Dozent: Dr. Peter Philip
Assistenten: Dr. Sakirudeen Abdulsalaam, Julius Hallmann

Wintersemester 2025/26

Analysis (Informatik und Statistik)
Lösungsvorschläge zu Präsenzblatt 2

Aufgabe 5

a) Vereinfachen Sie $((\{1, 14, \{1\}, 3\} \cap \{1, \{1\}, \{14\}\}) \cup \{5\}) \setminus \{1\}$.

b) Bestimmen Sie die Elemente der Menge $\{n \mid n \in \mathbb{Z} \wedge |n| \leq 5 \wedge n \text{ ungerade}\}$.

c) Bestimmen Sie die Menge $\mathbb{N} \setminus \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Lösung.

a) $((\{1, 14, \{1\}, 3\} \cap \{1, \{1\}, \{14\}\}) \cup \{5\}) \setminus \{1\} = \{1, \{1\}, 5\} \setminus \{1\} = \{\{1\}, 5\}$.

b) $\{n \mid n \in \mathbb{Z} \wedge |n| \leq 5 \wedge n \text{ ungerade}\} = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$.

c) $\mathbb{N} \setminus \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 6

a) Schreiben Sie die folgende Menge ohne Verwendung des Potenzmengensymbols: $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$.

b) Warum ist $\{3, 4, 5\} \cap \mathcal{P}(\{3, 4, 5\}) = \emptyset$? Geben Sie eine Menge M an, sodass $M \cap \mathcal{P}(M) \neq \emptyset$.

c) Bestimmen Sie die Schnittmenge $\mathcal{P}(\{1\}) \cap \mathcal{P}(\{\{1\}\})$.

Lösung.

a) $\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

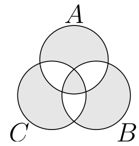
b) Die Elemente von $\{3, 4, 5\}$ sind Zahlen, hingegen sind die Elemente von $\mathcal{P}(\{3, 4, 5\})$ Zahlmengen. Daher kann kein Element in beiden Mengen vorkommen.

Indessen gilt für $M = \{1, \{1\}\}$ dass $M \cap \mathcal{P}(M) = \{\{1\}\}$.

c) $\mathcal{P}(\{1\}) \cap \mathcal{P}(\{\{1\}\}) = \{\emptyset, \{1\}\} \cap \{\emptyset, \{\{1\}\}\} = \{\emptyset\}$.

Aufgabe 7

a) Die drei durch Kreise dargestellten Mengen A, B und C schneiden sich wie in dem Diagramm rechts dargestellt. Finden Sie einen Ausdruck für den schraffierten Bereich unter Verwendung von $\cap$ (Schnitt), $\cup$ (Vereinigung) sowie $\setminus$ (Differenz).
Hinweis: Es gibt Lösungen, die die Mengen A, B und C insgesamt nicht öfter als 10 mal nennen.



Lösungsvorschlag.

Zum Beispiel $(((A \cup B) \setminus (C \cup (A \cap B))) \cup (C \setminus ((B \setminus A) \cup (A \setminus B))))$.

b) Es seien I und J nichtleere Indexmengen. Außerdem seien die Menge M und für alle $i \in I$ und $j \in J$ die Mengen A_i und B_j gegeben. Zeigen Sie die Gültigkeit der Gleichung

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup M = \bigcup_{i\in I}(A_i \cup M).$$

Beweis.

Die behauptete Mengengleichung bestätigt sich durch folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup M &\iff x \in \bigcup_{i\in I} A_i \ \vee x \ \in M \iff \left(\underset{i\in I}{\exists}\, x \in A_i\right) \ \vee x \ \in M \\ &\overset{(*)}{\iff} \underset{i\in I}{\exists} \left(x \in A_i \ \vee x \ \in M \right) \iff \underset{i\in I}{\exists}\, x \in A_i \cup M \\ &\iff x \in \bigcup_{i\in I} \left(A_i \cup M\right). \end{aligned}$$

Hierbei liefert eine einfache Überlegung die Gültigkeit von $(*)$. □

Aufgabe 8

Verneinen Sie die folgenden Ausdrücke der Prädikaten- und Aussagenlogik. Erklären Sie die jeweilige Bedeutung der Aussage und ihrer Negation.

a) $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{m\in\mathbb{N}}{\exists} \quad n < m.$

Lösung. Die Negation lautet

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{m\in\mathbb{N}}{\forall} \quad n \geq m.$$

Die ursprüngliche Aussage behauptet, dass es für jede natürliche Zahl n eine größere natürliche Zahl m gibt. Die Negation besagt, dass es eine natürliche Zahl n gibt, die größer oder gleich allen natürlichen Zahlen m ist, also dass es eine größte natürliche Zahl gibt.

b) $\underset{x\in X}{\exists}\ \underset{y\in X}{\forall} \quad (x = y \vee |x - y| \geq 1)$, wobei $X \subset \mathbb{R}$.

Lösung. Die Negation lautet

$$\underset{x\in X}{\forall}\ \underset{y\in X}{\exists} \quad (x \neq y \wedge |x - y| < 1).$$

Die ursprüngliche Aussage behauptet, dass die Menge X wenigstens ein Element besitzt, zu welchem alle anderen Elemente der Menge einen Abstand von mindestens 1 haben. Die Negation besagt, dass es für alle Elemente x der Menge X wenigstens ein von x verschiedenes Element y gibt, sodass der Abstand zwischen x und y kleiner als 1 ist.

Dieses Blatt wird in den Übungen in der Woche vom 27.10.–31.10.2025 diskutiert.