PEMBAHASAN SOAL ETS KALKULUS 2 2023/2024 PAKET A

Nokubo Iraki

April 2024

1. Jika $\dfrac{d}{dx}\left(\sec^{-1}u\right) = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$ untuk u fungsi x, maka dapatkan $\dfrac{dy}{dx}$, jika $y = \sec^{-1}(e^{-3x})$.

   Pembahasan :

$$y = \sec^{-1}(e^{-3x})$$

Misalkan $u = e^{-3x}$

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= -3e^{-3x}\\ y &= \sec^{-1}u\\ \frac{dy}{du} &= \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\\ \frac{dy}{du} &= \frac{1}{e^{-3x}\sqrt{e^{(-3x)2}-1}}\end{aligned}$$

Menggunakan aturan rantai turunan, sehingga

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{e^{-3x}\sqrt{e^{(-3x)2}-1}} - 3e^{-3x}\\ \frac{d}{dx}(\sec^{-1}(e^{-3x})) &= \frac{-3}{\sqrt{e^{-6x}-1}}\end{aligned}$$

2. Hitung integral

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^p}{x^2}dx$$

dengan $p = \dfrac{1}{2x}$

Pembahasan :
Di soal telah diberikan *hint* untuk $p = \frac{1}{2x}$, sehingga p sebagai substitusinya

$$p = \frac{1}{2x}$$

Ubah batas-batas integral tersebut, sehingga untuk
$x = \dfrac{1}{4} \to p = 2$
$x = \dfrac{1}{2} \to p = 1$

@iraki_nokubo

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{2x^2}$$
$$-2dp = \frac{dx}{x^2}$$
$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^p}{x^2} dx = \int_2^1 -2e^p dp$$
$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^p}{x^2} dx = \Big[-2e^p\Big]_2^1$$
$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^p}{x^2} dx = (-2e^1) - (-2e^2)$$
$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^p}{x^2} dx = 2e^2 - 2e$$

3. Hitung integral

$$\int \sin^2(2x)\cos^3(2x)dx$$

Pembahasan :

$$\int \sin^2(2x)\cos^3(2x)dx$$
$$\int \sin^2(2x)\cos^3(2x)dx = \int \sin^2(2x)(1-\sin^2(2x))cos(2x)dx$$

Misalkan $u = \sin(2x)$

$$u = \sin(2x)$$
$$\frac{du}{dx} = 2\cos(2x)$$
$$\cos(2x)dx = \frac{1}{2}du$$
$$\int \sin^2(2x)\cos^3(2x)dx = \int \frac{u^2(1-u^2)}{2}du$$
$$\int \sin^2(2x)\cos^3(2x)dx = \frac{1}{2}\int u^2 - u^4 du$$
$$\int \sin^2(2x)\cos^3(2x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5\right) + C$$
$$\int \sin^2(2x)\cos^3(2x)dx = \frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{10}u^5 + C$$
$$\int \sin^2(2x)\cos^3(2x)dx = \frac{\sin^3(2x)}{6} - \frac{\sin^5(2x)}{10} + C$$

4. Hitung integral

$$\int \frac{x^3}{x^2-5x-6}dx$$

Pembahasan :
Soal merupakan fungsi rasional tak sejati, sehingga dapat diselesaikan dengan melakukan dekomposisi pecahan menggunakan pembagian porogapit untuk menyederhanakan bentuk integran tersebut, sehingga

$$\frac{x^3}{x^2-5x-6} = (x+5) + \frac{31x+30}{x^2-5x-6}$$

Selanjutnya pecahan tersebut dilakukan dekomposisi pecahan parsial dengan cara memfaktorkan penyebutnya– JANGAN SALAH MEMFAKTORKAN SEPERTI SAYA, RUGI DONG.

@iraki_nokubo

$$
\begin{aligned}
\frac{31x+30}{x^2-5x-6} &= \frac{A}{(x-6)} + \frac{B}{(x+1)} \\
\frac{31x+30}{x^2-5x-6} &= \frac{A(x+1)+B(x-6)}{(x+1)(x-6)} \\
31x+30 &= (A+B)x + A - 6B
\end{aligned}
$$

Untuk mendapatkan nilai A dan B, dapat dibuat menjadi persamaan-persamaan berikut

$$
\begin{aligned}
&A + B = 31 \\
&A - 6B = 30 \\
&\overline{\hspace{3cm}}- \\
&7B = 1 \\
&B = \frac{1}{7}
\end{aligned}
$$

Nilai A yang didapat dari susbtitusi nilai B ke salah satu persamaan tersebut adalah $A = \dfrac{216}{7}$

$$
\begin{aligned}
\frac{31x+30}{x^2-5x-6} &= \frac{216}{7(x-6)} + \frac{1}{7(x+1)} \\
\frac{x^3}{x^2-5x-6} &= (x+5) + \frac{216}{7(x-6)} + \frac{1}{7(x+1)} \\
\int \frac{x^3}{x^2-5x-6}dx &= \int (x+5) + \frac{216}{7(x-6)} + \frac{1}{7(x+1)}dx \\
\int \frac{x^3}{x^2-5x-6}dx &= \frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{216}{7}\ln|x-6| + \frac{1}{7}\ln|x+1| + C
\end{aligned}
$$

5. Dapatkan

$$
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)
$$

Pembahasan :

Substitusi nilai x ke fungsinya, didapat bentuk limit tak tentu $\infty - \infty$, maka fungsi diubah sedemikian sehingga saat disubstitusi nilai x ke fungsinya, didapat bentuk limit tak tentu $\dfrac{\infty}{\infty}$ atau $\dfrac{0}{0}$ agar dapat diterapkannya dalil L'Hopital. Untuk soal ini dengan cara menyamakan penyebut dari dua pecahan tersebut, sehingga didapat

$$
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x-1)-x}{x(e^x-1)}\right)
$$

Karena bentuk di atas sudah bentuk tak tentu $\dfrac{0}{0}$, sehingga dapat diterapkan aturan L'Hopital. Dengan demikian

$$
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{(e^x-1)+xe^x}\right)
$$

Substitusi nilai x, masih dalam bentuk $\dfrac{0}{0}$, maka gunakan aturan L'Hopital kedua kalinya, didapat

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{e^x+xe^x+e^x}\right) \\
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) &= \frac{e^0}{e^0+0e^0+e^0} \\
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) &= \frac{1}{1+0+1} \\
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

...DONE...

@iraki_nokubo