

Université de Limoges

2017-2018

## Master 2 MCCA

Théorie des nombres

Examen du Mercredi 14 février 2018

14h - 16h

On désignera par  $\mathbf{Z}$  l'anneau des entiers relatifs et par  $\mathbf{Q}$  le corps des nombres rationnels. Il sera tenu compte de la clarté et de la concision de la rédaction.

## Problème

1. Montrer que le polynôme  $\varphi(X) = X^3 - X + 2$  est irréductible sur  $\mathbf{Q}$ .
2. Montrer que  $\varphi(X)$  a une seule racine réelle  $\alpha$ .  
Notons  $K = \mathbf{Q}(\alpha)$  et  $\mathcal{O}_K$  l'anneau des entiers de  $K$ .
3. Quel est le discriminant  $\text{disc}(\varphi)$  du polynôme  $\varphi(X)$ ?
4. Montrer que le discriminant d'un corps de nombres est congru à 0 ou 1 modulo 4.
5. En déduire le discriminant du corps  $K$ .
6. Montrer que  $\mathcal{O}_K = \mathbf{Z}[\alpha]$ .
7. Vérifier que  $v := \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$  est une unité de  $K$ .
8. Montrer que  $v$  est l'unité fondamentale de  $K$ .

Fin de l'énoncé