PEMBAHASAN SOAL ETS KALKULUS 2 2023/2024 PAKET C

Nokubo Iraki

May 2024

1. Dapatkan turunan dari $f(x) = \dfrac{e^x + \ln x}{\sinh 3x}$

   Pembahasan:
   $f(x) = \dfrac{u}{v}$
   $f'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^x + \ln x}{\sinh 3x} \\
u = e^x + \ln x &\rightarrow u' = e^x + \frac{1}{x} \\
v = \sinh 3x &\rightarrow v' = 3\cosh 3x \\
f'(x) &= \frac{(e^x + \frac{1}{x})\sinh 3x - (e^x + \ln x)3\cosh 3x}{\sinh^2 3x}
\end{aligned}
$$

2. Hitung integral

$$\int \frac{x + e^x}{x^2 + 2e^x} dx$$

   Pembahasan:
   Lakukan teknik integral substitusi dengan memisalkan $u = x^2 + 2e^x$

$$
\begin{aligned}
u &= x^2 + 2e^x \\
\frac{du}{dx} &= 2x + 2e^x \\
x + e^x dx &= \frac{1}{2} du \\
\int \frac{x + e^x}{x^2 + 2e^x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} \\
\int \frac{x + e^x}{x^2 + 2e^x} dx &= \frac{1}{2} \ln u + C \\
\int \frac{x + e^x}{x^2 + 2e^x} dx &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2e^x) + C
\end{aligned}
$$

3. Hitung integral

$$\int \frac{1}{t^{1/2} - t^{1/3}} dt$$

   Pembahasan:
   Lakukan teknik integral substitusi dengan memisalkan $t^{1/6} = u$, sehingga $t = u^6$

$$
\begin{aligned}
t &= u^6 \\
1 &= 6u^5 \frac{du}{dt} \\
dt &= 6u^5 du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{t^{1/2}-t^{1/3}}dt &= \int \frac{6u^5}{(u^6)^{1/2}-(u^6)^{1/3}}du \\
\int \frac{1}{t^{1/2}-t^{1/3}}dt &= \int \frac{6u^5}{u^3-u^2}du \\
\int \frac{1}{t^{1/2}-t^{1/3}}dt &= \int \frac{6u^5}{u^2(u-1}du \\
\int \frac{1}{t^{1/2}-t^{1/3}}dt &= \int \frac{6u^3}{u-1}du
\end{aligned}
$$

Selanjutnya lakukan integrasi fungsi rasional tak sejati dengan menyederhanakan bentuk integran/fungsi tersebut menggunakan teknik pembagian porogapit, sehingga didapat

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{t^{1/2}-t^{1/3}}dt &= \int \frac{6u^3}{u-1}du \\
\int \frac{1}{t^{1/2}-t^{1/3}}dt &= \int 6u^2+6u+6+\frac{6}{u-1} \\
\int \frac{1}{t^{1/2}-t^{1/3}}dt &= 2u^3+3u^2+6u+6\ln(u-1)+C \\
\int \frac{1}{t^{1/2}-t^{1/3}}dt &= 2(t^{1/6})^3+3(t^{1/6})^2+6t^{1/6}+6\ln(t^{1/6}-1)+C \\
\int \frac{1}{t^{1/2}-t^{1/3}}dt &= 2(t^{1/2})+3t^{1/3}+6t^{1/6}+6\ln(t^{1/6}-1)+C \\
\int \frac{1}{t^{1/2}-t^{1/3}}dt &= 2\sqrt{t}+3\sqrt[3]{t}+6\sqrt[6]{t}+6\ln(\sqrt[6]{t}-1)+C
\end{aligned}
$$

4. Hitung integral

$$\int \frac{t^3+4t^2-t+1}{t^3+t^2}dt$$

Pembahasan:
Soal tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan penyederhanaan bentuk integrannya menggunakan teknik pembagian porogapit, sehingga bentuknya menjadi

$$\frac{t^3+4t^2-t+1}{t^3+t^2} = 1+\frac{3t^2-t+1}{t^3+t^2}$$

Selanjutnya, gunakan dekomposisi pecahan parsial pada pecahan tersebut untuk menyederhanakan bentuknya sehingga mudah dilakukan pengintegralan, maka didapat

$$
\begin{aligned}
\frac{3t^2-t+1}{t^3+t^2} &= \frac{3t^2-t+1}{t^2(t+1)} \\
\frac{3t^2-t+1}{t^3+t^2} &= \frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2} \\
\frac{3t^2-t+1}{t^3+t^2} &= \frac{At^2+(Bt+C)(t+1)}{t^2(t+1)} \\
\frac{3t^2-t+1}{t^3+t^2} &= \frac{At^2+Bt^2+Bt+Ct+C}{t^2(t+1)} \\
3t^2-t+1 &= At^2+Bt^2+Bt+Ct+C \\
3t^2-t+1 &= (A+B)t^2+(B+C)t+C
\end{aligned}
$$

Pasangkan koefisien pada variabel t yang berderajat sama dan konstantanya, seperti $A+B=3, B+C=-1, C=1$ sehingga didapat

$$A=5;\ B=-2;\ C=1$$

@iraki_nokubo

$$\frac{3t^2-t+1}{t^3+t^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2}$$
$$\frac{3t^2-t+1}{t^3+t^2} = \frac{5}{t+1} + \frac{-2t+1}{t^2}$$
$$\frac{3t^2-t+1}{t^3+t^2} = \frac{5}{t+1} - \frac{2t-1}{t^2}$$
$$\frac{3t^2-t+1}{t^3+t^2} = \frac{5}{t+1} - \frac{2t}{t^2} + \frac{1}{t^2}$$
$$\frac{3t^2-t+1}{t^3+t^2} = \frac{5}{t+1} - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}$$

Selanjutnya, ubah bentuk integrannya menjadi hasil dari dekomposisi yang telah didapat, sehingga diperoleh

$$\frac{t^3+4t^2-t+1}{t^3+t^2} = 1 + \frac{3t^2-t+1}{t^3+t^2}$$
$$\frac{t^3+4t^2-t+1}{t^3+t^2} = 1 + \frac{5}{t+1} - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}$$
$$\int \frac{t^3+4t^2-t+1}{t^3+t^2}dt = \int \left(1 + \frac{5}{t+1} - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt$$
$$\int \frac{t^3+4t^2-t+1}{t^3+t^2}dt = t + 5\ln(t+1) - 2\ln t - \frac{1}{t} + C$$
$$\int \frac{t^3+4t^2-t+1}{t^3+t^2}dt = \frac{t^2-1}{t} + 5\ln(t+1) - 2\ln t + C$$

5. Dapatkan

$$\lim_{x\to\infty}[x(e^{\sin(1/x)}-1)]$$

Pembahasan:
Substitusi nilai x ke fungsinya, didapat bentuk limit tak tentu $\infty.0$, maka fungsi diubah sedemikian sehingga saat disubstitusi nilai x ke fungsinya, didapat bentuk limit tak tentu $\frac{\infty}{\infty}$ atau $\frac{0}{0}$ agar dapat diterapkannya dalil L'Hopital, dengan cara sebagai berikut.

$$\lim_{x\to\infty}[x(e^{\sin(1/x)}-1)] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{(e^{\sin(1/x)}-1)}{\frac{1}{x}}\right]$$

L'hopital sudah dapat digunakan karena bentuknya sudah memenuhi syarat $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to\infty}[x(e^{\sin(1/x)}-1)] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{-e^{\sin(1/x)}\cos(1/x)\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}\right]$$
$$\lim_{x\to\infty}[x(e^{\sin(1/x)}-1)] = \lim_{x\to\infty}e^{\sin(1/x)}\cos(1/x)$$
$$\lim_{x\to\infty}[x(e^{\sin(1/x)}-1)] = e^{\sin(1/\infty)}\cos(1/\infty)$$
$$\lim_{x\to\infty}[x(e^{\sin(1/x)}-1)] = 1$$

nb: bentuk dari $e^{\sin(1/x)}$ terlihat susah saat akan dilakukan penurunan, tetapi sebenarnya hanya menggunakan konsep dasar *chain rule* atau aturan rantai sudah dapat diselesaikan.

...DONE...

@iraki_nokubo