PA 01

Junktoren

Verknüpfung von logischen Aussagen durch Junktoren

Junktor	Symbol	Bedeutung
NICHT	$\neg$	$\neg A$ ist Negation von A
UND	$\wedge$	$A \wedge B$ ist WAHR, wenn beide Aussagen A und B WAHR sind. $A \wedge B$ ist FALSCH, wenn mindestens eine der Aussagen A , B falsch ist
ODER	$\vee$	$A \vee B$ ist WAHR, wenn mindestens eine der Aussagen A , B WAHR sind. $A \vee B$ ist FALSCH, wenn beide Aussagen FALSCH sind
Implikation	$\Rightarrow$	**Wenn** A WAHR ist, dann ist auch B WAHR. Das heißt,$A \Rightarrow B$ ist WAHR, wenn $(A = W, B = W)$, $(A = F, B = W)$ oder $(A = F, B = F)$. $A \Rightarrow B$ ist FALSCH, wenn $(A = W, B = F)$
Äquivalenz	$\Longleftrightarrow$	A gilt genau dann, wenn B gilt

Def. 1.24: Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ (auch 2A, siehe Prop. 2.17 unten) besteht genau aus allen Teilmengen von A.
Bsp: $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

Quantoren

$\forall$: für alle (bzw. zu jedem)
$\exists$: es gibt (bzw. es existiert)
$\exists!$: es existiert genau ein
$\nexists$: es gibt kein

Bem. 1.36: Beweisstrategien: Beweis durch Beispiel

(a) $\underset{x \in A}{\forall} P(x)$: Man muss $P(x)$ für jedes $x \in A$ beweisen, d.h. Beispiele reichen nicht!
(b) $\neg \underset{x \in A}{\forall} P(x)$: $\exists\, x \in A$ so, dass $P(x)$ falsch (ein Gegenbeispiel reicht).
(c) $\underset{x \in A}{\exists} P(x)$: Finde ein $x \in A$ so, dass $P(x)$ wahr (ein Bsp. reicht).

Beweis
Direkter Beweis
Widerspruch: Geben eine Annahme, finden einen Widerspruch.
Kontraposition: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A$
Vollständige Induktion: $1 \wedge n \Rightarrow n + 1$
Äquivalenz: $(A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)$

Mengenlehre

Symbol	Deutscher Name	Bedeutung / Definition

$\in$	Element von	$a \in A$ bedeutet: a ist ein Element der Menge A.
$\notin$	Kein Element von	$a \notin A$ bedeutet: a ist **nicht** in der Menge A enthalten.
$\subset$	Echte Teilmenge	$A \subset B$ bedeutet: Alle Elemente von A sind in B, aber $A \neq B$.
$\subseteq$	Teilmenge	$A \subseteq B$ bedeutet: Alle Elemente von A sind auch in B (A kann gleich B sein).
$\not\subset$	Keine Teilmenge	$A \not\subset B$ bedeutet: Es gibt mindestens ein Element in A, das nicht in B ist.
$\supseteq$	Obermenge	$A \supseteq B$ bedeutet: B ist eine Teilmenge von A.
$\varnothing$	Leere Menge	Eine Menge ohne Elemente, z. B. $\varnothing = \{\}$.
$\cup$	Vereinigung	$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ oder } x \in B \}$.
$\cap$	Durchschnitt	$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ und } x \in B \}$.
$\setminus$	Differenz	$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ und } x \notin B \}$.
Δ	Symmetrische Differenz	$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
$\times$	Kartesisches Produkt	$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B \}$.
P(A)	Potenzmenge	P(A) = Menge aller Teilmengen von A.
$\|A\|$	Mächtigkeit / Kardinalität	$\|A\|$ = Anzahl der Elemente in A.

Aufgabe 1 Th 1.11

a) Kommutativität/Commutative property/交换律

Th 1.11 d) Kommutativegesetz der Disjunktion

A	B	$A \vee B$	$B \vee A$	$\Leftrightarrow$
F	F	F	F	W
F	W	W	W	W
W	F	W	W	W
W	W	W	W	W

b) Assoziativgesetz/Associativ peoperty/结合律

Th 1.11 f) Assoziativgesetz der Disjunktion

A	B	C	$(A \vee B) \vee C$	$A \vee (B \vee C)$	$\Leftrightarrow$
F	F	F	F	F	W
F	F	W	W	W	W
F	W	F	W	W	W
F	W	W	W	W	W

W	F	F	W	W	W
W	F	W	W	W	W
W	W	F	W	W	W
W	W	W	W	W	W

Distributivität/Distributive property/分配律

Th 1.11 h) DistributivgesetzII

A	B	C	B ∧ C	A ∨ (B ∧ C)	A ∨ B	A ∨ C	(A ∨ B) ∧ (A ∨ C)	⇔
F	F	F	F	F	F	F	F	W
F	F	W	F	F	F	W	F	W
F	W	F	F	F	W	F	F	W
F	W	W	W	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	W	W	W	W
W	F	W	F	W	W	W	W	W
W	W	F	F	W	W	W	W	W
W	W	W	W	W	W	W	W	W

Aufgabe 2

(a) Beweis: $X \vee (X \Rightarrow Y)$ ist eine Tautologie

1. Logischer Beweis (Äquivalenzumformungen)

Wir verwenden die Äquivalenz

$$(X \Rightarrow Y) \;\Leftrightarrow\; (\neg X \vee Y) \text{ Th 1.11 (a)}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} X \vee (X \Rightarrow Y) &\Leftrightarrow\; X \vee (\neg X \vee Y) \\ &\Leftrightarrow\; (X \vee \neg X) \vee Y && \text{(Assoziativität, Th 1.11 (f))} \\ &\Leftrightarrow\; \text{wahr} \vee Y && \text{(Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten)} \\ &\Leftrightarrow\; \text{wahr}. \end{aligned}$$

Damit ist die Aussageform **immer wahr**, also eine **Tautologie**.

---

2. Wahrheitstafel

X	Y	X ⇒ Y	X ∨ (X ⇒ Y)
F	F	W	W

F	W	W	W
W	F	F	W
W	W	W	W

Schlussfolgerung:
Da in jeder Zeile der Wahrheitswert **W** (wahr) ist, ist

$$X \lor (X \Rightarrow Y)$$

eine **Tautologie**.

b) Vereinfachung von $(A \land (A \Rightarrow B))$

$$\begin{aligned} A \land (A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow A \land (\neg A \lor B) && \text{(Definition der Implikation)} \\ &\Leftrightarrow (A \land \neg A) \lor (A \land B) && \text{(Distributivgesetz)} \\ &\Leftrightarrow \bot \lor (A \land B) && (\text{Widerspruch: } A \land \neg A = \bot) \\ &\Leftrightarrow A \land B && (\text{Neutralität von } \bot \text{ unter } \lor). \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$A \land (A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; A \land B$$

c) Vereinfachung von $(A \Rightarrow B) \land (\neg A \Rightarrow B)$

$$\begin{aligned} (A \Rightarrow B) \land (\neg A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land (A \lor B) && \text{(Umformung der Implikation)} \\ &\Leftrightarrow B \lor (\neg A \land A) && \text{(Distributiv- bzw. Konsensusregel)} \\ &\Leftrightarrow B \lor \bot && \text{(Widerspruch)} \\ &\Leftrightarrow B. \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$(A \Rightarrow B) \land (\neg A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; B$$

d) Vereinfachung von $(A \Rightarrow B) \land (\neg B \Rightarrow A)$

$$\begin{aligned} (A \Rightarrow B) \land (\neg B \Rightarrow A) &\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land (B \lor A) && \text{(Umformung der Implikationen)} \\ &\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land (A \lor B) && \text{(Kommutativität der Disjunktion)} \\ &\Leftrightarrow B \lor (\neg A \land A) && \text{(Distributiv-/Konsensusregel)} \\ &\Leftrightarrow B \lor \bot && \text{(Widerspruch)} \\ &\Leftrightarrow B. \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$(A \Rightarrow B) \land (\neg B \Rightarrow A) \;\Leftrightarrow\; B$$

e) Vereinfachung von $((P \Rightarrow Q) \land (\neg P \Rightarrow Q)) \land (S \lor (S \Rightarrow T))$

$$\begin{aligned} ((P \Rightarrow Q) \land (\neg P \Rightarrow Q)) \land (S \lor (S \Rightarrow T)) &\Leftrightarrow Q \land (S \lor (S \Rightarrow T)) && (\text{nach c) mit } P, Q) \\ &\Leftrightarrow Q \land \text{wahr} && (\text{da } S \lor (S \Rightarrow T) \text{ ist Tautologie}) \\ &\Leftrightarrow Q. \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$(P \Rightarrow Q) \land (\neg P \Rightarrow Q) \land (S \lor (S \Rightarrow T)) \;\Leftrightarrow\; Q$$

Aufgabe 3 Formalisierung und Begründung

Bezeichnungen (Prädikate):

- B(x): x ist *gebrochselt*.
- F(x): x ist *foberant*.
- D(x): x ist *dorig*.
  (Die Variablen laufen über die Kalupen in Knusiland.)

Gegebene Aussagen (Prämissen):

1. Jede ungebrochselte Kalupe ist dorig.

$$\forall x \ (\neg B(x) \Rightarrow D(x)).$$

2. Jede foberante Kalupe ist dorig.

$$\forall x \ (F(x) \Rightarrow D(x)).$$

3. In Knusiland gibt es sowohl dorige wie undorige Kalupen.

$$\exists x : D(x) \quad \text{und} \quad \exists x : \neg D(x).$$

a) Alle undorigen Kalupen sind gebrochselt.

Formalisierung: $\forall x \ (\neg D(x) \Rightarrow B(x))$.

Begründung: Aus Prämisse (1) haben wir $\forall x(\neg B(x) \to D(x))$. Die Umkehrung dieser Implikation (die Kontraposition) liefert $\forall x(\neg D(x) \to B(x))$. Also ist a) gültig.

b) Es gibt gebrochselte Kalupen.

Formalisierung: $\exists x : B(x)$.

Begründung: Aus Prämisse (3) wissen wir $\exists x \ \neg D(x)$. Mit a) (oder direkt durch Kontraposition von (1)) haben wir $\forall x(\neg D(x) \to B(x))$. Aus Existenz von $\neg D$ folgt damit $\exists x \ B(x)$. Also b) gültig.

c) Es gibt sowohl gebrochselte als auch ungebrochselte Kalupen.

Formalisierung: $\exists x : B(x) \ \land \ \exists x : \neg B(x)$.

Begründung: Wir können $\exists x : B(x)$ ableiten (siehe b)). Es gibt jedoch keine Schlussregel, die aus den Prämissen $\exists x : D(x)$ oder $\exists x : \neg D(x)$ notwendigerweise $\exists x : \neg B(x)$ folgen lässt. Daher ist c) **nicht zwingend** ableitbar. (Gegenmodell möglich.)
nicht notwendigerweise richtig

d) Mindestens eine gebrochselte Kalupe ist unfoberant.

Formalisierung: $\exists x : (B(x) \land \neg F(x))$.

$$\forall x\ (\neg B(x) \to D(x)) \qquad \text{(Prämisse)}$$
$$\implies \quad \forall x\ (\neg D(x) \to B(x)) \qquad \text{(Kontraposition)}$$

$$\forall x\ (F(x) \to D(x)) \qquad \text{(Prämisse)}$$
$$\implies \quad \forall x\ (\neg D(x) \to \neg F(x)) \qquad \text{(Kontraposition)}$$

$$\exists x\ \neg D(x) \qquad \text{(Prämisse)}$$
$$\Rightarrow \text{ Für ein } a \text{ mit } \neg D(a) \text{ gilt: } B(a) \text{ und } \neg F(a).$$
$$\therefore\ \exists x\ (B(x) \wedge \neg F(x)).$$

e) Alle gebrochselten Kalupen sind unfoberant.

Formalisierung: $\forall x\ (B(x) \to \neg F(x))$.

Begründung: Ebenso keine Grundlage in den Prämissen; e) **nicht zwingend**.

Aufgabe 5

	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
Löwe	F	F	F	W	W	W	W
Einhorn	W	W	W	F	F	F	W

(a)

Wenn Löwes Aussage wahr ist, dann war es Donnerstag.
Wenn Löwes Aussage falsch ist, dann war es Montag.
Wenn Einhorns Aussage wahr ist, dann war es Sonntag.
Wenn Einhorns Aussage falsch ist, dann war es Donnerstag.
Der nur möglich Tag ist Donnerstag. Löwe sagt Wahrheit, Einhorn lügt.

(b)

1. Montag oder Donnerstag.
2. Donnerstag geht nicht.
   $\Rightarrow$ es war Montag.

(c)

1. Montag oder Donnerstag.
2. Mittwoch oder Sonntag.
   An keinem Tag der Woche ist es möglich!

(d)

Die Aussage kann nicht wahr sein. Dann ist es falsch. Wenn es falsch ist, muss es von Montag bis Mittwoch sein.
$\neg$(Ich habe gestern gelogen und ich werde morgen wieder lügen.) $\iff$(Ich habe gestern Wahrheit gesagt oder ich werde morgen Wahrheit sagen.) $\Rightarrow$ Montag oder Mittwoch.