Dozent: Dr. Peter Philip

Assistenten: Dr. Sakirudeen Abdulsalaam, Julius Hallmann

Wintersemester 2025/26

30. Oktober 2025

Analysis (Informatik und Statistik)
Lösungsvorschläge zu Hausaufgabenblatt 3

Aufgabe 9 (10 Punkte) Es seien A, B und C nichtleere Mengen, sowie $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Betrachten Sie die Komposition $g \circ f : A \to C$.

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die folgenden Aussagen:

a) Ist f injektiv und g injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.

b) Ist f surjektiv und g surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.

c) Ist f nicht surjektiv und g injektiv, so ist $g \circ f$ nicht surjektiv.

Beweis.

a) **(3 Punkte)** Seien $x, y \in A$ mit $x \neq y$. Zu zeigen ist, dass $(g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y)$.

Da f injektiv und $x \neq y$ gilt $f(x) \neq f(y)$. Da g injektiv und $\tilde{x} := f(x) \neq \tilde{y} := f(y)$ sowie $\tilde{x}, \tilde{y} \in B$ gilt $g(\tilde{x}) \neq g(\tilde{y})$. Insgesamt also $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\tilde{x}) \neq g(\tilde{y}) = g(f(y)) = (g \circ f)(y)$. Da x, y beliebig waren folgt damit, dass $g \circ f$ injektiv ist.

b) **(3 Punkte)** Sei $c \in C$. Zu zeigen ist, dass ein $a \in A$ existiert mit $(g \circ f)(a) = c$.

Da g surjektiv gibt es $b \in B$ mit $g(b) = c$. Da f surjektiv gibt es $a \in A$ mit $f(a) = b$. Insgesamt gilt also $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. Da c beliebig war folgt, dass $g \circ f$ surjektiv.

c) **(4 Punkte)** Zu zeigen ist, dass ein $c \in C$ existiert, auf das nicht abgebildet wird, d.h. dass für alle $a \in A$ gilt $(g \circ f)(a) \neq c$.

Da f nicht surjektiv gibt es ein $b \in B$, so dass für alle $a \in A$ gilt $f(a) \neq b$. Wähle $c := g(b)$. Da g injektiv gilt für alle $\tilde{b} \in B$ mit $\tilde{b} \neq b$, dass $c = g(b) \neq g(\tilde{b})$. Insgesamt gilt also für jedes $a \in A$: $(g \circ f)(a) = g(\underbrace{f(a)}_{:=\tilde{b} \neq b}) = g(\tilde{b}) \neq c$. Folglich ist $g \circ f$ nicht surjektiv.

Aufgabe 10 (10 Punkte)

Bestimmen Sie, sofern existent, zwei rechtsinverse Abbildungen von $h : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (m, n) \mapsto m + n$ und beweisen Sie Ihr Ergebnis. Ist h auch linksinvertierbar?

Beweis. (2+4+4 Punkte) Die Abbildung h ist nicht injektiv, denn: $(1, 2) \neq (2, 1)$, aber $h(1, 2) = 3 = h(2, 1)$. Somit ist h nach Satz 2.13 *nicht* linksinvertierbar.

Die Abbildungen

$$g_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}, g(n) := (n - 1, 1) \ \textit{und}$$

$$g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}, g(n) := \begin{cases} (\frac{n}{2}, \frac{n}{2}) & \text{falls } n \text{ gerade} \\ (\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}) & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

sind Rechtsinverse von h, denn es gilt: $h(g_1(n)) = h(n-1,1) = n$, $h(g_2(n)) = h(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}) = n$ für gerade n und $h(g_2(n)) = h(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}) = n$ für ungerade n.

Aufgabe 11 (10 Punkte)

Es sei $f : A \to B$ eine Abbildung und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von B (für eine beliebige Indexmenge I), d.h. für alle $i \in I$ ist $U_i \subset B$.

Zeigen Sie die Gleichung:

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} U_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(U_i).$$

Zeigen Sie weiter, dass der obige Ausdruck im Allgemeinen nicht mehr richtig ist, wenn man in ihm f^{-1} durch f ersetzt und $U_i \subseteq A$.

Lösung. (6+4 Punkte) Nach den Definitionen von Urbild und Schnitt gilt folgende Kette von Äquivalenzen, für jedes $x \in A$:

$$x \in f^{-1}(\bigcap_{i\in I} U_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in I} U_i \Leftrightarrow \forall_{i\in I} \;\; f(x) \in U_i \Leftrightarrow \forall_{i\in I} \;\; x \in f^{-1}(U_i) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(U_i).$$

Da $x \in A$ beliebig war, folgt $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} U_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(U_i)$.

Zeigen wir nun, dass für eine Funktion $f : A \to B$ und Mengen $U, V \subset A$ im Allgemeinen $f(U \cap V) \neq f(U) \cap f(V)$ ist. Es reicht dafür, ein geeignetes Beispiel anzugeben: Sei etwa $f : \{1, 2\} \to \mathbb{N}$ gegeben durch $f(1) = f(2) = 1$ und seien $U = \{1\}$, $V = \{2\}$. Dann ist $U \cap V = \emptyset$, also auch $f(U \cap V) = \emptyset$. Andererseits ist $f(U) = f(V) = \{1\}$ und damit $f(U) \cap f(V) = \{1\} \neq f(U \cap V)$.

Bemerkung: Tatsächlich gilt die Inklusion $f(U \cap V) \subset f(U) \cap f(V)$ immer - versuchen Sie, dies zu beweisen!

Aufgabe 12 (10 Punkte)

Es seien X und Y nichtleere Mengen mit $X \cap Y \neq \emptyset$ und

$$\begin{aligned} F : \mathcal{P}(X \cup Y) &\to \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) \\ A &\mapsto (A \cap X, Y \setminus (A \cap Y)) \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

a) F ist nicht surjektiv.

b) F ist injektiv.

Lösung.

a) **(5 Punkte)** Sei $(U, V) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$ im Bild von F. Dann gibt es ein $A \subseteq X \cup Y$ mit

$$U = A \cap X \quad \text{und} \quad V = Y \setminus (A \cap Y).$$

Für jedes $z \in X \cap Y$ gilt dann:

$$z \in U \;\Leftrightarrow\; z \in A, \qquad z \in V \;\Leftrightarrow\; z \notin A.$$

Also kann kein $z \in X \cap Y$ gleichzeitig in U und in V liegen, d. h.

$$U \cap V = \emptyset.$$

Damit ist eine notwendige Bedingung für die Bildmenge von F:

$$F(\mathcal{P}(X \cup Y)) \subseteq \{(U, V) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) \mid U \cap V = \emptyset\}.$$

Da $X \cap Y \neq \emptyset$, existiert ein $z \in X \cap Y$. Setze $U = \{z\} \subseteq X$ und $V = \{z\} \subseteq Y$. Dann gilt $U \cap V = \{z\} \neq \emptyset$, also kann kein $A \subseteq X \cup Y$ existieren mit $F(A) = (U, V)$. Somit ist F *nicht surjektiv.*

b) **(5 Punkte)** Seien $A, B \subseteq X \cup Y$ mit $F(A) = F(B)$. Dann gilt

$$A \cap X = B \cap X \quad \text{und} \quad Y \setminus (A \cap Y) = Y \setminus (B \cap Y).$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $A \cap Y = B \cap Y$.

Nun gilt für jedes $z \in A$:

$$z \in A \Rightarrow \begin{cases} z \in X \Rightarrow z \in A \cap X = B \cap X \subseteq B & \text{oder} \\ z \in Y \Rightarrow z \in A \cap Y = B \cap Y \subseteq B. \end{cases}$$

Also $A \subseteq B$. Durch Symmetrie folgt $B \subseteq A$, also $A = B$.

Damit ist F *injektiv.*

Abgabe bis Montag, 10. November 2025 09:00 Uhr via Moodle als PDF-Dokument.

Bitte begründen Sie alle Antworten und bemühen Sie sich um eine saubere Gliederung sowie eine klare Argumentation. Kennzeichnen Sie z.B. Behauptungen, Annahmen und Folgerungen. Orientieren Sie sich dabei an der Vorlesung und den Beispielen, die in den Übungen diskutiert werden.
