Dozent: Dr. Peter Philip

Assistenten: Dr. Sakirudeen Abdulsalaam, Julius Hallmann

Wintersemester 2025/26

23. Oktober 2025

Analysis (Informatik und Statistik)
Lösungsvorschläge zu Hausaufgabenblatt 2

Aufgabe 5 (10 Punkte)

a) Vier Personen – nennen wir sie A, B, C und D – haben sich zum Essen verabredet. Personen C und D bilden ein Duo; sie nehmen nur gemeinsam teil. Derzeit sind alle sehr beschäftigt und so ist es unklar, wer tatsächlich erscheint. In einer möglichen Formalisierung lässt sich die Gruppe als Menge $M = \{ A, B, \{ C, D \} \}$ darstellen. Welche Bedeutung hat hier die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$? Liefern Sie eine Interpretation und schreiben sie die Menge $\mathcal{P}(M)$ ohne Verwendung des Potenzmengensymbols, d.h. listen Sie alle Elemente dieser Menge explizit auf.

Lösung (4 Punkte).

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ist:

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{\{C, D\}\}, \{A, B\}, \{A, \{C, D\}\}, \{B, \{C, D\}\}, \{A, B, \{C, D\}\}\}.$$

Dies entspricht allen möglichen Gruppenkonstellationen, die zum Essen erscheinen können (einschließlich der leeren Teilnehmermenge).

b) Überprüfen Sie, welche der Beziehungen $\in, \subseteq, =$ zwischen den folgenden Paaren von Mengen gelten und welche nicht. Begründen Sie in jedem Fall.

(i) $\emptyset$ und $\{ \emptyset \}$,

(ii) $\{ \emptyset \}$ und $\{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}$.

Lösung (3 Punkte).

(i) $\emptyset \in \{\emptyset\}$, da die leere Menge ein Element von $\{\emptyset\}$ ist. Auch $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$, da die leere Menge eine Teilmenge jeder Menge ist. Aber $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, da $\{\emptyset\}$ ein Element enthält, während $\emptyset$ leer ist.

(ii) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, da die Menge $\{\emptyset\}$ eines der beiden Elemente von $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ist. Auch $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, da alle Elemente von $\{\emptyset\}$ in $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ enthalten sind. Aber $\{\emptyset\} \neq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, da letztere Menge ein weiteres Element enthält.

c) Bestimmen Sie $\mathcal{P}(\emptyset)$ sowie $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ und $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

Lösung (3 Punkte).

Es gilt $\mathcal{P}(\emptyset) = \{ \emptyset \}$, somit $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{ \emptyset \}) = \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}$ sowie $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \mathcal{P}(\{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}) = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \{ \emptyset \} \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \}$.

Aufgabe 6 (10 Punkte) Es seien I und J nichtleere Indexmengen. Ferner seien für alle $i \in I$ und $j \in J$ die Mengen A_i und B_j gegeben. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

a) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I} \left(\bigcup_{j\in J}(A_i \cap B_j)\right)$.

Beweis (5 Punkte).

Wir verwenden Proposition 1.38 (d):

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) &= \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap M && \textit{wobei} && M := \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)\\
&= \bigcup_{i\in I} (\, A_i \cap M) && && \textit{[Prop. 1.38 (d)]}\\
&= \bigcup_{i\in I} \left(A_i \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)\right) && && \textit{[Def. M]}\\
&= \bigcup_{i\in I} \left(\bigcup_{j\in J} (\, A_i \cap B_j)\right), && && \textit{[Prop. 1.38 (d)].}
\end{aligned}$$

Für ein vollständiges Argument ist der Beweis von Proposition 1.38 (d) auszuführen (nicht nötig für die volle Punktzahl):

1. Sei $x \in (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap M$. Dann gilt $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ und $x \in M$. Daher existiert ein $i \in I$, sodass $x \in A_i$ und $x \in M$, was bedeutet, dass $x \in A_i \cap M$. Also gilt $x \in \bigcup_{i\in I}(A_i \cap M)$.

2. Sei umgekehrt $x \in \bigcup_{i\in I}(A_i \cap M)$. Dann existiert ein $i \in I$, sodass $x \in A_i \cap M$, was bedeutet, dass $x \in A_i$ und $x \in M$. Also gilt $x \in (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap M$.

Somit ist gezeigt, dass:

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap M = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap M).$$

b) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{i\in I} \left(\bigcap_{j\in J}(A_i \cup B_j)\right)$.

Beweis (5 Punkte).

Wir verwenden Proposition 1.38 (c):

$$\begin{aligned}
\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) &= \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup M && \textit{wobei} && M := \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right)\\
&= \bigcap_{i\in I} (\, A_i \cup M) && && \textit{[Prop. 1.38 (d)]}\\
&= \bigcap_{i\in I} \left(A_i \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right)\right) && && \textit{[Def. M]}\\
&= \bigcap_{i\in I} \left(\bigcap_{j\in J} (\, A_i \cup B_j)\right), && && \textit{[Prop. 1.38 (d)].}
\end{aligned}$$

(Der Beweis von Proposition 1.38 (c) ist ähnlich zu dem Beweis von Proposition 1.38 (d) und kann analog geführt werden.)

Aufgabe 7 (10 Punkte) Schreiben Sie die Negation der folgenden Aussage ohne Verwendung von Negationszeichen:

$$\underset{A\subseteq\mathbb{N}}{\forall} \quad \underset{m\in\mathbb{N}}{\exists!} \quad \left[m \in A \wedge \underset{a\in A}{\forall} m \leq a\right].$$

(Hilfsweise werden $\neq$ bzw. $\notin$ nicht als Negationszeichen betrachtet.) Erklären Sie die Bedeutung dieses Ausdrucks sowie seiner Negation in jeweils einem einfachen, kurzen Satz. Welcher Ausdruck ist wahr?

Zusatz: Was wäre wahr, die Aussage oder ihre Negation, würde man in obiger Formel beide Instanzen von $\mathbb{N}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzen?

Lösung (10 Punkte).

Wir schreiben (abkürzend) $P(m) :\equiv m \in A \ \wedge \underset{a\in A}{\forall} \quad m \leq a$ ("$= m$ ist das kleinste Element von A"). Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\neg\left(\underset{A\subseteq\mathbb{N}}{\forall} \quad \underset{m\in\mathbb{N}}{\exists!} \quad P(m)\right)\\
&\iff \underset{A\subseteq\mathbb{N}}{\exists} \quad \neg\left(\underset{m\in\mathbb{N}}{\exists!} \quad P(m)\right)\\
&\overset{\text{Bsp. 1.35}}{\iff} \underset{A\subseteq\mathbb{N}}{\exists}\left(\underset{m\in\mathbb{N}}{\forall}\left(\neg P(m) \ \vee \underset{n\in\mathbb{N}}{\exists}(P(n) \wedge m \neq n)\right)\right)\\
&\iff \underset{A\subseteq\mathbb{N}}{\exists}\left(\underset{m\in\mathbb{N}}{\forall} \neg P(m)\right)\\
&\iff \underset{A\subseteq\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{m\in\mathbb{N}}{\forall}\left[m \notin A \ \vee \underset{a\in A}{\exists} \ a < m\right]\\
&\iff \underset{A\subseteq\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{m\in\mathbb{N}}{\forall}\left[m \in A \Rightarrow \underset{a\in A}{\exists} \ a < m\right]
\end{aligned}\tag{1}$$

Hierbei wurde verwendet, dass das kleinste Element eindeutig bestimmt ist. Es kann keine zwei verschiedenen m, n derart geben, dass sowohl $P(m)$ als auch $P(n)$ gelten. Das befreit uns von der zweiten Alternative in obiger Disjunktion.

Die ursprüngliche Aussage behauptet: *Jede Teilmenge der natürlichen Zahlen besitzt ein eindeutiges kleinstes Element* [2 Punkte]. Die Verneinung (1) lautet hingegen: *Es gibt eine Teilmenge der natürlichen Zahlen, die kein kleinstes Element besitzt* [2 Punkte]. Dies ist korrekt, die leere Teilmenge $A = \emptyset$ besitzt kein Element, insbesondere also auch kein kleinstes Element. [1 Punkt].

Das gleiche Beispiel $A = \emptyset$ zeigt, dass die verneinte Aussage wahr bleibt, wenn man beide Instanzen von $\mathbb{N}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt. Allerdings ist in $\mathbb{N}$ die leere Menge die *einzige* Teilmenge ohne einem kleinsten Element; in $\mathbb{R}$ hingegen gibt es viele derartige Teilmengen, etwa die Menge $\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \}$.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

a) Bringen Sie den folgenden Ausdruck auf eine möglichst einfache Form:

$$\Big(\{(a,b),(b,a)\} \setminus \{(b,a),(a,b)\}\Big) \cup \{(c,c),(c,c)\}$$

Lösung (2 Punkte).

Unter Verwendung von Extensionalität (zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente besitzen) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\Big(\{(a,b),(b,a)\} \setminus \{(b,a),(a,b)\}\Big) \cup \{(c,c),(c,c)\} &= \Big(\{(a,b),(b,a)\} \setminus \{(a,b),(b,a)\}\Big) \cup \{(c,c)\}\\
&= \emptyset \cup \{ (c,c) \}\\
&= \{ (c,c) \}.
\end{aligned}$$

b) Vereinfachen Sie und schreiben Sie ohne Verwendung des Potenzmengensymbols:

$$\mathcal{P}\Big((\{0,1\} \times \{0,1\}) \setminus (\{(0,1)\} \cup \{(1,1)\})\Big)$$

Lösung (2 Punkte).

Unter Verwendung der Definitionen von Produkt, Differenz, Vereinigung und Potenz ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\Big((\{0,1\} \times \{0,1\}) \setminus (\{(0,1)\} \cup \{(1,1)\})\Big) &= \mathcal{P}(\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} \setminus \{(0,1),(1,1)\}) \\ &= \mathcal{P}(\{(0,0),(1,0)\}) \\ &= \{\emptyset, \{(0,0)\}, \{(1,0)\}, \{(0,0),(1,0)\}\}.\end{aligned}$$

c) Vereinfachen Sie und schreiben Sie ohne Verwendung des mengentheoretischen Produktzeichens:

$$\Big(\mathbb{N}_0 \setminus \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}\Big) \times \Big(\mathbb{N} \setminus \{2n : n \in \mathbb{N}_0\}\Big)$$

Lösung (2 Punkte).

Unter Verwendung der Definition von Differenzmenge und kartesischem Produkt ergibt sich:

$$\begin{aligned}(\mathbb{N}_0 \setminus \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{2n : n \in \mathbb{N}_0\}) &= \{2m : m \in \mathbb{N}_0\} \times \{2n+1 : n \in \mathbb{N}_0\} \\ &= \{(2m, 2n+1) : m, n \in \mathbb{N}_0\}.\end{aligned}$$

d) Es seien A, B, C beliebige Mengen. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

Lösung (4 Punkte).

Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente besitzen. Für alle x gilt:

$$\begin{array}{lll} & x \in C \setminus (A \cup B) & \\ \iff & (x \in C) \land x \notin (A \cup B) & \text{[Definition der Differenzmenge]} \\ \iff & (x \in C) \land \neg(x \in A \lor x \in B)) & \text{[Definition der Vereinigungsmenge]} \\ \iff & (x \in C) \land (x \notin A) \land (x \notin B) & \text{[De Morgan II]} \\ \iff & (x \in C) \land (x \in C) \land (x \notin A) \land (x \notin B) & [A \land A = A] \\ \iff & (x \in C) \land (x \notin A) \land (x \in C) \land (x \notin B) & \text{[Kommutativität des logischen Und]} \\ \iff & (x \in (C \setminus A)) \land (x \in (C \setminus B)) & \text{[Definition der Differenzmenge]} \\ \iff & x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B) & \text{[Definition der Schnittmenge]} \end{array}$$

Somit ist ein beliebiges Element x genau dann in $C \setminus (A \cup B)$ enthalten, wenn es in $(C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ enthalten ist. Die Mengengleichung ist damit bewiesen.

Abgabe bis Montag, 2. November 2025 09:00 Uhr via Moodle als PDF-Dokument.

Bitte begründen Sie alle Antworten und bemühen Sie sich um eine saubere Gliederung sowie eine klare Argumentation. Kennzeichnen Sie z.B. Behauptungen, Annahmen und Folgerungen. Orientieren Sie sich dabei an der Vorlesung und den Beispielen, die in den Übungen diskutiert werden.
