Mengenlehre – Definitionen und Theoreme

Def. 1.22

(a) **Durchschnitt (Schnittmenge)**

$$A \cap B = \{x : x \in A \land x \in B\}$$

Zwei Mengen heißen **disjunkt** gdw.

$$A \cap B = \emptyset$$

(b) **Vereinigung**

$$A \cup B = \{x : x \in A \lor x \in B\}$$

Falls $A \cap B = \emptyset$, schreibt man **disjunkte Vereinigung**:

$$A \dot{\cup} B$$

(c) **Differenz**

$$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$$

Ist $B \subseteq A$, so heißt A **Grundmenge** und

$$B^c := A \setminus B$$

das **Komplement** von B.

Def. 1.24 – Potenzmenge

Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(A)$ (auch 2^A) besteht aus allen Teilmengen von `A`:

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$$

Def. 1.26 – Natürliche Zahlen

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}, \quad \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$$

Th. 1.28 – Mengenalgebraische Gesetze

(a) **Kommutativgesetz**

$$A \cap B = B \cap A$$

(b) **Kommutativgesetz der Vereinigung**

$$A \cup B = B \cup A$$

(c) **Assoziativgesetz**

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

(d) **Distributivgesetz**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(e) **De-Morgan-Gesetze**

$$U \setminus (A \cap B) = (U \setminus A) \cup (U \setminus B)$$
$$U \setminus (A \cup B) = (U \setminus A) \cap (U \setminus B)$$

Negation quantifizierter Aussagen

(a)$\neg(\forall_{x \in A} P(x)) \Leftrightarrow \exists_{x \in A} \neg P(x)$

(b)$\neg(\exists_{x \in A} P(x)) \Leftrightarrow \forall_{x \in A} \neg P(x)$

Def. 1.37 – Familien von Mengen

Sei $I \neq \emptyset$ eine Menge (genannt **Indexmenge**).
Für jedes $i \in I$ sei A_i eine Menge (identische A_i sind zugelassen).

(a) **Durchschnitt über eine Familie von Mengen**

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x : \forall i \in I, x \in A_i\}$$

(b) **Vereinigung über eine Familie von Mengen**

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x : \exists i \in I, x \in A_i\}$$

Die Familie $(A_i)_{i \in I}$ heißt **disjunkt** gdw.

$$\forall i, j \in I,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

Def. 2.1 – Geordnetes Paar und kartesisches Produkt

Sei $x \in A$, $y \in B$. Dann heißt

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

das **(geordnete) Paar** aus x und y.

Das **kartesische Produkt** ist definiert als

$$A \times B := \{(x, y) : x \in A \land y \in B\}$$

Analysis (Informatik und Statistik) Präsenzblatt 2

Aufgabe 5

1. Vereinfachen Sie$(((1, 14, \{1\}, 3) \cap \{1, \{1\}, \{14\}\}) \cup \{5\}) \setminus \{1\}$.

$$(((1,14,\{1\},3)\cap\{1,\{1\},\{14\}\})\cup\{5\})\setminus\{1\}=\{1,\{1\}\}\cup\{5\})\setminus\{1\}=\{1,\{1\},5\}\setminus\{1\}=\{\{1\},5\}$$

2. Bestimmen Sie die Elemente der Menge $\{n \mid n\in\mathbb{Z}\wedge |n|\leq 5\wedge n \text{ ungerade}\}$.

$$\{n \mid n\in\mathbb{Z}\wedge |n|\leq 5\wedge n \text{ ungerade}\}=\{-5,-3,-1,1,3,5\}$$

3. Bestimmen Sie die Menge $\mathbb{N}\setminus\{2n \mid n\in\mathbb{N}\}$.

$$\mathbb{N}\setminus\{2n \mid n\in\mathbb{N}\}=\{2n-1 \mid n\in\mathbb{N}\}\text{ungerade natürliche Zahlen}$$

Aufgabe 6

1. Schreiben Sie die folgende Menge ohne Verwendung des Potenzmengensymbols: $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$.

$$\mathcal{P}(\{a,b,c\})=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

2. Warum ist $\{3,4,5\}\cap\mathcal{P}(\{3,4,5\})=\emptyset$? Geben Sie eine Menge M an, sodass $M\cap\mathcal{P}(M)\neq\emptyset$.

   Die Elemente von $\{3,4,5\}$ sind Zahlen, hingegen sind die Elemente von $\mathcal{P}(\{3,4,5\})$ Zahlmengen. Daher kann kein Element in beiden Mengen vorkommen.
   $\mathcal{P}(\{3,4,5\})=\{\{\emptyset,\{3\},\{4\},\{5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\},\{3,4,5\}\}$
   Indessen gilt für $M=\{1,\{1\}\}$, dass $M\cap\mathcal{P}(M)=\{\{1\}\}$.

c) Bestimmen Sie die Schnittmenge $\mathcal{P}(\{1\})\cap\mathcal{P}(\{\{1\}\})$.

$$\mathcal{P}(\{1\})\cap\mathcal{P}(\{\{1\}\})=\{\emptyset,\{1\}\}\cap\{\emptyset,\{\{1\}\}\}=\{\emptyset\}$$

Aufgabe 7

a) Die drei durch Kreise dargestellten Mengen A, B und C schneiden sich wie im Diagramm rechts dargestellt. Finden Sie einen Ausdruck für den schraffierten Bereich unter Verwendung von $\cap$(Schnitt), $\cup$ (Vereinigung) sowie $\setminus$ (Differenz).
Hinweis: Es gibt Lösungen, die die Mengen (A), (B) und (C) insgesamt nicht öfter als 10 mal nennen.

$$(((A\cup B)\setminus(C\cup(A\cap B))\cup(C\setminus((B\setminus A)\cup(A\setminus B))))$$

b) Es seien I und J nichtleere Indexmengen. Außerdem seien die Menge M und für alle $i\in I$ und $j\in J$ die Mengen A_i und $B_j$gegeben. Zeigen Sie die Gültigkeit der Gleichung:

$$\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\cup M=\bigcup_{i\in I}(A_i\cup M)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
&x\in\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\cup M\\
\iff\ & x\in\bigcup_{i\in I}A_i\vee x\in M\\
\iff\ & (\exists i\in I: x\in A_i)\vee x\in M\\
\overset{(*)}{\iff}\ & \exists i\in I:(x\in A_i\vee x\in M)\\
\iff\ & \exists i\in I: x\in A_i\cup M\\
\iff\ & x\in\bigcup_{i\in I}(A_i\cup M)
\end{aligned}$$

Hierbei liefert eine einfache Überlegung die Gültigkeit von $(*)$.

Aufgabe 8

Verneinen Sie die folgenden Ausdrücke der Prädikaten- und Aussagenlogik. Erklären Sie die jeweilige Bedeutung der Aussage und ihrer Negation.

1. $\forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{m\in\mathbb{N}} : n < m$

   Lösung:
   Die Negation lautet:

   $$\exists_{n\in\mathbb{N}}\forall_{m\in\mathbb{N}} : n \geq m$$

   Die ursprüngliche Aussage behauptet, dass es für jede natürliche Zahl n eine größere natürliche Zahl m gibt. Die Negation besagt, dass es eine natürliche Zahl n gibt, die größer oder gleich allen natürlichen Zahlen m ist, also dass es eine größte natürliche Zahl gibt.

2. $\exists_{x\in X}\forall_{y\in X} : (x = y \vee |x - y| \geq 1)$, wobei $X \subset \mathbb{R}$

   Lösung:
   Die Negation lautet:

   $$\forall_{x\in X}\exists_{y\in X} : (x \neq y \wedge |x - y| < 1)$$

   Die ursprüngliche Aussage behauptet, dass die Menge X wenigstens ein Element besitzt, zu welchem alle anderen Elemente der Menge einen Abstand von mindestens 1 haben. Die Negation besagt, dass es für alle Elemente x der Menge X wenigstens ein von x verschiedenes Element y gibt, sodass der Abstand zwischen x und y kleiner als 1 ist.