Dozent: Dr. Peter Philip
Assistenten: Dr. Sakirudeen Abdulsalaam, Julius Hallmann

Wintersemester 2025/26

Analysis (Informatik und Statistik)

Lösungsvorschläge zu Präsenzblatt 3

Aufgabe 9

(a) Es sei durch $\mathbb{Z}$ die Menge $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ der ganzen Zahlen bezeichnet. Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ mit der Abbildungsvorschrift $z \mapsto z^2$. Bestimmen Sie das jeweilige Urbild der folgenden Mengen unter g:

(i) $\{0\}$ (ii) $\{4\}$ (iii) $\{-3\}$

(iv) $\{6, 9\}$ (v) $\{6, -3, 4, 9\}$ (vi) $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Lösung.

(i) $g^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

(ii) $g^{-1}(\{4\}) = \{2, -2\}$.

(iii) $g^{-1}(\{-3\}) = \emptyset$.

(iv) $g^{-1}(\{6, 9\}) = \{-3, 3\}$.

(v) $g^{-1}(\{6, -3, 4, 9\}) = \{-3, -2, 2, 3\}$.

(vi) $g^{-1}(\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}) = \{2k \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.
Dies ergibt sich unter Berücksichtigung der Tatsache, dass das Quadrat n^2 einer natürlichen Zahl genau dann gerade ist, wenn die Zahl n gerade ist.

(b) Es seien $f : A \to B$ und $g : C \to D$ Abbildungen derart, dass $f(A) \subseteq C$. Zeigen Sie, dass für alle $W \subseteq D$ die folgende Mengengleichung gilt:

$$(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)).$$

Hinweis: Beachten Sie, dass weder f noch g bijektiv sein müssen und dass $g^{-1}(W)$ das Urbild der Menge W unter g bezeichnet.

Beweis. Für alle $x \in A$ gilt

$$x \in f^{-1}(g^{-1}(W)) \Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(W) \Leftrightarrow g(f(x)) \in W \Leftrightarrow (g \circ f)(x) \in W \Leftrightarrow x \in (g \circ f)^{-1}(W). \quad \square$$

Aufgabe 10

Finden Sie jeweils eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, welche die geforderten Eigenschaften erfüllt. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) f ist weder injektiv, noch surjektiv.

(b) f ist bijektiv.

(c) f ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(d) f ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Lösungsbeispiele.

(a) $f : n \mapsto 1$. Insbesondere gilt $f(1) = f(2) = 1$, also ist die Abbildung nicht injektiv. Ferner gibt es keine natürliche Zahl n, sodass etwa $f(n) = 2$, also ist die Abbildung nicht surjektiv.

(b) $f : n \mapsto n$. Die Abbildung ist injektiv, denn aus $f(n) = f(m)$ folgt aus der Funktionsdefinition sofort, dass $m = n$. Es ist auch leicht für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein m zu finden, sodass $f(m) = n$; man nehme natürlich $m = n$.

(c) $f : n \mapsto n + 1$. Diese Funktion ist injektiv. Denn sind m, n gegeben, sodass $f(m) = f(n)$, dann bedeutet dies $m + 1 = n + 1$ und daraus folgt $m = n$. Die Abbildung ist jedoch nicht surjektiv, denn es gibt kein Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = n + 1 = 1$. (Zur Erinnerung: per Konvention gilt $0 \notin \mathbb{N}$.)

(d) Wir definieren die Funktion f durch Fallunterscheidung:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ n - 1 & \text{für } n > 1. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist surjektiv, denn für jede natürliche Zahl n gilt $f(n + 1) = n$. Die Abbildung ist jedoch nicht injektiv, denn $f(1) = f(2) = 1$.

Aufgabe 11

(a) Bestimmen Sie zwei Rechtsinverse der Funktion $h : \mathbb{N} \to \{-1, 1\}, n \mapsto (-1)^n$. Handelt es sich bei h um eine surjektive/injektive/bijektive Abbildung?

Lösung. Wir betrachten die beiden Funktionen $f, g : \{-1, 1\} \to \mathbb{N}$ mit den Werten $f(-1) = g(-1) = 1$ und $f(1) = 2$ sowie $g(1) = 4$. Es handelt sich offenbar um zwei verschiedene Funktionen. Beide sind rechtsinvers zu h, denn

$$(h \circ f)(-1) = h(f(-1)) = h(1) = (-1)^1 = -1 \quad \text{und} \quad (h \circ f)(1) = h(f(1)) = h(2) = (-1)^2 = 1,$$

sowie

$$(h \circ g)(-1) = h(g(-1)) = h(1) = (-1)^1 = -1 \quad \text{und} \quad (h \circ g)(1) = h(g(1)) = h(4) = (-1)^4 = 1.$$

Zur Beantwortung des zweiten Teils der Frage können wir Thm. 2.12 verwenden: die Existenz einer rechtsinversen Abbildung für h ist äquivalent zur Surjektivität von h. Wäre h indessen eine Bijektion, so wäre die Rechtsinverse eindeutig bestimmt. Insbesondere kann h nicht injektiv sein.

(b) Es sei A eine Menge mit mindestens zwei Elementen $a_1, a_2 \in A$, ferner sei B eine beliebige Menge. Wir nehmen an, dass $f : A \to B$ injektiv ist, jedoch nicht surjektiv.

(i) Zeigen Sie, dass f zwei verschiedene Linksinverse besitzt.

Beweis. Wir konstruieren zwei Linksinverse $g, h : B \to A$. Da f injektiv ist, gibt es für jedes $b \in f(A)$ genau ein $a_b \in A$, sodass $f(a_b) = b$. Für $b \in f(A)$ setzen wir die Funktionswerte $g(b) = h(b) = a_b$. Auf dem Komplement $B \setminus f(A)$ besteht Wahlfreiheit: für jedes $b \notin f(A)$ setzen wir $g(b) = a_1$ und $h(b) = a_2$. Da f nicht surjektiv ist, existiert ein $b \in B \setminus f(A)$ und somit handelt es sich bei g und h um verschiedene Funktionen. Entsprechend der Definition von g und h gilt für jedes $a \in A$ natürlich $g(f(a)) = a = h(f(a))$, d.h. g und h sind Linksinverse von f. □

(ii) Warum ist die Annahme, dass A wenigstens zwei verschiedene Elemente besitzt, nicht entbehrlich?

Lösung. Es sei etwa $A = \{1\}$ und $B = \{1, 2\}$. Die Funktion $f : A \to B$ habe den Wert $f(1) = 1$. Man sieht leicht, dass f injektiv, aber nicht surjektiv ist. Es existiert jedoch nur eine linksinverse Funktion $g : B \to A$.

Aufgabe 12 Sei $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Definiere eine Relation R auf A durch

$$x\,R\,y \quad \text{genau dann, wenn} \quad x - y \text{ gerade ist.}$$

Zeigen Sie: R ist eine Äquivalenzrelation auf A und bestimmen Sie die Äquivalenzklassen. Ist R anti-symmetrisch?

Lösung. (1) Reflexivität. Für jedes $x \in A$ gilt $x - x = 0$, und 0 ist gerade. Also xRx. Somit ist R reflexiv.

(2) Symmetrie. Sei $x, y \in A$ und xRy. Dann ist $x - y$ gerade. Damit ist auch

$$y - x = -(x - y)$$

gerade (Vorzeichenwechsel ändert die Parität nicht). Also yRx. Somit ist R symmetrisch.

(3) Transitivität. Seien $x, y, z \in A$ mit xRy und yRz. Dann sind $x - y$ und $y - z$ gerade. Die Summe zweier gerader Zahlen ist gerade, also

$$x - z = (x - y) + (y - z)$$

ist gerade. Deshalb xRz. Somit ist R transitiv.

Aus Reflexivität, Symmetrie und Transitivität folgt, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

(4) Beschreibung der Äquivalenzklassen. Für $x \in A$ hängt die Äquivalenzklasse $[x]_R$ nur von der Parität von x ab: Sind x und y beide ungerade oder beide gerade, so ist $x - y$ gerade und damit xRy. Folglich gibt es höchstens zwei verschiedene Äquivalenzklassen, nämlich die Klasse der ungeraden und die Klasse der geraden Zahlen innerhalb von A. Explizit:

$$[1]_R = \{k \in A : \ k \equiv 1 \pmod 2\}, \qquad [2]_R = \{k \in A : \ k \equiv 0 \pmod 2\}.$$

(5) Anti-Symmetrie? Für $n \geq 3$ enthält mindestens eine Äquivalenzklasse, nämlich $[1]_R$, mindestens zwei unterschiedliche Elemente. Wegen Symmetrie von R schließt das Anti-Symmetrie aus.

Dieses Blatt wird in den Übungen in der Woche vom 03.11.–07.11.2025 diskutiert.