Funktion & Relation - Definitionen und Theoreme

Definition 2.3

Seien A, B Mengen. Eine **Funktion** / **Abbildung** f ordnet jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ zu.

- Schreibe $f(x)$ für y
- $D(f) := A$: Definitionsbereich (domain) von f
- $R(f) := B$: Wertebereich (range) von f

Notation:

$$f : A \longrightarrow B, \qquad \underbrace{x \mapsto f(x)}_{\text{Zuordnungsvorschrift}} \tag{2.5}$$

Weitere Begriffe:

- $f(x)$: das **Bild** von x
- x: ein **Urbild** von $f(x)$
- $\mathrm{graph}(f) := \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}$

Formale Definition:

Ganz genau: f ist das geordnete Tripel $(A, B, \mathrm{graph}(f))$.

Menge aller Funktionen:

$$\mathcal{F}(A, B) := B^A := \{f : A \longrightarrow B : A = D(f) \wedge B = R(f)\} \tag{2.7}$$

$\mathcal{F}(A, B)$ ist die **Menge der Funktionen** von A nach B.

Definition 2.4

Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Funktion.

(a) Bild einer Menge

Für $T \subseteq A$ heißt

$$f(T) := \{f(x) \in B : x \in T\} \tag{2.8}$$

das **Bild** von T unter f.

(b) Urbild einer Menge

Für $U \subseteq B$ heißt

$$f^{-1}(U) := \{x \in A : f(x) \in U\} \tag{2.9}$$

das **Urbild** von U unter f.

(c) Injektivität

f heißt **injektiv** (auch eineindeutig) genau dann, wenn jedes $y \in B$ höchstens ein Urbild hat, d.h.

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv } &\iff \forall_{y \in B}(f^{-1}\{y\} = \emptyset \vee \exists_{x \in A} f(x) = y \\ &\iff \forall_{x_1, x_2 \in A}(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)) \end{aligned}$$

(d) Surjektivität

f heißt **surjektiv** genau dann, wenn jedes $y \in B$ mindestens ein Urbild hat, d.h.

$$f \text{ surjektiv } \iff \forall_{y \in B} \exists_{x \in A} y = f(x) \iff \forall_{y \in B} f^{-1}\{y\} \neq \emptyset \tag{2.11}$$

(e) Bijektivität

f heißt **bijektiv** genau dann, wenn:

$$f \text{ bijektiv } :\iff f \text{ injektiv } \wedge f \text{ surjektiv}$$

Definition 2.7: Komposition / Hintereinanderausführung

Seien $f : A \longrightarrow B$ und $g : C \longrightarrow D$ Funktionen mit $f(A) \subseteq C$.

Die **Komposition** (oder **Hintereinanderausführung**) von g und f ist definiert als:

$$\underbrace{g \circ f}_{\text{lies: "g nach f"}} : A \longrightarrow D, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x)) \tag{2.16}$$

Definition 2.10

Seien $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow A$ Funktionen.

- g heißt **rechtsinvers** zu f genau dann, wenn (f surjektiv) :

$$f \circ g = \mathrm{Id}_B$$

- g heißt **linksinvers** zu f genau dann, wenn (f injektiv) :

$$g \circ f = \mathrm{Id}_A$$

- g heißt **invers** zu f (auch **Umkehrabbildung**) genau dann, wenn g rechts- und linksinvers zu f ist.
  Schreibe dann: $f^{-1} = g$

- f heißt **(rechts-, links-) invertierbar** genau dann, wenn es eine (rechts-, links-) inverse Abbildung zu f gibt.

Definition 2.20

Sei R eine Relation auf A.

(a) Reflexivität

$$R \text{ reflexiv } \text{ g.d.w. } \forall_{x \in A}\, x\, R\, x \tag{2.40}$$

(b) Symmetrie

$$R \text{ symmetrisch } \text{ g.d.w. } \forall_{x,y \in A}\, (x\, R\, y \Rightarrow y\, R\, x) \tag{2.41}$$

(c) Antisymmetrie

$$R \text{ antisymmetrisch } \text{ g.d.w. } \forall_{x,y \in A}\, ((x\, R\, y \wedge y\, R\, x) \Rightarrow x = y) \tag{2.42}$$

(d) Transitivität

$$R \text{ transitiv } \text{ g.d.w. } \forall_{x,y,z \in A}\, ((x\, R\, y \wedge y\, R\, z) \Rightarrow x\, R\, z) \tag{2.43}$$

Definition 2.22

Eine Relation R auf A heißt **Äquivalenzrelation** genau dann, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Notation: Bei Äquivalenzrelationen schreibt man oft $x \sim y$ statt $x\,R\,y$.

Definition 2.26

Sei $\leq$ eine partielle Ordnung (PO) auf $A \neq \emptyset$, und sei $\emptyset \neq B \subseteq A$.

(a) Schranken

- $x \in A$ heißt **untere Schranke** von B genau dann, wenn:

$$\forall_{b \in B}\, x \leq b$$

- $x \in A$ heißt **obere Schranke** von B genau dann, wenn:

$$\forall_{b \in B}\, b \leq x$$

- B heißt **nach unten beschränkt** genau dann, wenn es eine untere Schranke von B gibt.
- B heißt **nach oben beschränkt** genau dann, wenn es eine obere Schranke von B gibt.
- B heißt **beschränkt** genau dann, wenn B nach unten und nach oben beschränkt ist.

(b) Minimum und Maximum

- $x \in B$ heißt **Minimum** von B (geschrieben $x = \min B$) genau dann, wenn x eine untere Schranke von B ist.
- $x \in B$ heißt **Maximum** von B (geschrieben $x = \max B$) genau dann, wenn x eine obere Schranke von B ist.

(c) Infimum und Supremum

- **Infimum** von B:

$$\inf B := \max\{x \in A : x \text{ ist untere Schranke für } B\}$$

(muss nicht existieren!)

- **Supremum** von B:

$$\sup B := \min\{x \in A : x \text{ ist obere Schranke für } B\}$$

(muss nicht existieren!)

Analysis (Informatik und Statistik) Präsenzblatt 3

Aufgabe 9

(a) Es sei durch Z die Menge $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ der ganzen Zahlen bezeichnet. Wir betrachten die Funktion $g : Z \to \mathbb{N}_0$ mit der Abbildungsvorschrift $z \mapsto z^2$. Bestimmen Sie das jeweilige Urbild der folgenden Mengen unter g:

(i) $\{0\}$
(ii) $\{4\}$
(iii) $\{-3\}$
(iv) $\{6, 9\}$
(v) $\{6, -3, 4, 9\}$
(vi) $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Lösung:

(i) $g^{-1}(\{0\}) = \{0\}$
(ii) $g^{-1}(\{4\}) = \{2, -2\}$
(iii) $g^{-1}(\{-3\}) = \emptyset$
(iv) $g^{-1}(\{6, 9\}) = \{-3, 3\}$
(v) $g^{-1}(\{6, -3, 4, 9\}) = \{-3, -2, 2, 3\}$
(vi) $g^{-1}(\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}) = \{2k \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

> Dies ergibt sich unter Berücksichtigung der Tatsache, dass das Quadrat n^2 einer natürlichen Zahl genau dann gerade ist, wenn die Zahl n gerade ist.

(b) Es seien $f : A \to B$ und $g : C \to D$ Abbildungen derart, dass $f(A) \subseteq C$. Zeigen Sie, dass für alle $W \subseteq D$ die folgende Mengengleichung gilt:

$$(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$$

> **Hinweis:** Beachten Sie, dass weder f noch g bijektiv sein müssen und dass $g^{-1}(W)$ das Urbild der Menge W unter g bezeichnet.

Beweis:

Für alle $x \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(g^{-1}(W)) &\Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(W) \\ &\Leftrightarrow g(f(x)) \in W \\ &\Leftrightarrow (g \circ f)(x) \in W \\ &\Leftrightarrow x \in (g \circ f)^{-1}(W) \quad \square \end{aligned}$$

Aufgabe 10

Finden Sie jeweils eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, welche die geforderten Eigenschaften erfüllt. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) f ist weder injektiv, noch surjektiv.
(b) f ist bijektiv.
(c) f ist injektiv, aber nicht surjektiv.
(d) f ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Lösungsbeispiele:

(a) $f : n \mapsto 1$.
Insbesondere gilt $f(1) = f(2) = 1$, also ist die Abbildung nicht injektiv. Ferner gibt es keine natürliche Zahl n, sodass etwa $f(n) = 2$, also ist die Abbildung nicht surjektiv.

(b) $f : n \mapsto n$.
Die Abbildung ist injektiv, denn aus $f(n) = f(m)$ folgt aus der Funktionsdefinition sofort, dass $m = n$. Es ist auch leicht für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein m zu finden, sodass $f(m) = n$; man nehme natürlich $m = n$.

(c) $f : n \mapsto n + 1$.
Diese Funktion ist injektiv. Denn sind m, n gegeben, sodass $f(m) = f(n)$, dann bedeutet dies $m + 1 = n + 1$ und daraus folgt $m = n$. Die Abbildung ist jedoch nicht surjektiv, denn es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = n + 1 = 1$. (Zur Erinnerung: per Konvention gilt $0 \notin \mathbb{N}$.)

(d) Wir definieren die Funktion f durch Fallunterscheidung:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ n - 1 & \text{für } n > 1. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist surjektiv, denn für jede natürliche Zahl n gilt $f(n+1) = n$. Die Abbildung ist jedoch nicht injektiv, denn $f(1) = f(2) = 1$.

Aufgabe 11

(a) Bestimmen Sie zwei Rechtsinverse der Funktion $h : \mathbb{N} \to \{-1, 1\},\ n \mapsto (-1)^n$. Handelt es sich bei h um eine surjektive/injektive/bijektive Abbildung?

Lösung:

Wir betrachten die beiden Funktionen $f, g : \{-1, 1\} \to \mathbb{N}$ mit den Werten:

$$f(-1) = g(-1) = 1, \quad f(1) = 2, \quad g(1) = 4$$

Es handelt sich offenbar um zwei verschiedene Funktionen. Beide sind rechtsinvers zu h, denn:

$$\begin{aligned}
(h \circ f)(-1) &= h(f(-1)) = h(1) = (-1)^1 = -1 \\
(h \circ f)(1) &= h(f(1)) = h(2) = (-1)^2 = 1 \\
(h \circ g)(-1) &= h(g(-1)) = h(1) = (-1)^1 = -1 \\
(h \circ g)(1) &= h(g(1)) = h(4) = (-1)^4 = 1
\end{aligned}$$

Zur Beantwortung des zweiten Teils der Frage können wir Thm. 2.12 verwenden: die Existenz einer rechtsinversen Abbildung für h ist äquivalent zur Surjektivität von h. Wäre h indessen eine Bijektion, so wäre die Rechtsinverse eindeutig bestimmt. Insbesondere kann h nicht injektiv sein.

(b) Es sei A eine Menge mit mindestens zwei Elementen $a_1, a_2 \in A$, ferner sei B eine beliebige Menge. Wir nehmen an, dass $f : A \to B$ injektiv ist, jedoch nicht surjektiv.

(i) Zeigen Sie, dass f zwei verschiedene Linksinverse besitzt.

Beweis:

Wir konstruieren zwei Linksinverse $g, h : B \to A$. Da f injektiv ist, gibt es für jedes $b \in f(A)$ genau ein $a_b \in A$, sodass $f(a_b) = b$. Für $b \in f(A)$ setzen wir die Funktionswerte $g(b) = h(b) = a_b$. Auf dem Komplement $B \setminus f(A)$ besteht Wahlfreiheit: für jedes $b \notin f(A)$ setzen wir $g(b) = a_1$ und $h(b) = a_2$. Da f nicht surjektiv ist, existiert ein $b \in B \setminus f(A)$ und somit handelt es sich bei g und h um verschiedene Funktionen. Entsprechend der Definition von g und h gilt für jedes $a \in A$ natürlich $g(f(a)) = a = h(f(a))$, d.h. g und h sind Linksinverse von f.

(ii) Warum ist die Annahme, dass A wenigstens zwei verschiedene Elemente besitzt, nicht entbehrlich?

Lösung:

Es sei etwa $A = \{1\}$ und $B = \{1, 2\}$. Die Funktion $f : A \to B$ habe den Wert $f(1) = 1$. Man sieht leicht, dass f injektiv, aber nicht surjektiv ist. Es existiert jedoch nur eine linksinverse Funktion $g : B \to A$.

Aufgabe 12

Sei $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ für ein festes $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$. Definiere eine Relation R auf A durch:

$$x \, R \, y \quad \text{genau dann, wenn} \quad x - y \text{ gerade ist.}$$

Zeigen Sie: R ist eine Äquivalenzrelation auf A und bestimmen Sie die Äquivalenzklassen. Ist R anti-symmetrisch?

Lösung:

(1) Reflexivität:
Für jedes $x \in A$ gilt $x - x = 0$, und 0 ist gerade. Also $x \, R \, x$. Somit ist R reflexiv.

(2) Symmetrie:
Sei $x, y \in A$ und $x \, R \, y$. Dann ist $x - y$ gerade. Damit ist auch:

$$y - x = -(x - y)$$

gerade (Vorzeichenwechsel ändert die Parität nicht). Also $y \, R \, x$. Somit ist R symmetrisch.

(3) Transitivität:
Seien $x, y, z \in A$ mit $x \, R \, y$ und $y \, R \, z$. Dann sind $x - y$ und $y - z$ gerade. Die Summe zweier gerader Zahlen ist gerade, also:

$$x - z = (x - y) + (y - z)$$

ist gerade. Deshalb $x \, R \, z$. Somit ist R transitiv.

Aus Reflexivität, Symmetrie und Transitivität folgt, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

(4) Beschreibung der Äquivalenzklassen:

Für $x \in A$ hängt die Äquivalenzklasse $[x]_R$ nur von der Parität von x ab: Sind x und y beide ungerade oder beide gerade, so ist $x - y$ gerade und damit $x\,R\,y$. Folglich gibt es höchstens zwei verschiedene Äquivalenzklassen, nämlich die Klasse der ungeraden und die Klasse der geraden Zahlen innerhalb von A. Explizit:

$$[1]_R = \{k \in A : k \equiv 1 \pmod 2\}, \quad [2]_R = \{k \in A : k \equiv 0 \pmod 2\}$$

(5) Anti-Symmetrie?
Für $n \geq 3$ enthält mindestens eine Äquivalenzklasse, nämlich $[1]_R$, mindestens zwei unterschiedliche Elemente. Wegen Symmetrie von R schließt das Anti-Symmetrie aus.