# PEMBAHASAN SOAL ETS KALKULUS 2 2023/2024 PAKET B

Nokubo Iraki

April 2024

1. Dapatkan turunan dari $f(x) = e^x \tan^{-1} x$.

   **Pembahasan :**
   $f(x) = u.v$
   $f'(x) = u'v + uv'$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \tan^{-1} x \\ u &= e^x \to u' = e^x \\ v &= \tan^{-1} x \to v' = \frac{1}{1+x^2} \\ f'(x) &= e^x \tan^{-1} x + e^x \frac{1}{1+x^2} \\ f'(x) &= e^x \tan^{-1} x + \frac{e^x}{1+x^2} \end{aligned}$$

2. Hitung integral

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx.$$

   **Pembahasan :**
   Misalkan $u = e^x$, dengan demikian

$$\begin{aligned} u &= e^x \\ \frac{du}{dx} &= e^x \\ du &= e^x dx \\ \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx &= \int \frac{du}{u^2+1} \\ \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx &= \tan^{-1} u + C \\ \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx &= \tan^{-1} e^x + C \end{aligned}$$

3. Hitung integral

$$\int \ln{(t^2+1)} dt.$$

   **Pembahasan :**
   Soal seperti ini dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep integral parsial

$$\int u dv = uv - \int v du$$

   Tentukan terlebih dahulu yang sebagai $u$ dan $dv$ dari soal integral tersebut, maka

$$\begin{aligned} u &= \ln t^2 + 1 \\ dv &= dt \end{aligned}$$

   Kemudian, carilah nilai dari $du$ dengan menurunkan persamaan $u$ dan nilai $v$ dengan mengintegralkan persamaan $dv$, didapat

$$u = \ln(t^2+1) \rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{2t}{t^2+1} \rightarrow du = \frac{2t}{t^2+1}dt$$
$$dv = dt \rightarrow v = t$$

Masukkan nilai-nilai tersebut ke konsep integral parsial, sehingga menjadi

$$\int \ln(t^2+1)dt = \ln(t^2+1)t - \int t\,\frac{2t}{t^2+1}dt$$
$$\int \ln(t^2+1)dt = \ln(t^2+1)t - 2\int \frac{t^2}{t^2+1}dt$$
$$\int \ln(t^2+1)dt = \ln(t^2+1)t - 2\int 1 - \frac{1}{x^2+1}dt$$
$$\int \ln(t^2+1)dt = \ln(t^2+1)t - 2(t - \tan^{-1} x) + C$$
$$\int \ln(t^2+1)dt = \ln(t^2+1)t - 2t + 2\tan^{-1} x + C$$

4. Hitung integral

$$\int \frac{2x^2-2x-1}{x^2+x^3}dx.$$

**Pembahasan :**
Dapat dilakukan dekomposisi pecahan parsial pada integrannya, sehingga

$$\frac{2x^2-2x-1}{x^2+x^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2}$$
$$2x^2-2x-1 = Ax^2 + (Bx+C)(x+1)$$
$$2x^2-2x-1 = Ax^2 + Bx^2 + Bx + Cx + C$$
$$2x^2-2x-1 = (A+B)x^2 + (B+C)x + C$$

pasangkan koefisien pada variabel $x$ yang berderajat sama dan konstantanya, seperti $A+B=2$, $B+C=-2$, dan $C=-1$, sehingga didapat

$$A = 3;\ B = -1;\ C = -1$$

$$\frac{2x^2-2x-1}{x^2+x^3} = \frac{3}{x+1} - \frac{x+1}{x^2}$$
$$\int \frac{2x^2-2x-1}{x^2+x^3}dx = \int \left(\frac{3}{x+1} - \frac{x+1}{x^2}\right)dx$$
$$\int \frac{2x^2-2x-1}{x^2+x^3}dx = \int \left(\frac{3}{x+1} - \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$\int \frac{2x^2-2x-1}{x^2+x^3}dx = \int \left(\frac{3}{x+1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$\int \frac{2x^2-2x-1}{x^2+x^3}dx = 3\ln|x+1| - \ln x + \frac{1}{x} + C$$

5. Selesaikan integral tak wajar

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-2\sin x}}dx.$$

**Pembahasan :**
Soal tersebut termasuk integral tak wajar karena pada batasan integralnya membuat bentuk dari integrannya pada saat di $x=0$ adalah tak terdefinisi $\frac{1}{0}$, sehingga perlu dilakukan pendekatan limit di $x=0$ agar hasil luasan pada batasan tertentu, dalam hal ini 0 sampai $\frac{\pi}{6}$ tersebut dapat terdefinisi.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-2\sin x}}dx = \lim_{t\to 0}\int_t^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-2\sin x}}dx$$

**@iraki_nokubo**

Selesaikan integralnya terlebih dahulu dengan menggunakan teknik integral substitusi, sehingga
$u = 1 - 2\sin x$
maka,

$$\begin{aligned}
u &= 1 - 2\sin x \\
\frac{du}{dx} &= -2\cos x \\
\cos x dx &= -\frac{1}{2} du \\
\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-2\sin x}} dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}} du \\
\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-2\sin x}} dx &= -\frac{1}{2}(2\sqrt{u}) + C \\
\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-2\sin x}} dx &= -\sqrt{1-\sin x} + C
\end{aligned}$$

Masukkan hasil tersebut ke integral dengan batasannya, didapat

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-2\sin x}} dx &= \lim_{t\to 0}\int_t^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-2\sin x}} dx \\
\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-2\sin x}} dx &= \lim_{t\to 0}\left[-\sqrt{1-2\sin x}\right]_t^{\dfrac{\pi}{6}} \\
\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-2\sin x}} dx &= \left(-\sqrt{1-2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right) - \left(\lim_{t\to 0} -\sqrt{1-2\sin t}\right) \\
\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-2\sin x}} dx &= (-\sqrt{1-1}) + \sqrt{1-2\sin 0} \\
\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-2\sin x}} dx &= 0 + \sqrt{1} \\
\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-2\sin x}} dx &= 1
\end{aligned}$$

**...DONE...**

**@iraki_nokubo**