Выкладки к лекции 7.10.22
Мэтчинг, double-robust оценки

1 Почему нельзя дать оценку по разности средних

Обозначения:
Y_1, Y_0 - потенциальные исходы.
Y - наблюдаемое в данных (реализовавшееся) значение показателя.
T - тритмент-переменная, равна 1, если наблюдение в группе воздействия, и 0, если нет.
X - набор характеристик наблюдения.
$e(X) = P(T = 1|X) = E(T|X)$ – по определению настоящая (postulated) мера склонности наблюдения к попаданию в тритмент-группу.
π – доля наблюдений в тритмент-группе. В случае идеального эксперимента она была бы равна вероятности попадания в тритмент-группу (одинаковой для всех наблюдений).
$ATE = E[Y_1 - Y_0]$ – по определению искомый истинный эффект воздействия.

Распишем оценку через разность средних для не-экспериментальных данных:
Разница средних сходится к $E[Y|T = 1] - E[Y|T = 0]$.
Можем доказать, что $E[Y|T = 1] - E[Y|T = 0] = E[Y_1 - Y_0] + \frac{1}{\pi(1-\pi)}E[((1-\pi)Y_1 + \pi Y_0)(e(x) - \pi)]$
Доказательство:
$E[Y|T = 1] = \frac{E[e(x)Y_1]}{\pi}$ (по определению условного матожидания)
$E[Y|T = 0] = \frac{E[(1-e(x))Y_0]}{1-\pi}$
Тогда
$E[Y|T = 1] - E[Y|T = 0] = \frac{E[e(x)Y_1]}{\pi} - \frac{E[(1-e(x))Y_0]}{1-\pi} =$ (добавили и вычли Y_1 и Y_0) $=$
$= E[\frac{e(x)Y_1 - \pi Y_1}{\pi} + Y_1] - E[\frac{(1-e(x))Y_0 - (1-\pi)Y_0}{1-\pi} + Y_0] =$
$= E[\frac{(e(x)-\pi)Y_1}{\pi} + Y_1] - E[\frac{(\pi - e(x))Y_0}{1-\pi} + Y_0] =$
$= E[\frac{e(x)Y_1 - \pi Y_1}{\pi}] + E[Y_1] - E[\frac{(\pi-e(x))Y_0}{1-\pi}] - E[Y_0] = E[Y_1 - Y_0] + E[\frac{(e(x)-\pi)((1-\pi)Y_1 + \pi Y_0)}{\pi(1-\pi)}] =$
$= E[Y_1 - Y_0] + \frac{1}{\pi(1-\pi)}E[((1 - \pi)Y_1 + \pi Y_0)(e(x) - \pi)]$
Получаем истинный эффект ATE и смещение выборки. Если бы вероятность попадания в тритмент-группу была одинаковая π, а не $e(X)$, то смещение было бы равно нулю.

2 Почему взвешивание по обратным вероятностям даёт ATE

$E[\frac{TY}{e(X)}] =$ (по закону повторного матожидания) $= E[E[\frac{TY}{e(X)}|T, X]] = E[\frac{T}{e(X)}E[Y(T)|T, X]] =$
$E[\frac{1}{e(X)}E[Y(1)|T = 1, X] * e(X) + \frac{0}{e(X)}E[Y(0)|T = 0, X] * (1 - e(X))] =$
$E[E[Y(1)|T = 1, X]] =$ (т.к. действует предпосылка unconfoundedness: потениальный исход Y(1) не зависит от T при условии на X) $= E[E[Y(1)|X]]=$ (по закону повторного матожидания) $= E[Y(1)]$
Аналогично:
$E[\frac{(1-T)Y}{(1-e(X))}] = E[Y(0)]$
Итого:
$E[\frac{(TY}{e(X)}] - E[\frac{(1-T)Y}{(1-e(X))}] = E[Y(1)] - E[Y(0)] = E[Y(1) - Y(0)] =$(по определению) $=$ ATE

3 Как работает double-robust оценка

Обозначения:
$e(X) = P(T = 1|X) = E(T|X)$ – по определению настоящая (postulated) мера склонности наблюдения к попаданию в тритмент-группу.
$m_1(X) = E[Y|T = 1, X]$, $m_0(X) = E[Y|T = 0, X]$ – по определению истинная зависимость результата Y от характеристик X для наблюдений из тритмент- и контрольной групп. Не обязательно это линейная модель. Просто какая-то модель.
$\widehat{e(X)}$ – оценённая на данных вероятность попадания наблюдения в тритмент-группу в зависимости от характеристик.
$\widehat{m_1(X)}$ и $\widehat{m_0(X)}$ – оценённые на данных зависимости результата Y для наблюдений из тритмент- и контролной групп от характеристик наблюдения.

DR-оценка следующего вида:

$$\widehat{ATE}_{DR} = \frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}(\frac{T_i * Y_i}{\widehat{e(X_i)}} - \frac{(T_i - \widehat{e(X_i)}) * \widehat{m_1(X_i)})}{\widehat{e(X_i)}}] - \frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}(\frac{(1-T_i) * Y_i}{(1-\widehat{e(X_i)}))} + \frac{(T_i - \widehat{e(X_i)})) * \widehat{m_0(X)})}{(1-\widehat{e(X_i)})}]$$

1. Если верно еценили модель для propensity score $e(X)$, то даже при неправильной модели для зависимости Y от X $m_1(X)$ и $m_0(X)$ имеем:
   Слагаемое, содержащее $(T_i - \widehat{e(X_i)}))$, сойдётся к нулю.
   Остаётся
   $E[\frac{(TY}{e(X)}] - E[\frac{(1-T)Y}{(1-e(X))}] = E[Y(1) - Y(0)] = ATE$
2. Если верно еценили модели для зависимости Y от X $m_1(X)$ и $m_0(X)$, то даже при неправильной модель для propensity score $e(X)$ имеем:

$\widehat{ATE}_{DR} = \frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}(\frac{(T_i*(Y_i-\widehat{m_1(X_i)})}{\widehat{e(X_i)}} + \frac{\widehat{e(X_i)}*\widehat{m_1(X_i)})}{\widehat{e(X_i)}}] - \frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}(\frac{(1-T_i)*(Y_i-\widehat{m_0(X)})}{(1-\widehat{e(X_i)}))} + \frac{(1-\widehat{e(X_i)}))*\widehat{m_0(X)})}{(1-\widehat{e(X_i)})}]$
Слагаемые, содержащие $(Y_i - \widehat{m_1(X_i)}))$ и $(Y_i - \widehat{m_0(X_i)}))$, сойдутся к нулю, а $\widehat{m_1(X)}$ и $\widehat{m_0(X)}$ – к $E[Y(1)]$ и $E[Y(0)]$. Остаётся $E[Y(1) - Y(0)] = ATE$

Вывод: если верно оценили хотя бы что-то из двух – либо зависимость тритмента от X, либо зависимость Y от X – то DR-оценка сойдётся к ATE истинному.

Почему такая странная формула? Из Y вычитается объясннёная иксами часть Y. Вспомните оценку CUPED из статьи про Нетфликс. Принцип тот же (теорема Фриша-Ву-Ловелла). Например, для случаев с большой размерностью такая оценка описана в статье Belloni, Chernozhukov, Hansen (2014)