



Dozent: Dr. Peter Philip

Wintersemester 2025/26

Assistenten: Dr. Sakirudeen Abdulsalaam, Julius Hallmann

Analysis (Informatik und Statistik) Präsenzblatt 1

Aufgabe 1 Beweisen Sie die folgenden Regeln der Aussagenlogik für Aussagen A , B und C mithilfe einer Wahrheitstafel.

- a) Kommutativität: $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$.
- b) Assoziativität: $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$.
- c) Distributivität: $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Bemerkung: Diese Regeln behalten ihre Gültigkeit, wenn man die Symbole \wedge und \vee durch das jeweils andere ersetzt, siehe Skript, Theorem 1.11.

Lösung. Mit Wahrheitstafeln.

Aufgabe 2

- a) Zeigen Sie, dass die Aussageform $X \vee (X \Rightarrow Y)$ eine Tautologie ist.

Vereinfachen Sie folgende logische Aussageformen soweit wie möglich, das heißt, finden Sie, mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Regeln, jeweils eine möglichst einfache äquivalente Aussageform.

- b) $A \wedge (A \Rightarrow B)$.
- c) $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$.
- d) $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg B \Rightarrow A)$.
- e) $((P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow Q)) \wedge (S \vee (S \Rightarrow T))$.

Lösung.

- a) Dies kann man mit einer Wahrheitstafel lösen. Alternativ kann man argumentieren: Wenn X wahr ist, dann ist die gesamte Aussage wahr, beziehungsweise wenn X falsch ist, dann ist $X \Rightarrow Y$ wahr, und daher ist die gesamte Aussage wahr. In beiden Fällen ist die gesamte Aussage wahr (unabhängig vom Wahrheitswert von Y), also handelt es sich um eine Tautologie.
- b) Mit einer Wahrheitstafel sieht man, dass diese Aussageform äquivalent zu $A \wedge B$ ist:

| A | B | $A \Rightarrow B$ | $A \wedge (A \Rightarrow B)$ | $A \wedge B$ | $A \wedge (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge B$ |
|-----|-----|-------------------|------------------------------|--------------|---|
| W | W | W | W | W | W |
| W | F | F | F | F | W |
| F | W | W | F | F | W |
| F | F | W | F | F | W |

- c) Mit einer Wahrheitstafel sieht man, dass diese Aussageform äquivalent zu B ist.

- d) Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\neg B \Rightarrow A$ äquivalent zu $\neg A \Rightarrow B$ ist. Setzt man dies in die gesamte Aussage ein, so erhält man die Aussage aus Teil b), die äquivalent zu B ist.
- e) Die erste Teilklammer ist, wie in Teil c) (mit A bzw. B durch P bzw. Q ersetzt), äquivalent zu Q . Die zweite Teilklammer ist gemäß a) eine Tautologie. Somit ist die Aussageform äquivalent zu Q .

Aufgabe 3 Aus einem Zoologiebuch: "Jede ungebrochelte Kalupe ist dorig und jede foberante Kalupe ist dorig. In Knusiland gibt es sowohl dorige wie undorige Kalupen."

Welche der nachstehenden Schlüsse über die Fauna von Knusiland sind zulässig?

- a) Alle undorigen Kalupen sind gebrochelt.
- b) Es gibt gebrochelte Kalupen.
- c) Es gibt sowohl gebrochelte als auch ungebrochelte Kalupen.
- d) Mindestens eine gebrochelte Kalupe ist unfoberant.
- e) Alle gebrochelten Kalupen sind unfoberant.

Lösung.

- a) Richtig. Das ist die Kontraposition zu dem Satz 'Jede ungebrochelte Kalupe ist dorig'.
- b) Richtig. Denn es gibt undorige Kalupen, und nach a) sind diese gebrochelt.
- c) Falsch (bzw. nicht notwendigerweise richtig). Insbesondere ist die Aussage 'Jede ungebrochelte Kalupe ist dorig' keine Gewähr für die Existenz einer ungebrochelten Kalupe.
- d) Richtig. Denn der Satz 'jede foberante Kalupe ist dorig' impliziert, dass jede undorige Kalupe unfoberant ist (Kontraposition). Da es nach Annahme mindestens eine undorige Kalupe gibt, ist diese also sowohl gebrochelt (nach a)) als auch unfoberant.
- e) Falsch (bzw. nicht notwendigerweise richtig).

Aufgabe 4

(Entnommen aus: R. Smullyan, *What is the Name of this Book?—The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles*, Prentice-Hall, 1978. Vgl. Übungsblatt 1.)

Als Alice den Wald des Vergessens betrat, vergaß sie nicht alles, sondern nur bestimmte Dinge. Sie vergaß oft ihren Namen, und das, was sie am ehesten vergaß, war der Wochentag. Nun waren der Löwe und das Einhorn häufige Besucher des Waldes. Diese beiden sind seltsame Wesen. Der Löwe lügt montags, dienstags und mittwochs und sagt an den anderen Tagen der Woche die Wahrheit. Das Einhorn hingegen lügt donnerstags, freitags und samstags, sagt aber an den übrigen Tagen der Woche die Wahrheit.

a) Eines Tages traf Alice den Löwen und das Einhorn, die unter einem Baum rasteten. Sie machten die folgenden Aussagen:

- Löwe: Gestern war einer meiner Lügentage.
- Einhorn: Gestern war auch einer meiner Lügentage.

Aus diesen beiden Aussagen konnte Alice den Wochentag ableiten. Welcher Tag war es?

b) Bei einer anderen Gelegenheit traf Alice den Löwen allein. Er machte die folgenden zwei Aussagen:

- (1) Ich habe gestern gelogen.
- (2) Ich werde in drei Tag wieder lügen.

Welcher Wochentag war es?

c) An welchen Wochentagen kann der Löwe die folgenden zwei Aussagen machen:

- (1) Ich habe gestern gelogen.
- (2) Ich werde morgen wieder lügen.

d) An welchen Wochentagen kann der Löwe die folgende zusammengesetzte Aussage machen: „Ich habe gestern gelogen *und* ich werde morgen wieder lügen.“

Lösung.

- Die einzigen Tage, an denen der Löwe sagen kann „Ich habe gestern gelogen“, sind Montag und Donnerstag. Die einzigen Tage, an denen das Einhorn sagen kann „Ich habe gestern gelogen“, sind Donnerstag und Sonntag. Daher ist der einzige Tag, an dem beide das sagen können, Donnerstag.
- Die erste Aussage des Löwen impliziert, dass es entweder Montag oder Donnerstag ist. Die zweite Aussage impliziert, dass es nicht Donnerstag ist. Folglich ist es Montag.
- An keinem Tag der Woche ist es möglich! Nur an Montagen und Donnerstagen könnte der Löwe die erste Aussage machen; nur an Mittwochen und Sonntagen könnte er die zweite Aussage machen. Daher gibt es keinen Tag, an dem er beide Aussagen machen könnte.
- Der einzige Tag der Woche, an dem es wahr sein könnte, dass der Löwe gestern gelogen hat und morgen wieder lügen wird, ist Dienstag (das ist der einzige Tag, der zwischen zwei der Lügentage des Löwen liegt). Der Tag, an dem der Löwe das sagt, kann allerdings nicht Dienstag sein, denn an Dienstagen wäre diese Aussage wahr, doch der Löwe lügt dienstags. Also: wenn der Löwe diese Aussage macht, so lügt er. Es muss entweder Montag oder Mittwoch sein.

Dieses Blatt wird in den Übungen in der Woche vom 20.10.–24.10.2025 diskutiert.