Corrigé du test n° 2 de Recherche Opérationnelle (dsecg3-2010-2011)

Exercice 1

1. Variables : x_a, x_b et x_c respectivement les nombres d'article de type A, B et C vendus par mois.

2. Le critère $Z = 100x_a + 50x_b + 80x_c$.

3. Les contraintes

   (a) Les parts de marché imposent : $x_a \leqslant 4\,900$, $x_b \leqslant 5\,400$ et $x_c \leqslant 2\,000$.

   (b) Une règle de trois permet de donner les temps de fabrication ; ainsi :
   $35\,\text{objets} \rightarrow 1\text{heure}$
   $x_a \rightarrow \dfrac{1H \times x_a}{35}$ Le temps nécessaire pour produire les trois types d'article ne dépassant pas 200 heures, on a :
   $\dfrac{x_a}{35} + \dfrac{x_b}{125} + \dfrac{x_c}{10} \leqslant 200$

   (c) Concernant la vérification, on a une contrainte pareille : $\dfrac{x_a}{4} + \dfrac{x_b}{3} + \dfrac{x_c}{2} \leqslant 3 \times 170 \times 60$

   Le problème linéaire est donc

   $$\text{Max } Z = 100x_a + 50x_b + 80x_c$$
   $$\begin{cases} \dfrac{x_a}{35} + \dfrac{x_b}{125} + \dfrac{x_c}{10} \leqslant 200 \\ \dfrac{x_a}{4} + \dfrac{x_b}{3} + \dfrac{x_c}{2} \leqslant 30\,600 \\ x_a \leqslant 4\,900 \\ x_b \leqslant 5\,400 \\ x_c \leqslant 2\,000 \\ x_a, x_b, x_c \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

Exercice 2 Soit x le nombre de lots de type L1 et y celui de type L2.

Les bénéfices unitaires étant 6 UM pour le lot L1 et 12 UM pour L2, le critère est alors :

$Z = 6x + 12y$

1. Le nombre de sacs disponibles étant de 300, on a la contrainte : $5x + 3y \leqslant 300$;

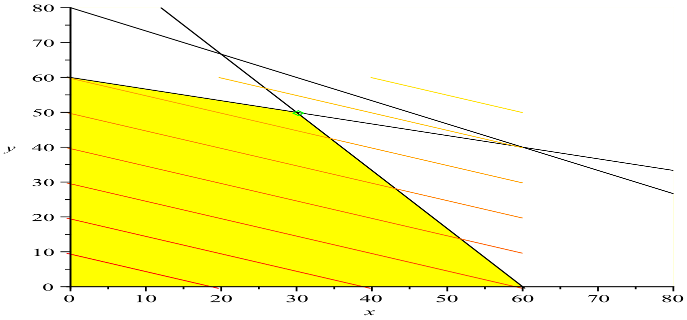
2. De même pour les chapeaux, on a : $x + 3y \leqslant 180$;

3. et pour les ceintures : $2x + 3y \leqslant 240$

Le programme est :

$$\text{Max } Z = 6x + 12y$$
$$\begin{cases} 5x + 3y \leqslant 300 \\ x + 3y \leqslant 180 \\ 2x + 3y \leqslant 240 \\ x, y \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

Sa résolution graphique donne la figure suivante :



La solution optimale est $(x^\star, y^\star) = (30, 50)$ L'optimum est $Z^\star = 780$

Exercice 3 Résoudre par la méthode du simplexe

$Max\ z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$

$$\begin{cases} x_1 \quad +2x_2+ \quad x_3 \leqslant 430 \\ 3x_1 \qquad\qquad +2x_3 \leqslant 460 \\ x_1 : \quad +4x_2 \qquad \leqslant 420 \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \geqslant 0; \end{cases}$$

L'introduction des variables d'écart u_1, u_2 et u_3 respectivement dans la 1^{ere}, 2^e et 3^e contraintes, on obtient la forme standard qui conduit au tableau simplexe initial suivant.

Z	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3		Z
1	-3	-2	-5	0	0	0	0	Z
0	1	2	1	1	0	0	430	u_1
0	3	0	$\boxed{2}$	0	1	0	460	u_2
0	1	4	0	0	0	1	420	u_3

$L_0 \leftarrow 2L_0 + 5L_2$; $L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$

Z	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3		
2	9	-4	0	0	5	0	2300	Z
0	-1	$\boxed{4}$	0	2	-1	0	400	u_1
0	3	0	2	0	1	0	460	x_3
0	1	4	0	0	0	1	420	u_3

$L_0 \leftarrow L_0 + L_1$; $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

Z	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3		Z
2	8	0	0	2	4	0	2700	Z
0	-1	4	0	2	-1	0	400	x_2
0	3	0	2	0	1	0	460	x_3
0	2	0	0	-2	1	1	20	u_3

Coûts réduits des vhb sont positif. Fin de l'algo.

Solution optimale : $x_2^\star = \dfrac{400}{4} = 100,\ x_3^\star = \dfrac{460}{2} = 230\ u_3^\star = \dfrac{20}{2} = 10,\ x_1^\star = u_1^\star = u_2^\star = 0\,;$

$$\text{L'optimum } Z^\star = \frac{2700}{2} = 1350$$