Université de Limoges **2017-2018**

Master 2 MCCA

Théorie des nombres
Partiel du vendredi 15 décembre 2017
14h - 16h

Dans le problème qui suit, on désignera par $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers relatifs et par $\mathbf{Q}$ le corps des nombres rationnels.
Il sera tenu compte de la clarté et de la concision de la rédaction.

Problème

Soit α une racine du polynôme $f(X) := X^3 + 6X^2 - 3$. Notons
$F := \mathbf{Q}(\sqrt{29})$;
$K := \mathbf{Q}(\alpha)$ et $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers ;
$L := FK = \mathbf{Q}(\cancel{\zeta_3}, \alpha)$ le corps des racines de f sur $\mathbf{Q}$.
$\sqrt{29}$

1. justifier que $f(X)$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$.
2. Montrer que le discriminant de $f(X)$ est égal à $disc(f) = 2349 = 3^4.29$
3. justifier que 3 ne divise pas l'indice $[\mathcal{O}_K : \mathbf{Z}[\alpha])$.
4. En déduire que $\mathcal{O}_K = \mathbf{Z}[\alpha]$
5. Quels sont les nombres premiers qui se ramifient dans K ?
6. Quels sont les nombres premiers qui se ramifient dans $\mathbf{Q}(\sqrt{29})$?
7. Justifier que $L := \mathbf{Q}(\sqrt{29}, \alpha)$ est le corps des racines de $f(X)$ sur $\mathbf{Q}$.
8. justifier que le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$ est le groupe symétrique S_3.
9. Décrire la décomposition des premiers $p = 2, 3, 5$ et 13 dans l'anneau o_L des entiers de L.
10. A-t-on ainsi obtenu toutes sortes de décompositions possibles pour un premier dans o_L ?

Exercice

Soit K un corps de nombres avec $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers. On se fixe un entier naturel $a \geq 1$. Montrer que, à multiplication par une unité de $\mathcal{O}_K$ près, il n'y a qu'un nombre fini de $\alpha \in \mathcal{O}_K$ tel que la norme $N_{K/\mathbf{Q}}(\alpha) = a$.

Fin de l'énoncé.