Equazioni differenziali ordinarie

$A \subset \mathbb{R}^{n+2}$ aperto

$F: A \longrightarrow \mathbb{R}$

Consideriamo una equazione

$$(*) \quad F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad x \in I \subset \mathbb{R}$$

intervallo

"eq. differenziale ordinaria di ordine $n \geq 1$" dove $x \longmapsto y(x)$ è la funzione incognita.

def Diremo che $\varphi \in C^n(I)$ è una soluzione di $(*)$ se

i) $I \subset \mathbb{R}$ intervallo

ii) $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \in A \quad \forall x \in I$

iii) $F(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0 \qquad \forall x \in I$

oss Una eq. diff. nella forma

$$(*) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{n-1}), \quad x \in I \subset \mathbb{R}$$

si dice IN FORMA NORMALE, dove

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aperto

oss (eq. diff. di ordine $n \longleftrightarrow$ sistemi di eq. diff. del primo ordine)

considero $(*)$. Poniamo $z_1 = y$

$$z_2 = y' = z_1'$$
$$z_3 = y'' = z_2'$$
$$\vdots$$
$$z_{n-1} = y^{(n-2)} = z_{n-2}'$$
$$z_n = y^{(n-1)} = z_{n-1}'$$
$$f(x, z_1, \dots, z_n) = y^{(n)} = z_n'$$

ovvero y risolve $(*)$ $\iff$ $z = (z_1, \dots, z_n)$ risolve il sistema del primo ordine nell'incognita $z \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1}' = z_n \\ z_n' = y^{(n)} \end{cases}$$

Equazioni lineari del primo ordine

Consideriamo

ovvero che $y \mapsto y' + a(x)y$ è lineare

$$\text{(ED)} \qquad y' + a(x)\,y = b(x) \quad , \quad x \in I \subset \mathbb{R}$$

(eq. diff.)

dove $a, b \in C(I)$. Fissiamo $x_0 \in I$ e prescriviamo la condizione iniziale

$$\text{(CI)} \qquad y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}$$

(cond. iniziale)

Otteniamo il PROBLEMA DI CAUCHY $\begin{cases} \text{(ED)} \\ \text{(CI)} \end{cases}$

1° passo studio il caso omogeneo: $b = 0$.

$$\text{(ED)} \qquad y' + a\,y = 0$$

suppongo $y \neq 0$ e divido

non sono sicura si possa fare: i passaggi da qui in giù sono euristici, nella speranza di poterli confermare ex post

$$\frac{y'}{y} = -a$$

Sia $A \in C^1(I)$ una primitiva di a, $A' = a$. Allora

$$(\log|y|)' = -A'$$

per integrazione $\exists\, d \in \mathbb{R}$ tc

$$\log|y| = -A + d \ , \quad x \in I$$

Passo all'esponenziale

$$|y| = e^{-A} \cdot \underset{c^+ \in \mathbb{R}^+}{\underset{\parallel}{e^{d}}}$$

con $c \in \mathbb{R}$ trovo

$$y(x) = c\, e^{-A(x)}$$

sono tutte soluzioni di $y' + ay = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$.

mi convinco del fatto che le soluzioni nel caso generale debbano avere la stessa forma di quelle nel caso omogeneo

2° passo (metodo della variazione della costante) Cerco soluzioni di $y' + ay = b$ della forma $y(x) = c(x)\, e^{-A(x)}$. Derivo:

$$y' = c' e^{-A} + c\, e^{-A}(-a)$$

Inserisco tutto nell'equazione diff:

$$\underbrace{c' e^{-A} + \cancel{c e^{-A}(-a)}}_{y'} + \cancel{a}\, \underbrace{\cancel{c e^{-A}}}_{y} = b$$

Troviamo

$$c' = b e^{A}$$

Integro

$$c(x) = \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{c(x_0)}} + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{A(t)}\, dt$$

Troviamo

$$y(x) = \left(c(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t) e^{A(t)} \, dt \right) e^{-A(x)}$$

3° passo Imponiamo la CI : $y(x_0) = y_0$.

Troviamo

$$y_0 = (c(x_0) + 0) e^{-A(x_0)}$$

$$\Rightarrow \quad c(x_0) = y_0 e^{A(x_0)}$$

4° passo Abbiamo trovato :

$$\boxed{y(x) = \left(y_0 e^{A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} b(t) e^{A(t)} \, dt \right) e^{-A(x)}} \qquad (*)$$

TEOREMA Siano $a, b \in C(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo. Siano $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Allora la funzione y in $(*)$ con $A' = a$ è la soluzione unica del problema di Cauchy

$$(PC) \quad \begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

problema di Cauchy

dim • y in $(*)$ è soluzione : ci credo.

• y è unica: lo provo.

Sia $z \in C^1(I)$ una soluzione del (PC).

Introduciamo la funzione ausiliaria

$$w(x) = z(x) e^{A(x)} - \int_{x_0}^{x} b(t) e^{A(t)} \, dt$$

$$w' = z' e^{A} + z e^{A} a - b e^{A} = e^{A} (\underbrace{z' + za - b}_{=0}) \quad \text{su } I$$

perché z soluzione di (ED).

th di Lagrange → Dunque $w(x) = k$, $\exists k \in \mathbb{R}$

$$\Updownarrow$$

$$z(x) = \left(k + \int_{x_0}^{x} b(t) e^{A(t)} \, dt \right) e^{-A(x)}$$

se impongo la (CI)

$$y_0 = z(x_0) \iff k = y_0 e^{A(x_0)}$$

$\Rightarrow z = y$ in $(*)$, dunque la soluzione è unica. $\square$

CAPITOLO 7

Equazioni differenziali ordinarie

1. Introduzione

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$, un insieme aperto e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Un'equazione della forma

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{7.1.30}$$

si dice *equazione differenziale ordinaria di ordine n*. Qui, x è una variabile reale, y è una funzione incognita a valori reali e $y', \dots, y^{(n)}$ sono le sue derivate.

Una funzione $\varphi \in C^n(I)$ si dice *soluzione dell'equazione differenziale* (7.1.30) se:

i) $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo;
ii) $(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \in \Omega$ per ogni $x \in I$;
iii) $F(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$ per ogni $x \in I$.

Le questioni più importanti sulle equazioni differenziali ordinarie sono:

1) L'esistenza di soluzioni.
2) L'unicità delle soluzioni, una volta fissate opportune condizioni iniziali o dati al bordo.
3) La regolarità delle soluzioni, ad esempio la dipendenza dai dati iniziali o dalla F, la stabilità per tempi grandi, etc.
4) Il calcolo esplicito delle soluzioni.

L'esistenza di soluzioni si prova con teoremi di punto fisso, con tecniche di approssimazione e compattezza, con metodi variazionali, con teoremi della funzione implicita, con strumenti di Analisi Funzionale.

Il problema dell'unicità è tipicamente più difficile. Solo in situazioni speciali è possibile calcolare le soluzioni in modo esplicito.

Osservazione 7.1.1 (Equazioni in forma normale). Nel caso che

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = y^{(n)} - f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

per qualche funzione $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, l'equazione (7.1.30) diventa

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{7.1.31}$$

Un'equazione della forma (7.1.31) si dice in *forma normale*.

Osservazione 7.1.2. [Equazioni di ordine n e sistemi di n equazioni] Trasformiamo l'equazione (7.1.31) in un *sistema* di equazioni. Se introduciamo le nuove funzioni incognite

$$z_i = y^{(i-1)}, \quad i = 1, \dots, n$$

allora avremo $z_i' = y^{(i)} = z_{i+1}$ per $i = 1, \dots, n-1$, mentre $z_n' = y^{(n)} = f(x, z_1, z_2, \dots, z_n)$. Quindi l'equazione differenziale di ordine n (7.1.31) è equivalente al *sistema di equazioni differenziali di ordine 1*

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_n' = f(x, z_1, z_2, \dots, z_n). \end{cases} \tag{7.1.32}$$

La discussione dei sistemi di ordine 1 è più generale della discussione delle equazioni di ordine n.

2. Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo (ad esempio aperto) e siano $a, b \in C(I)$ due funzioni continue. Un'equazione differenziale della forma

$$y' + a(x)y = b(x), \quad x \in I, \tag{7.2.33}$$

si dice $\boxed{\text{equazione lineare del primo ordine}}$. Fissati $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, possiamo prescrivere il valore della soluzione nel punto x_0:

$$y(x_0) = y_0. \tag{7.2.34}$$

Il problema di risolvere l'equazione differenziale (7.2.33) con la *condizione iniziale* (7.2.34) si chiama $\boxed{\textit{Problema di Cauchy}}$. L'incognita del problema è una funzione $y \in C^1(I)$.

Dedurremo la formula risolutiva dell'equazione differenziale, e più in generale del Problema di Cauchy, con un argomento euristico. Consideriamo preliminarmente il caso $b = 0$:

$$y' + a(x)y = 0, \quad x \in I. \tag{7.2.35}$$

In questo caso, l'equazione differenziale si dice $\boxed{\textit{omogenea}}$. Supponendo $y \neq 0$, ad esempio $y > 0$, l'equazione differenziale (7.2.35) si può riscrivere nella forma $y'/y = -a(x)$. Una primitiva della funzione y'/y è $\log y$. Dunque, indicando con A una primitiva di a, ovvero $A'(x) = a(x)$ per ogni $x \in I$, abbiamo

$$-A = \log y + d,$$

per qualche costante $d \in \mathbb{R}$. Segue che $y = \exp(-d - A)$ e ponendo $c = \mathrm{e}^{-d}$ troviamo la soluzione

$$y(x) = c\mathrm{e}^{-A(x)}, \quad x \in I. \tag{7.2.36}$$

Questa funzione risolve l'equazione omogenea per ogni $c \in \mathbb{R}$ (in altri termini la limitazione $y > 0$ può essere lasciata cadere).

Ora cerchiamo una soluzione della forma (7.2.36) per l'equazione non omogenea (7.2.33), dove ora $c \in C^1(I)$ è una funzione incognita che deve essere determinata. Questo metodo si chiama $\boxed{\text{“variazione della costante”}}$. Inserendo $y' = c'\mathrm{e}^{-A} - ac\mathrm{e}^{-A}$ nell'equazione (7.2.33) otteniamo

$$c'\mathrm{e}^{-A} = b, \quad \text{ovvero} \quad c' = b\mathrm{e}^{A}.$$

Integrando tale equazione su un intervallo $(x_0, x) \subset I$ otteniamo

$$c(x) = c(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt,$$

e dunque troviamo

$$y(x) = \Big(c(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt\Big)\mathrm{e}^{-A(x)}, \quad x \in I, \tag{7.2.37}$$

dove $c(x_0) \in \mathbb{R}$ è un numero reale. Per ogni scelta di tale numero, la funzione (7.2.38) verifica l'equazione differenziale (7.2.33).

Il numero $c(x_0)$ si può determinare imponendo che l'integrale generale y verifichi la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$. Si ottiene $c(x_0) = y_0\mathrm{e}^{A(x_0)}$. Dunque otteniamo la *formula di rappresentazione* per la soluzione del Problema di Cauchy:

$$y(x) = \Big(y_0\mathrm{e}^{A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt\Big)\mathrm{e}^{-A(x)}, \quad x \in I, \tag{7.2.38}$$

Nel prossimo teorema proviamo che il metedo seguito rileva in effetti l'*unica* soluzione del problema di Cauchy.

Teorema 7.2.1. Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$, $a, b \in C(I)$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Allora la funzione (7.2.38) risolve in modo unico il Problema di Cauchy (7.2.33)+(7.2.34).

Dim. Che la funzione (7.2.38) risolva il problema è un conto che ripercorre a ritroso l'argomento euristico. Proviamo che questa soluzione è l'unica.

Sia $z \in C^1(I)$ una soluzione dell'equazione differenziale (7.2.33) e consideriamo la funzione ausiliaria

$$w(x) = \mathrm{e}^{A(x)}z(x) - \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt,$$

dove A è una primitiva di a. Dal momento che sull'intervallo I risulta

$$w' = (az + z')\mathrm{e}^{A} - b\mathrm{e}^{A} = 0,$$

per il Teorema di Lagrange la funzione w è costante su I, ovvero esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $w(x) = k \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in I$. Dunque, si ha

$$z(x) = \Big(k + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt\Big)\mathrm{e}^{-A(x)}.$$

D'altra parte, se z verifica anche la condizione iniziale $z(x_0) = y_0$ deve essere $k = y_0\mathrm{e}^{A(x_0)}$ e quindi z coincide con la funzione in (7.2.38). $\square$

3. Equazioni differenziali a variabili separabili

Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ due intervalli aperti e siano $f \in C(I)$ e $g \in C(J)$ due funzioni continue. Cerchiamo le soluzioni dell'equazione differenziale del primo ordine

$$y' = f(x)g(y), \quad x \in I, \tag{7.3.39}$$

Equazioni a variabili separabili

consideriamo una eq. diff. del primo ordine di questo tipo

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

con $f: \underset{\text{intervallo}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e $g: J \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. ($I \subseteq \mathbb{R}$)

Fissiamo $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$ e prescriviamo la condizione iniziale

$$(CI) \qquad y(x_0) = y_0$$

__oss__ se $g(y_0) = 0$ allora $x \longmapsto y(x) = y_0$ costante è soluzione del (PC) $\begin{cases} (ED) \\ (CI) \end{cases}$

Ora supponiamo che $g(y) \neq 0$ e dividiamo

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

Sia $F(x)$ una primitiva di $f(x)$ su I ($F \in C^1(I)$).

Sia poi $G(x)$ una primitiva di $\frac{1}{g(y)}$. Esiste certamente se $g(y_0) \neq 0$ definita in $J_1 \subset J$ intorno di y_0. Sarà $G \in C^1(J_1)$.

In questa situazione esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$G(y(x)) = F(x) + k$$

per $x \in I_1 \subset I$ intorno di x_0.

la derivata di G è $\frac{1}{g(y)}$ per costruzione: non si annulla mai, dunque è sempre positiva o negativa $\Rightarrow G$ è invertibile

Qui si può invertire e arrivare a

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + k)$$

Infine usiamo (CI):

$$y_0 = y(x_0) = G^{-1}(F(x_0) + k)$$

$\Rightarrow G(y_0) = F(x_0) + k \quad \Rightarrow k = G(y_0) - F(x_0)$

Conclusione: trovo soluzioni del (PC) del tipo:

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + G(y_0) - F(x_0))$$

__domanda__ Siamo sicuri che tutte le funzioni siano fatte così?

NO, abbiamo trovato le funzioni costanti, che sono di forma diversa.

Inoltre, potrebbero esserci delle funzioni g che ad un certo punto si annullano

TEOREMA Siano $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e $g: J \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, $g \neq 0$ su J. Siano poi $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$. Allora il (PC)

$$\begin{cases} y' = f(x)\, g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha soluzione unica $y \in C^1(I_1)$ $\exists \underset{x_0}{\overset{\text{intervallo}}{I_1}} \subset I$ della forma

$$y(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)), \qquad x \in I_1$$

dove $F' = f$ e G è primitiva di $\frac{1}{g}$

esempio (di Peano). Si consideri

$$\begin{cases} y'(x) = 2\sqrt{|y(x)|}, \quad x \in (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Discutere esistenza e unicità della soluzione di PC.

oss $y \equiv 0$ è una soluzione del PC

Suppongo $y \neq 0$, si trova

$$\frac{y'}{\sqrt{|y|}} = 2$$

Integro su $[0, x]$

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{\sqrt{|y(t)|}}\, dt = 2x$$

Potrei fare il CV (cambio di variabile) $y(t) = s$, $y'(t)\, dt = ds$

$t = 0 \longrightarrow s = y(0) = 0$

$t = x \longrightarrow s = y(x)$

$$\iff \int_0^{y(x)} \frac{ds}{\sqrt{|s|}} = 2x$$

$y'(x) \geq 0$
$\Rightarrow y$ crescente e $y(0) = 0$
$\Rightarrow y(x) \geq 0$ per $x \geq 0$

$$\iff \int_0^{y(x)} \frac{ds}{\sqrt{s}} = 2x$$

$$\iff \left[2 s^{1/2}\right]_{s=0}^{s=y(x)} = 2x$$

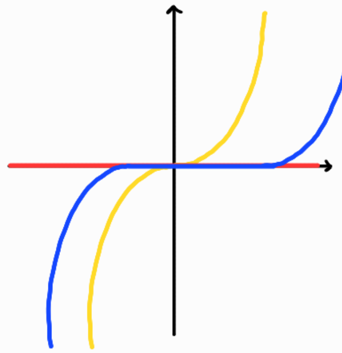
$$\iff \sqrt{y(x)} = x \qquad x \geq 0$$

$$\iff y(x) = x^2 \qquad x \geq 0$$

In generale si trova $y(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases}$

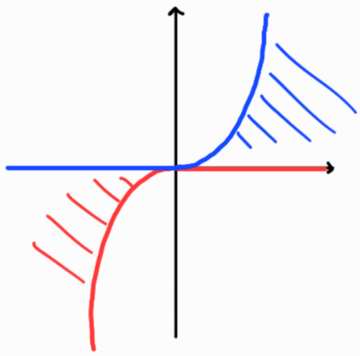
Per $\beta \geq 0$ e $\alpha \geq 0$ ci sono anche tutte le soluzioni

$$y_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} (x-\beta)^2 & x \geq \beta \\ 0 & -\alpha \leq x \leq \beta \\ -(x+\alpha)^2 & x \leq -\alpha \end{cases}$$



questa famiglia di soluzioni si chiama PENNELLO DI PEANO

c'è una soluzione massima e una minima:



<u>esercizio</u> Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere $\exists$ e $!$ della soluzione del problema

$$\begin{cases} x^3 y' - y + 1 = 0 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Conti per $x \neq 0$

$$y' - \frac{1}{x^3} y + \frac{1}{x^3} = 0 \quad , \quad x > 0$$

Passo per passo:

1) $y' - \frac{1}{x^3} y = 0 \implies \frac{y'}{y} = \frac{1}{x^3} \implies (\log|y|)' = \frac{1}{x^3}$

$$\implies \log|y(x)| = -\frac{1}{2} x^{-2} + \underset{\overset{\Downarrow}{\mathbb{R}}}{d} \implies |y(x)| = e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}} \cdot \underset{0}{\underset{\vee}{c}}$$

$$\implies y(x) = c\, e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}} \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

<u>Oss</u> Queste soluzioni si prolungano in modo continuo a 0.

2) Ora $c = c(x)$ e cerco soluzione $y(x) = c(x)\, e^{-\frac{1}{2x^2}}$

$$y' = c' e^{-\frac{1}{2x^2}} + c e^{-\frac{1}{2x^2}} \left(-\frac{1}{2}(\cdot 2)\frac{1}{x^3}\right)$$

sostituisco nell' equazione

$$c' e^{-\frac{1}{2x^2}} + \cancel{c e^{-\frac{1}{2x^2}} \frac{1}{x^3}} - \cancel{\frac{1}{x^3} c e^{-\frac{1}{2x^2}}} + \frac{1}{x^3} = 0$$

$$\Rightarrow c' = -\frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{2x^2}}$$

Integro su $[x_0, x]$

$$c(x) = c(x_0) - \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t^3} e^{\frac{1}{2t^2}}\, dt$$

$$= c(x_0) + \left[e^{\frac{1}{2t^2}} \right]_{t=x_0}^{t=x}$$

$$= \underset{\in \mathbb{R}}{c_1(x_0)} + e^{\frac{1}{2x^2}}$$

Trovo

$$y(x) = \left(c_1 + e^{\frac{1}{2x^2}}\right) e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}} = \underset{\in \mathbb{R}}{c_1} e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}} + 1$$

<u>oss</u> $\exists \lim_{x \to 0} y(x) = 1$

<u>conclusione 1</u> $\alpha \neq 1 \Rightarrow \nexists$ soluzioni

<u>conclusione 2</u> Per $\alpha = 1$ si trova una famiglia a 2 parametri di soluzioni:

$$\underset{C^1(\mathbb{R})}{y(x)} = \begin{cases} c_+ e^{-\frac{1}{2x^2}} + 1 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ c_- e^{-\frac{1}{2x^2}} + 1 & x < 0 \end{cases} \qquad c_+, c_- \in \mathbb{R}$$

<u>oss</u> Esempio di tipo omogeneo

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Qui si pone sempre $y = x z$ ← nuova incognita

$$z + x z' = f(z) \iff z' = \frac{f(z) - z}{x}$$

è a variabili separabili

Integrando tale equazione su un intervallo $(x_0, x) \subset I$ otteniamo

$$c(x) = c(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt,$$

e dunque troviamo

$$y(x) = \Big(c(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt\Big)\mathrm{e}^{-A(x)}, \quad x \in I, \tag{7.2.37}$$

dove $c(x_0) \in \mathbb{R}$ è un numero reale. Per ogni scelta di tale numero, la funzione (7.2.38) verifica l'equazione differenziale (7.2.33).

Il numero $c(x_0)$ si può determinare imponendo che l'integrale generale y verifichi la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$. Si ottiene $c(x_0) = y_0\mathrm{e}^{A(x_0)}$. Dunque otteniamo la *formula di rappresentazione* per la soluzione del Problema di Cauchy:

$$y(x) = \Big(y_0\mathrm{e}^{A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt\Big)\mathrm{e}^{-A(x)}, \quad x \in I, \tag{7.2.38}$$

Nel prossimo teorema proviamo che il metedo seguito rileva in effetti l'*unica* soluzione del problema di Cauchy.

Teorema 7.2.1. Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$, $a, b \in C(I)$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Allora la funzione (7.2.38) risolve in modo unico il Problema di Cauchy (7.2.33)+(7.2.34).

Dim. Che la funzione (7.2.38) risolva il problema è un conto che ripercorre a ritroso l'argomento euristico. Proviamo che questa soluzione è l'unica.

Sia $z \in C^1(I)$ una soluzione dell'equazione differenziale (7.2.33) e consideriamo la funzione ausiliaria

$$w(x) = \mathrm{e}^{A(x)}z(x) - \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt,$$

dove A è una primitiva di a. Dal momento che sull'intervallo I risulta

$$w' = (az + z')\mathrm{e}^{A} - b\mathrm{e}^{A} = 0,$$

per il Teorema di Lagrange la funzione w è costante su I, ovvero esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $w(x) = k \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in I$. Dunque, si ha

$$z(x) = \Big(k + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt\Big)\mathrm{e}^{-A(x)}.$$

D'altra parte, se z verifica anche la condizione iniziale $z(x_0) = y_0$ deve essere $k = y_0\mathrm{e}^{A(x_0)}$ e quindi z coincide con la funzione in (7.2.38). $\square$

3. Equazioni differenziali a variabili separabili

Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ due intervalli aperti e siano $f \in C(I)$ e $g \in C(J)$ due funzioni continue. Cerchiamo le soluzioni dell'equazione differenziale del primo ordine

$$y' = f(x)g(y), \quad x \in I, \tag{7.3.39}$$

per qualche intervallo $I_1 \subset I$. Una simile equazione si dice *a variabili separabili*. Eventualmente, fissati un punto $x_0 \in I$ e un valore $y_0 \in J$ possiamo prescrivere la condizione iniziale

$$y(x_0) = y_0. \tag{7.3.40}$$

Il problema (7.3.39)+(7.3.40) si chiama *Problema di Cauchy*.

Osserviamo preliminarmente che se $g(y_0) = 0$ allora la funzione costante $y(x) = y_0$, $x \in I$, è certamente una soluzione dell'equazione differenziale (7.3.39) che verifica la condizione iniziale.

Siccome vogliamo dividere per g, supponiamo che $g(y_0) \neq 0$. Allora risulta $g \neq 0$ in un intervallo aperto $J_1 \subset J$ che contiene y_0. Possiamo allora dividere e separare le variabili. L'equazione differenziale si riscrive nel seguente modo:

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x), \tag{7.3.41}$$

dove x varia in un intorno $I_1 \subset I$ del punto x_0 tale che $y(x) \in J_1$ per ogni $x \in I_1$.

Sia $G \in C^1(J_1)$ una primitiva di $1/g(y)$ (nella variabile y), definita nell'intervallo J_1 dove risulta $g \neq 0$. La funzione G è strettamente monotona, perchè $G'(y) \neq 0$, e pertanto G è invertibile.

Sia poi $F \in C^1(I)$ una primitiva di f. Integrando l'equazione differenziale (7.3.41) si ottiene

$$G(y(x)) = F(x) + C, \quad x \in I_1. \tag{7.3.42}$$

Qui, $C \in \mathbb{R}$ è una costante che può essere determinata tramite la condizione iniziale, e precisamente $C = G(y_0) - F(x_0)$.

La soluzione del Problema di Cauchy è dunque

$$y(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)), \quad x \in I_1, \tag{7.3.43}$$

dove $G^{-1} : G(J_1) \to J_1$ è la funzione inversa di G. L'intervallo $I_1 \subset I$ è in generale più piccolo di I.

Il precedente argomento rileva due tipi di soluzione dell'equazione differenziale (7.3.39): le soluzioni costanti e le soluzioni per cui $g(y) \neq 0$. Potrebbero, tuttavia, esserci altre soluzioni. Se $g \neq 0$ su J, l'argomento prova che la soluzione è necessariamente della forma (7.3.43).

TEOREMA 7.3.1. Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ due intervalli aperti, $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$, e siano $f \in C(I)$, $g \in C(J)$ tali che $g \neq 0$ su J. Allora il Problema di Cauchy (7.3.39)+(7.3.40) ha una soluzione unica $y \in C^1(I_1)$ data dalla formula (7.3.43), per qualche intervallo aperto $I_1 \subset I$ contenente x_0.

La dimostrazione del teorema è contenuta nell'argomento precedente.

ESEMPIO 7.3.2 (Esempio di Peano). Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2\sqrt{|y(x)|}, & x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{7.3.44}$$

Osserviamo che la funzione $f(y) = 2\sqrt{|y|}$ non è Lipschitziana in un intorno di $y = 0$.

La funzione identicamente nulla $y = 0$ è una soluzione. Questa, tuttavia, non è l'unica soluzione. Una seconda soluzione può essere trovata separando le variabili: $2 = y'/\sqrt{|y|}$. Integrando tale equazione sull'intervallo fra 0 e $x \in \mathbb{R}$ troviamo

$$2x = \int_0^x \frac{y'(t)}{\sqrt{|y(t)|}}dt = \int_0^{y(x)} \frac{1}{\sqrt{|z|}}dz = \begin{cases} 2\sqrt{y(x)}, & \text{se } y(x) > 0 \\ -2\sqrt{-y(x)}, & \text{se } y(x) < 0. \end{cases}$$

Nel cambiamento di variabili $z = y(t)$ abbiamo usato la condizione iniziale $y(0) = 0$. In questo modo, troviamo la soluzione $y \in C^1(\mathbb{R})$

$$y(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

D'altra parte, per ogni coppia di numeri reali $\alpha \leq 0 \leq \beta$, la funzione

$$y_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} (x-\beta)^2 & \text{if } x \geq \beta, \\ 0 & \text{if } \alpha < x < \beta, \\ -(x-\alpha)^2 & \text{if } x \leq \alpha \end{cases}$$

è di classe $C^1(\mathbb{R})$ e risolve il Problema di Cauchy (7.3.44).

Lasciamo poi al lettore il compito di osservare come sia possibile definire soluzioni anche nel caso limite $\alpha = -\infty$ e/o $\beta = +\infty$.

Dunque c'è un "continuo" di soluzioni noto come il "pennello di Peano".

Fra tutte queste soluzioni se ne possono selezionare due speciali: quella massima, che è $y_+(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $y_+(x) = x^2$ per $x \geq 0$, e quella minima, che è $y_-(x) = -x^2$ per $x \leq 0$ e $y_-(x) = 0$ per $x \geq 0$; osserviamo che, con le notazioni precedenti, si ha $y_+ = y_{-\infty,0}$ e $y_- = y_{0,+\infty}$. Per ogni punto del piano $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $y_-(x_0) \leq y_0 \leq y_+(x_0)$ esiste una soluzione y del Problema di Cauchy (7.3.44) tale che $y(x_0) = y_0$. Il "pennello di Peano" ricopre tutta la regione del piano compresa fra la soluzione massima e quella minima.

4. Altre classi di equazioni

Esempio 7.4.1 (Equazioni di tipo omogeneo). Un'equazione differenziale con la seguente struttura

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

si dice di tipo omogeneo. Qui, $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione (continua) su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Con il cambiamento di variabile funzionale $y = xz$, dove z è la nuova funzione incognita, si ottiene $y' = z + xz'$ e l'equazione differenziale si trasforma nella equazione a variabili separabili

$$xz' + z = f(z).$$

Esempio 7.4.2 (Equazione di Bernoulli). Un'equazione differenziale con la struttura

$$y' + a(x)y = b(x)y^\alpha, \quad x \in I, \tag{7.4.45}$$

dove α è un parametro reale tale che $\alpha \neq 0, 1$ si dice di Bernoulli. Ponendo

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad y' = \frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z',$$

l'equazione si trasforma nella seguente equazione lineare

$$z' + (1-\alpha)a(x)z = (1-\alpha)b(x).$$

Esempio 7.4.3 (Equazione di Clairaut). Un'equazione differenziale con la struttura

$$y = xy' + g(y'), \quad x \in I \tag{7.4.46}$$

si dice di Clairaut. Derivandola si ottiene l'equazione

$$y''(x + g'(y')) = 0.$$

Esempio 7.4.4 (Dinamica delle popolazioni). Supponiamo che una certa popolazione $p > 0$ evolva secondo la legge

$$\dot{p}(t) = \gamma p(t)\Big\{1 - \Big(\frac{p(t)}{K}\Big)^{\vartheta}\Big\}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{7.4.47}$$

dove $\dot{p}(t) = \frac{dp(t)}{dt}$ e $t \in \mathbb{R}$ è la variabile temporale. Qui, $\gamma, \vartheta, K > 0$ sono parametri fissati.

L'equazione (7.4.47) è un tipico esempio di equazione di popolazione. L'equazione è di Bernoulli e può essere integrata esplicitamente.

5. Problema di Cauchy: Esistenza e unicità locale nell'ipotesi Lipschitz

In $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, introduciamo le coordinate $x \in \mathbb{R}$ and $y \in \mathbb{R}^n$. Sia poi $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto e sia $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ una funzione continua. Dato un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ consideriamo il *Problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{7.5.48}$$

Abbiamo un *sistema* di n equazioni differenziali del primo ordine con la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$.

Una funzione $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ si dice soluzione del problema se:

i) $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo (aperto) tale che $x_0 \in I$;
ii) $(x, y(x)) \in \Omega$ per ogni $x \in I$;
iii) $y'(x) = f(x, y(x))$ per ogni $x \in I$ (l'equazione differenziale è verificata);
iv) $y(x_0) = y_0$ (il dato iniziale viene assunto).

Integrando l'equazione differenziale $y' = f(x,y)$ sull'intervallo con estremi x_0 e x otteniamo l'equazione integrale

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt = Ty(x), \tag{7.5.49}$$

dove $y \mapsto Ty$ è un'applicazione definita in un opportuno spazio funzionale. Una soluzione del Problema di Cauchy è dunque un punto fisso dell'applicazione T. D'altra parte, se una funzione continua y risolve l'equazione di punto fisso (7.5.49) allora y è di classe C^1 per il Teorema fondamentale del calcolo integrale e risolve il Problema di Cauchy (7.5.48).

Fissiamo lo spazio funzionale. Per $\delta > 0$, si consideri lo spazio vettoriale reale

$$V = C([x_0 - \delta, x_0 + \delta]; \mathbb{R}^n). \tag{7.5.50}$$

OSS (eq. di Bernoulli). Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0,1$. Considero

$$y' + a(x)\, y = b(x)\, y^{\alpha}$$

Sostituzione standard

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}} \iff y' = \frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z'$$

Sostituisco

$$\frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z' + a(x)\, z^{\frac{1}{1-\alpha}} = b(x)\, z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (1-\alpha)$$

$$z' + (1-\alpha)\, z^{\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha}} = b(x)\, z^{\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$z' + (1-\alpha) z = (1-\alpha)\, b(x)$$

è equazione lineare.

Teorema di esistenza e unicità locale delle soluzioni del PC

$A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $(x_0, y_0) \in A$,

$f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Consideriamo il PC:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & \text{ED} \\ y(x_0) = y_0 & \text{CI} \end{cases}$$

$\mathbb{R} \supset I$, $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$

Una $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ è una soluzione del PC se

1) $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto, $x_0 \in I$

2) $(x, y(x)) \in A \quad \forall\, x \in I$

3) $y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall\, x \in I$

4) $y(x_0) = y_0$

Integro tra $[x_0, x]$ l'ED

$$y(x) = \underset{\substack{\| \\ y_0}}{y(x_0)} + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \qquad x \in \text{intorno di } x_0$$

Sia T l'applicazione $y \longmapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$.

Vogliamo impostare un argomento di punto fisso.

Fissiamo $\delta > 0$ e considero $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Poi fissiamo anche $\varepsilon > 0$

e consideriamo

$$X = \{ y \in C(\underbrace{[x_0-\delta, x_0+\delta]}_{= I}; \mathbb{R}^n) : |y(x) - y_0| \leq \varepsilon \quad \forall\, x \in I \}$$

con $\|y\| = \max_{x \in I} |y(x)|$ e $y(x_0) = y_0$

$$X = C(I;\mathbb{R}^n) \cap \{\|y(x)-y_0\| \leq \varepsilon\} \cap \{y(x_0)=y_0\}$$

è spazio metrico completo.

Dobbiamo controllare che:

1) $T: X \longrightarrow X$ ben definita

2) $T^k: X \longrightarrow X$ è contrazione $\exists\, k \in \mathbb{N}$

<u>def</u> Siano $A \subset \mathbb{R}^n = \overset{x}{\overset{\cap}{\mathbb{R}}} \times \overset{y}{\overset{\cap}{\mathbb{R}}}{}^{n+1}$ un aperto ed $f: A \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Diciamo che f è **localmente di Lipschitz in y** se $\forall\, K \subset A$ compatto esiste $L < \infty$ tc

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2| \quad \forall\ (x,y_1),(x,y_2) \in K$$

TEOREMA Siano $f \in C(A,\mathbb{R}^n)$ loc. Lipschitz in y, $(x_0,y_0) \in A$. Allora il (PC)

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

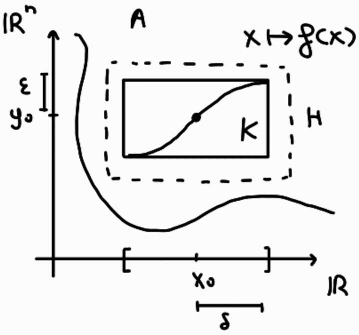
ha una soluzione unica $y \in C^1([x_0-\delta, x_0+\delta]; \mathbb{R}^n)$ per un $\delta > 0$.

Inoltre questo $\delta > 0$ è uniforme per (x_0,y_0) in un compatto $\subset A$.

la scelta di δ è indipendente da x_0 e y_0, fintanto che appartengono a un compatto $K \subset A$

<u>dim</u> Fisso $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ tali che

$$K = ([x_0-\delta, x_0+\delta] \times \{y \in \mathbb{R}^n : |y-y_0| \leq \varepsilon\}) \subset A$$



Poi fisso anche $H \subset A$ compatto e poi $K \subset \mathrm{int}(H)$

Ora $f \in C(H,\mathbb{R}^n) \Rightarrow \max\limits_{(x,y)\in H} |f(x,y)| = M < \infty$

Inoltre $\exists\ L < \infty$ tc

$$|f(x,y) - f(x,z)| \leq L\,|y-z| \quad \forall\ (x,y),(x,z) \in H$$

Introduciamo la trasformazione integrale

integrale a valori vettoriali: stiamo integrando coordinata per coordinata

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

Prendiamo

$$y \in \{y \in C(I;\mathbb{R}^n) : y(x_0) = y_0,\ |y(x) - y_0| \leq \varepsilon \quad \forall\, x \in I\} =: X$$

Fissiamo la norma $\|y\| = \max_{x \in I} |y(x)|$.

Ora X è uno SM completo. Vorrei che

$$T : X \longrightarrow X$$

controllo: $$|Ty(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \right|$$

la dis. triang. per integrali funziona anche nel caso vettoriale

norma vettoriale!

altrimenti l'integrale potrebbe essere negativo e non va bene perché $\geq |Ty(x_0) - y_0|$

$$\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|\,dt, \qquad x \geq x_0$$

di base andrebbe il valore assoluto anche fuori: in questo modo lo evito

$$\underset{H}{\cap}$$

scelgo δ tale che

$$\leq M(x - x_0) \underset{x \in I}{\leq} \delta M \leq \varepsilon$$

Dunque T è ben definita.

Voglio vedere se T oppure $T^k = \underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{k \text{ volte}}$ è una contrazione.

$$\|Ty - Tz\| = \max_{x \in I} |Ty(x) - Tz(x)|$$

Siano $y, z \in X$: $$|Ty(x) - Tz(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} \big(f(t, y(t)) - f(t, z(t))\big)\,dt \right|$$

stesso motivo sopra

$$\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, z(t))|\,dt, \quad x \geq x_0$$

hp di Lipschitz

$$\leq L \int_{x_0}^{x} |y(t) - z(t)|\,dt$$

passo al sup su t

$$\leq L \|y - z\| \int_{x_0}^{x} 1\,dt$$

(*)

$$\leq L \|y - z\| (x - x_0)$$

$$\leq L\delta \|y - z\|$$

scelgo δ t.c. $L\delta < \frac{1}{2}$

$$\leq \frac{1}{2} \|y - z\|$$

Questo conclude la dimostrazione, ma δ non dipende da L, come sembra dai passaggi sopra; dipende solo da M.

Da capo.

$$|T^2 y(x) - T^2 z(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, Ty(t)) - f(t, Tz(t))|\,dt$$

hp di Lipschitz

$$\leq \int_{x_0}^{x} L\,|Ty(t) - Tz(t)|\,dt$$

$$\overset{(*)}{\leq} L^2 \|y-z\| \int_{x_0}^{x} (t-x_0)\, dt = L^2 \|y-z\| \frac{(x-x_0)^2}{2}$$

Iterando trovo

$$|T^k y(x) - T^k z(x)| \leq L^k \|y-z\| \frac{(x-x_0)^k}{k!} \leq \frac{(L\delta)^k}{k!} \|y-z\|$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(L\delta)^k}{k!} = 0 \Rightarrow \frac{(L\delta)^k}{k!} \text{ è definitivamente } < \frac{1}{2}$$

Per k grande

$$\|T^k y - T^k z\| \leq \frac{1}{2} \|y-z\|$$

dunque per il corollario di Banach T ha un unico p.to fisso $y \in X$, ovvero

$$y(x) = Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

$$\Rightarrow y \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \text{ e } y' = f(x, y(x)) \quad \forall x \in I \qquad \square$$

<u>corollario</u> Sia $f \in C(A, \mathbb{R}^n)$ tale che $\forall K \subset A$ compatto $\exists L < \infty$ tale che

$$|f(x,y) - f(x,z)| \leq L\, |y-z| \quad \forall (x,y), (x,z) \in K$$

Sia poi $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in A$. Allora il (PC)

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

ha una soluzione unica $y \in C^n([x_0-\delta, x_0+\delta])$ per $\delta > 0$.

<u>oss</u> Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua

Supponiamo che esistano

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \in C(A, \mathbb{R}) \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

Allora f è loc. di Lipschitz nelle variabili y.

Infatti $K = I \times \{|y - y_0| \leq r\} \subset A$ compatto. Allora th del valor medio:

$$f_i(x,y) - f_i(x,z) = \langle \nabla_y f_i(x, \underset{[y,z]}{\underset{\cap}{y^*}}), y - z \rangle$$

l'equazione si trasforma nella seguente equazione lineare

$$z' + (1-\alpha)a(x)z = (1-\alpha)b(x).$$

Esempio 7.4.3 (Equazione di Clairaut). Un'equazione differenziale con la struttura

$$y = xy' + g(y'), \quad x \in I \tag{7.4.46}$$

si dice di Clairaut. Derivandola si ottiene l'equazione

$$y''(x + g'(y')) = 0.$$

Esempio 7.4.4 (Dinamica delle popolazioni). Supponiamo che una certa popolazione $p > 0$ evolva secondo la legge

$$\dot{p}(t) = \gamma p(t)\Big\{1 - \Big(\frac{p(t)}{K}\Big)^{\vartheta}\Big\}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{7.4.47}$$

dove $\dot{p}(t) = \frac{dp(t)}{dt}$ e $t \in \mathbb{R}$ è la variabile temporale. Qui, $\gamma, \vartheta, K > 0$ sono parametri fissati.

L'equazione (7.4.47) è un tipico esempio di equazione di popolazione. L'equazione è di Bernoulli e può essere integrata esplicitamente.

5. Problema di Cauchy: Esistenza e unicità locale nell'ipotesi Lipschitz

In $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, introduciamo le coordinate $x \in \mathbb{R}$ and $y \in \mathbb{R}^n$. Sia poi $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto e sia $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ una funzione continua. Dato un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ consideriamo il *Problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{7.5.48}$$

Abbiamo un *sistema* di n equazioni differenziali del primo ordine con la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$.

Una funzione $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ si dice soluzione del problema se:

i) $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo (aperto) tale che $x_0 \in I$;
ii) $(x, y(x)) \in \Omega$ per ogni $x \in I$;
iii) $y'(x) = f(x, y(x))$ per ogni $x \in I$ (l'equazione differenziale è verificata);
iv) $y(x_0) = y_0$ (il dato iniziale viene assunto).

Integrando l'equazione differenziale $y' = f(x,y)$ sull'intervallo con estremi x_0 e x otteniamo l'equazione integrale

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt = Ty(x), \tag{7.5.49}$$

dove $y \mapsto Ty$ è un'applicazione definita in un opportuno spazio funzionale. Una soluzione del Problema di Cauchy è dunque un punto fisso dell'applicazione T. D'altra parte, se una funzione continua y risolve l'equazione di punto fisso (7.5.49) allora y è di classe C^1 per il Teorema fondamentale del calcolo integrale e risolve il Problema di Cauchy (7.5.48).

Fissiamo lo spazio funzionale. Per $\delta > 0$, si consideri lo spazio vettoriale reale

$$V = C([x_0 - \delta, x_0 + \delta]; \mathbb{R}^n). \tag{7.5.50}$$

Sappiamo che V munito della sup-norma

$$\|y\| = \max_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]} |y(x)|, \quad y \in V, \tag{7.5.51}$$

è uno spazio di Banach. Per ogni $\varepsilon > 0$, il sottoinsieme X di V

$$X = \big\{y \in V : y(x_0) = y_0,\ \|y - y_0\| \le \varepsilon\big\} \tag{7.5.52}$$

è chiuso in quanto entrambe le condizioni $y(x_0) = y_0$ e $\|y - y_0\| \le \varepsilon$ sono conservate dalla convergenza uniforme (in effetti basta quella puntuale). Di conseguenza, lo spazio metrico (X, d) è completo rispetto alla distanza $d(y, z) = \|y - z\|$.

Vedremo che per un'opportuna scelta di δ ed ε l'applicazione $T : X \to X$

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \tag{7.5.53}$$

è ben definita, ovvero risulta effettivamente $Ty \in X$ per ogni $y \in X$.

Definizione 7.5.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto. Diciamo che una funzione $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ è localmente di Lipschitz in y se per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2| \tag{7.5.54}$$

per ogni $(x, y_1), (x, y_2) \in K$.

Teorema 7.5.2 (Esistenza e unicità locale). Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto, $(x_0, y_0) \in \Omega$, e sia $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ una funzione localmente di Lipschitz in y. Allora esiste $\delta > 0$ tale che il Problema di Cauchy (7.5.48) ha una soluzione unica $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ nell'intervallo $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Inoltre, la scelta di δ è uniforme per (x_0, y_0) in un compatto di Ω.

Dim. Siano $\delta > 0$ ed $\varepsilon > 0$ tali che $K = [x_0-\delta, x_0+\delta]\times\{y \in \mathbb{R}^n : |y-y_0| \le \varepsilon\} \subset \Omega$. Sia $H \subset \Omega$ un insieme compatto tale che $K \subset \mathrm{int}(H)$. Dal momento che f è continua su H, il numero

$$M = \sup_{(x,y)\in H} |f(x, y)| < \infty$$

è finito. Sia X l'insieme introdotto in (7.5.52) e sia T l'applicazione (7.5.53). Per ogni $y \in X$ abbiamo, per ogni $x \in I$,

$$|Ty(x) - y_0| \le \Big|\int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))| dt\Big| \le M|x - x_0| \le \delta M.$$

In effetti, risulta $(t, y(t)) \in K \subset H$ per ogni $t \in I$. Scegliendo eventualmente una costante $\delta > 0$ più piccola (questa scelta non modifica M), possiamo supporre che $\delta M \le \varepsilon$. Con una tale scelta, si ha $Ty \in X$ per ogni $y \in X$. Quindi $T : X \to X$ è ben definita. La scelta di $\delta > 0$ è indipendente da x_0 e y_0, fintanto che $K \subset \mathrm{int}(H)$.

Dimostriamo che l'applicazione $T : X \to X$ ha un unico punto fisso. È sufficiente mostrare che esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che l'applicazione iterata T^k è una contrazione. Siano

$y, \bar{y} \in X$ e $x \in I$. Abbiamo (ad esempio con $x \geq x_0$)

$$\begin{aligned}|Ty(x) - T\bar{y}(x)| &= \Big| \int_{x_0}^{x} \big(f(t, y(t)) - f(t, \bar{y}(t)\big) dt\Big| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, \bar{y}(t)| dt \\ &\leq L \int_{x_0}^{x} |y(t) - \bar{y}(t)| dt \leq L|x - x_0| \cdot \|y - \bar{y}\|.\end{aligned}$$

Qui, L è la costante di Lipschitz per f relativa al compatto H. Analogamente, si ha

$$\begin{aligned}|T^2y(x) - T^2\bar{y}(x)| &= \Big| \int_{x_0}^{x} (f(t, Ty(t)) - f(t, T\bar{y}(t)) dt\Big| \\ &\leq L \int_{x_0}^{x} |Ty(t) - T\bar{y}(t)| dt \\ &\leq L^2 \|y - \bar{y}\| \int_{x_0}^{x} (t - x_0) dt \leq L^2 \frac{(x - x_0)^2}{2} \|y - \bar{y}\|.\end{aligned}$$

Per induzione, troviamo per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $x \in I$

$$|T^k y(x) - T^k \bar{y}(x)| \leq \frac{L^k |x - x_0|^k}{k!} \|y - \bar{y}\|,$$

e questo implica

$$\|T^k y - T^k \bar{y}\| \leq \frac{(L\delta)^k}{k!} \|y - \bar{y}\|.$$

Dal momento che

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(L\delta)^k}{k!} = 0,$$

allora esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{(L\delta)^k}{k!} < 1.$$

Per un tale k, l'applicazione T^k è una contrazione. Per il Teorema 4.1.3, T ha un unico punto fisso $y \in X$. Inoltre, risulta $y \in C^1([x_0 - \delta, x_0 + \delta]; \mathbb{R}^n)$ e y risolve il Problema di Cauchy (7.5.48).

Resta da dimostrare che, se $\tilde{y} \in C^1([x_0 - \delta, x_0 + \delta]; \mathbb{R}^n)$ è una qualunque soluzione del Problema di Cauchy (7.5.48), allora $\tilde{y} \in X$: in tal modo sarà dimostrato che $\tilde{y} = y$. Dobbiamo dunque dimostrare che

$$\forall\, x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \qquad |\tilde{y}(x) - y_0| \leq \varepsilon.$$

Supponiamo per assurdo che esista $x_1 \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ tale che $|\tilde{y}(x_1) - y_0| > \varepsilon$. Senza perdere di generalità possiamo supporre che $(t, \tilde{y}(t)) \in H$ per ogni t compreso tra x_0 ed x_1: in tal modo

$$|\tilde{y}(x_1) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x_1} f(t, \tilde{y}(t)) dt \right| \leq M|x_1 - x_0| \leq M\delta \leq \varepsilon,$$

contraddizione. □

L'Osservazione 7.1.2 porta immediatamente al seguente enunciato.

Corollario 7.5.3. Siano $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto e $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in A$; supponiamo che $f : A \to \mathbb{R}$ sia una funzione continua tale che per ogni compatto $K \subset A$ esista $L \geq 0$ tale che

$$|f(x,p) - f(y,q)| \leq L|p-q| \qquad \forall\, (x,p),(x,q) \in K.$$

Allora esiste $\delta > 0$ tale il problema

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $y \in C^n([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$.

Osservazione 7.5.4. Sia $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ una funzione tale che esistano continue le derivate parziali

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \in C(\Omega), \quad i,j = 1, \dots, n.$$

Allora la funzione f è localmente di Lipschitz in y. Supponiamo ad esempio che sia $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ e consideriamo un compatto $K = [a,b] \times \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| \leq r\}$ per qualche $-\infty < a < b < \infty$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ed $r > 0$. Se $(x, y_1), (x, y_2) \in K$ allora per il Teorema del valor medio esiste $t^* \in [0,1]$ tale che

$$\begin{aligned} f_i(x,y_1) - f_i(x,y_2) &= \langle \nabla_y f_i(x, y_1 + t^*(y_2 - y_1)), y_2 - y_1 \rangle \\ &\leq |\nabla_y f_i(x, y_1 + t^*(y_2 - y_1))||y_2 - y_1| \leq M|y_2 - y_1|, \end{aligned}$$

dove ∇_y indica il gradiente nelle sole variabili y e

$$M = \max_{(x,y)\in K} |\nabla_y f_i(x,y)| < \infty,$$

e l'affermazione segue.

6. Soluzioni massimali e criterio di prolungamento

Sia $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ una funzione che verifica la condizione di Lipschitz (7.5.54) e sia $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Proposizione 7.6.1. Nelle ipotesi del Teorema 7.5.2, siano I_1 e I_2 due intervalli aperti contenenti x_0 e supponiamo che $y_1 \in C^1(I_1; \mathbb{R}^n)$ e $y_2 \in C^1(I_2; \mathbb{R}^n)$ siano soluzioni del Problema di Cauchy (7.5.48). Allora abbiamo $y_1 = y_2$ su $I_1 \cap I_2$.

Dim. L'insieme $A = \{x \in I_1 \cap I_2 : y_1(x) = y_2(x)\}$ è relativamente chiuso in $I_1 \cap I_2$ in quanto y_1 e y_2 sono continue. Mostriamo che A è anche aperto in $I_1 \cap I_2$. Dal momento che $I_1 \cap I_2$ è connesso, seguirà che $A = I_1 \cap I_2$.

Siano dunque $\bar{x}_0 \in A$ e $\bar{y}_0 = y_1(\bar{x}_0) = y_2(\bar{x}_0)$. Per il Teorema 7.5.2 esiste un $\delta > 0$ tale che il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(\bar{x}_0) = \bar{y}_0 \end{cases} \tag{7.6.55}$$

ha una soluzione unica $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ con $I = [\bar{x}_0 - \delta, \bar{x}_0 + \delta]$. Per $\delta > 0$ piccolo, si ha $I \subset I_1 \cap I_2$. Segue allora che $y = y_1 = y_2$ in I, e perciò $I \subset A$. □

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| \leq L < \infty \text{ su } K$$

$$|f_i(x,y) - f_i(x,z)| = |\langle \nabla_y f_i(x, \underset{[y,z]}{y^*}), y-z\rangle| \leq L\,|y-z|$$

Soluzioni massimali

$f \in C(\underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^{n+1} \\ \text{aperto}}}{A}; \mathbb{R}^n)$ loc di Lipschitz in y

$(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$(x_0, y_0) \in A$

$$PC \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

def X sm si dice **CONNESSO** se $X = A_1 \cup A_2$, A_1, A_2 aperti e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$\Rightarrow A_1 = \emptyset$ o $A_2 = \emptyset$

esempio $\mathbb{R}^n$ è connesso

prop $I \subseteq \mathbb{R}$ è connesso $\Leftrightarrow$ I = intervallo

lemma Siano $y_1 \in C^1(I_1; \mathbb{R}^n)$, $y_2 \in C^1(I_2; \mathbb{R}^n)$ due soluzioni del (PC), con $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ aperti, $x_0 \in I_1 \cap I_2$. Allora $y_1 \equiv y_2$ su $I_1 \cap I_2$.

dim $I = I_1 \cap I_2$ è un intervallo (aperto). L'insieme

$$x_0 \in \{x \in I \mid y_1(x) = y_2(x)\} \neq \emptyset$$

è chiuso in I perché $y_1 - y_2$ è continua. Se è anche aperto, allora siccome I è connesso, segue che $\{x \in I \mid y_1(x) = y_2(x)\} = I$, dunque $y_1 \equiv y_2$ in I.

Sia $\bar{x} \in \{x \in I : y_1(x) = y_2(x)\}^{\leq X}$. Il PC $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(\bar{x}) = \bar{y} := y_1(\bar{x}) = y_2(\bar{x}) \end{cases}$

Per il teorema di esistenza ed unicità locale $\exists\, \delta > 0$ tale che su $[\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta] \subset I$ il PC ha soluzione unica

$\Rightarrow y_1 = y_2$ su $[\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta)$

$\Rightarrow \bar{x}$ p.to interno di $\{x \in I : y_1(x) = y_2(x)\}$

$\Rightarrow$ L'insieme è aperto $\square$

Considero ora

$$\mathcal{A} = \{(J, y) : J \subset \mathbb{R} \text{ intervallo aperto, } x_0 \in J;\ y \in C^1(J, \mathbb{R}^n) \text{ sol. del PC}\}$$

Sono ben definiti

- $\underset{x_0}{\overset{\in}{I}} = \bigcup_{(J,y) \in \mathcal{A}} J$ intervallo aperto

- $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ se $y(x) = y_J(x)$ se $x \in J$

<u>def</u> Chiamiamo la $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ appena costruita la SOLUZIONE MASSIMALE del PC

<u>TEOREMA</u> (criterio di prolungamento o teorema di fuga dai compatti).

Siano $-\infty \le a_0 < b_0 \le +\infty$. $I_0 = (a_0, b_0)$, $A = I_0 \times \mathbb{R}^n$, $f \in C(A; \mathbb{R}^n)$ loc. di Lipschitz in y; $(x_0, y_0) \in A$. Infine sia $y \in C^1((a,b), \mathbb{R}^n)$ la soluzione massimale nel (PC) $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

con $a_0 \le a < b \le b_0$.

potrebbero essere entrambe

Allora deve essere vera almeno una di queste due affermazioni:

se non è vera 1), allora è vera 2)

1) $b = b_0$

2) $\lim_{x \to b^-} \underbrace{|\underbrace{y(x)}_{\text{vettore}}|}_{\text{norma} \Rightarrow \text{scalare}} = +\infty$ ⇝ si sviluppa un "asintoto verticale"

Analogo per a.

successione di punti crescente che tende a b

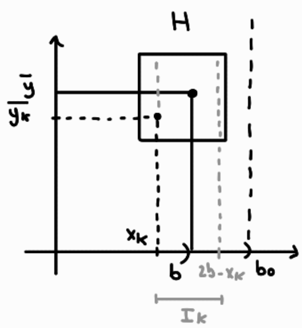
<u>dim</u> PA sia $b < b_0$ ed esista $x_k \underset{k \to +\infty}{\uparrow} b$ tale che

$|y(x_k)| \le M_0 < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

eventualmente estraendo una sottosuccessione

HB $\Rightarrow$ WLOG posso supporre che

$$\bar{y}_k = y(x_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} \bar{y} \in \mathbb{R}^n.$$



Considero $(*)\ \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_k) = \bar{y}_k \end{cases}$

Fisso $H \subset A$ compatto tale che $(b, \bar{y}) \in \text{int}(H)$

Sia ora $M = \max_H |f(x,y)| < \infty$.

Considero $\underbrace{[x_k, 2b - x_k]}_{= I_k}$: il punto medio è b.

Fisso $\varepsilon > 0$ e sia poi

$$X = \{ y \in C^1(I_k; \mathbb{R}^n) : y(x_k) = \bar{y}_k, \ |y(x) - \bar{y}_k| \leq \varepsilon \ \forall x \in I_k \}$$

Definisco $T : X \longrightarrow X$ devo verificare che va in X, non ne sono sicura $\Longrightarrow |Tz(x) - \bar{y}_k| = \left| \int_{x_k}^x f(t, z(t)) \, dt \right|$

$x \in I_k$, $\geq x_k$

$\leq \int_{x_k}^x |f(t, z(t))| \, dt$

$\leq M(x - x_k) \leq M(2b - 2x_k)$

$$Tz(x) = \bar{y}_k + \int_{x_k}^x f(t, z(t)) \, dt$$

Se impongo

$$M(\underbrace{2b - 2x_k}_{= \delta \to 0}) \leq \varepsilon$$

vera definitivamente

per k sufficientemente grande

allora $T : X \longrightarrow X$.

analogo procedimento a quello del teorema di esistenza e unicità locale

$\Longrightarrow$ esiste ! $z \in C^1(I_k; \mathbb{R}^n)$ soluzione di $(*)$

Ma per $x \in [x_k, b)$ anche y risolve $(*)$ e $y = z$ su $[x_k, b)$

Quindi z prolunga y oltre b. $\lightning$ perché y massimale $\square$

LEMMA (Gronwall) siano $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$, $\varphi \in C(I)$, $\varphi \geq 0$

tale che

$$0 \leq \varphi(x) \leq \alpha + \beta \int_{x_0}^x \varphi(t) \, dt \quad \forall x \in I, \ x \geq x_0$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \geq 0$. Allora

$$\varphi(x) \leq \alpha e^{\beta(x - x_0)} \quad \forall x \in I, x \geq x_0$$

dim considero

$$\Phi(x) = \alpha + \beta \int_{x_0}^x \varphi(t) \, dt$$

$$\Phi'(x) = \underset{\geq 0}{\beta \varphi(x)} \underset{(hp)}{\leq} \beta \Phi(x)$$

Sia

$$\Psi(x) = e^{-\beta(x - x_0)} \Phi(x)$$

$$\Psi'(x) = -\beta e^{-\beta(x - x_0)} \Phi(x) + e^{-\beta(x - x_0)} \Phi'$$

$$= e^{-\beta(x - x_0)} (\underbrace{\Phi'(x) - \beta \Phi(x)}_{\leq 0}) \leq 0$$

Quindi $\Psi(x) \downarrow x \geq x_0$. (decresce)

$$\underset{= e^{-\beta(x - x_0)} \Phi(x)}{\Psi(x)} \overset{x \geq x_0}{\leq} \Psi(x_0) = \alpha$$

$$\Longrightarrow \varphi(x) \leq \Phi(x) \overset{x \geq x_0}{\leq} \alpha e^{\beta(x - x_0)} \quad \square$$

TEOREMA (Soluzioni globali). Siano $A = (a_0, b_0) \times \mathbb{R}^n$ con $-\infty \leq a_0 < b_0 \leq +\infty$, $f \in C(A, \mathbb{R}^n)$ loc. di Lipschitz in y; $(x_0, y_0) \in A$. Supponiamo che $\forall K \subset (a_0, b_0)$ compatto $\exists\ c > 0$ tc

"condizione di crescita sublineare nella y"

$$|f(x,y)| \leq c(1 + |y|) \quad \forall x \in K, \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Allora la soluzione massimale del (PC)

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

è unica e definita per ogni $x \in (a_0, b_0)$.

<u>dim</u> Sia $y \in C^1((a,b); \mathbb{R}^n)$ soluzione massimale con $a_0 \leq a < b \leq b_0$

PA sia $b < b_0$. Allora deve essere che

$$\lim_{x \to b^-} |y(x)| = +\infty$$

Trovo una contraddizione. Sia $K = [x_0, b] \subset (a_0, b_0)$ compatto. Avremo che $|f(x,y)| \leq c(1 + |y|) \quad \forall y, \forall x \in K$

Avremo che

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \quad \forall x \in [x_0, b)$$

$$\overset{x \geq x_0}{\Rightarrow} |y(x)| \leq |y_0| + \int_{x_0}^{x} \underbrace{|f(t, y(t))|}_{\leq\, c(1 + |y(t)|)}\, dt$$

$$\leq \underbrace{|y_0| + c(b - x_0)}_{\alpha} + \underbrace{c}_{\beta} \int_{x_0}^{x} |y(t)|\, dt$$

Per il lemma di Gronwall

$$|y(x)| \leq \underbrace{(|y_0| + c(b - x_0))\, e^{c(x - x_0)}}_{\text{limitato per } x \to b^-} \quad \lightning$$

Ma allora deve essere $b = b_0$. Analogamente si ha $a = a_0$. $\square$

<u>esempio</u> $\alpha > 0$. Considera

$$\begin{cases} y' = |y|^{1+\alpha} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Noto $f(x,y) = |y|^{1+\alpha} \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow$ loc. Lipschitz $\overset{\text{th di esistenza e unicità locale}}{\Longrightarrow} \exists!\ y \in C^1((-\delta, \delta)) \quad \exists \delta > 0.$

$y' \geq 0 \Rightarrow y \uparrow$

So che esiste $(a,b) \subset \mathbb{R}$ intervallo massimale di esistenza della sol.

Se ci fosse $\bar{x} < 0$ con $y(\bar{x}) = 0$

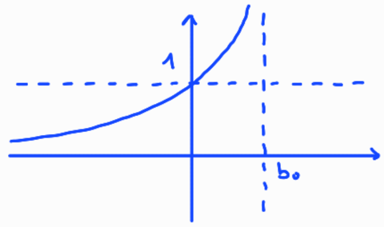
$$\begin{cases} y' = |y|^{1+\alpha} \\ y(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

per il teorema di unicità questo problema ha unica soluzione $y \equiv 0$. $\lightning$ perché $y(0) = 1$

Dunque $0 < y(x) < 1 \quad \forall x < 0$.

th. di prolungamento $\Rightarrow a = -\infty$ (se a fosse finito, lì dovrebbe sviluppare un asintoto, ma $y(x) < 1$)

Rimane b.



Abbiamo un'ed a variabili separabili.

Possiamo dividere per $|y|^{1+\alpha}$ perché non tocca mai l'asse delle x e anche togliere il valore assoluto

$y(x)$ è strettamente crescente perché $y' = |y|^{1+\alpha} \geq 0$ e $y(x) \neq 0 \ \forall x \Rightarrow y' > 0$

$$\frac{y'}{y^{1+\alpha}} = 1$$

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{y(t)^{1+\alpha}} dt \overset{\forall x \in (-\infty, b)}{=} x \iff \int_1^{y(x)} \frac{ds}{s^{1+\alpha}} \overset{\forall x}{=} x$$

$y(t) = s$
$y'(t)\,dt = ds$

$$\iff \left[\frac{s^{-\alpha}}{-\alpha} \right]_{s=1}^{s=y(x)} = x$$

$$\iff \left(-\frac{1}{y(x)^\alpha} + 1 \right) = x \cdot \alpha$$

$$\iff 1 - \alpha x = \frac{1}{y(x)^\alpha} \quad \text{deve essere } > 0$$

$\Rightarrow 1 - \alpha x > 0$

$$x < \frac{1}{\alpha}$$

Sembra essere $b = \frac{1}{\alpha}$

$$\iff \frac{1}{y(x)} = \sqrt[\alpha]{1-\alpha x}$$

$$\iff y(x) = \frac{1}{\sqrt[\alpha]{1-\alpha x}}, \quad x < \frac{1}{\alpha}$$

<u>OSS</u> Quando $\alpha \longrightarrow 0^+$, $\beta \longrightarrow +\infty$

Corollario 7.5.3. Siano $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto e $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in A$; supponiamo che $f : A \to \mathbb{R}$ sia una funzione continua tale che per ogni compatto $K \subset A$ esista $L \geq 0$ tale che

$$|f(x,p) - f(y,q)| \leq L|p-q| \qquad \forall\, (x,p),(x,q) \in K.$$

Allora esiste $\delta > 0$ tale il problema

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $y \in C^n([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$.

Osservazione 7.5.4. Sia $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ una funzione tale che esistano continue le derivate parziali

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \in C(\Omega), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Allora la funzione f è localmente di Lipschitz in y. Supponiamo ad esempio che sia $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ e consideriamo un compatto $K = [a,b] \times \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| \leq r\}$ per qualche $-\infty < a < b < \infty$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ed $r > 0$. Se $(x, y_1), (x, y_2) \in K$ allora per il Teorema del valor medio esiste $t^* \in [0,1]$ tale che

$$\begin{aligned} f_i(x,y_1) - f_i(x,y_2) &= \langle \nabla_y f_i(x, y_1 + t^*(y_2 - y_1)), y_2 - y_1 \rangle \\ &\leq |\nabla_y f_i(x, y_1 + t^*(y_2 - y_1))||y_2 - y_1| \leq M|y_2 - y_1|, \end{aligned}$$

dove ∇_y indica il gradiente nelle sole variabili y e

$$M = \max_{(x,y)\in K} |\nabla_y f_i(x,y)| < \infty,$$

e l'affermazione segue.

6. Soluzioni massimali e criterio di prolungamento

Sia $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ una funzione che verifica la condizione di Lipschitz (7.5.54) e sia $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Proposizione 7.6.1. Nelle ipotesi del Teorema 7.5.2, siano I_1 e I_2 due intervalli aperti contenenti x_0 e supponiamo che $y_1 \in C^1(I_1; \mathbb{R}^n)$ e $y_2 \in C^1(I_2; \mathbb{R}^n)$ siano soluzioni del Problema di Cauchy (7.5.48). Allora abbiamo $y_1 = y_2$ su $I_1 \cap I_2$.

Dim. L'insieme $A = \{x \in I_1 \cap I_2 : y_1(x) = y_2(x)\}$ è relativamente chiuso in $I_1 \cap I_2$ in quanto y_1 e y_2 sono continue. Mostriamo che A è anche aperto in $I_1 \cap I_2$. Dal momento che $I_1 \cap I_2$ è connesso, seguirà che $A = I_1 \cap I_2$.

Siano dunque $\bar{x}_0 \in A$ e $\bar{y}_0 = y_1(\bar{x}_0) = y_2(\bar{x}_0)$. Per il Teorema 7.5.2 esiste un $\delta > 0$ tale che il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(\bar{x}_0) = \bar{y}_0 \end{cases} \tag{7.6.55}$$

ha una soluzione unica $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ con $I = [\bar{x}_0 - \delta, \bar{x}_0 + \delta]$. Per $\delta > 0$ piccolo, si ha $I \subset I_1 \cap I_2$. Segue allora che $y = y_1 = y_2$ in I, e perciò $I \subset A$. □

Sia $\mathscr{A}$ l'insieme di tutte le coppie (J, y_J) dove $J \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto che contiene x_0 e $y_J \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ è una soluzione del Problema di Cauchy (7.5.48). Per il Teorema 7.5.2, abbiamo $\mathscr{A} \neq \emptyset$.

Sia $I \subset \mathbb{R}$ l'intervallo $I = \bigcup J$, dove l'unione è fatta su tutti gli intervalli J tali che $(J, y_J) \in \mathscr{A}$. Sia $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ la funzione definita da

$$y(x) = y_J(x) \quad \text{se} \quad x \in J. \tag{7.6.56}$$

La funzione y è ben definita in quanto per la Proposizione 7.6.1 si ha $y_J = y_{J'}$ su $J \cap J'$. Inoltre, y è una soluzione del Problema di Cauchy (7.5.48).

Definizione 7.6.2 (Soluzione massimale). La funzione y definita in (7.6.56) si chiama *soluzione massimale* del Problema di Cauchy (7.5.48).

Teorema 7.6.3 (Criterio di prolungamento). *Siano $I = (a_0, b_0) \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto con $-\infty \leq a_0 < b_0 \leq +\infty$, $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$, e sia $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ una funzione che verifica la proprietà di Lipschitz locale in y. Se $y \in C^1((a,b); \mathbb{R}^n)$ è la soluzione massimale del Problema di Cauchy (7.5.48), per qualche intervallo $(a,b) \subset (a_0, b_0)$, allora deve valere almeno una delle seguenti due affermazioni (o entrambe):*

i) *$b = b_0$; oppure:*

ii) *$\lim_{x \uparrow b} |y(x)| = \infty$.*

C'è un'affermazione analoga relativa al punto a.

Dim. Per assurdo, supponiamo che $b < b_0$ e che esista una successione $x_k \in (a,b)$, $k \in \mathbb{N}$, tale che

$$\lim_{k \to \infty} x_k = b \quad \text{e} \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} |y(x_k)| \leq M_0,$$

per qualche costante finita $M_0 < \infty$. Ponendo $\bar{y}_k = y(x_k) \in \mathbb{R}^n$ ed eventualmente estraendo una sottosuccessione possiamo supporre che

$$\lim_{k \to \infty} \bar{y}_k = \bar{y}_0$$

per qualche $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Studiamo il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(x) = f(x, z(x)) \\ z(x_k) = \bar{y}_k. \end{cases} \tag{7.6.57}$$

Fissiamo un compatto $H \subset \Omega$ tale che $(b, \bar{y}_0) \in \mathrm{int}(H)$ e poniamo

$$M = \max_{(x,y) \in H} |f(x,y)| < \infty.$$

Per un opportuno $\varepsilon > 0$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande, l'insieme compatto

$$K = [x_k, 2b - x_k] \times \{y \in \mathbb{R}^n : |y - \bar{y}_k| \leq \varepsilon\}$$

è contenuto in H. Consideriamo lo spazio funzionale

$$X = \big\{z \in C([x_k, 2b - x_k]; \mathbb{R}^n) : z(x_k) = \bar{y}_k,\ \|z - \bar{y}_k\| \leq \varepsilon\big\}.$$

Se $k \in \mathbb{N}$ è sufficientemente grande, abbiamo anche $2(b - x_k)M \leq \varepsilon$. Quindi, l'operatore integrale

$$Tz(x) = \bar{y}_k + \int_{x_k}^{x} f(t, z(t))dt$$

trasforma X in se stesso, ovvero $T : X \to X$. Come nella dimostrazione del Teorema 7.5.2, un'opportuna iterazione di T è una contrazione su X e pertanto per il Teorema 4.1.3 esiste un'unica soluzione $z \in C^1([x_k, 2b - x_k]; \mathbb{R}^n)$ del Problema di Cauchy (7.6.57).

D'altra parte, la funzione y risolve il medesimo Problema di Cauchy sull'intervallo $[x_k, b)$ e per l'unicità deve essere $y = z$ su $[x_k, b)$. Questo prova che y può essere prolungata come soluzione del Problema di Cauchy (7.5.48) oltre b. Questo contraddice la massimalità di y. $\square$

7. Lemma di Gronwall e soluzioni globali

In questa sezione proviamo un teorema di esistenza globale delle soluzioni di equazioni differenziali nel caso che la funzione f verifichi una condizione di crescita al più lineare, si veda (7.7.60). A tale scopo occorre la seguente proposizione, nota come Lemma di Gronwall.

LEMMA 7.7.1. *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$ e $\varphi \in C(I)$ una funzione continua non negativa, $\varphi \geq 0$. Se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\alpha, \beta \geq 0$, tali che*

$$\varphi(x) \leq \alpha + \beta \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\, dt, \quad \text{per ogni } x \in I \text{ con } x \geq x_0, \tag{7.7.58}$$

allora

$$\varphi(x) \leq \alpha e^{\beta(x-x_0)} \quad \text{per ogni } x \in I \text{ con } x \geq x_0. \tag{7.7.59}$$

DIM. Sia $\Phi : I \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\Phi(x) = \alpha + \beta \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\, dt, \quad x \in I.$$

Risulta $\Phi \in C^1(I)$ ed inoltre $\Phi'(x) = \beta\varphi(x)$ per ogni $x \in I$, per il Teorema fondamentale del calcolo. Dalla (7.7.58) segue che $\Phi'(x) \leq \beta\Phi(x)$ per $x \in I$, dal momento che $\beta \geq 0$. La funzione $\Psi(x) = e^{-\beta(x-x_0)}\Phi(x)$ verifica allora

$$\Psi'(x) = -\beta e^{-\beta(x-x_0)}\Phi(x) + e^{-\beta(x-x_0)}\Phi'(x) = e^{-\beta(x-x_0)}\big(-\beta\Phi(x) + \Phi'(x)\big) \leq 0$$

e $\Psi(x_0) = \Phi(x_0) = \alpha$. Segue che $\Psi(x) \leq \alpha$ per $x \geq x_0$, ovvero

$$\Phi(x) \leq \alpha e^{\beta(x-x_0)}$$

per ogni $x \in I$ con $x \geq x_0$. Questo implica (7.7.59), dal momento che $\varphi(x) \leq \Phi(x)$, per la (7.7.58). $\square$

TEOREMA 7.7.2 (Soluzioni globali). *Siano $I = (a_0, b_0)$ con $-\infty \leq a_0 < b_0 \leq \infty$, $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$, e sia $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ una funzione continua con la proprietà di Lipschitz locale in y (7.5.54). Supponiamo che per ogni compatto $K \subset I$ esista una costante $C \geq 0$ tale che*

$$|f(x, y)| \leq C(1 + |y|), \quad \text{per ogni } x \in K \text{ e } y \in \mathbb{R}^n. \tag{7.7.60}$$

Allora il Problema di Cauchy (7.5.48), con $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$, ha un'unica soluzione globale definita su tutto I.

DIM. Sia $y \in C^1(J;\mathbb{R}^n)$ la soluzione massimale del Problema di Cauchy (7.5.48), con $J = (a,b) \subset I$. Supponiamo per assurdo che $b < b_0$. Allora, per il Teorema 7.6.3 si ha

$$\lim_{x \uparrow b} |y(x)| = \infty. \tag{7.7.61}$$

Siano $K = [x_0, b]$ e $C > 0$ tali che valga la (7.7.60). Dall'identità

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \quad x \in J,$$

otteniamo per $x \in J$ con $x \geq x_0$

$$|y(x)| \leq |y_0| + C\int_{x_0}^{x} (1 + |y(t)|)dt \leq |y_0| + C(b - x_0) + C\int_{x_0}^{x} |y(t)|\,dt.$$

Dal Lemma di Gronwall segue che

$$|y(x)| \leq \{|y_0| + C(b - x_0)\}\mathrm{e}^{C(x-x_0)}, \quad x \in (x_0, b),$$

e perciò la (7.7.61) non può valere. □

ESEMPIO 7.7.3 (Sistemi lineari). Sia $A(x)$ una matrice reale $n \times n$ che dipende da $x \in I$ in modo continuo, dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto. Il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(x)y \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

con $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$, ha una soluzione unica $y \in C^1(I)$. Infatti, la funzione $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$f(x, y) = A(x)y$$

è continua e per ogni compatto $K \subset I$ verifica per $x \in K$ ed $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |A(x)y_1 - A(x)y_2| \leq \|A(x)\||y_1 - y_2| \leq \max_{x \in K} \|A(x)\||y_1 - y_2|.$$

Le ipotesi del Teorema 7.5.2 di esistenza e di unicità locale sono dunque verificate. Inoltre si ha $|f(x, y)| = |A(x)y| \leq \max_{x \in K} \|A(x)\||y|$ per ogni $x \in K$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Dunque, anche l'ipotesi (7.7.60) del Teorema 7.7.2 è soddisfatta. Questo assicura l'esistenza globale.

ESEMPIO 7.7.4. Sia $\alpha > 0$ e consideriamo il Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = |y|^{1+\alpha} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

La funzione $f(y) = |y|^{1+\alpha}$ è di classe $C^1(\mathbb{R})$ e quindi le ipotesi del Teorema di esistenza e unicità locale della soluzione sono verificate. Sia $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ l'intervallo di definizione della soluzione massimale. Si ha $y(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$. Se, infatti, esistesse $\bar{x} \in I$ tale che $y(\bar{x}) = 0$, allora y sarebbe soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = |z|^{1+\alpha} \\ z(\bar{x}) = 0, \end{cases}$$

che però avrebbe come unica soluzione la funzione identicamente nulla $z = 0$. Questa sarebbe una contraddizione.

Siccome la soluzione y del problema iniziale è stettamente crescente, segue che $0 < y(x) < 1$ per ogni $x \in I$ con $x < 0$. Dal Criterio di prolungamento deduciamo che $a = -\infty$. $\Rightarrow$ perchè $\lim_{x\to a} |y(x)| \neq +\infty$ $\forall\, a<0$ e siccome $f(y)$ è def su $\mathbb{R}$, a deve essere $-\infty$

In effetti, la soluzione y si calcola esplicitamente separando le variabili

$$x = \int_0^x \frac{y'(t)}{y(t)^{1+\alpha}}dt = \int_1^{y(x)} \frac{dz}{z^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha}\Big(1 - \frac{1}{y^\alpha}\Big),$$

da cui si ottiene la soluzione

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[\alpha]{1-\alpha x}}, \qquad \text{definita per } x < b = \frac{1}{\alpha}.$$

A causa dell'andamento superlineare di $f(y) = |y|^{1+\alpha}$ la soluzione del Problema di Cauchy esplode in tempo finito. Si noti che $b \to \infty$ quando $\alpha \to 0$.

8. Teorema di esistenza di Peano

L'ipotesi su $f(x,y)$ di Lipschitzianità locale nella y (Definizione 7.5.1) garantisce esistenza e unicità locali delle soluzioni di $y' = f(x,y)$, come nel Teorema 7.5.2. Quando la funzione $f(x,y)$ è continua non si può avere unicità (Esempio 7.3.2); tuttavia, un classico risultato dovuto a G. Peano garantisce quanto meno l'esistenza delle soluzioni.

Teorema 7.8.1 (Teorema di esistenza di Peano). Siano $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$ un aperto, (x_0, y_0) un punto di Ω e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua in Ω. Allora esistono $\delta > 0$ ed $y \in C^1([x_0-\delta, x_0+\delta];\Omega)$ tali che

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall\, x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{7.8.62}$$

Dim. Per semplificare la notazione, e senza perdere di generalità, possiamo supporre che $x_0 = 0$. Ci limiteremo a costruire $\delta > 0$ ed una $y \in C^1([0,\delta];\Omega)$ che risolva il problema (7.8.62) solo per $x \in [0,\delta]$; a questo punto saremo in grado di risolvere anche il problema

$$\begin{cases} z'(x) = -f(-x, z(x)) & \forall\, x \in [0, \delta_1] \\ z(0) = y_0. \end{cases}$$

per un qualche $\delta_1 > 0$ e sarà sufficiente osservare che, estendendo y a $[-\delta_1, 0]$ tramite $y(x) := z(-x)$, essa risolve (7.8.62) per $x \in [-\delta_1, 0]$. Il lettore scrupoloso noterà poi che in $x = 0$ si ha un raccordo "di tipo C^1", dal momento che le derivate destra e sinistra di y in $x = 0$ coincidono e valgono $f(0, y_0)$.

Fissiamo $r > 0$ ed $\varepsilon > 0$ in modo che

$$H := \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n : x \in [0,r] \text{ e } \|y - y_0\| \le \varepsilon\} \subset \Omega$$

e poniamo

$$M := \max_H |f|, \qquad \delta := \min\Big\{r, \frac{\varepsilon}{M}\Big\}.$$

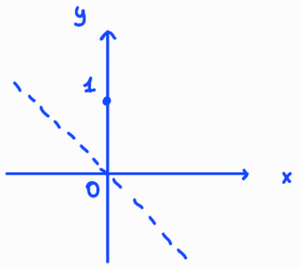
Costruiamo una successione y_j di "soluzioni approssimate" di (7.8.62). Fissato un intero $j \ge 1$ dividiamo l'intervallo $[0,\delta]$ in j sottointervalli di lunghezza δ/j introducendo i punti $x_i^j := i\frac{\delta}{j}$, $i = 0, 1, \ldots, j$; definiamo $y_j : [0,\delta] \to \mathbb{R}^n$ richiedendo che

esercizio Si consideri (PC) $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x+y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

1) Esistenza locale e grafico
2) Detto (a,b) interv. di def. sol. max. Provare che $b = +\infty$, $a > -\frac{1}{2}$
3) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{\log x} = 1$
4) Calcolare a

(*) su A $y(x) = y > -x$
$x + y > x - x = 0$
$\Rightarrow f'(x) = f(x,y) = \dfrac{1}{x+y(x)} > 0$

1) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$, $x \neq -y$



$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x\}$ aperto

$f \in C^\infty(A) \Rightarrow f$ è loc. di Lipschitz in y dentro A

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \exists! y \in C^1((\delta, -\delta), \mathbb{R})$ soluzione del (PC)

andando a sinistra dell'1, la funzione deve decrescere, dunque a deve essere finito, altrimenti la funzione andrebbe a "sbattere" contro la retta $y = -x$

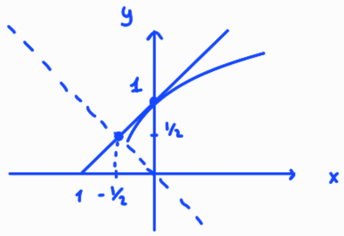
2) (*) - $y' = f(x,y) > 0$ su A $\Rightarrow$ y è crescente strettamente nel suo dominio

- $y'' = -\dfrac{1}{(x+y)^2} \underbrace{\left(1 + \dfrac{1}{x+y}\right)}_{y'}$ < 0 dunque la funzione è concava ← potevo intuirlo dal punto (3)

↳ derivata di $x + y = x + y(x)$

- Posso calcolare la retta tangente al $gr(y)$ in $x = 0$:

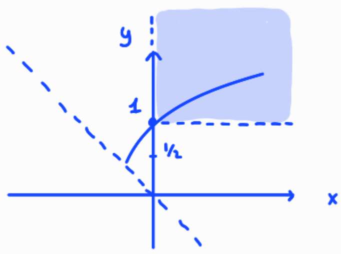
$\varphi(x) = 1 + y'(0)\, x = 1 + x$



Deduco che $a > -\frac{1}{2}$.

Studio b.

Per $x > 0 \Rightarrow y > 1$ $\xrightarrow[\text{globale (*)}]{\text{teorema soluzione}}$ $b = +\infty$



(*) $x > 0 \Rightarrow y > 1$

$0 < y' = f(x,y) = \dfrac{1}{x+y} < \dfrac{1}{x+1} < 1$

$\Rightarrow 0 < |f(x,y)| < 1$

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e posso usare soluzione globale

oss se nell'eq. diff. non ci fosse y, si avrebbe $y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y = \log(x)$

- Integro $y(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t + y(t)}\, dt$

Per $x > 0 \Rightarrow y(t) > 1$, dunque

$< 1 + \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t+1}\, dt$

$< 1 + \log(x+1)$

- Voglio trovare una stima da sotto. So che $y(x) \leq 1 + x$ $\forall x$, che dentro all'eq. integrale, da un'informazione da sotto.

Trovo

$$y(x) = 1 + \int_0^x \frac{1}{t + y(t)}\, dt$$

$$\geq 1 + \int_0^x \frac{1}{2t+1}\, dt$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\log(2x+1)$$

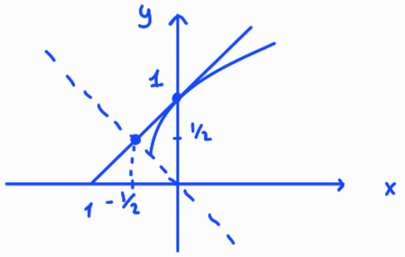
Deduco $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$

3) Devo trovare delle stime più accurate di quelle di prima. Uso de l'Hôpital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{\log(x)} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+y} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{y(x)}{x}} = 1$$

$\frac{y(x)}{x} \leq \frac{1 + \log(x+1)}{x}$ ↳ ma $\frac{\log(\dots)}{x} \to 0$

4)



$$\lim_{x \to a^+} y'(x) = +\infty$$

idea 1

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$$

$$\frac{dx}{dy} = x + y \implies x'(y) = x(y) + y$$

Integra e scopri $x = x(y)$, che deve avere punto di minimo in a

idea 2

Sostituzione $z(x) = x + y(x)$

$$z' = 1 + y'$$

$$y' = \frac{1}{x+y} \implies z' - 1 = \frac{1}{z}$$

$$z' = \frac{z+1}{z}$$

$$\frac{z z'}{z+1} = 1$$

Integro

$$\int_0^x \frac{z'(t)\, z(t)\, dt}{1 + z(t)} = x \quad \forall x$$

sostituisco $z(t) = s$
$z'\, dt = ds$

$$\int_{z(0)}^{z(x)} \frac{s}{1+s}\, ds = x$$

$$\Big[s - \log(1+s) \Big]_{z(0)}^{z(x)} = x$$

$$z(x) - \log(1 + z(x)) - z(0) + \log(1 + z(0)) = x$$

Non posso calcolare $z(x)$, ma ho trovato la funzione inversa!

Esercizio. Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x+y} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

1) Provare che il Problema di Cauchy ha un'unica soluzione locale, che è crescente e concava. Tratteggiarne il grafico.

2) Sia $(a,b) \subset \mathbb{R}$ l'intervallo di definizione della soluzione massimale. Provare che $b = \infty$ e che $a > -\frac{1}{2}$.

3) Provare che

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{\log x} = 1$$

4) Verificare che $a = \log 2 - 1$.

Soluzione. Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ y > -x\}$. Allora $(0,1) \in \Omega$ ed $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{1}{x+y}, \qquad (x,y) \in \Omega,$$

è di classe C^∞ e quindi localmente di Lipschitz.

Per il Teorema di esistenza e unicità locale esistono $\delta > 0$ ed $y \in C^1(-\delta, \delta)$ soluzione del Problema di Cauchy.

Siccome $f > 0$ in Ω, la soluzione y è strettamente crescente.

In effetti si ha $y \in C^{\infty}(-\delta, \delta)$ e inoltre

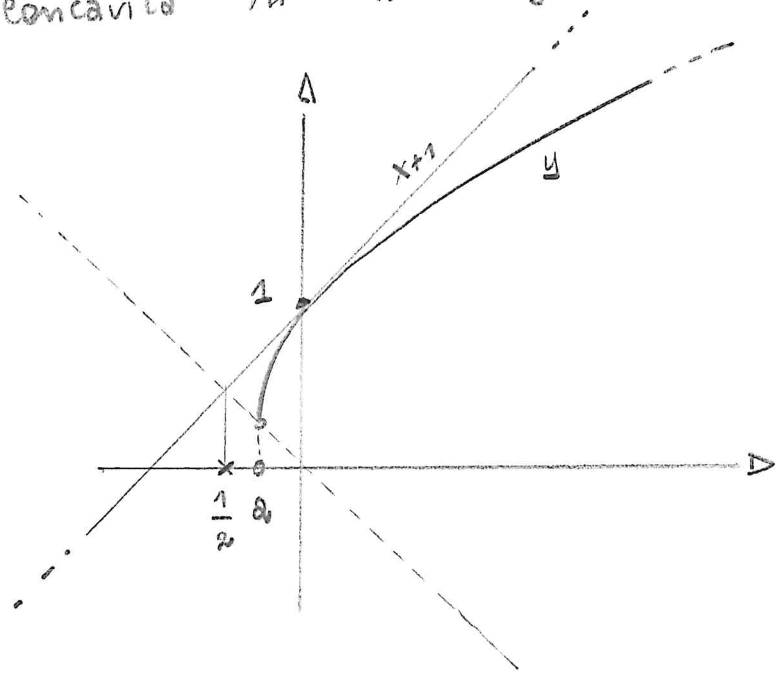
$$y'' = -\frac{1+y'}{(x+y)^2} = -\frac{1+\frac{1}{x+y}}{(x+y)^2} < 0$$

e quindi y è concava.

La retta tangente al grafico di y nel punto $x=0$ è

$$\varphi(x) = x+1,$$

e per la concavità si ha $y(x) \leq x+1$, $\forall x \in (a,b)$.



se b fosse finito si avrebbe $\lim_{x \to b^-} y(x) \leq \lim_{x \to b^-} x+1 = b+1 < \infty$

Dalla stima $y(x) \leq x+1$ e dal criterio di Prolungamento deduciamo che $b = \infty$. Dal disegno vediamo che $a > -\frac{1}{2}$.

Chiaramente $\lim_{x \to a^-} y'(x) = +\infty$.

Per $x \geq 0$ si ha $y(x) \geq 1$ e quindi

$$y'(x) = \frac{1}{x + y(x)} \leq \frac{1}{x+1}, \qquad x \geq 0.$$

Integrando

$$y(x) = y(0) + \int_0^x y'(t)\,dt$$

$$\leq 1 + \int_0^x \frac{1}{t+1}\,dt = 1 + \log(1+x)$$

In modo analogo, usando $y(x) \leq x+1$:

$$y(x) \geq 1 + \int_0^x \frac{1}{2t+1}\,dt = 1 + \left[\frac{1}{2}\log(2t+1)\right]_{t=0}^{t=x}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2}\log(2x+1).$$

Deduciamo che

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = \infty.$$

Per il Teorema di Hôpital

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{\log x} = \lim_{x \to \infty} \frac{y'(x)}{1/x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x}{y(x)+x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{y(x)}{x} + 1} = 1$$

Infatti

$$0 < \frac{y(x)}{x} \leq \frac{1+\log(x+1)}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0 .$$

Ora calcoliamo la soluzione in un modo ragionevolmente esplicito. Sia $z(x) = x + y(x)$. Allora $z' = 1+y'$ e z risolve il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = 1 + \frac{1}{z} \\ z(0) = 1 . \end{cases}$$

L'equazione è a variabili separabili: $\frac{zz'}{1+z} = 1$

Integriamo

$$x = \int_0^x \frac{zz'}{1+z}\, dt = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+z}\right) z'\, dt =$$

$$= \Big[z - \log(1+z) \Big]_{t=0}^{t=x} = z(x) - \log(1+z(x)) - z(0) + \log(1+z(0))$$

$$= z - \log(1+z) - 1 + \log 2 ,$$

Tornando alla soluzione y: $x = x+y - \log(1+x+y) - 1 + \log 2$

Ovvero:

$$y = \log(1+x+y) + 1 - \log 2$$

da cui

$$x = 2e^{y-1} - y - 1 = \psi(y).$$

Abbiamo calcolato esplicitamente la funzione inversa della soluzione. Osserviamo che

$$\psi'(y) = 2e^{y-1} - 1$$

e quindi $\psi'(y) = 0 \iff e^{y-1} = \frac{1}{2} \iff y = 1 + \log\left(\frac{1}{2}\right)$.

Il valore corrispondente della x è

$$x = 2 \cdot \frac{1}{2} - \left(1 + \log\left(\frac{1}{2}\right)\right) - 1 = \log 2 - 1.$$

esercizio Si consideri il (PC)

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

1) Provare che la sol. max è def su $(0, +\infty)$

2) Disegna un grafico della soluzione

$f(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$, def per $xy \neq 0$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0 , y>0\}$

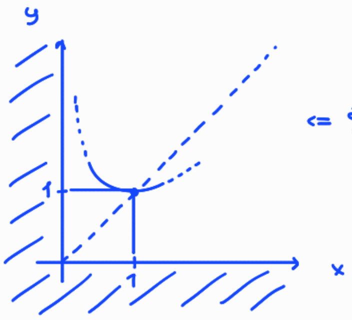
$f \in C^\infty(A) \Rightarrow f$ è loc. di Lipschitz in y

$\xRightarrow{\text{th } \exists \text{ e ! locale}} \exists \delta > 0 : \exists y \in C^1((1-\delta, 1+\delta); \mathbb{R})$ sol. unica del (PC)

Idea generale: studiare la monotonia della funzione, poi forse anche la convessità.

- studio la monotonia:

$$f(x,y) > 0 \iff \frac{1}{y} - \frac{1}{x} > 0 \iff \frac{1}{y} > \frac{1}{x} \iff x > y$$



⇐ abbozzo della funzione:
- quando passo per la retta $x=y$ ho punti critici

Abbiamo

$A^+ = \{(x,y) \in A : x > y\}$ ← dove f è positiva qui è ↑

$A^- = \{(x,y) \in A : x < y\}$ qui è ↓

1) Cerco l'intervallo max

$$|f(x,y)| = \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$$

lo studio della monotonia ci dice che $y(x) \geq 1 \quad \forall x$

$$\leq 1 + \frac{1}{x}$$

fisso $K \subset (0, +\infty)$ compatto, $x \in K$

$$\leq 1 + \max_{x \in K} \frac{1}{x} = C_K \underbrace{(1+|y|)}_{\text{potremmo permetterci di metterlo}}$$

$\xRightarrow{\text{teorema globale}}$ sol. max. definita su $(0, +\infty)$

2) **casi** $x \to 0$ (1) asintoto verticale 

(2) quota di tangenza finita 

$x \to \infty$?

- Affermo che $y(x) < x \quad \forall x > 1$. PA $\exists\, \bar{x} > 1$ t.c. $y(\bar{x}) = \bar{x}$.

  WLOG prendo il minimo $\bar{x}$ per cui vale la cond. sopra.

  $\Rightarrow y(x) < x$ per $1 < x < \bar{x}$ e $y(\bar{x}) = \bar{x}$

  $\Rightarrow y'(\bar{x}) = 0$

  Sia $\varphi(x) = x - y(x)$. Avremo che $\begin{cases} \varphi(x) > 0 & \text{per } x < \bar{x} \\ \varphi(\bar{x}) = 0 \\ \varphi'(x) = 1 - y'(x) \\ \varphi'(\bar{x}) = 1 \end{cases}$

  Dunque φ è strettamente $\uparrow$ intorno a $x = \bar{x}$ $\Rightarrow \varphi'(x) < 0$ per $x < \bar{x}$ $\lightning$

- Studio la convessità

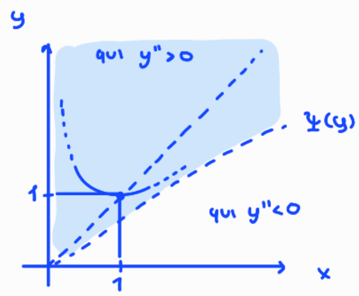
$$y'' = -\frac{1}{y^2}y' + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{y^2}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}\left(-\frac{x-y}{y^3} + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{x}}_{>0} \cdot \frac{-x^2 + xy + y^3}{\underbrace{xy^3}_{>0}}$$

$y'' > 0 \iff -x^2 + xy + y^3 > 0$

$x^2 - xy - y^3 < 0$ la guardo come diseq. di II° grado nella x

$$\frac{y - \sqrt{y^2 + 4y^3}}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sempre verificata} \\ \text{perché LHS} < 0 \\ \text{e } x > 0}}{<} x < \frac{y + \sqrt{y^2 + 4y^3}}{2} = \Psi(y)$$



- $x > 1$ ho $y'(x) > 0 \Rightarrow y \uparrow$

  $\Rightarrow \exists\, L = \lim_{x \to \infty} y(x) \in (1, \infty]$

  (*) $\lim_{x\to\infty} y'(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{1}{y(x)}}_{1/L} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} = \frac{1}{L}$

  $\overset{(*)}{\Rightarrow} \exists \lim_{x \to \infty} y'(x) = \frac{1}{L}$

  Se L fosse finito, la derivata dovrebbe essere definitivamente maggiore di una costante, ma allora la funzione dovrebbe divergere. $\lightning$

  Dunque $L = +\infty$

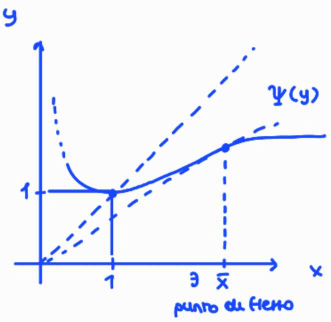
- $$\lim_{x\to\infty} \frac{(y(x))^{3/2}}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3}{2} y(x)^{1/2} y'(x) = \frac{3}{2} \lim_{x\to\infty} y^{1/2}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

voglio confrontare l'andamento di $\Psi(y(x))$ con quello di x, per capire se x sia definit. maggiore o minore di $\Psi(y(x))$, dunque definit. concava o convessa

$$= \frac{3}{2} \lim_{x\to\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{y(x)^{1/2}}}_{0} - \frac{y(x)^{1/2}}{x}\right) = -\frac{3}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)^{1/2}}{x}$$

deve essere 0: dimostriamolo.

$$\overset{H}{=} -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \underbrace{y(x)^{-1/2}}_{0}\underbrace{\left(\frac{1}{y(x)}-\frac{1}{x}\right)}_{0} = 0$$



$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ tale che $\psi(y(x)) < x \quad \forall x > M$

$\Rightarrow$ la soluzione esiste nella regione di concavità

- Esiste $L = \lim_{x\to 0^+} y(x) \in (1, \infty]$. Conto:

oss se y' fosse $y' = \frac{1}{x}$ allora y sarebbe un logaritmo

Conti:

$$\underset{\swarrow x\to 0^+ \; L}{y(x)} = y(1) + \int_1^x \left(\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{t}\right) dt$$

$$= y(1) - \underbrace{\int_x^1 \frac{1}{y(t)}\, dt}_{\substack{\text{converge} \\ \text{per } x\to 0^+}} + \underset{\downarrow x\to 0^+ \; \infty}{\int_x^1 \frac{1}{t}\, dt}$$

$\Rightarrow L = +\infty$

ESERCIZIO Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} \\ \\ y(1) = 1 . \end{cases}$$

i) Provare che il problema ha un'unica soluzione $y \in C^1(0,\infty)$ definita su tutto $(0,\infty)$.

ii) Disegnare un grafico della soluzione (approssimativo).

SOLUZIONE La funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}$ è definita per $xy \neq 0$. Tenuto conto del dato iniziale consideriamo

$$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0 \}$$

e avremo $f \in C^\infty(\Omega)$. In particolare, f è localmente di Lipschitz in y in Ω. Dunque esiste $\delta > 0$ tale che il problema ha una soluzione locale unica

$$y \in C^1(-\delta+1, 1+\delta).$$

Dobbiamo provare che y si estende su $(0,\infty)$.

Studiamo il segno della funzione f. Abbiamo

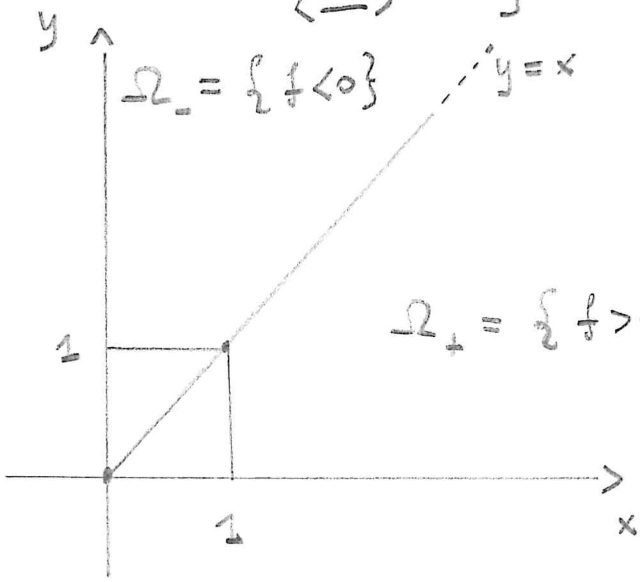
$$f(x,y) = 0 \iff \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$
$$\iff y = x$$

Inoltre, nella regione Ω si ha

$$f(x,y) > 0 \iff \frac{1}{y} - \frac{1}{x} > 0$$

$$\iff \frac{1}{y} > \frac{1}{x}$$

$$\iff y < x$$



Nella regione Ω_+ la soluzione y è crescente.

Nella regione Ω_- la soluzione y è decrescente.

Dunque $y(x) \geq 1$ per ogni x nell'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Sia $K \subset (0,\infty)$ un compatto. Se $x \in K$ e $y \geq 1$

$$|f(x,y)| = \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$$

$$\leq 1 + \max_{x\in K} \frac{1}{x} < \infty$$

Per il Criterio di esistenza globale la soluzione massimale è definita su tutto $(0, \infty)$.

Proviamo che $y(x) < x$ per ogni $x > 1$. Per assurdo sia $\bar{x} > 1$ un punto (il minimo punto) tale che $y(\bar{x}) = \bar{x}$. Allora $y(x) < x$ per ogni $1 < x < \bar{x}$.

Siccome

$$y(\bar{x}) = \bar{x} \quad \Longrightarrow \quad y'(\bar{x}) = 0$$

posto $\phi(x) = y(x) - x$ avremo $\phi'(\bar{x}) = -1$ e $\phi(\bar{x}) = 0$ e quindi $\phi(x) > 0$ per $\bar{x} - \varepsilon < x < \bar{x}$ per qualche $\varepsilon > 0$, ovvero $y(x) > x$ per $\bar{x} - \varepsilon < x < \bar{x}$, Assurdo.

Calcoliamo la derivata seconda:

$$y'' = \frac{-y'}{y^2} + \frac{1}{x^2} = -\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}$$

Dunque:

$$y'' > 0 \iff \frac{1}{x^2} > \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{y^2} \iff y^2 > x^2 \frac{x-y}{xy}$$

$$\iff y^3 > x^2 - xy \iff x^2 - xy - y^3 < 0$$

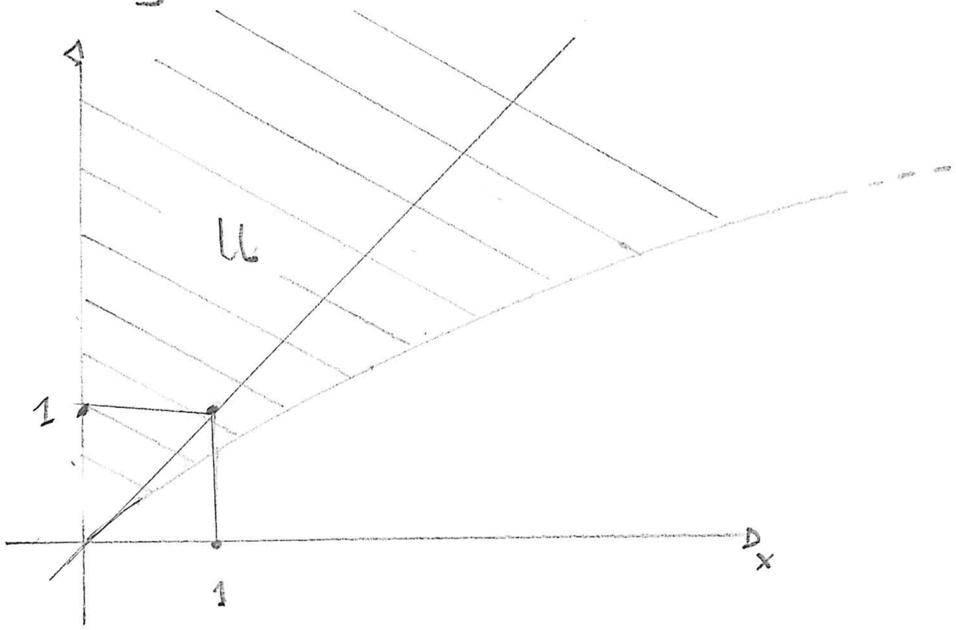
ovvero

$$\frac{y - \sqrt{y^2 + 4y^2}}{2} \underset{\text{superflua}}{<} x < \frac{y + \sqrt{y^2 + 4y^3}}{2}$$

Nella regione

$$\mathcal{U} = \left\{ (x,y) \in \Omega : \quad x < \frac{1}{2}\left(y + \sqrt{y^2+4y^3} \right) \right\}$$

la soluzione y è convessa:



Vediamo se y esce dalla regione $\mathcal{U}$. Esiste, finito o $+\infty$,

$$L = \lim_{x \to \infty} y(x)$$

e di conseguenza

$$\lim_{x \to \infty} y'(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{y(x)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{L}$$

Deduciamo che deve essere $L = \infty$. Confrontiamo $y(x)^{3/2}$ con x per $x \to \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y(x)^{3/2}}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3}{2}\, y(x)^{1/2}\, y'(x)}{1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{2} y(x)^{1/2}\left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{x}\right) = -\frac{3}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)^{1/2}}{x}$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{y'(x)}{y(x)^{1/2}} = 0 .$$

Quindi $\qquad$ Qui, $y = y(x)$.

$$\frac{y+\sqrt{y^2+4y^3}}{2} < x \quad \text{per} \quad x > M ,$$

per $M > 1$ opportunamente grande.

Proviamo che $\lim_{x\to 0^+} y(x) = \infty$. Infatti

$$y(x) = y(1) + \int_1^x y'(t)\,dt$$

$$= 1 + \int_1^x \left(\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{t}\right) dt$$

$$= 1 - \int_x^1 \left(\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{t}\right) dt$$

$$= 1 - \int_x^1 \frac{1}{y(t)}\,dt + \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt .$$

Se fosse $\lim_{x\to 0^+} y(x) = L < \infty$ si avrebbe un assurdo.

Infatti $\frac{1}{t}$ non è integrabile vicino $t = 0$.

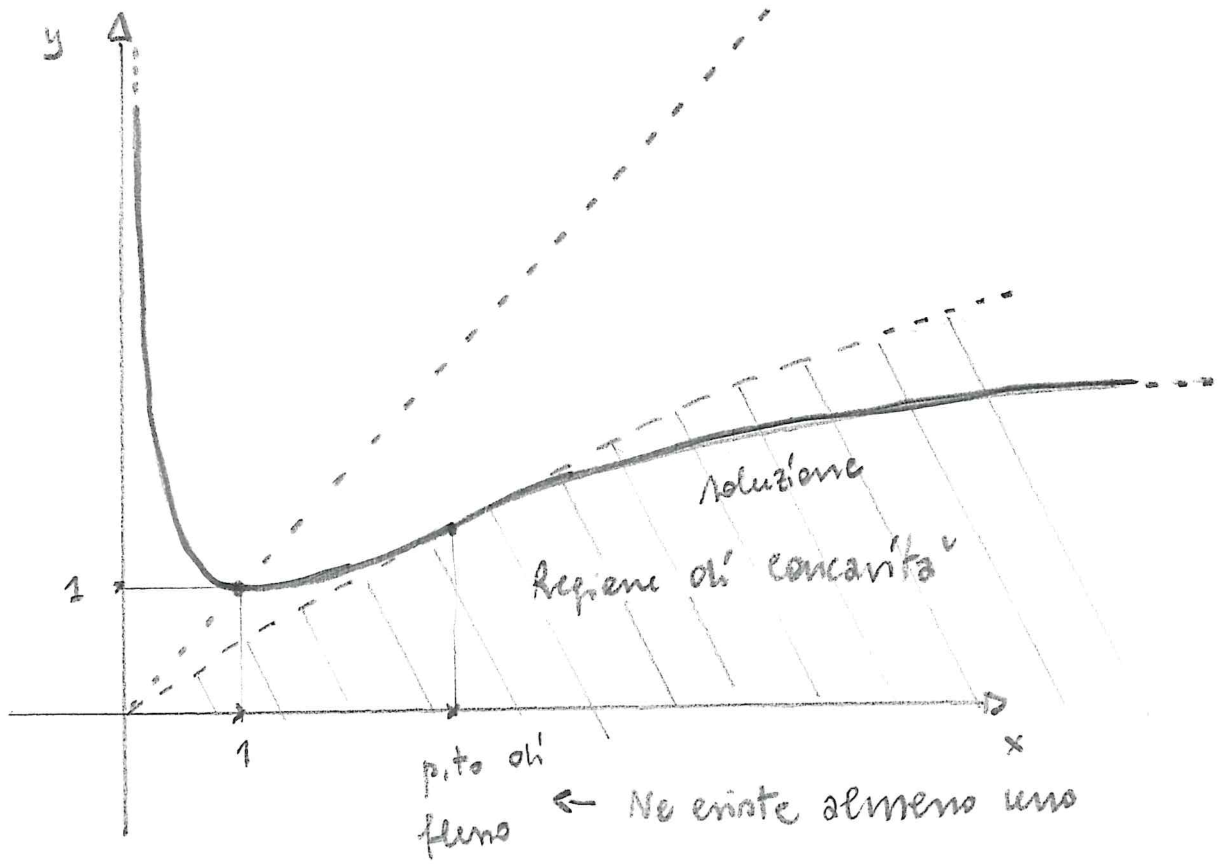


Grafico Approssimativo della soluzione.

esercizio

$$(PC)\begin{cases} y' = \log y - x \\ y(1) = e \end{cases}$$

1) $\exists !\ y \in C^1(1-\delta, 1+\delta)$ sol

2) studio monotonia

3) Intervallo max (a,b). Prova $a = -\infty$

$b < \infty$

1) $f(x,y) = \log y - x \quad , \ y > 0$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > 0\}$

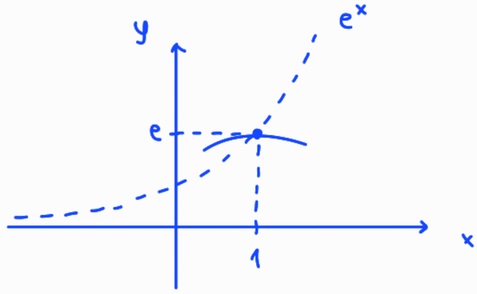
$f \in C^\infty(A) \Rightarrow f$ è loc. di Lipschitz in y

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \exists y \in C^1(1-\delta, 1+\delta)$ sol. unica del (PC)

2) $f(x,y) > 0 \iff \log y > x$

$\iff y > e^x$

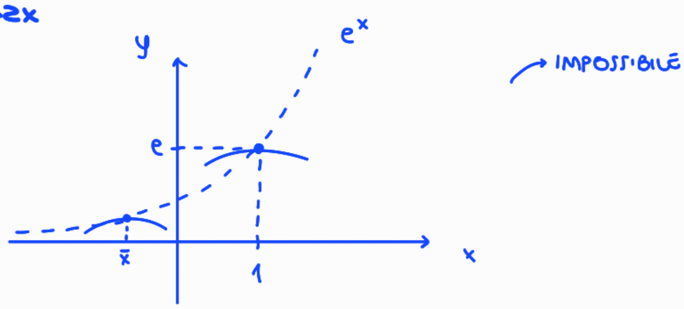
in 1 la derivata è 0



- Affermo che $y(x) > e^x \quad \forall\ x < 1$

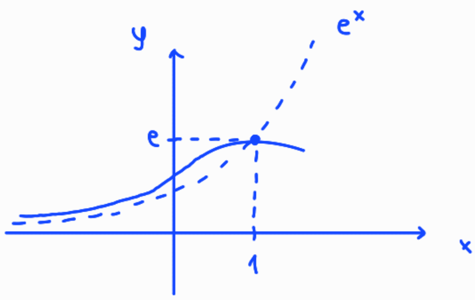
PA $\exists\ \bar{x} < 1$ tc $y(\bar{x}) = e^{\bar{x}}$. Posso prendere il più grande di questi.

Per ragionamento analogo all'esercizio sopra si ottiene che $f(x) < e^x$ per un intorno destro di $\bar{x}$, $\lightning$ $\bar{x}$ era il max



Al tempo stretto non può sviluppare asintoto verticale perché la funzione è monotona decrescente e limitata dal basso

Per il teorema sulle sol. max $a = -\infty$



- $x \geq 1 \Rightarrow y(x) \leq e$

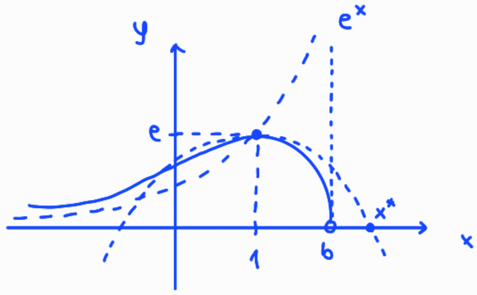
$$\Rightarrow y'(x) = \log(y(x)) - x \leq 1 - x \quad \forall x \geq 1$$

integro : $y(x) = y(1) + \int_1^x y'(t)\, dt$

$$\leq e + \int_1^x (1-t)\, dt$$

$$\leq e + \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{t=1}^{t=x} = \underbrace{e + x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}_{\varphi(x)}$$

$\varphi'(x) = -x + 1 \Rightarrow$ il vertice sta in $x = 1$



$x \geq 1 \Rightarrow y(x) \leq e + x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow b \leq x^* < \infty$

↳ zero della parabola

- $b < \infty$

$y \downarrow$ per $x > 1 \Rightarrow \exists\, \underset{[0,1)}{L} = \lim_{x \to b^-} y(x)$

se $L > 0 \Rightarrow$ posso prolungare y oltre b

$\Rightarrow L = 0 \Rightarrow \lim_{x \to b^-} y'(x) = \lim_{x \to b^-} \underset{\downarrow\, -\infty}{\log(y(x))} - \underset{\downarrow\, b<\infty}{x} = -\infty$

ESERCIZIO Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log y - x \\ y(1) = e \end{cases},$$

i) Provare che esiste un'unica soluzione locale $y \in C^1(-\delta,\delta)$ per qualche $\delta > 0$.

ii) Studiare la monotonia della soluzione.

iii) Sia $(a,b) \subset \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a < b \leq \infty$ l'intervallo di definizione della soluzione massimale.

Provare che $a = -\infty$ e che $b < \infty$

iv) Studiare la convessità della soluzione.

i) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y > 0\}$. La funzione $f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \log y - x$$

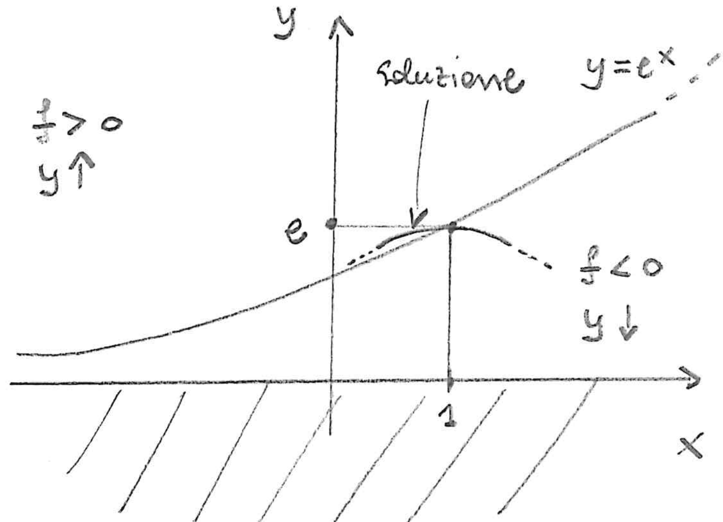
è di classe $C^\infty(A)$, dunque è localmente di Lipschitz in A. Per il Teorema di esistenza e unicità locale esiste, unica, la soluzione del problema. Deve essere $y(x) > 0 \quad \forall x \in$ Dominio.

ii) Studiamo la disequazione

$$f(x,y) > 0 \iff \log y > x \iff y > e^x$$

Dunque y cresce dove $y > e^x$, y decresce dove $y < e^x$.

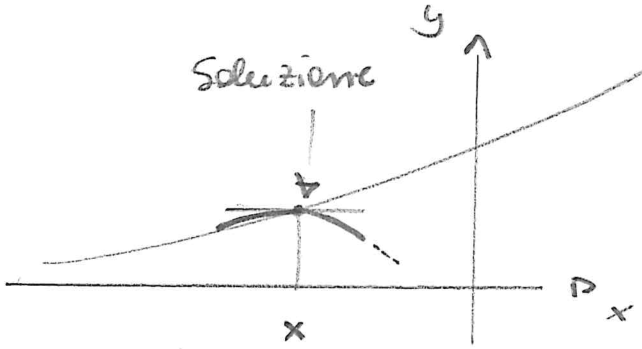
Il dato iniziale è sulla curva $y = e^x$, dove $f = 0$ (ovvero $y' = 0$).



Dunque la soluzione decresce per $x>1$ mentre cresce per $x<1$.

iii) Affermo che $y(x) > e^x \quad \forall x < 1$.

Se per assurdo esistesse $\bar{x} < 1$ tale che $y(\bar{x}) = e^{\bar{x}}$ allora si avrebbe $y'(\bar{x}) = 0$ e la situazione sarebbe:



Avremmo $y(x) < e^x \quad \forall x > \bar{x}$. Questo non è possibile.

Conclusione

$$e^x < y(x) < e \quad \forall x \in (a, 1).$$

Dal criterio di prolungamento deduciamo che $a = -\infty$

Per $x \geq 1$ abbiamo $y(x) \leq e$ e quindi

$$y'(x) = \log y(x) - x \leq 1 - x$$

Integrando su $[1, x]$:

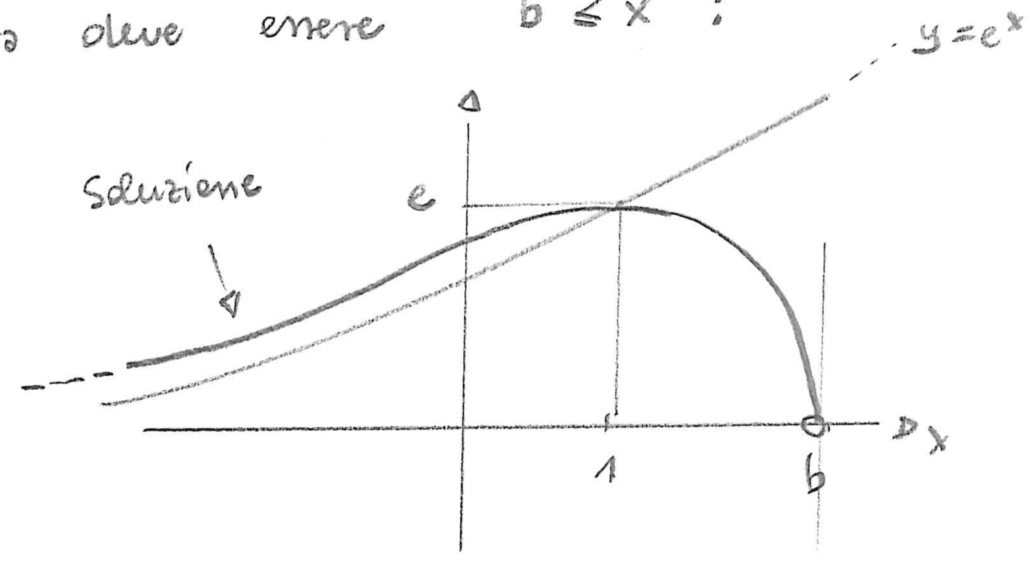
$$\underset{\substack{\| \\ e}}{y(x) - y(1)} = \int_1^x y'(t)\,dt \leq \int_1^x (1-t)\,dt = x - 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

ovvero

$$y(x) \leq e - \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} = \varphi(x).$$

Sia $x^* > 1$ il punto tale che $\varphi(x^*) = 0$.

Allora deve essere $b \leq x^*$:



Deve essere $\lim_{x \to b^-} y(x) = 0$, altrimenti y si prolunga oltre b. Dunque: $\lim_{x \to b^-} y'(x) = -\infty$.

iv) Convessità: omessa.

<u>esercizio</u> Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ tale che

(1) $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\}$ sono compatti $\forall \alpha$

(2) $\nabla f(x) = 0 \iff x = 0$

sistema di eq. diff. ordinarie

Si consideri il (PC) $\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = -\nabla f(\gamma(t)) & t \geq 0 \\ \gamma(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$

1) Provare che il (PC) ha una soluzione unica $\gamma_{x_0} \in C^2([0,\infty))$

2) $\lim_{t \to \infty} \gamma_{x_0}(t) = 0$

1) • $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$F(x) := -\nabla f(x)$

$F \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ perché $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow$ loc. Lipschitz in $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0 : \quad \exists\, \gamma_{x_0} \in C^1(\overset{t \geq 0}{[0,\delta)}; \mathbb{R}^n)$ soluzione del (PC)

$\underbrace{\dot{\gamma}(t)}_{\text{di classe } C^1} \Leftarrow -\underbrace{\nabla f}_{\text{di classe } C^1} \circ \underbrace{\gamma(t)}_{\text{di classe } C^1} \quad \Rightarrow \gamma(t)$ di classe C^2

• $\alpha := f(x_0) \in \mathbb{R}$

$\theta(t) = f(\gamma(t))\,, \; t \geq 0$

$\dot{\theta}(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \underset{\substack{\shortparallel \\ -\nabla f(\gamma(t))}}{\dot{\gamma}(t)} \rangle = -\langle \nabla f(\gamma(t)), \nabla f(\gamma(t)) \rangle = -|\nabla f(\gamma(t))|^2 \leq 0$

$\Rightarrow \theta$ è decrescente $\forall t \geq 0$

$\theta(t) \leq \theta(0) \quad \forall t \geq 0$

ma allora $\underset{\substack{\shortparallel \\ \theta(t)}}{f(\gamma(t))} \leq f(\gamma(0)) = f(x_0) = \alpha$

$\Rightarrow \gamma(t) \in \{f \leq \alpha\}$ compatto
$\Rightarrow$ chiuso e limitato

$\Rightarrow |\gamma(t)| < \infty$

$\overset{\text{th. sul sol. max}}{\Rightarrow} \gamma(t)$ è def $\forall t \geq 0$

2) <u>oss</u> f ha min assoluto su $\mathbb{R}^n$ per W

$\Rightarrow$ il p.to di min deve essere p.to critico

$\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ il p.to di min. ass è $x=0$

Cerco di provare che $\exists \lim_{t\to+\infty} \underset{\underset{\theta(t)}{\shortparallel}}{f(\gamma(t))} = f(0) = \min_{\mathbb{R}^n} f =: m$

$\theta \downarrow \Rightarrow$ per monotonia $\exists \lim_{t\to\infty} f(\gamma(t)) = L \geq m$.

Provo che $L = m$.

PA $L > m$. Allora

$$m < L \leq \overset{\overset{\theta(t)}{\shortparallel}}{f(\gamma(t))} \leq d$$

Quindi $\underset{t\geq 0}{\gamma(t) \in} \{x \in \mathbb{R}^n : L \leq f(x) \leq d\} = K$ $\underset{0}{\not\ni}$

Per (2) il $\nabla f(x) \neq 0$ $\forall x \in K$, K chiuso e limitato $\Rightarrow$ compatto

$\exists \mu$:

$\Rightarrow |\nabla f(x)| \geq \mu > 0$ $\forall x \in K$

$\Rightarrow \dot{\theta}(t) = -|\nabla f(\gamma(t))| \leq -\mu^2 < 0$ $\forall t \geq 0$

$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \theta(t) = -\infty$ ↯ perché la f ha min ass (è limitata dal basso).

Ho provato che $f(\gamma(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} f(0)$

x casa

$\Rightarrow \gamma(t) \longrightarrow 0$

ESERCIZIO Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che:

1) Gli insiemi $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \lambda\}$ sono compatti $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

2) $\nabla f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

Si consideri il Problema di Cauchy

$$(*) \qquad \begin{cases} \dot{\gamma}(t) = -\nabla f(\gamma(t)), & t \geq 0, \\ \gamma(0) = x_0 \end{cases}$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che:

i) Il Problema ha una soluzione unica $\gamma_{x_0} \in C^2([0,\infty))$;

ii) $\lim_{t \to \infty} \gamma_{x_0}(t) = 0$.

SOLUZIONE i) La funzione $F(x) = -\nabla f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, è di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ e quindi F è localmente di Lipschitz.

Il Problema $(*)$ ha dunque soluzione locale unica $\gamma \in C^1([0,\delta))$ per qualche $\delta > 0$.

Consideriamo la funzione $\theta(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [0,\delta)$.
La sua derivata è

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \\ &= -|\nabla f(\gamma(t))|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Di conseguenza θ è decrescente:

$$f(\gamma(t)) = \theta(t) \leq \theta(0) = f(\gamma(0)) = f(x_0) := \lambda.$$

Ovvero $\gamma(t) \in \{ f \leq \lambda \}$, compatto, $\forall t \in (0, \delta)$.
Per il Criterio di Prolungamento γ è definita per ogni $t \geq 0$.

ii) Osserviamo che f ammette minimo assoluto in quanto è continua con sottolivelli compatti.
Siccome $x = 0$ è l'unico punto critico, segue che $x = 0$ è l'unico punto di minimo (assoluto).

Sia $m = f(0) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.

Per monotonia esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{t \to \infty} \theta(t) = \lim_{t \to \infty} f(\gamma(t)) = L.$$

Deve essere $L \geq m$. Proviamo che $L = m$.
Sia per assurdo $L > m$. L'insieme

$$K = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \ L \leq f(x) \leq \lambda \}$$

è compatto e $\nabla f(x) \neq 0$ per ogni $x \in K$.
Per continuità $|\nabla f|$ assume minimo su K.

Sia $\mu = \min_{x \in K} |\nabla f(x)| > 0$. Di conseguenza

$$\dot{\theta}(t) \leq -\mu < 0 \quad \forall t \geq 0$$

e questo implica che $\lim_{t \to \infty} \theta(t) = -\infty$. Assurdo.

Questo prova che $L = m$.

Proviamo ora che $\lim_{t \to \infty} \gamma(t) = 0$, ovvero:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T > 0 \ \forall t > T \text{ si ha } |\gamma(t)| < \varepsilon .$$

Per assurdo esistano $\varepsilon > 0$ e una successione $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tale che

$$t_j \xrightarrow[j \to \infty]{} \infty \quad e \quad |\gamma(t_j)| \geq \varepsilon \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

L'insieme

$$H = \{ x \in \mathbb{R}^n ; |x| \geq \varepsilon \text{ e } f(x) \leq \lambda \}$$

è compatto ed inoltre esiste

$$\nu = \min_{x \in H} f(x) > m = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

Siccome $\theta(t_j) = f(\gamma(t_j)) \geq \nu > m \quad \forall j \in \mathbb{N}$ si contraddice il fatto che $\lim_{t \to \infty} \theta(t) = m$.

$\square$

Teorema di Peano

TEOREMA $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $(\underset{\in \mathbb{R}}{x_0}, y_0) \in A$, $f \in C(A, \mathbb{R}^n)$. Allora $\exists \delta > 0$

$\exists y \in C^1([x_0 - \delta, x_0 + \delta]; \mathbb{R}^n)$ soluzione del

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dim (Negli appunti c'è una dimostrazione costruttiva).

Abbozzo di altro metodo:

$\delta > 0$, $\varepsilon > 0$

$X := \{ y \in C([x_0 - \delta, x_0 + \delta], \mathbb{R}^n) \mid y(x_0) = y_0, \ |y(x) - y_0| \leq \varepsilon \ \ \forall \ x_0 \in I \}$

è chiuso, convesso e limitato.

$\exists \delta > 0$ t.c. $T : X \longrightarrow X$, $Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$

Si osserva:

- $T : X \to X$ continua → argomenti di conv. uniforme
- $T(X) \subset X$
  - equilimitato → X stesso è limitato, dunque l'integranda è unif. limitata nella y e così tutto T(X)
  - equicontinua → le funzioni in T(X), faccio la derivata e ottengo $f(x, y(x))$, che è limitata
    $\Rightarrow$ le funzioni e le derivate sono limitate
    $\Rightarrow$ l'insieme è "equilipschitziano", dunque equicontinuo
  - chiuso

  $\Rightarrow T(X) \subset X$ è compatto

Dal teorema di Schauder $\exists y \in X$ p.to fisso di T $\square$