



Dozent: Dr. Peter Philip

Assistenten: Dr. Sakirudeen Abdulsalaam, Julius Hallmann

Wintersemester 2025/26

Analysis (Informatik und Statistik) Präsenzblatt 3

Aufgabe 9

- (a) Es sei durch \mathbb{Z} die Menge $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ der ganzen Zahlen bezeichnet. Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit der Abbildungsvorschrift $z \mapsto z^2$. Bestimmen Sie das jeweilige Urbild der folgenden Mengen unter g :

- (i) $\{0\}$ (ii) $\{4\}$ (iii) $\{-3\}$
(iv) $\{6, 9\}$ (v) $\{6, -3, 4, 9\}$ (vi) $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$

- (b) Es seien $f : A \rightarrow B$ und $g : C \rightarrow D$ Abbildungen derart, dass $f(A) \subseteq C$. Zeigen Sie, dass für alle $W \subseteq D$ die folgende Mengengleichung gilt:

$$(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)).$$

Hinweis: Beachten Sie, dass weder f noch g bijektiv sein müssen und dass $g^{-1}(W)$ das Urbild der Menge W unter g bezeichnet.

Aufgabe 10

Finden Sie jeweils eine Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, welche die geforderten Eigenschaften erfüllt. Begründen Sie Ihre Antworten.

- (a) f ist weder injektiv, noch surjektiv.
(b) f ist bijektiv.
(c) f ist injektiv, aber nicht surjektiv.
(d) f ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Aufgabe 11

- (a) Bestimmen Sie zwei Rechtsinverse der Funktion $h : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 1\}, n \mapsto (-1)^n$. Handelt es sich bei h um eine surjektive/injektive/bijektive Abbildung?
(b) Es sei A eine Menge mit mindestens zwei Elementen $a_1, a_2 \in A$, ferner sei B eine beliebige Menge. Wir nehmen an, dass $f : A \rightarrow B$ injektiv ist, jedoch nicht surjektiv.
(i) Zeigen Sie, dass f zwei verschiedene Linksinverse besitzt.
(ii) Warum ist die Annahme, dass A wenigstens zwei verschiedene Elemente besitzt, nicht entbehrlich?

Aufgabe 12

Sei $A = \{1, 2, \dots, n\}$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Definiere eine Relation R auf A durch

$x R y$ genau dann, wenn $x - y$ gerade ist.

Zeigen Sie: R ist eine Äquivalenzrelation auf A und bestimmen Sie die Äquivalenzklassen. Ist R anti-symmetrisch?