


Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Институт информационных технологий, математики и механики

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Институт информационных технологий, математики и механики

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА ГРАФОВ

Лекция 4. Поиск кратчайшего пути в графе

Пирова А.Ю.
Кафедра ВВиСП

Содержание

Предметные области

- Поиск кратчайшего пути в различных сетях: транспортных, электрических, VLSI, графах социальных сетей
- Транспортные сети: навигация, логистическое планирование, планирование транспортных развязок и расположения объектов
- Графы социальных сетей: вычисление различных характеристик, например, диаметр, betweenness centrality
- Маршрутизация в телекоммуникационных сетях

Постановка задачи

- Пусть дан ненаправленный граф $G = (V, E, w(e))$, $|V| = n, |E| = m,$ с неотрицательными весами ребер $w\colon E \to \boldsymbol{R}_{>0}$.
- ***Путь в графе*** $P((v_1, v_2), (v_2, v_3) \dots, (v_{k-1}, v_k))$ – последовательность рёбер, такая, что конец предыдущего ребра является началом следующего ребра для всех ребер, кроме первого.
- ***Длина пути*** = число входящих в него ребер
- ***Вес пути*** $P(v_1, v_2, \dots, v_k)$ между вершинами v_1 и v_k = сумме весов входящих в него ребер:

$$w(P) = \sum_{i=1}^{k-1} w(v_i, v_{i+1})$$

- ***Вес кратчайшего пути*** из вершины s в вершину t определяется как

$$\delta(s,t) = \begin{cases} \min w(P), P \ - \text{путь из } s \text{ в } t \\ \infty, \text{если } t \text{ не достижима из } s \end{cases}$$

- ***Исток*** – вершина, из которой осуществляется поиск путей.

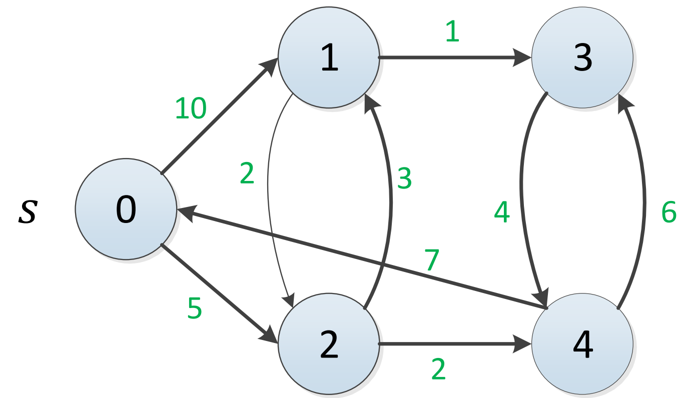
Постановка задачи

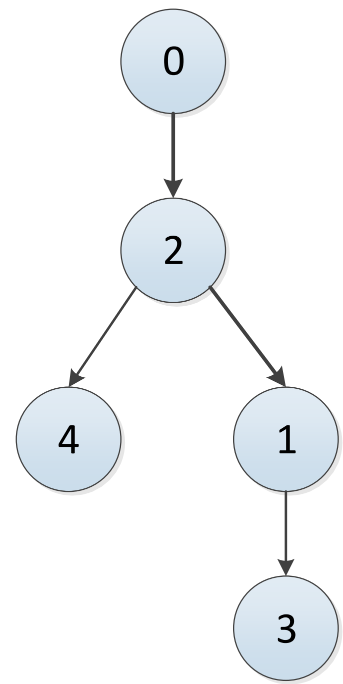
- Варианты постановки задачи:
  - Найти кратчайший путь между двумя вершинами, s и t
  - Найти кратчайшие пути из вершины s во все остальные (single source shortest problem, SSSP)
  - Найти кратчайшие пути между всеми вершинами (all pairs shortest paths problem, APSP)
- Мы рассмотрим задачу SSSP

Постановка задачи

- Информацию обо всех кратчайших путях из одной вершины можно представить в виде дерева.

- *Дерево кратчайших путей* с корнем в вершине s – это ориентированный подграф графа G, который является корневым деревом и содержит простой кратчайший путь из истока s к каждой достижимой из нее вершине.





Методы поиска кратчайших путей

- Подробный обзор алгоритмов
  – презентация Р. Вернека про алгоритм Дейкстры и его модификации [pdf]
  – Задача поиска пути между двумя вершинами
  Bast H. et al. Route planning in transportation networks //Algorithm engineering. – Springer, Cham, 2016. – С. 19-80. [pdf]

- Алгоритмы можно разделить на две группы:
  – **label setting** – после посещения вершины расстояние до нее вычислено и не будет меняться
  – **label correcting** – расстояния до вершин пересчитываются во время работы алгоритма

Методы поиска кратчайших путей из одной вершины

Алгоритм	Сложность	Ограничения	Распараллеливаемость	Год
Алгоритм Дейкстры	$O(n \log n + m)$ при использовании фибоначчиевых куч	Неотрицательные веса ребер	Плохо масштабируется, требует параллельной обработки очереди	1959
Алгоритм Беллмана-Форда	$O(nm)$	Допускает ребра с отрицательным весом, без отриц. циклов	Просто распараллеливается, но требует большого объема памяти	1958
Алгоритм дельта-шага (Мейерс, Сандерс)	$O(n + m + dL)$, d – максимальная степень вершины, L – вес максимального кратчайшего пути	Неотрицательные веса ребер	распараллеливается	1998
Алгоритм Торупа	$O(n + m)$	Неотрицательные веса ребер	Есть параллельная версия, но требует сложных структур данных	2004

Некоторые реализации SSSP

	Дейкстра	Беллман-Форд	дельта-шаг
igraph	+	+	--
GAP			+
			OpenMP
NetworKit	+	+	--
	seqv	algebra	
Graph500			+
			MPI
Boost			+
			MPI
GBBS	--	+	+
		omp	omp
Galois	+	+ модиф, наз. Topo	+
	seqv, omp		seqv, omp, mpi

Алгоритм Дейкстры

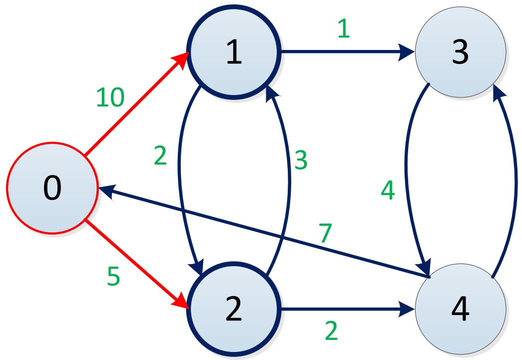
- Идея: обходим граф в ширину, на каждом шаге выбирая вершину с наименьшим расстоянием, и от нее пересчитываем оценку расстояния от источника до других вершин.
  (жадный принцип)
- Вершины разделены на 3 группы:
  – S - вершины, для которых расстояние уже вычислено,
  – Q – *активные вершины*, до которых расстояние конечно и еще вычисляется. Хранятся в приоритетной очереди
  – $V \backslash S \backslash \mathrm{Q}$ – еще не достигнутые вершины (расстояние ∞)
- Обозначим d – вектор расстояний
- Основная операция – *Релаксация* – пересчет оценки расстояния до вершины

Алгоритм Дейкстры

1. Инициализация. Для всех $v \in V$ расстояние $d[v] = \infty$.
2. Положить $d[s] = 0$, $S = \emptyset$. Вставить s в очередь Q
3. До тех пор, пока очередь Q не пуста:
   1. Извлечь из Q вершину с минимальным приоритетом u. $S = S \cup \{u\}$
   2. *Релаксация*. Для каждой вершины, смежной с u, $(u, z) \in E$
      1. Обновить оценку расстояния:
         если $d[z] > d[u] + w(u, z)$, то $d[z] = d[u] + w(u, z)$
      2. Если $u \notin S$, вставить u в очередь Q или уменьшить ключ

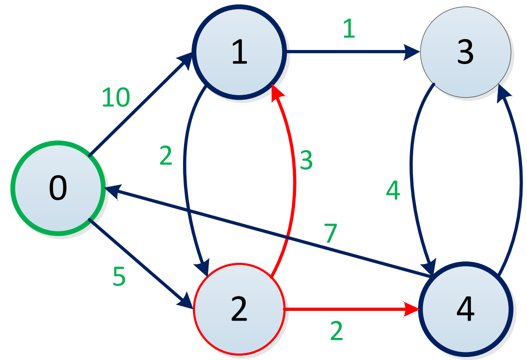
- Сложность алгоритма зависит от реализации приоритетной очереди. Пусть в графе n вершин, m ребер, тогда:
  - Список или массив $O(n^2)$
  - Сбалансированное бинарное дерево поиска $O((n+m)\log n)$
  - Фибоначчиева куча $O(n + m\log n)$

Алгоритм Дейкстры. Пример



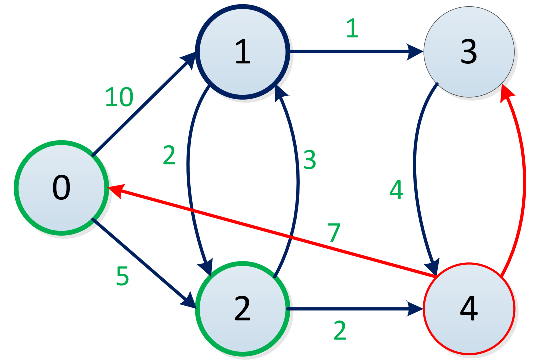
d	0	∞	∞	∞	∞

$S = \emptyset \quad Q = \{0\}$



d	0	10	5	∞	∞

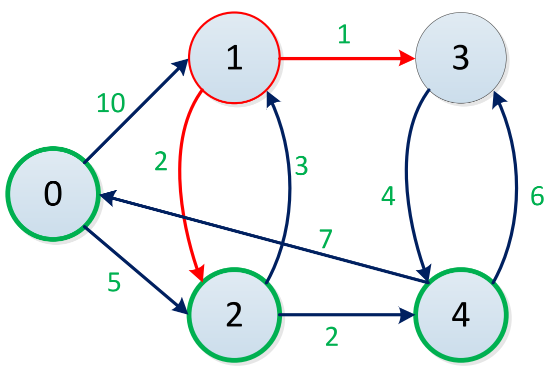
$S = \{0\} \quad Q = \{(2,5),(1,10)\}$



d	0	8	5	∞	7

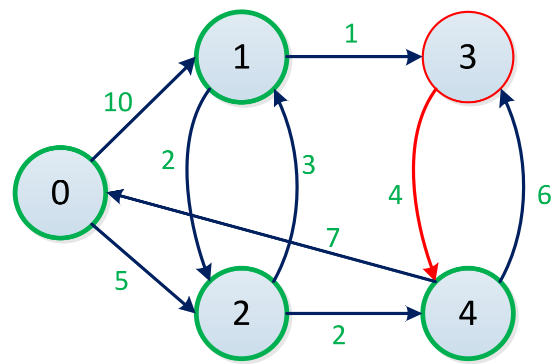
$S = \{0,2\} \quad Q = \{(4,7),(1,\mathbf{8})\}$

изменился ключ



d	0	8	5	13	7

$S = \{0,2,4\} \quad Q = \{(1,8),(3,13)\}$



d	0	8	5	9	7

$S = \{0,1,2,4\} \quad Q = \{(3,9)\}$

Параллельный алгоритм Дейкстры

- Рассмотрим алгоритм для направленного графа авторов Краузер, Мельхорн, Мейер, Сандерс, 1998 г.

  Сложность $O(n^{\frac{1}{3}} \log n)$
- Обозначения. :
  - i – индекс процесса (потока). P – число процессов (потоков)
  - V_i - множество вершин, локальных для процесса (потока)
  - Очередь Q_i^d. Приоритет вершины v – оценка расстояния $d[v]$.
  - Очередь Q_i^{in}. Приоритет вершины v – оценка расстояния по входящим ребрам, $in[v] = d[v] - \min\{w(u,v): (v,u) \in E, v \in V_i\}$
  - Очередь Q_i^{out}. Приоритет вершины v – оценка расстояния по исходящим ребрам, $out[v] = d[v] + \min\{w(u,v): (v,u) \in E, v \in V_i\}$
  - S – Множество обработанных вершин, для которых расстояние уже вычислено

Параллельный алгоритм Дейкстры

1. Инициализация. Для всех $v \in V_i$: расстояние от истока $d[v] = \infty$.
2. Положить $d[s] = 0$, $S = \emptyset$. Добавить s в очереди Q_i^d, Q_i^{in}, Q_i^{out}.
3. До тех пор, пока очереди Q_i^d не пусты:
   1. Извлечь из Q_i^{out} вершину с минимальным приоритетом, равным L_i. Выполнить редукцию: найти $L = \min\{L_i, i = \overline{1, P}\}$.
   2. Извлечь из Q_i^d вершину с минимальным приоритетом, равным M_i. Выполнить редукцию: найти $M = \min\{M_i, i = \overline{1, P}\}$.
   3. На каждом процессе: найти множество вершин R_i, для которых $d[v] \leq L$ или $in[v] \leq M$. Для этих вершин расстояние уже найдено и равно $d[v]$. $S = S \cup \bigcup_{i=1}^{P} R_i$
   4. Удалить вершины из множества R_i из очередей Q_i^d, Q_i^{in}, Q_i^{out}.
   5. На каждом процессе: сформировать множество пар $\langle Z_i, X_i \rangle$ необработанных вершин, смежных с вершинами из R_i, и весов ведущих к ним ребер.
   6. Для каждой пары $\langle z, x \rangle \in \langle Z_i, X_i \rangle$ обновить приоритет вершины z в очередях своего или чужого процесса (потока) Q_i^d, Q_i^{in}, Q_i^{out} по правилу: если $d[z] > d[z] + x$, то $d[z] = d[z] + x$.
   7. Синхронизация: проверить критерий останова

Алгоритм Беллмана–Форда

- Алгоритм типа label correcting, основан на принципе динамического программирования.
- На каждой итерации выполняется релаксация по всем ребрам.

1. Инициализация. Для всех $v \in V$ расстояние $d[v] = \infty$.
2. Повторить $n - 1$ раз:
   1. Для всех ребер $(v, u) \in E$

      $d(v) = \min\{d(v), d(u) + w(u, v)\}$
3. Проверка на наличие цикла с отрицательным весом:
   1. Для всех ребер $(v, u) \in E$:

      Если $d(u) + w(u, v) < d(v)$, то ЕСТЬ ЦИКЛ. ВЫХОД

- Вычислительная сложность $O(nm)$

Алгоритм Беллмана–Форда

- Модификация: добавим проверку сходимости алгоритма.

1. Инициализация. Для всех $v \in V$ расстояние $d[v] = \infty$. $d[s] = 0$
2. Повторить $n - 1$ раз:
   1. Для всех ребер $(v, u) \in E$
      $d(v) = \min\{d(v), d(u) + w(u, v)\}$
   2. Проверить, изменялся ли массив d. Если нет, то BREAK.
3. Проверка на наличие цикла с отрицательным весом:
   1. Для всех ребер $(v, u) \in E$:
      Если $d(u) + w(u, v) < d(v)$, то ЕСТЬ ЦИКЛ. ВЫХОД

- Вычислительная сложность $O(nm)$

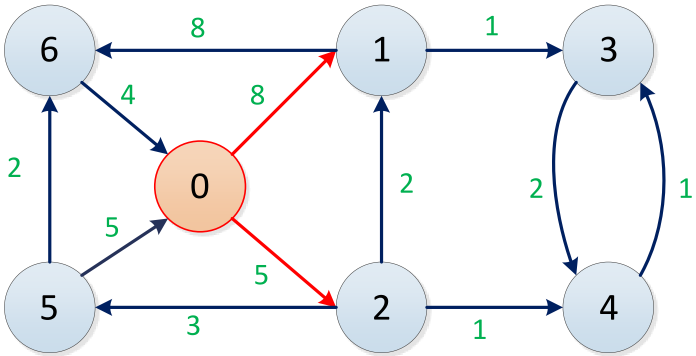
Алгоритм Беллмана–Форда–Мура (или Shortest Path Faster Algorithm, SPFA

- Мур, 1959.
- Модификация: используем очередь вершин, для которых расстояние изменялось на предыдущей итерации.

1. Инициализация. Для всех $v \in V$ расстояние $d[v] = \infty$.
2. Положить $d[s] = 0$. Множество активных вершин $Q = \{s\}$
3. До тех пор, пока множество Q не пусто:
   1. Для каждой вершины u из Q:
      1. Для каждого ребра $(u, z) \in E$:
         1. Вычислить $d_{new}[z] = d[u] + w(u, z)$;
         2. *Релаксация*. Если $d_{new}[z] < d[z]$, то $d[z] = d_{new}[z]$, $Q = Q \cup \{z\}$.
   2. $Q = Q \backslash \{u\}$.

- Вычислительная сложность $O(nm)$

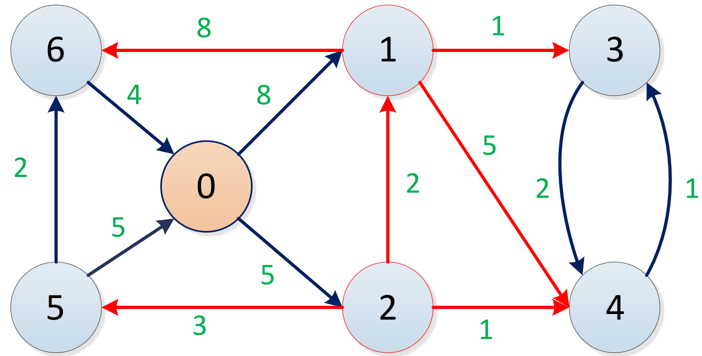
Алгоритм Беллмана–Форда–Мура. Пример



d

0	8	5				

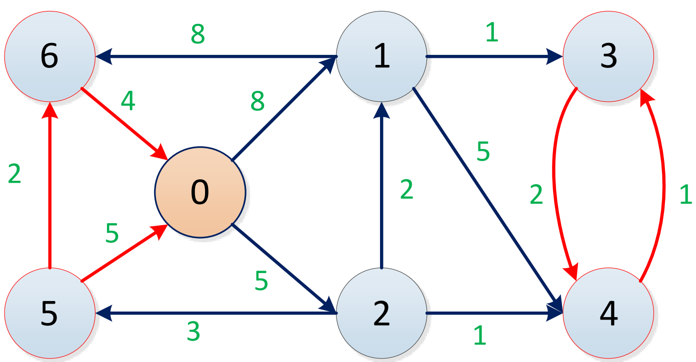
$Q = \{0\}$



d

0	7	5	9	6	8	16

$Q = \{1, 2\}$



d

0	7	5	7	6	8	10

$Q = \{5, 6, 3, 4\}$

АЛГОРИТМ ДЕЛЬТА-ШАГА

Алгоритм дельта-шага (delta stepping)

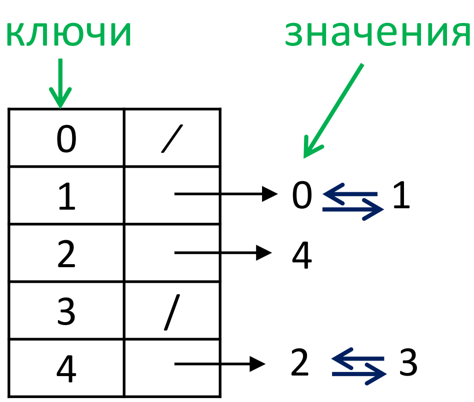
- **Цель:** модифицировать алгоритм Дейкстры так, чтобы можно было пересчитать расстояние для группы вершин одновременно.
- Выберем порог $\Delta > 0$. Все ребра по весу можно разделить на «легкие» ($\{(v,u) \in E : w(v,u) < \Delta\}$) и «тяжелые» $\{(v,u) \in E : w(v,u) \leq \Delta\}$.
- Для хранения оценки расстояния используем очередь из карманов (buckets), в которых вершины сгруппированы по текущей оценке расстояния.

Очередь из карманов

- ***Очередь из карманов*** (bucket priority queue, bounded-height priority queue) – структура данных, которая реализует приоритетную очередь для хранения **динамически изменяющейся коллекции** пар «ключ-значение».
- Особенности:
  - Приоритеты – целые числа с конечным множеством значений ИЛИ
  - Множество значений приоритетов можно разбить на конечное число интервалов
- Предложена Dial в 1969 г. для решения задачи о поиске кратчайших путей (модификации алгоритма Дейкстры)

Очередь из карманов

- В базовом варианте очередь реализуется в виде массива двусвязных списков, в каждом списке хранятся значения с одинаковым ключом (приоритетом).
- Пример:
  – Множество {(ключ, значение)} = {(1, 0), (1, 1), (4, 2), (4, 3), (2, 4)}, допустимые приоритеты (ключи) – {0, 1, 2, 3, 4}



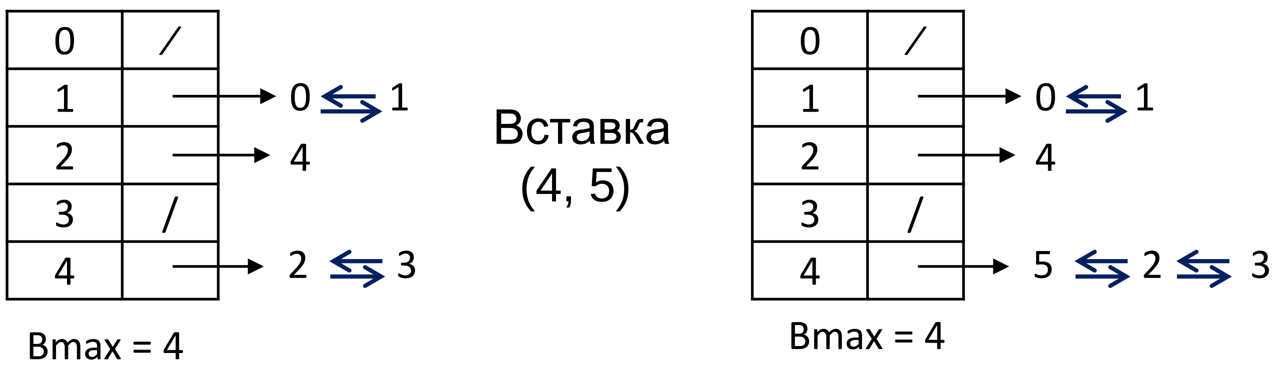
- Часто дополнительно хранится индекс наибольшего или наименьшего непустого кармана

Очередь из карманов. Основные вычислительные операции

- Пусть очередь хранится в виде массива B, поддерживается индекс наибольшего непустого кармана Bmax, всего карманов nb, элементов – n.
- Основные вычислительные операции:
  - **Вставить** значение x с ключом p,
  - **Удалить** значение x с ключом p,
  - **Найти** значение y с минимальным ключом,
  - **Изменить** значение ключа.

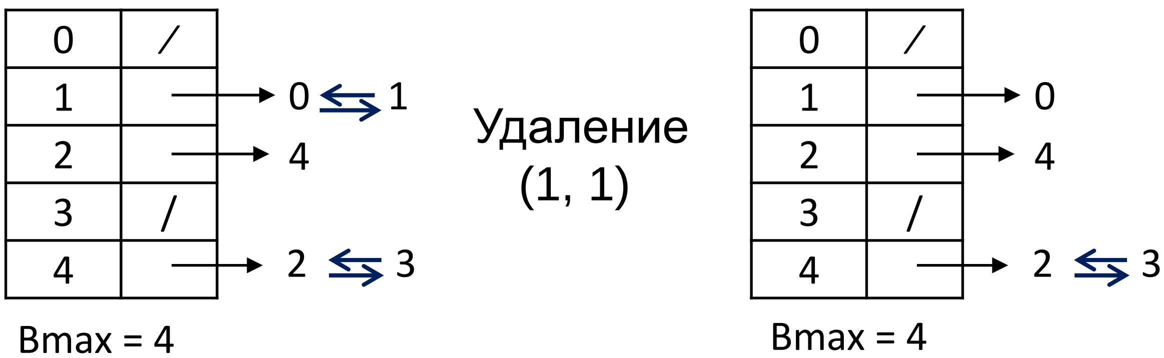
Очередь из карманов.
Основные вычислительные операции

- Основные вычислительные операции:
  - **Вставить** значение x с ключом p, $O(1)$
    1. Найти карман $B[p]$, вставить x в начало списка
    2. Если $p > Bmax$, обновить: $Bmax = p$



Очередь из карманов. Основные вычислительные операции

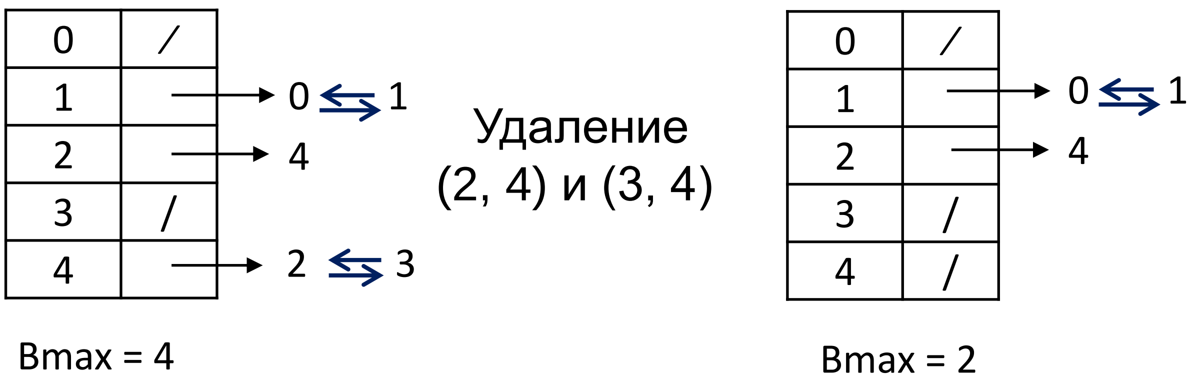
- Основные вычислительные операции:
  – **Удалить** значение x с ключом p, $O(n)$
    1. Найти карман $B[p]$, удалить x из списка ← здесь линейный проход по списку B[p]
    2. Если нужно, обновить $Bmax$ ← здесь линейный проход по массиву B



  – **Изменить** значение для ключа p с x на y = удалить значение x с ключом p + вставить значение y с ключом p

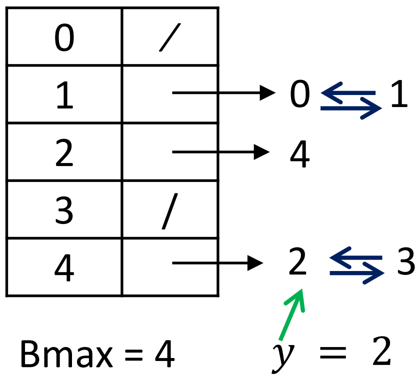
Очередь из карманов. Основные вычислительные операции

- Основные вычислительные операции:
  - **Удалить** любое значение x с ключом p, $O(nb)$
    1. Найти карман $B[p]$, удалить первый элемент x из списка
    2. Если нужно, обновить $Bmax$ ← здесь линейный проход по массиву B



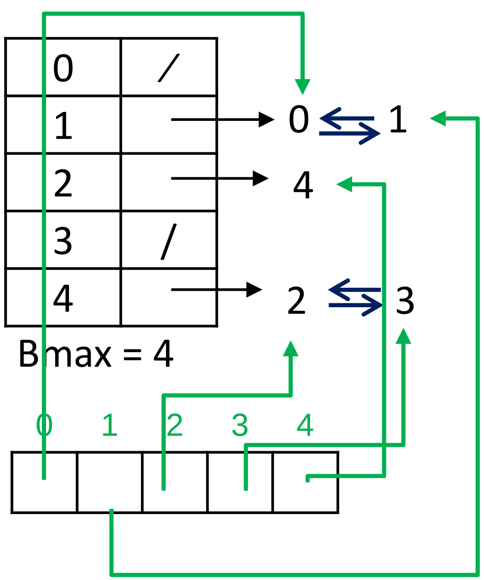
Очередь из карманов. Основные вычислительные операции

- Основные вычислительные операции:
  - **Найти** ключ y с максимальным приоритетом p, $O(1)$
    1. Вернуть первый элемент списка из кармана $B[Bmax]$

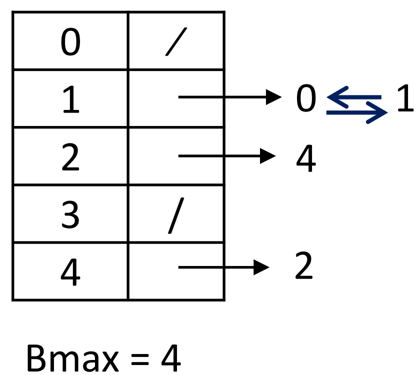


Очередь из карманов. Основные вычислительные операции

- Оптимизация: для каждого значения x за O(1) можно найти его звено в двусвязном списке
- Изменение вычислительной операции:
  - **Удалить** значение x с ключом p, $O(nb)$
    1. Найти карман $B[p]$, удалить x из списка ← $O(1)$
    2. Если нужно, обновить $Bmax$ ← здесь линейный проход по массиву B

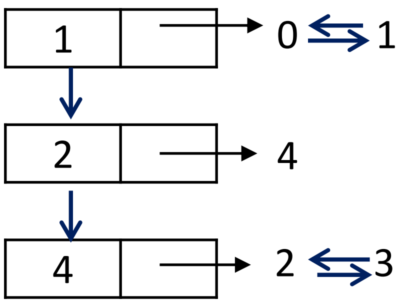


Удаление (3, 4)



Модификации

- Джонсон, 1981: хранить не массив, а **список** из непустых карманов + дерево поиска по списку для вставки нового кармана.
  - – Инициализация структуры данных – $O(\log \log Bmax)$
  - – Поиск значения с максимальным ключом – O(1)
  - – Вставка и удаление элемента – $O(\log \log D)$, D – разница между меньшим и большим приоритетами, ближайшими к приоритету вставленного или удаленного элемента.



Алгоритм дельта-шага (delta stepping)

- **Цель:** модифицировать алгоритм Дейкстры так, чтобы можно было пересчитать расстояние для группы вершин одновременно.
- Выберем порог $\Delta > 0$. Все ребра по весу можно разделить на «легкие» ($\{(v, u) \in E : w(v, u) < \Delta\}$) и «тяжелые» $\{(v, u) \in E : w(v, u) \leq \Delta\}$.
- Для хранения оценки расстояния используем очередь из карманов (buckets), в которых вершины сгруппированы по текущей оценке расстояния.
- В кармане $B[i]$ хранятся вершины v из очереди, для которых оценка расстояния $d[v] \in [\Delta i, \Delta(i + 1))$.
  Величина Δ называется *шириной кармана*.

Алгоритм дельта-шага (delta stepping)

- Если вершины связаны «легким» ребром, то при пересчете расстояния они окажутся в одном кармане. Если вершины связаны «тяжелым» ребром, то они окажутся в разных карманах.
- Одновременно можно пересчитать расстояние по всем «легким» ребрам, исходящим из вершин одного кармана. В результате этой операции в текущий карман могут попасть новые вершины или вершины, которые уже были в нем, но с улучшенной оценкой расстояния.

Алгоритм дельта-шага (delta stepping)

1. *Предобработка*. Для всех $v \in V$: разделить список смежности вершины по весу ребер: $L[v]$ – все ребра с весом меньше Δ, $H[v]$ – все ребра с весом больше Δ.
2. *Инициализация*. Для всех $v \in V$: $d[v] = \infty$. $B[0] = \{s\}$. $i = 0$.
3. **Пока** все карманы *B* не пусты:
   1. Множество рассмотренных вершин $S = \emptyset$
   2. Для каждого кармана $B[i]$ выполнять, пока карман не пуст:
      1. Сформировать множество пар «запросов» Req, состоящее из вершин, соединенных с вершинами из $B[i]$ легким ребром, и новой оценкой расстояния для них:
         $Req = \{(u, x): v \in B[i], (v, u) \in L(v), x = d[v] + w(v, u)\}$.
      2. *$S = S \cup B[i]$; $B[i] = \emptyset$*
      3. *Релаксация*. Для каждого $(u, x) \in Req$ выполнить Relax(u, x)
   3. Сформировать множество пар вершин, соединенных с вершинами из *S* **тяжелым ребром**, и новой оценки расстояния для них:
      $$Req = \{(u, x): v \in S, (v, u) \in H(v), x = d[v] + w(v, u)\}$$

Алгоритм дельта-шага (delta stepping)

3. Пока все карманы *B* не пусты:
   1. *…..*
   2. *…..*
   3. *Релаксация.* Для каждого $(u, x) \in Req$ выполнить **Relax(u, x)**

   Релаксация **Relax(u, x):**

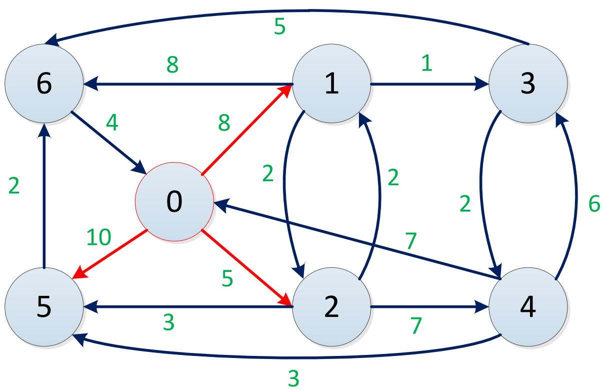
   Если $d[u] > x$, то

   1. исключить u из кармана $B[d[u] \ / \ \Delta]$,
   2. вставить u в карман $B[x \ / \ \Delta]$.
   3. $d[u] = x$.

Алгоритм дельта-шага. Пример

$\Delta = 4$
$B[0] = \{v: d[v] \in [0,4)\}$
$B[1] = \{v: d[v] \in [4,8)\}$
$B[2] = \{v: d[v] \in [8,12)\}$

Текущий карман – B[0]

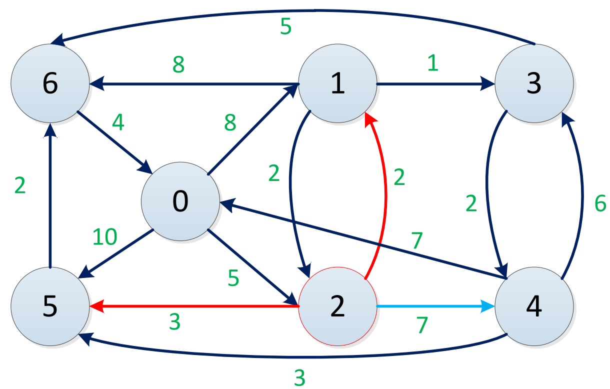


Шаг 1. B[0] = {0}, B[1] = B[2] = {}
Тяжелые ребра из кармана B[0]

d							
	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Req = {(1, 8), (2, 5), (5,10)}

Текущий карман – B[1]

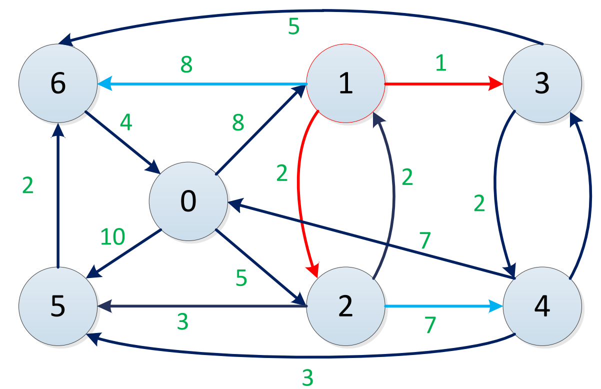


Шаг 2.1. B[0] = {}, B[1] = 2, B[2] = {1, 5}
Легкие ребра из кармана B[1]

d							
	0	8	5	∞	∞	10	∞

Req = {(1, 7), (5, 8)}

Текущий карман – B[1]



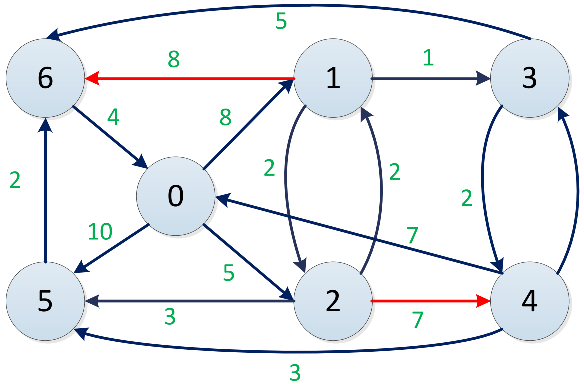
Шаг 2.2. B[0] = {}, B[1] = {1}, B[2] = {5}
Легкие ребра из кармана B[1]

d							
	0	**7**	5	∞	∞	**8**	∞

карман 1 не пуст → продолжаем
Req = {(2, 9), (3, 8)}

Алгоритм дельта-шага. Пример

Текущий карман – B[1]

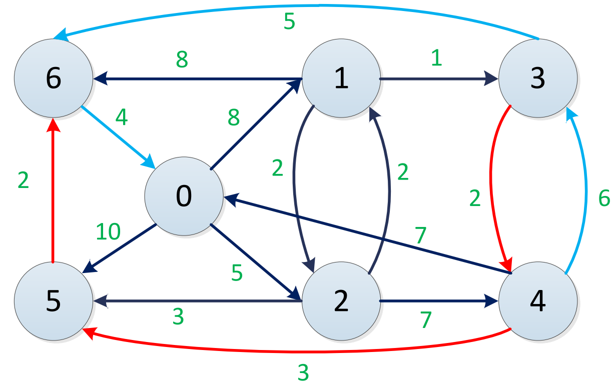


Шаг 2.3. Тяжелые ребра из кармана B[1]

d							
	0	7	5	**8**	∞	8	∞

Req = {(4, 12), (6, 15)}

Текущий карман – B[2]

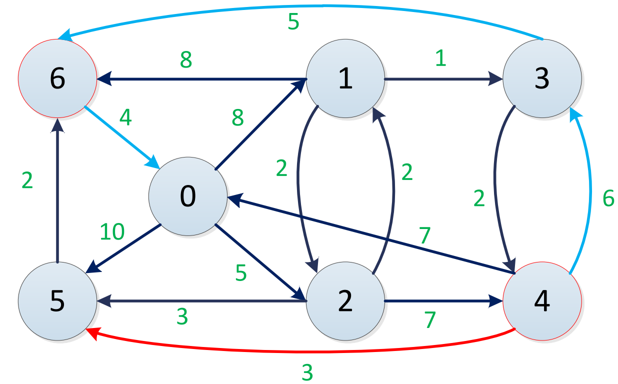


Шаг 2.4. B[0] = {}, B[1] = {}, B[2] = {3, 4, 5, 6}. Легкие ребра из кармана B[2]

d							
	0	7	5	8	**12**	8	**15**

Req = {(4, 10), (5, 15), (6, 10)}

Текущий карман – B[2]



Шаг 2.4. B[0] = {}, B[1] = {}, B[2] = {4, 6} Легкие ребра из кармана B[2]

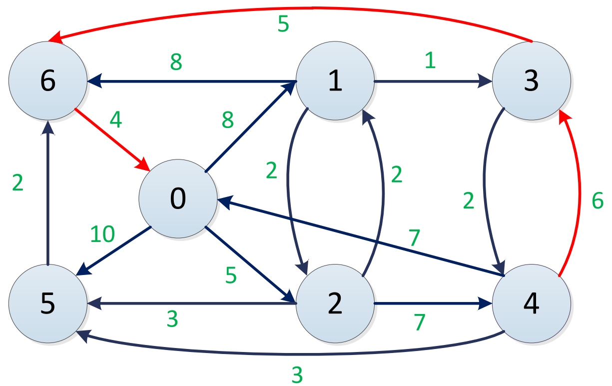
d							
	0	7	5	8	**10**	8	**10**

Req = {(5, 13)}

до вершин 4 и 6 изменялось расстояние, поэтому они активные

Алгоритм дельта-шага. Пример

Текущий карман – B[2]



Шаг 2.5. B[0] = {}, B[1] = {}, B[2] = {}
Тяжелые ребра из кармана B[2]

d							
	0	7	5	8	10	8	10

Req = {(3, 16), (6,13), (0, 14)}

Алгоритм дельта-шага (delta stepping)

- Эффективность алгоритма зависит от выбора Δ и реализации системы карманов.
- Мейер и Сандерс доказали, что для случайных графов с весами, равномерно распределенными в $[0, 1]$, при $\Delta = \Theta(\frac{1}{d})$ время работы в среднем $O(n + m + dL)$, где L – длина максимального пути, d – максимальная степень вершины

Параллельный алгоритм дельта-шага

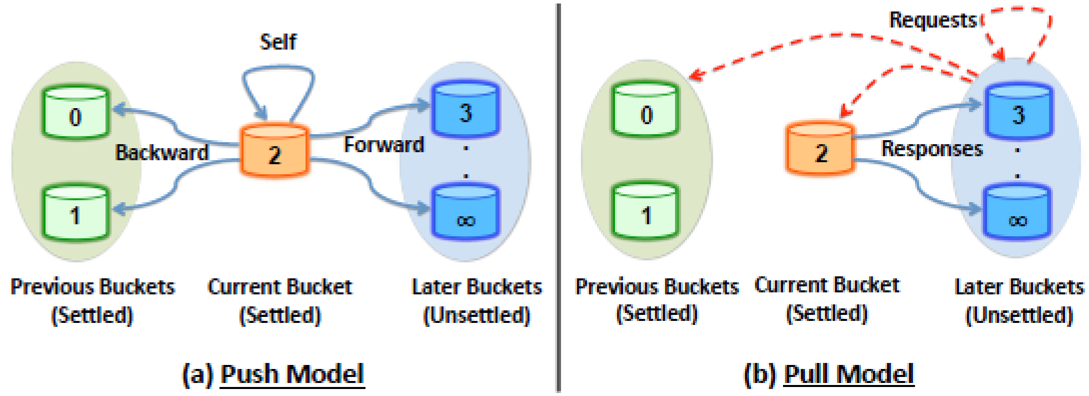
- Параллельно можно выполнить обработку ребер из одного кармана (шаги 3.2, 3.4).
  - Подход эффективен, если число карманов мало, а множество запросов велико.
  - Синхронизация: процессы (потоки) обмениваются подмножествами запросов Req так, что каждый обрабатывает запросы для своих локальных вершин. В Req удаляются дубли на этапе формирования множества
  - Дополнительная синхронизация: определить следующий непустой карман, проверить критерий останова.

Параллельный алгоритм дельта-шага

1. *Предобработка*. Параллельно для всех $v \in V$: сформировать $L[v]$, $H[v]$.
2. *Инициализация*. Параллельно для всех $v \in V$: $d[v] = \infty$. $B[0] = \{s\}$.
3. Пока все карманы *B* не пусты:
   1. На каждом процессе (потоке) k множество рассмотренных вершин $S[k] = \emptyset$
   2. Для каждого кармана $B[i]$ выполнять, пока карман не пуст:
      1. Параллельно На каждом процессе (потоке) k для локальных вершин из $B[i]$ сформировать множество пар Req без дублей: $Req[k]$.
      2. $S[k] = S[k] \cup B[i]$; $B[i] = \emptyset$
      3. *Релаксация*. Обменяться множествами $Req[k]$ так, чтобы на каждом процессе (потоке) обработать Req для локальных вершин. Выполнить релаксацию
   3. Параллельно На каждом процессе (потоке) k сформировать множество запросов $Req[k]$ из вершин, соединенных с вершинами из $S[k]$ тяжелым ребром
   4. *Релаксация*. Обменяться множествами $Req[k]$ так, чтобы на каждом процессе (потоке) обработать Req для локальных вершин. Выполнить релаксацию
   5. Синхронизация: найти следующий непустой карман

Оптимизация алгоритма дельта-шага (Chakaravarthy и др., 2014)

- Оптимизация 1:
  - Цель – сократить число релаксаций по тяжелым ребрам
  - Исключим релаксации по ребрам, которые ведут в карманы с меньшим номером (для вершин из таких карманов расстояние уже найдено).
  - На распределенной памяти релаксация включает отправку запроса и отправку ответа. Для ребра $e = (u, v)$ запрос отправляется, если $d[v] > k\Delta + w(e)$. Процесс-владелец u отправляет ответ только если $u \in B_k$.



Оптимизация алгоритма дельта-шага (Chakaravarthy и др., 2014)

- Оптимизация 2:
  - Цель – сократить число релаксаций по легким ребрам
  - Для вершины u из текущего кармана B_k релаксация ребра $e = (u, v)$ выполняется, только если v попадет в тот же карман: $d_{new}(v) = d(u) + w(e) < (k + 1)\Delta$. Иначе релаксация ребра выполняется вместе с тяжелыми ребрами (шаг 3.3)
- Оптимизация 3: гибридизация
  - Цель – уменьшить число внешних итераций алгоритма
  - Алгоритмом дельта-шага выполняется обработка первых l карманов. Остальные карманы объединяются в один и обрабатываются алгоритмом Беллмана–Форда.
  - Показано, что переключение целесообразно выполнить после обработки 40% вершин

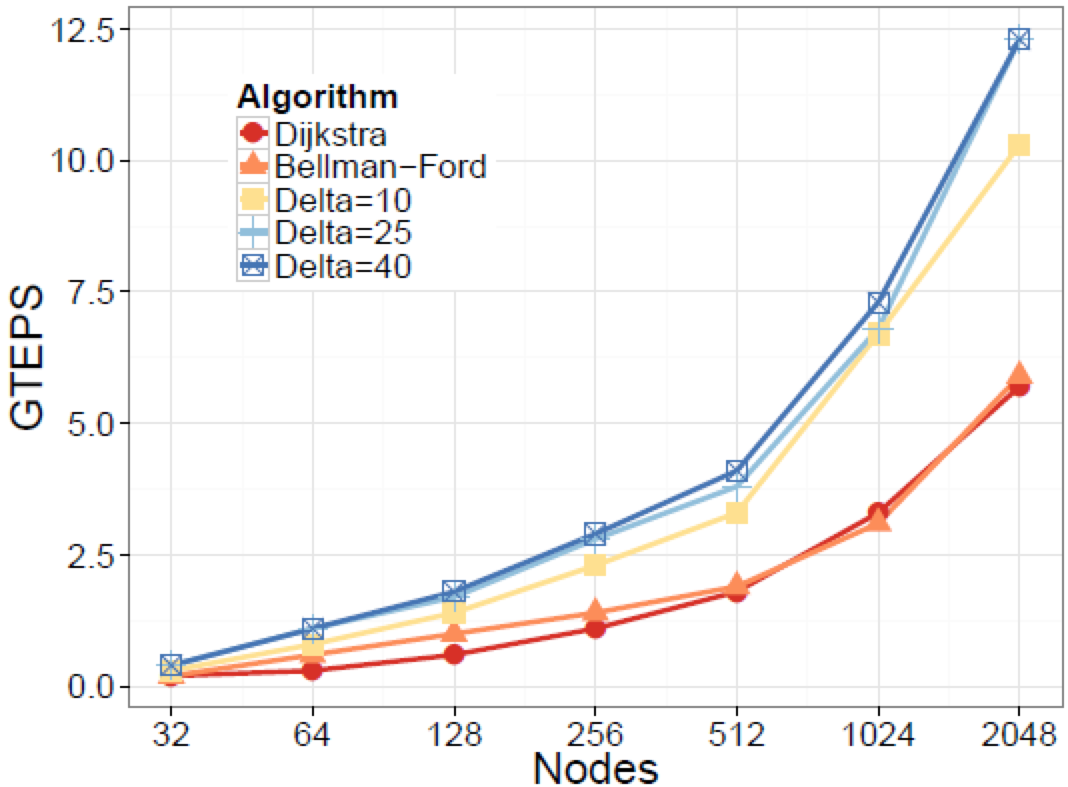
Результаты экспериментов. Сравнение разных алгоритмов

- Источник: Chakaravarthy V. T. et al. Scalable single source shortest path algorithms for massively parallel systems //IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. – 2016. – Т. 28. – №. 7. – С. 2031-2045.

- Инфраструктура: СК Blue Gene/Q, 16-ядерные узлы с поддержкой SMT, 64 потока на узел.
- Реализация на C, с поддержкой Pthreads и SPI. Компилятор GCC 4.4.6.
- Тестовый граф: RMAT с параметрами A = 0.57, B = C = 0.19, D = 1 – A – 2B = 0.05. Средняя степень вершины – 32. Максимальная степень вершины:

Scale	28	29	30	31	32
RMAT – 1	2.4 M	3.8 M	5.9 M	9.4 M	14.4 M

Результаты экспериментов. Сравнение разных алгоритмов

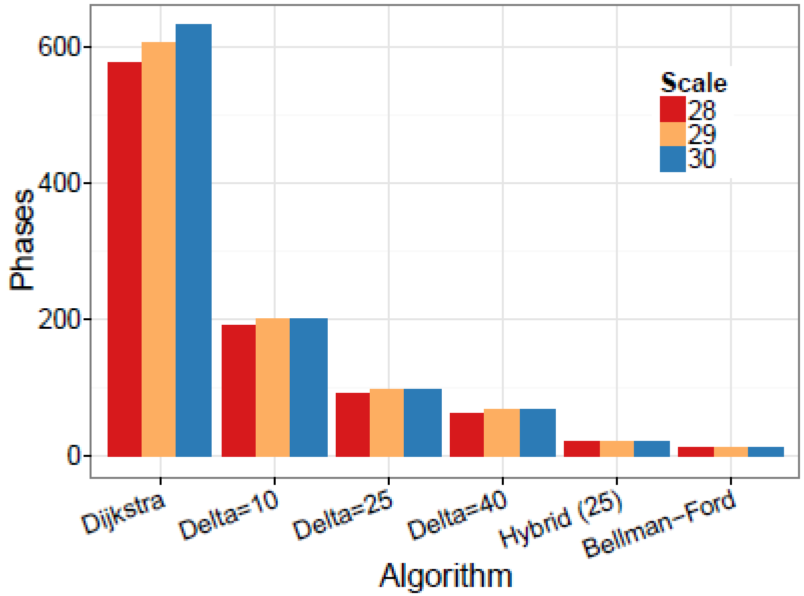


RMAT − 1: Performance of Δ-stepping algorithm

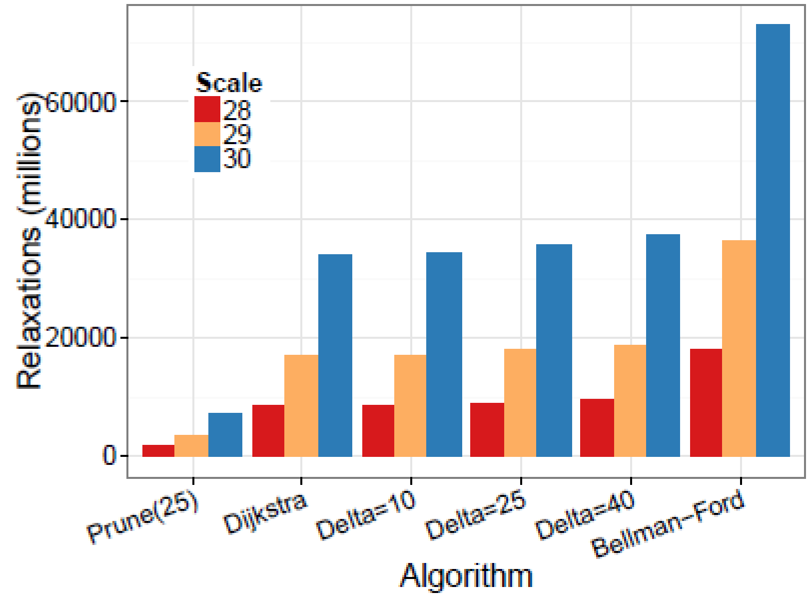
- Лучшая производительность – при Delta ~ средней степени вершины
- Производительность алгоритма дельта-шага в 2 раза выше, чем Дейкстры и Беллмана-Форда

Результаты экспериментов. Сравнение разных алгоритмов

- Сравнение числа итераций и числа релаксаций



(a) Number of phases



(b) Number of relaxations

Наименьшее число итераций – у алгоритма Дейкстры

Наименьшее число релаксаций – у оптимизированного дельта-шага

Результаты экспериментов. Сравнение разных алгоритмов

- Выводы:
  - Число итераций в алгоритме Дейкстры значительно больше, чем в алгоритмах дельта-шага и Беллмана-Форда
  - Число релаксаций алгоритмов Дейкстры и дельта-шага близко, оно меньше, чем в алгоритме Беллмана-Форда в ~2 раза.
  - Оптимизация Prune сокращает число релаксаций в ~5 раз
  - Гибридизация алгоритмов дельта-шага и Беллмана-Форда позволяет сократить число внешних итераций в ~2.5 раза. При этом производительность увеличивается на ~30%.

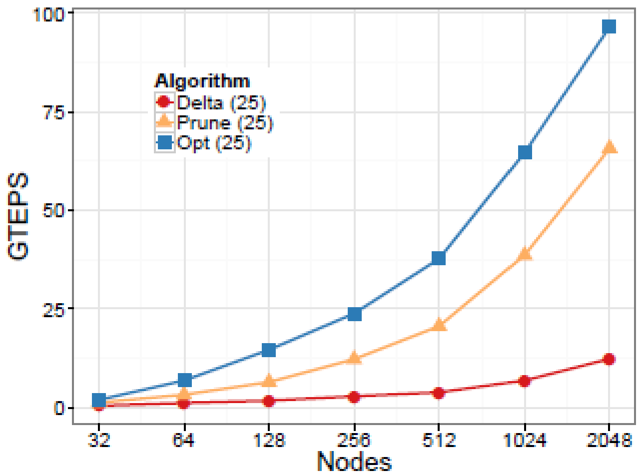
Результаты экспериментов. Графы из приложений

- Сравнение базовой и оптимизированной реализаций алгоритма дельта-шага ($\Delta = 40$) на графах из реальных приложений:

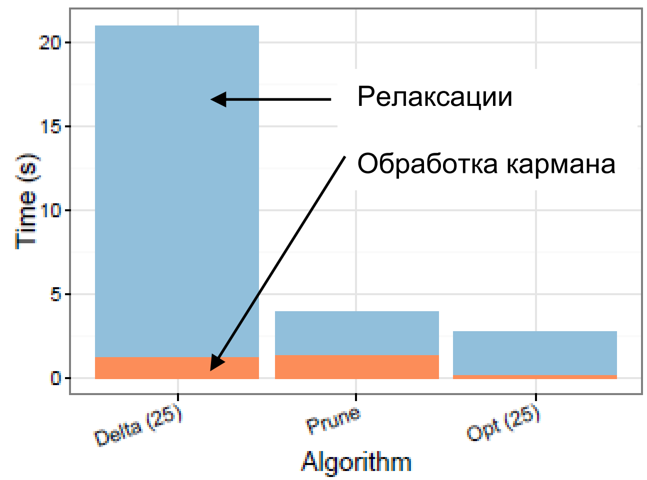
GTEPS	Vertices	Edges	Del-40	Opt-40
Friendster	63 million	1.8 billion	1.8	4.3
Orkut	3 million	117 million	2.1	4.6
Live Journal	4.8 million	68 million	1.1	2.2

- Оптимизация позволила улучшить производительность в 2 раза.

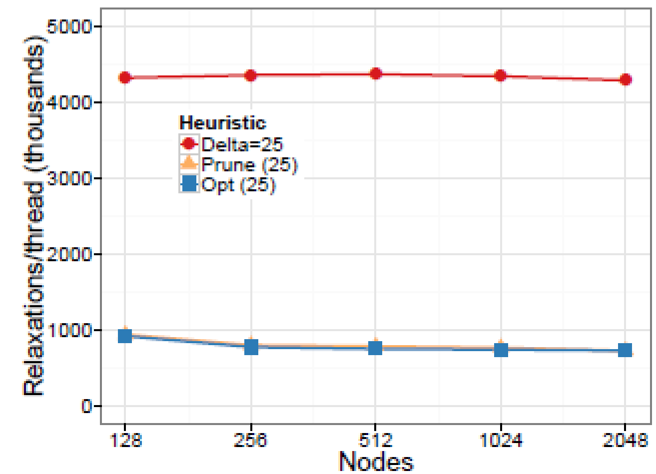
Результаты экспериментов. Алгоритм дельта-шага



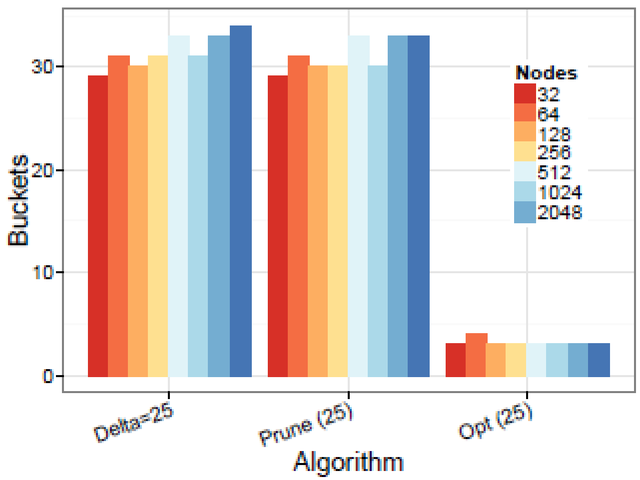
(a) GTEPS of different algorithms



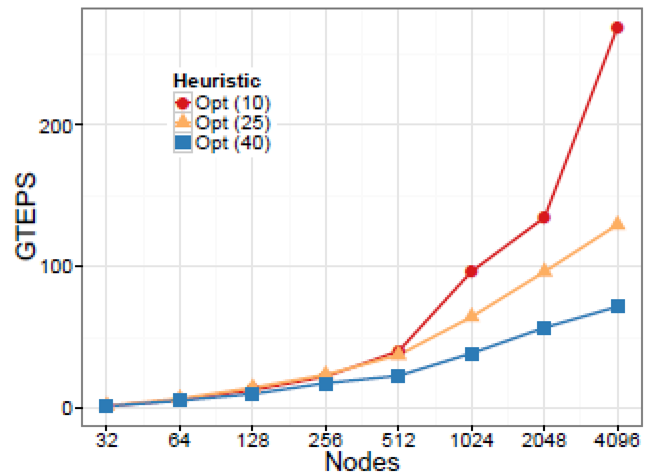
(b) Time breakdown



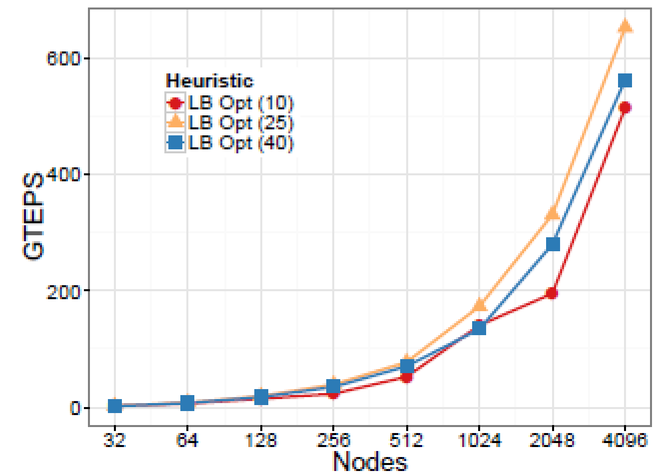
(c) Relaxations



(d) Number of buckets



(e) Effect of Δ on OPT



(f) Effect of load balancing on OPT

Результаты экспериментов. Выводы

- Оптимизированный алгоритм позволил получить производительность до 8 раз больше, чем исходный
- Оптимизация Prune сократила время релаксаций в ~7 раз
- При $\Delta = 25$ использовалось 30 карманов. В гибридной версии использовалось 5 карманов.
- Масштабируемость реализации ограничена дисбалансом вычислений, который возникает из-за разрыва в распределении степеней вершин тестового графа. Для балансировки использовалась параллельная обработка потоками в рамках одного вычислительного узла. Это позволило увеличить производительность реализации от 2 до 8 раз.

Заключение

- Задача поиска кратчайших путей – одна из основных задач теории графов, имеющая широкое применение. Она применяется в комбинаторных задачах оптимизации и при анализе сложных сетей.
- Разработано большое число методов поиска кратчайших путей. Одни из широко используемых алгоритмов – алгоритм Дейкстры, алгоритм Беллмана–Форда, алгоритм дельта-шага.
- При построении параллельных алгоритмов Дейкстры и дельта-шага распараллеливаются вычисления внутри итерации. При пересчете расстояния требуется коммуникация между процессами.

Литература

1. Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. Алгоритмы: построение и анализ, 3-е издание. –М.: «Вильямс», 2013. –1328 с.
2. Crauser A. et al. A parallelization of Dijkstra's shortest path algorithm // Mathematical Foundations of Computer Science 1998. – 1998. – С. 722–731.
3. Meyer U., Sanders P. Δ-stepping: a parallelizable shortest path algorithm //J. of Algorithms. – 2003. – Т. 49. – №. 1. – С. 114–152.
4. Madduri K. et al. Parallel shortest path algorithms for solving large-scale instances. – Georgia Institute of Technology, 2006.
5. Chakaravarthy V. T. et al. Scalable single source shortest path algorithms for massively parallel systems //IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. – 2016. – Т. 28. – №. 7. – С. 2031-2045.

Контакты

Нижегородский государственный университет

http://www.unn.ru

Институт информационных технологий, математики и механики

http://www.itmm.unn.ru

Пирова А.Ю.

anna.pirova@itmm.unn.ru