}_i E_i$

<u>esercizio</u> Definisco $\left.\frac{d}{dt}\right|_{\Sigma} : C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{V}^3) \longrightarrow C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{V}^3)$ con $\left.\frac{d}{dt}\right|_{\Sigma} U := \left.\frac{d}{dt}\right|_{\Sigma}$
ed estendo a $C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ con $\left.\frac{d}{dt}\right|_{\Sigma} f := f'$.

Allora vale Leibniz:

- $\left.\frac{d}{dt}\right|_{\Sigma} (U \cdot V) = \left.\frac{dU}{dt}\right|_{\Sigma} \cdot V + U \cdot \left.\frac{dV}{dt}\right|_{\Sigma} \qquad \forall\, U, V \in C^{\infty}(\mathbb{R}; \mathbb{V}^3)$

- $\left.\frac{d}{dt}\right|_{\Sigma} (fU) = f \left.\frac{dU}{dt}\right|_{\Sigma} + f'U \qquad \forall\, U \in C^{\infty}(\mathbb{R}; \mathbb{V}^3),\ \forall f \in C^{\infty}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$

- $\left.\frac{d}{dt}\right|_{\Sigma} U * V = \left.\frac{dU}{dt}\right|_{\Sigma} * V + U * \left.\frac{dV}{dt}\right|_{\Sigma} \qquad \forall\, U, V \in C^{\infty}(\mathbb{R}; \mathbb{V}^3)$

Forze e sistemi meccanici

def Un "sistema meccanico" è definito da

- $N \geq 1$ punti materiali $P_1, \dots, P_N$ (masse $m_1, \dots, m_N > 0$)
- un sistema di riferimento Σ
- $\forall \alpha = 1, \dots, N$, forze F_α^Σ che agiscono su P_α in Σ.

$$F_\alpha^\Sigma = F_\alpha^\Sigma (OP_1, \dots, OP_N, \; V_1^\Sigma, \dots, V_N^\Sigma, \; t)$$

$$F_\alpha^\Sigma : (V^3)^N \times (V^3)^N \times \mathbb{R} \longrightarrow V^3$$

Equazioni del moto

I "moti del sistema" $t \longmapsto (P_1(t), \dots, P_N(t))$ soddisfano le "equazioni di Newton"

$$m_\alpha A_\alpha^\Sigma (t) = F_\alpha^\Sigma (OP_1(t), \dots, OP_N(t), \; V_1^\Sigma(t), \dots, V_N^\Sigma(t), \; t) \qquad \alpha = 1, \dots, N$$

Per studiare queste eq. passiamo alle coord. affini di Σ:

$$OP_\alpha = \sum_i x_{\alpha i} E_i \qquad A_\alpha^\Sigma = \sum_i \ddot{x}_{\alpha i} E_i$$

$$V_\alpha^\Sigma = \sum_i \dot{x}_{\alpha i} E_i \qquad F_\alpha^\Sigma(\dots) = \sum_{i=1}^3 f_{\alpha i}^\Sigma (x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N, t)$$

$$\Rightarrow \quad m_\alpha \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_{\alpha i} E_i = \sum_{i=1}^3 f_{\alpha i}^\Sigma (x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N, t) \; E_i$$

$$\Rightarrow \quad \left(m_\alpha \underbrace{\ddot{x}_{\alpha i}}_{\text{numeri}} = f_{\alpha i}^\Sigma (x_1, \dots, \dot{x}_1 \dots, t) \right)_{\substack{\alpha = 1, \dots, N \\ i = 1,2,3}}$$

$$\boxed{m_\alpha \overset{\text{vettore}}{\ddot{x}_\alpha} = f_\alpha^\Sigma (x_1, \dots, \dot{x}_1, \dots, t) \qquad \alpha = 1, \dots, N}$$

eq. del II ordine in $(\mathbb{R}^3)^N = \mathbb{R}^{3N}$, con $(x_1, \dots, \overset{(x_{N1}, x_{N2}, x_{N3})}{x_N})$, $x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})$

spazio delle configurazioni $\mathbb{R}^{3N} \ni X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$

velocità del sistema $\dot{X} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N)$ $\quad V = (V_1, \dots, V_N)$

accelerazione del sistema $\ddot{X} = (\ddot{x}_1, \dots, \ddot{x}_N)$

matrice delle masse $M = \mathrm{diag}(m_1, m_1, m_1, \dots, m_N, m_N, m_N)$

forza $F^\Sigma = (f_1^\Sigma, \dots, f_N^\Sigma) \in \mathbb{R}^{3N}$

Le equazioni di Newton del sistema $\overset{\text{ipotesi}}{\equiv}$ eq. del moto, diventano

$$M\ddot{x} = F(x,\dot{x},t) \qquad x\in\mathbb{R}^{3N}$$

$$\begin{pmatrix} m_1 & & & & & & \\ & m_1 & & & & & \\ & & m_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & m_N & & \\ & & & & & m_N & \\ & & & & & & m_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_{11} \\ \ddot{x}_{12} \\ \ddot{x}_{13} \\ \vdots \\ \ddot{x}_{N1} \\ \ddot{x}_{N2} \\ \ddot{x}_{N3} \end{pmatrix}$$

Per ridurla in forma normale si inverte M ($\Leftarrow m_i > 0$), da cui

$$\ddot{x} = M^{-1} F(x,\dot{x},t), \quad x\in\mathbb{R}^{3N} \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = F(x,\dot{x},t) \end{cases}, \quad (x,v)\in\mathbb{R}^{3N}\times\mathbb{R}^{3N} = T\mathbb{R}^{3N}$$

spazio delle configurazioni

spazio degli atti di moto

Forze interne ed esterne

Le forze sono funzioni note delle posizioni e delle velocità di tutti i punti del sistema e spesso si può fare la decomposizione:

di solito non dipende da velocità e tempo

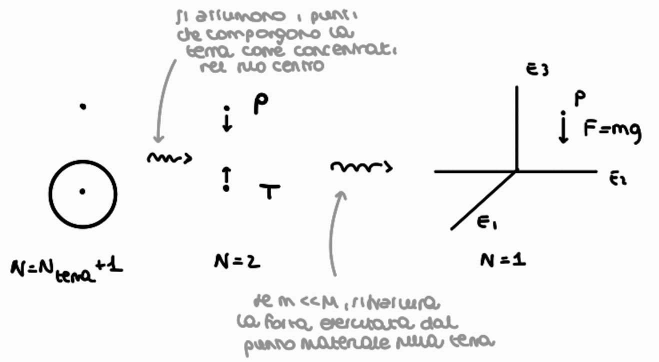
$$V^3 \ni F_\alpha^\Sigma = F_\alpha^{\Sigma,int}(OP_1,\dots,OP_N, \cancel{V_1^\Sigma,\dots,V_N^\Sigma,t}) + F_\alpha^{\Sigma,ext}(OP_\alpha, V_\alpha^\Sigma, t)$$

Spesso $F_\alpha^{\Sigma,int}(OP_1,\dots,OP_N) = \sum_{\beta=1}^{N} F^\Sigma_{\beta\alpha}(OP_\alpha, OP_\beta)$ (interazioni a coppie) con $F_{\alpha\alpha} = 0$.

Le forze esterne in genere sono dovute a

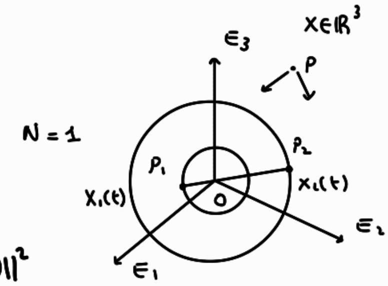
- interazione di $P_1,\dots,P_N$ con altro
- effetti non inerziali

esempio 1)



$m\ddot{x} = mg$, $g\in\mathbb{R}^3$

2) (problema ristretto dei 3 corpi)



eq. moto di P:

$$m\ddot{x} = -\frac{Gmm_1}{\|x-x_1(t)\|^2}\cdot\frac{x-x_1(t)}{\|x-x_1(t)\|^2} - \frac{Gmm_2}{\|x-x_2(t)\|^2}\cdot\frac{x-x_2(t)}{\|x-x_2(t)\|^2}$$

è forza esterna e dipende dal tempo (perché P_1 e P_2 si muovono)

LE EQUAZIONI DEL MOTO IN RIFERIMENTI DIVERSI

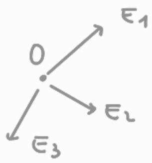
ripasso

SM:
- $P_1, \dots, P_N$ — punti materiali
- Σ — riferimento
- $F_{P_1}^{\Sigma}, \dots, F_{P_N}^{\Sigma}$ — forze

$$m_\alpha A_{P_\alpha}^{\Sigma} = F_{P_\alpha}^{\Sigma}(OP_1, \dots, v_1^{\Sigma}, \dots, t) \qquad \alpha = 1, \dots, N \qquad (S)$$

$$OP_\alpha = \sum_{i=1}^{3} x_\alpha E_\alpha$$

$$v_{P_\alpha}^{\Sigma} := \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_\alpha E_\alpha$$



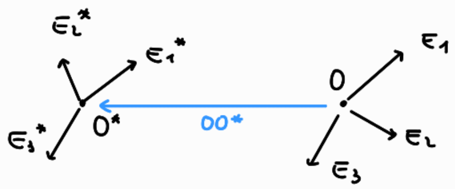
$$A_P^{\Sigma} := \left.\frac{dv^{\Sigma}_{P_\alpha}}{dt}\right|_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}_\alpha E_\alpha$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_\alpha = f_\alpha^{\Sigma}(x_1, \dots, \dot{x}_1, \dots, t) \qquad \alpha = 1, \dots, N \qquad \text{sistema di eq. del II ordine}$$

Vogliamo capire come variano le forze in base al sistema di riferimento.

(II) $\ddot{x}_\alpha = f_\alpha^{\Sigma}(x_1, \dots, \dot{x}_1, \dots, t)$ rispetto a Σ

Consideriamo i due sistemi di riferimento:



$\Sigma = \{O(t); E_1(t), E_2(t), E_3(t)\}$

$\Sigma^* = \{O^*(t); E_1^*(t), E_2^*(t), E_3^*(t)\}$

e supponiamo noti $t \longmapsto OO^*(t)$

$t \longmapsto E_i(t) \cdot E_j^*(t)$ ⇝ orientazione

SM*:
- $P_1, \dots, P_N$
- Σ^*
- $F_{P_1}^{\Sigma^*}, \dots, F_{P_N}^{\Sigma^*}$

Ci chiediamo quali debbano essere le forze $F_{P_1}^{\Sigma^*}, \dots, F_{P_N}^{\Sigma^*}$ affinché il sistema

$$(S^*) \qquad m_\alpha A_\alpha^{\Sigma^*} = F_{P_\alpha}^{\Sigma^*}(O^*P_1, \dots, v_1^{\Sigma^*}, \dots, t)$$

descriva gli stessi moti $t \longmapsto P_\alpha(t) \in \mathbb{E}^3$ di S.

Introduciamo le coord. affini di Σ^*:

$$O^*P_\alpha = \sum_{i=1}^{3} x_{\alpha i}^* E_i^*$$

$$(II^*) \qquad m_\alpha \ddot{x}_\alpha^* = f_{P_\alpha}^{\Sigma^*}(x_1^*, \dots, \dot{x}_1^*, \dots, t)$$

E' equivalente a chiedere se ∃ un diffeomorfismo dipendente dal tempo che coniuga (II) a (II*).

Sappiamo che dovrà essere un sollevamento tangente!

Vogliamo operare non sui riferimenti affini, ma con gli OP, perché quello che faremo non dipende dal riferimento.

velocità angolare di un riferimento rispetto a un altro riferimento

lettere maiuscole per vettori in $\mathbb{V}^3$ e minuscole per corrispettivi in $\mathbb{R}^3$

lemma 1 Dati $\Sigma = \{O; E_1, \dots\}$, $\Sigma^* = \{O^*; E^*_1, \dots\}$, $\forall t \ \exists! \ \Omega(t) \in \mathbb{V}^3$ (che dipende in modo diff. da t) tale che

$$\dot E^*_i =: \frac{dE^*_i}{dt}\Big|_\Sigma (t) = \Omega(t) \times E^*_i \qquad \forall i = 1,2,3$$

$\Omega(t)$ è detta "velocità angolare" del riferimento Σ^* rispetto al riferimento Σ

$$\mathbb{V}^3 \ni U(t) = \sum_{i=1}^3 u_i E_i = \sum_{i=1}^3 u_i^* E^*_i \qquad \frac{dU}{dt}\Big|_\Sigma = \sum_{i=1}^3 \dot u_i E_i \qquad \frac{dU}{dt}\Big|_{\Sigma^*} = \sum_{i=1}^3 \dot u_i^* E_i^*$$

oss La formula ci dice che $\dot E^*_i \perp E^*_i$

Questo è ovvio, perché la base è o.n., infatti: $E^*_i \cdot E^*_i = 1$ e

derivando $\left(\frac{d}{dt}\Big|_\Sigma\right)$ trovo $0 = 2E^*_i \cdot \dot E^*_i$

Non è ovvio che Ω sia unico.

dim $\Omega(t) := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^3 E_j^*(t) \times \underbrace{\frac{dE_j^*}{dt}\Big|_\Sigma (t)}_{= \dot E_j^*}$ e verifichiamo che rende vera l'uguaglianza

$$2\Omega \times E^*_i = \sum_{j=1}^3 (E_j^* \times \dot E_j^*) \times E^*_i$$

proprietà del prodotto vettore

$$= \sum_{j=1}^3 \underbrace{(E^*_j \cdot E^*_i)}_{\delta_{ij}} \dot E_j^* - \sum_{j=1}^3 \underbrace{(\dot E^*_j \cdot E^*_i)}_{-\dot E^*_i \cdot E^*_j} E_j^*$$

$$= \dot E^*_i + \dot E^*_i = 2\dot E^*_i \qquad \square$$

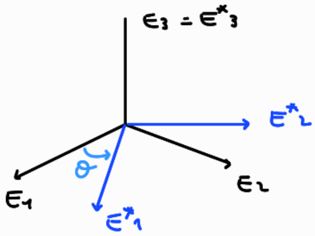
$(\dot E^*_i \cdot E^*_j) E^*_j$ è la rappresentazione di $\dot E^*_i$ nella base E^*_1, E^*_2, E^*_3.
Ad esempio, $v = \sum_i v_i E_i \Rightarrow v_i = v \cdot E_i \Rightarrow v = \sum_i (v\cdot E_i) E_i$

$\delta_{ij} = E^*_i \cdot E^*_j$ derivo rispetto a Σ: $0 = \dot E^*_i \cdot E^*_j + E^*_i \cdot \dot E^*_j$

esempio $t \longmapsto \theta(t)$ nota

Calcoliamo la velocità angolare di Σ^* rispetto a Σ.

$$\begin{cases} E^*_1 = \cos\theta \, E_1 + \sin\theta \, E_2 \\ E^*_2 = -\sin\theta \, E_1 + \cos\theta \, E_2 \\ E^*_3 = E_3 \end{cases}$$



Σ sistema di riferimento fermo
Σ^* sistema di riferimento che ruota attorno a $E_3 \equiv E_3^*$
($\Rightarrow$ dai corsi di fisica mi aspetto velocità angolare lungo E_3)

Deriviamo:

$$\frac{dE^*_1}{dt}\Big|_\Sigma = -\dot\theta \sin\theta \, E_1 + \dot\theta \cos\theta \, E_2 = \dot\theta E^*_2$$

$$\frac{dE^*_2}{dt}\Big|_\Sigma = -\dot\theta \cos\theta - \dot\theta \sin\theta \, E_2 = -\dot\theta E^*_1$$

$$\left.\frac{dE_3^*}{dt}\right|_\Sigma = 0$$

$$\Rightarrow \Omega = \frac{1}{2}(E_1^* \times \dot\theta E_2^* - E_2^* \times \dot\theta E_1^*) = \frac{\dot\theta}{2}(E_1^* \times E_2^* - E_2^* \times E_1^*)$$

$$= \dot\theta (E_1^* \times E_2^*) = \dot\theta E_3^* = \dot\theta E_3$$

<u>lemma 2</u> Dati Σ, Σ^*, $\forall\, t \longmapsto U(t) \in \mathbb{V}^3$ si ha

$$\left.\frac{dU}{dt}\right|_\Sigma (t) = \left.\frac{dU}{dt}\right|_{\Sigma^*} + \Omega \times U$$

con Ω la velocità angolare di Σ^* rispetto a Σ

<u>dim</u>

$$U = \sum_{i=1}^3 u_i^* E_i^*$$

$$\left.\frac{dU}{dt}\right|_\Sigma = \sum_{i=1}^3 \left.\frac{d}{dt}\right|_\Sigma (u_i^* E_i^*) = \underbrace{\sum_{i=1}^3 \dot u_i^* E_i^*}_{\left.\frac{dU}{dt}\right|_{\Sigma^*}} + \sum_{i=1}^3 u_i^* \underbrace{\left.\frac{d}{dt} E_i^*\right|_\Sigma}_{\Omega \times E_i^*}$$

$$= \left.\frac{dU}{dt}\right|_{\Sigma^*} + \Omega \times \underbrace{\sum_i u_i^* E_i^*}_{U} \qquad \square$$

<u>oss</u> $$\left.\frac{dU}{dt}\right|_\Sigma = \left.\frac{dU}{dt}\right|_{\Sigma^*} + \Omega \times U$$

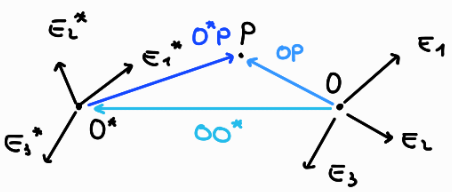
se $U = \Omega$, allora $\Omega \times \Omega = 0$ e $\left.\frac{d\Omega}{dt}\right|_\Sigma = \left.\frac{d\Omega}{dt}\right|_{\Sigma^*} =: \dot\Omega$

ovvero la derivata temporale del vettore velocità angolare è la stessa nei due sistemi di riferimento

Dipendenza delle forze dal sistema di riferimento

$N = 1$

$O^*P \longmapsto OO^*(t) + O^*P = OP$



Dobbiamo fare il sollevamento tangente:

$$\left.\frac{dOP}{dt}\right|_\Sigma = \underbrace{\left.\frac{dO^*P}{dt}\right|_\Sigma} + \left.\frac{dOO^*}{dt}\right|_\Sigma$$

$$V_P^\Sigma = \left.\frac{dO^*P}{dt}\right|_{\Sigma^*} + \Omega \times O^*P + V_{O^*}^\Sigma$$

$$\boxed{V_P^\Sigma = V_P^{\Sigma^*} + V_{O^*}^\Sigma + \Omega \times O^*P}$$

Otteniamo così il sollevamento tangente, detto "mappa di Galilei" (dipendente dal tempo)

$$\mathcal{G}_t : \mathbb{V}^3\times\mathbb{V}^3 \longrightarrow \mathbb{V}^3\times\mathbb{V}^3$$

$$(O^*P,\ v_P^{\Sigma^*}) \longmapsto \Big(\underbrace{OO^*+O^*P}_{OP},\ \underbrace{v_P^{\Sigma^*} + \overbrace{v_{O^*}^{\Sigma} + \Omega\times O^*P}^{\text{VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO}}}_{v_P^{\Sigma}}\Big)$$

Deriviamo una seconda volta rispetto al tempo le velocità

<u>prop</u> (N=1). Se in Σ su P agisce la forza $F_P^{\Sigma}(OP, v_P^{\Sigma}, t)$, allora in Σ^* su P agisce la forza $F_P^{\Sigma^*}(O^*P, v_P^{\Sigma^*}, t)$ data da

$$F_P^{\Sigma^*} = F_P^{\Sigma}\circ\mathcal{G}_t + F_P^{\overset{\text{trascinamento}}{T}} + F_P^{\overset{\text{coriolis}}{C}}$$

con $F_P^{C}(\cancel{O^*P}, v_P^{\Sigma^*}, t) = -2m_P\,\Omega(t)\times v_P^{\Sigma^*}$

non vi dipendono

$$F^{T}_P(O^*P, \cancel{v_P^{\Sigma^*}}, t) = -m_P A_{O^*}^{\Sigma} - m_P\Omega\times(\Omega\times O^*P) - m_P\dot{\Omega}\times O^*P$$

Ω velocità angolare di Σ^* rispetto a Σ

<u>dim</u> $v_P^{\Sigma} = v_P^{\Sigma^*} + v_{O^*}^{\Sigma} + \Omega\times O^*P$, deriviamo rispetto a Σ

$$A_P^{\Sigma} = \frac{dv_P^{\Sigma^*}}{dt}\Big|_{\Sigma} + A_{O^*}^{\Sigma} + \frac{d}{dt}\Big|_{\Sigma}\Omega\times O^*P$$

$$\frac{dv_P^{\Sigma}}{dt}\Big|_{\Sigma} = A_P^{\Sigma^*} + \Omega\times v_P^{\Sigma^*} + A_{O^*}^{\Sigma} + \dot{\Omega}\times O^*P + \Omega\times\frac{dO^*P}{dt}\Big|_{\Sigma}$$

$$= A_P^{\Sigma^*} + \Omega\times v_P^{\Sigma^*} + A_{O^*}^{\Sigma} + \dot{\Omega}\times O^*P + \Omega\times(v_P^{\Sigma^*} + \Omega\times O^*P)$$

$$\Rightarrow A_P^{\Sigma} = A_P^{\Sigma^*} + 2\Omega\times v_P^{\Sigma^*} + A_{O^*}^{\Sigma} + \dot{\Omega}\times O^*P + \Omega\times(\Omega\times O^*P)$$

$$m_P A_P^{\Sigma} = F_P(OP, v_P^{\Sigma}, t)$$

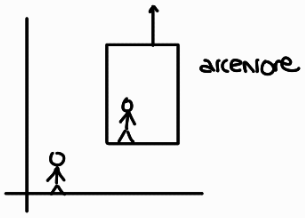
$$m_P A_P^{\Sigma^*} = F_P\circ\mathcal{G}_t \overset{\text{FORZA DI CORIOLIS}}{\boxed{-2m_P\,\Omega\times v_P^{\Sigma^*}}} - m_P A_{O^*}^{\Sigma} \overset{\text{FORZA CENTRIFUGA}}{\boxed{-m_P\,\Omega\times(\Omega\times O^*P)}} - m_P\dot{\Omega}\times O^*P \qquad \square$$

<u>casi speciali</u>

- $\Omega = 0$ (traslatore)

  $F^{C} = 0$

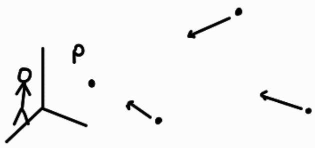
  $F^{T} = -m_P A_{O^*}^{\Sigma}$



- moto traslatorio uniforme : $v_{O^*}^{\Sigma}$ è costante $\quad F^{C} = F^{T} = 0$

F^T e F^C sono anche dette "forze di inerzia".

L'esperimento ideale per identificare sistemi di riferimento inerziali e non inerziali è di prendere un punto materiale e portarlo ad una distanza molto grande dagli altri: mentre le forze non inerziali decadono con la distanza, quelle inerziali non vi dipendono. Se, dopo aver volato il punto agiscono ancora forze il SdR sarà non inerziale, altrimenti sarà inerziale.



Se esiste un riferimento inerziale, allora lo sono tutti e soli quelli che traslano uniformemente rispetto ad esso.

A noi, in realtà, non interessa l'esistenza dei sistemi inerziali. Noi dichiareremo sempre tutte le forze che agiscono nel sistema.

INTEGRALI PRIMI DEI SISTEMI MECCANICI

ripasso $\qquad S = \begin{cases} P_1, \dots, P_N \\ \Sigma \\ F_1, \dots, F_N \end{cases} \quad , \quad (\mathbb{E}^3, \mathbb{V}^3)$

$$V_{P_\alpha}^{\Sigma} = \left.\frac{d\,OP_\alpha}{dt}\right|_{\Sigma} =: V_\alpha$$

$$A_{P_\alpha}^{\Sigma} = \left.\frac{d V_{P_\alpha}^{\Sigma}}{dt}\right|_{\Sigma} =: A_\alpha \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} m_\alpha A_\alpha = F_\alpha (OP_1, \dots, V_1, \dots, t) \\ \alpha = 1, \dots, N \end{cases}$$

$\mathbb{V}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$OP_\alpha = \sum_{i=1}^{3} X_\alpha E_\alpha$

$V_\alpha = \sum_i \dot{X}_\alpha E_\alpha$

$A_\alpha = \sum_i \ddot{X}_\alpha E_\alpha$

$F_\alpha = (OP_1, \dots, V_1, \dots, t) = \sum_{i=1}^{3} f_{\alpha i}(x_1, \dots, \dot{x}_1, \dots, t) E_i \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} m_\alpha \ddot{X}_\alpha = f(x_1, \dots, \dot{x}_1, \dots, t) \\ \alpha = 1, \dots, N \end{cases}$

$X = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{3N} \quad \longleftarrow \quad (OP_1, \dots, OP_N) \in \mathbb{V}^{3N}$ sp. conf.

$\dot{X} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N} \quad \longleftarrow \quad (OP_1, \dots, OP_N, V_1, \dots) \in \mathbb{V}^{6N}$ sp. atti di moto

$M = \text{diag}(m, m, m_1, \dots,)$

$F = (f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^{3N}$

$M\ddot{X} = F(X, \dot{X}, t) \qquad X \in \mathbb{R}^{3N} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{X} = V \\ \dot{V} = F(X, \dot{X}, t) \end{cases}, (X, V) \in \mathbb{R}^{6N}$

spazio delle configurazioni $\qquad\qquad$ spazio degli atti di moto

Quantità di moto e momento angolare

def • **CENTRO DI MASSA** di S è il punto $B \in \mathbb{E}^3$

$$OB := \frac{1}{m} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha OP_\alpha \quad , \qquad m = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha$$

$$OB : \mathbb{V}^{3N} \times \mathbb{V}^{3N} \longrightarrow \mathbb{V}^3$$

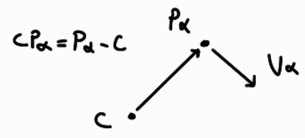
$$(OP_1, \dots, V_1, \dots) \longmapsto OB(OP_1, \dots, \cancel{V_1} \dots)$$

• **QUANTITÀ DI MOTO/IMPULSO** del sistema

$$Q^{\Sigma} := \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha V_\alpha^{\Sigma} = m V_B^{\Sigma} \qquad \text{con} \quad V_B = \left.\frac{d}{dt} OB\right|_{\Sigma} = \frac{1}{m} \sum_\alpha m_\alpha V_\alpha^{\Sigma}$$

• MOMENTO ANGOLARE di S rispetto a p.to $C \in \mathbb{E}^3$

$$M_C := \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \, CP_\alpha \times V_\alpha$$



• RISULTANTE DELLE FORZE agenti su S

$$R := \sum_{\alpha=1}^{N} F_\alpha(OP_1,\dots,V_1,\dots,t)$$

• MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE rispetto a C agenti su S

$$N_C = \sum_{\alpha=1}^{N} CP_\alpha \times F_\alpha$$

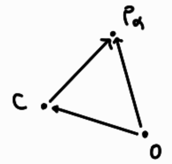
prop (leggi di bilancio di Q e M_C). Lungo ogni moto di S

1. $\left.\frac{dQ}{dt}\right|_\Sigma (t) = R(OP_1(t),\dots,V_1(t),\dots,t)$

2. $\left.\frac{dM_C}{dt}\right|_\Sigma (t) = N_C + m V_B \times V_C$

dim 1. $\left.\frac{dQ}{dt}\right|_\Sigma = \left.\frac{d}{dt}\right|_\Sigma \sum m_\alpha V_\alpha^\Sigma = \sum_\alpha m_\alpha A_\alpha^\Sigma = \sum_\alpha F_\alpha = R$

2. $\left.\frac{dM_C}{dt}\right|_\Sigma = \left.\frac{d}{dt}\right|_\Sigma \sum_\alpha m_\alpha CP_\alpha \times V_\alpha =$



$$= \sum_\alpha m_\alpha \left.\frac{d}{dt}\right|_\Sigma (CP_\alpha \times V_\alpha) = \sum_\alpha m_\alpha \left.\frac{d}{dt}\right|_\Sigma (OP_\alpha - OC) \times V_\alpha$$

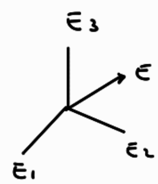
$$= \sum_\alpha m_\alpha (\cancel{V_\alpha} - V_C) \times V_\alpha + \sum_m m_\alpha (OP_\alpha - OC) \times A_\alpha$$

$$= - \sum_\alpha m_\alpha V_C \times V_\alpha + \sum_\alpha CP_\alpha \times F_\alpha = -V_C \times \overset{mV_B}{\overset{\|}{Q}} + N_C \qquad \square$$

oss • $Q = mV_B \Rightarrow m A_B^\Sigma = \left.\frac{dQ}{dt}\right|_\Sigma = R$

• se $V_C = 0$ o $C = B \Rightarrow \left.\frac{dM_C}{dt}\right|_\Sigma = N_C$

corollario 1 Sia $E \in V^3 \setminus \{0\}$



• se $R \cdot E = 0$ (componente di R lungo E è $=0$), allora $Q \cdot E$ è I.P. (componente di Q lungo E)

• se $V_C = 0$ oppure $B = C$ e $N_C \cdot E = 0$ allora $M_C \cdot E$ è I.P.

corollario 2

- se $R=0 \Rightarrow t \longmapsto Q(t) \in \mathbb{V}^3$ è costante, dunque tutte le componenti di Q sono integrali primi

$$Q = \sum_{i=1}^{3} Q_i E_i \Rightarrow Q_1, Q_2, Q_3 \text{ sono I.P.}$$

- se $v_C=0$ oppure $C=B$ e $N=0 \Rightarrow M_C \in \mathbb{V}^3$ è costante, dunque le 3 componenti di M_C sono I.P.

$$\mathbb{V}^3: \quad Q = \sum_i Q_i E_i \rightsquigarrow (Q_1, Q_2, Q_3) \in \mathbb{R}^3$$

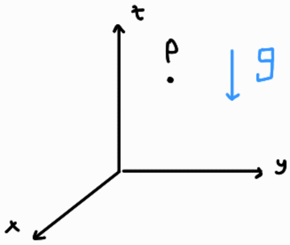
$$x_B = \frac{1}{m} \sum_\alpha m_\alpha x_\alpha$$

$$Q \rightsquigarrow \sum_\alpha m_\alpha \dot{x}_\alpha$$

$$M_C \rightsquigarrow \sum_\alpha m_\alpha (x_\alpha - x_C) \times \dot{x}_\alpha$$

$$R \rightsquigarrow \sum_\alpha F_\alpha$$

esempio 1 (caduta dei gravi / forza peso)



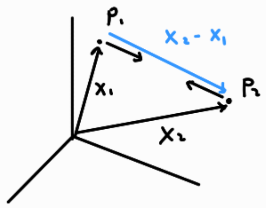
$$\ddot{x} = g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \;\; "(x, y, t)$$

$N = 1$, $Q = m_P v_P$

le componenti x e y di $f = m g$ sono $=0 \Rightarrow$ le componenti x e y della q. di moto sono IP

$$m\dot{x} = \begin{pmatrix} m\dot{x} \\ m\dot{y} \\ m\dot{t} \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{x} \text{ e } \dot{y} \text{ sono IP}$$

esempio 2 (problema dei due corpi)



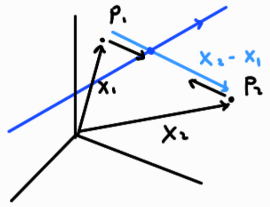
$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$, $N=2$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^6$$

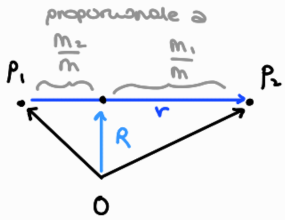
$$f_1(x_1, x_2) = G\, m_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|^3} = -G\, m_1 m_2 \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|^3}$$

$$f_2(x_1, x_2) = -f_1(x_1, x_2)$$

Risultante delle forze è $f_1 + f_2 = 0$, dunque la quantità di moto $Q = m v_B$ è costante $\Rightarrow$ il centro di massa ha velocità costante



$\Rightarrow$ possiamo assumere $V_B = 0$



Consideriamo il cambio di coordinate in $\mathbb{R}^3$

$$(x_1, x_2) \longmapsto \Big(r = x_2 - x_1,\ R = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{\underbrace{m}_{= m_1 + m_2}}\Big)$$

è biunivoco $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x_1 = R - \frac{m_2}{m} r \\ x_2 = R + \frac{m_1}{m} r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \\ \dot{R} = \frac{m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2}{m} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \ddot{r} = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 &= \frac{1}{m_2} f_2(x_1, x_2) - \frac{1}{m_1} f_1(x_1, x_2) \\ &= -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) f_1(x_1, x_2) \\ &= -\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} G m_1 m_2 \frac{r}{\|r\|^3} \end{aligned}$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{r} = f(r) := -G m_1 m_2 \frac{r}{\|r\|^3}$$

come dev'essere

$$\ddot{R} = \frac{m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2}{m} = \frac{f_1 + f_2}{m} = 0 \qquad \Rightarrow \ddot{R} = 0$$

Poniamo $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} =: \mu$ MASSA RIDOTTA

12 equazioni in gruppi di 3

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{R} = 0 \\ \mu \ddot{r} = f(r) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \dot{R} = V_B \\ \boxed{\dot{V}_B = 0} \\ \dot{r} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{\mu} f(r) \end{cases}$$

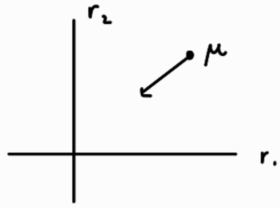
3 I.P. V_{B1}, V_{B2}, V_{B3}

$\mathbb{R}^3$

Inoltre il sistema è disaccoppiato (in $\dot R = V_B$ non compaiono r, v e viceversa):

$\dot R = V$ (cost $\in \mathbb{R}^3$) $\qquad \mathbb{R}^3 \qquad R(t) = R_0 + Vt$

$$\begin{cases} \dot r = v \\ \dot v = \frac{1}{\mu} f(r) \end{cases} \qquad \mathbb{R}^6$$



$$\Updownarrow$$

$$\mu \ddot r = f(r) = -G\, m_1 m_2 \frac{r}{\|r\|^3} \qquad \text{problema di Kepler}$$

Si chiama "massa ridotta" perché in qualche modo abbiamo ridotto il problema dei due corpi in un sistema in cui c'è un unico punto, fittizio, di massa μ.

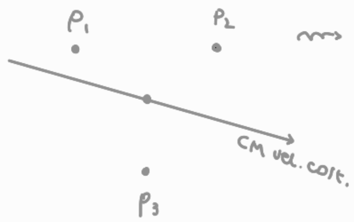
oss solo forze interne (tipiche) $\Rightarrow$ risultante forze $= 0$ $\Rightarrow$ conservazione di Q

se le forze interne sono:

- a coppie posizionali $f_\alpha(x_1, \dots, \cancel{\dot x_1, \dots, t}) = \sum_{\beta=1}^{N} f_{\beta\alpha}(\underbrace{x_1, \dots, x_N}_{x_\alpha, x_\beta})$
- soddisfano il principio di azione-reazione

$$f_{\alpha\beta}(x_\alpha, x_\beta) = -f_{\beta\alpha}(x_\alpha, x_\beta)$$

esempio (problema dei 3 corpi)



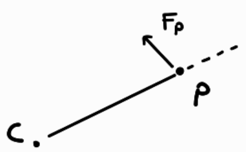
$\rightsquigarrow \mathbb{R}^{18} \xrightarrow{\text{tramite camb. di coord.}} \mathbb{R}^{8}$

ripasso Eq. bilancio $\quad M_C = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha CP_\alpha \wedge V_\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} M_C \Big|_\Sigma = N_C + m V_B \wedge V_C$

$$N_C = \sum_\alpha CP_\alpha \times F_\alpha$$

Supponiamo $V_C = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} M_C \Big|_\Sigma = N_C$

esempio $N = 1$



$N_C = CP \wedge F_P$

supponiamo non dipenda da tempo e velocità

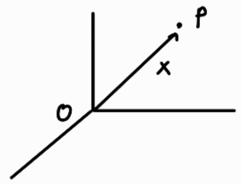
M_C cost $\iff F_P(P, \cancel{v, t}) \parallel CP \quad \forall P, v, t$

(F è posizionale se non dipende dalle velocità)

Coordinate affini di Σ, $x \in \mathbb{R}^3$, $(x, \dot x) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

■ (problema di Keplero) $N=1$

$$f(x) = -k \frac{x}{\|x\|^3} \quad , k>0$$



$K = G m_s m$

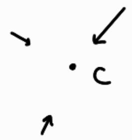
massa della sorgente (note under m_s)

$$M_o = m x \times \dot{x} = m \begin{pmatrix} y\dot{z} - z\dot{y} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

il vettore momento angolare è conservato

3 I.P. M_x, M_y, M_z , $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ sono indipendenti ovunque eccetto dove $M_o = 0$.

<u>oss 1</u> Ho solo forze con forze centrali : $M_{\text{centro del campo}}$ = costante e le forze sono $// CP$



<u>oss 2</u> La quantità di moto non si conserva

<u>prop</u> (problema dei 2 corpi, 3 corpi ...) $N \geq 2$

Solo forze interne :

- a coppie $\quad F_\alpha = \sum_{\beta=1}^{N} F_{\beta,\alpha}(OP_\alpha, OP_\beta)$
- principio az-reaz : $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$
- $F_{\alpha\beta} // P_\alpha P_\beta$

Sotto queste ipotesi $\forall C \in \mathbb{E}^3$ con $V_C = 0$ $\quad M_C$ è costante

$$N_C = \sum_{\alpha=1}^{N} CP_\alpha \times F_\alpha$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} CP_\alpha \times F_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} CP_\alpha \times F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} CP_\beta \times \underbrace{F_{\beta\alpha}}_{= -F_{\alpha\beta}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(CP_\alpha - CP_\beta) \times F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(P_\alpha - P_\beta) \times F_{\alpha\beta} = 0$$

Forze conservative ed energia potenziale

def $X = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{3N}$

$(X, \dot X) = (x_1, \dots, \dot x_1, \dots) \in \mathbb{R}^{6N}$

L'ENERGIA CINETICA del sistema è

$$T : \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(X, \dot X) \longmapsto T(X, \dot X) := \frac{1}{2} M \dot X \cdot \dot X$$

oss

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \|\dot x_\alpha\|^2, \quad \dot x_\alpha \in \mathbb{R}^3$$
$$= \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \dot x_\alpha \cdot \dot x_\alpha$$
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} m_1 \mathbb{1}_3 & & \\ & \ddots & \\ & & m_N \mathbb{1}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot x_1 \\ \vdots \\ \dot x_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot x_1 \\ \vdots \\ \dot x_N \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} m_1 \dot x_1 \\ \vdots \\ m_N \dot x_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot x_1 \\ \vdots \\ \dot x_N \end{pmatrix}$$

supponiamo sempre non dipenda dal tempo

def $F = (f_1, \dots, f_N) \in \mathbb{R}^{3N}$, $\quad F : \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \times \cancel{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^{3N}$

$$(X, \dot X, \cancel{t}) \longmapsto F(X, \dot X, \cancel{t})$$

- F è POSIZIONALE se non dipende da $\dot X$

$$F : \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow \mathbb{R}^{3N}$$
$$X \longmapsto F(X)$$

- F è CONSERVATIVA se è posizionale, indip. dal t, e $\exists$ funzione ENERGIA POTENZIALE $V : \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \longmapsto V(X)$ tc $F = -\nabla V$, ovvero

$$\nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_{3N}} \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{3N} \end{pmatrix}$$

$$F(X) = -\nabla V(X), \quad X \in \mathbb{R}^{3N} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} F_j(X) = -\dfrac{\partial V}{\partial x_j}(X) & j = 1, \dots, 3N \\ X = (x_1, \dots, x_{3N}), \quad x_1 \in \mathbb{R} \\ F = (F_1, F_2, \dots, F_{3N}) \end{cases}$$

Raccogliendole a 3 a 3 trovo

$$f_\alpha(x_1, \dots, x_N) = -\nabla_{x_\alpha} V(x_1, \dots, x_N)$$

gradiente rispetto alle 3 coord $x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3}$; ∇ in $\mathbb{R}^3$

def Se F è conservativa, si chiama ENERGIA TOTALE del sistema

$$E : \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{con } E(X, \dot X) := T(X, \dot X) + V(X)$$

$$T(X, \dot X) = \frac{1}{2} M \dot X \cdot \dot X$$

prop Se le forze sono conservative, allora E è integrale primo

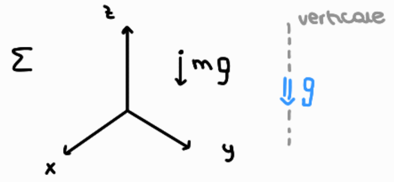
dim

$$\frac{dE}{dt} = \underbrace{M \ddot X \cdot \dot X}_{\text{perché } M \text{ simmetrica}} + V'(X) \dot X, \qquad V'(X)\dot X = \nabla V(X) \cdot \dot X$$

$$= \underbrace{\left(M \ddot X + \nabla V(X)\right)}_{=0 \ (\text{perché } M\ddot X = F(X) = -\nabla V(X))} \cdot \dot X \qquad \square$$

esempi

1) (forza peso) $N = 1$



$f_{peso}(x) = m\,g$

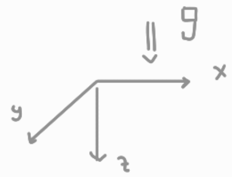
- posizionale
- conservativa : $V_{peso}(x) = -m g \cdot x$ $\quad (\nabla V_{peso}(x) = -mg = -f_{peso}(x))$

Diciamo che l'asse z è verticale ascendente (in Σ)

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}, \quad g > 0$$

$V_{peso}(x,y,z) = mgz$ QUOTA/ALTEZZA del punto

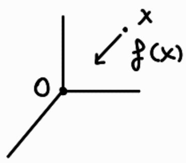
asse z verticale discendente



$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

$V_{peso}(x,y,z) = -mgz$

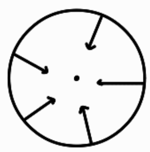
2) (forze posizionali centrali)



$f(x) \parallel x \quad \forall x$

$f(x) = \hat{\mathcal{F}}(x) \dfrac{x}{\|x\|}, \quad x \neq 0$

$\hat{\mathcal{F}} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$



nei punti di una sfera la norma delle forze è costante

se $f(x) = \mathcal{F}(\|x\|) \dfrac{x}{\|x\|}$ con $\mathcal{F} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, allora $f(x)$ è conservativa

$\exists\, \mathcal{V} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\mathcal{F} = -\mathcal{V}'$

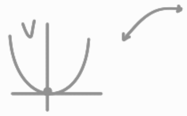
$\mathcal{V}(r) := -\int_0^r \mathcal{F}(s)\, ds, \quad r > 0$

$(\mathcal{V} \circ \|\cdot\|)(x)$
$\mathrel{/\!/}$

f ha energia potenziale $V(x) := \mathcal{V}(\|x\|)$, infatti

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{V}(\|x\|) = \mathcal{V}'(\|x\|) \cdot \frac{\partial \|x\|}{\partial x_i} = -\mathcal{F}(\|x\|) \frac{x_i}{\|x\|} = -f(x)$$

■ (forza elastica)

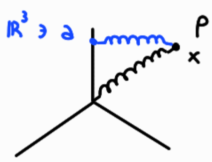


$\Rightarrow$ è attrattiva

forza esercitata da una molla ideale di costante $k > 0$

$f(x) = -kx \qquad V(x) = \frac{1}{2} k \|x\|^2$

$f(x) = -k(x-a) \qquad V(x) = \frac{1}{2} k \|x-a\|^2$



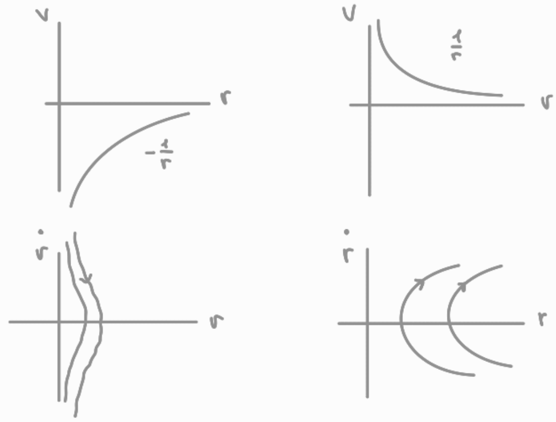
- centrale
- a simmetria sferica

■ (Forza gravitazionale)

$$f(x) = -k \frac{x}{\|x\|^3} \qquad (k>0)$$

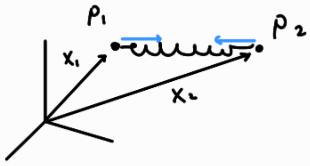
$$\mathcal{f}(r) = -\frac{k}{r^2}$$

$$V(x) = -\frac{k}{\|x\|}$$



=> ci va il meno!

3) $N=2$



$$f_1(x_1, x_2) = -k(x_1 - x_2)$$

$$f_2(x_1, x_2) = -k(x_2 - x_1)$$

$$F = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} k \|x_1 - x_2\|^2 = \frac{1}{2} k (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_2)$$

verifichiamo che è energia potenziale:

$$f_1 \overset{?}{=} -D_{x_1} V = -k(x_1 - x_2) \quad ✓$$

$$f_2 \overset{?}{=} -D_{x_2} V = k(x_1 - x_2) \quad ✓$$

Quando abbiamo forze interne, dobbiamo trovare l'energia potenziale di tutto il sistema (non di ogni singolo punto), dunque si ha l'energia totale

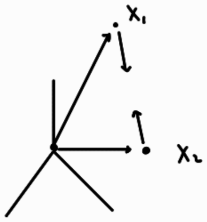
$$E = \frac{1}{2} m_1 \|\dot x_1\|^2 + \frac{1}{2} m_2 \|\dot x_2\|^2 + \frac{1}{2} k \|x_1 - x_2\|^2$$

<u>generalizzo</u> forze interne

- a coppie $F_\alpha = \sum_\beta F_{\beta\alpha}$
- $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$
- $F_{\alpha\beta} \parallel P_\alpha P_\beta$
- $F_{\alpha\beta}(x_\alpha, x_\beta) = \mathcal{f}_{\alpha\beta}(\|x_\alpha - x_\beta\|) \dfrac{x_\alpha - x_\beta}{\|x_\alpha - x_\beta\|}$

Allora c'è un'unica energia potenziale per tutto il sistema

4) (problema 2 corpi) $N=2$



$$f_1(x_1, x_2) = -k \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|^3}$$

$$f_2(x_1, x_2) = -k \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|^3}$$

Vogliamo verificare che $F = (f_1, f_2)$ è conservativa, ovvero $\exists V$ t.c.

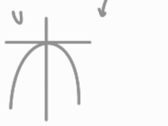
$F = (f_1, f_2) = -\nabla V$

$\Rightarrow \quad V(x_1, x_2) = -\dfrac{k}{\|x_1 - x_2\|}$, infatti:

$$\nabla_{x_1} V = \frac{k}{\|x_1-x_2\|^2} \nabla_{x_1} \|x_1 - x_2\| = \frac{k}{\|x_1-x_2\|^2} \frac{x_1 - x_2}{\|x_1-x_2\|} = -f_1(x_1, x_2)$$

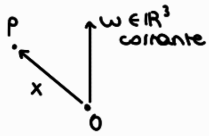
(e analogo per $\nabla_{x_2} V$)

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2} m_1 \|\dot{x}_1\|^2 + \frac{1}{2} m_2 \|\dot{x}_2\|^2 - \frac{k}{\|x_1 - x_2\|}$$



=> è repulsiva

5) (forza centrifuga)



$f(x) = -m\, \omega \times (\omega \times x)$

è conservativa con $\quad V(x) = -\frac{1}{2} m \|\omega \times x\|^2$

esercizio   verificare che è energia potenziale. Suggerimento:

$$V = -\frac{1}{2} m\, (\omega \times x) \cdot (\omega \times x) = -\frac{1}{2} m \left[(\omega \times x) \times \omega \right] \cdot x$$

In generale, la dipendenza dalla velocità delle forze distrugge la conservazione dell'energia.

C'è, tuttavia, un caso speciale.

def • La "potenza" di forza $F(x, \dot{x}, t)$ nell'atto di moto $x, \dot{x}$ all'istante t è

$\Pi_F(x, \dot{x}, t) := F(x, \dot{x}, t) \cdot \dot{x}$

• F è "a potenza nulla" se $\Pi_F(x, \dot{x}, t) = 0 \quad \forall x, \dot{x}, t \iff F(x, \dot{x}, t) \perp \dot{x} \quad \forall x, \dot{x}, t$

esempio   Coriolis: $f(x, v, t) = -2m\, \omega(t) \times v$

prop $M\ddot{x} = -\nabla U(x) + F_1(x, \dot{x}, t)$ con F_1 a potenza nulla. Allora $E = T + V$ è I.P.

dim
$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \dot{x} \cdot M\dot{x} + V(x) \right)$$
$$= \dot{x} \cdot \underbrace{(M\ddot{x} + \nabla V(x))}_{= F_1(x, \dot{x}, t)} = 0 \qquad \square$$

def   Il "lavoro" di F su un moto (= sol. eq. $M\ddot{x} = F$) fra gli istanti t_1 e t_2 è

$$L(t \longmapsto x(t); t_1, t_2) := \int_{t_1}^{t_2} \Pi(x(t), x'(t), t)\, dt$$

oss   se la forza è a potenza nulla, allora non fa lavoro