Тесты для нестандартных ситуаций (доп. к слайдам)

n большое, $y \sim Norm$ => "обычный тест" и ДИ $\widehat{ATE} \pm 1,96 se(\widehat{ATE})$

n маленькое (<100) } => бутстрап
$y \sim$ как-то

осн. идея:
$t_{расп}$ не успевает сойтись к $N(0,1)$ => сравн с $t_{стьюд}(d)$, где d определяется от параметров выборки

n оч маленькое (30) } тест Уэлча
$y \sim Norm$
t.test() in R

$n \; \forall$ } тест
$y \sim$ как-то } Манна-Уитни
wilcox.test() in R

оч. популярный, но ош 1 рода высокая

осн. идея:
считаем число "побед" y из treatments над y из контрольной группы и считаем вероятность числа таких побед

Тест Уэлча

Есть 2 выборки:

$T=1: \; y_1^T, y_2^T, y_3^T, \ldots, y_{n_T}^T$

$T=0: \; y_1^C, y_2^C, y_3^C, \ldots, y_{n_C}^T$

$H_0: \mu_T = \mu_C$ (равенство матожиданий)

Расчетная статистика:

$$t_{расч} = \frac{(\bar{Y}^T - \bar{Y}^C) - \underbrace{(\mu_T - \mu_C)}_{=0 \text{ в } H_0}}{se(\bar{Y}^T - \bar{Y}^C)} \underset{H_0}{\sim} \text{как?}$$

Если бы $n \to \infty$, то $t_p \underset{H_0}{\sim} N(0,1)$

Но n малое $\Rightarrow$ не успела сойтись

Идея: может быть, на малых n_T и n_C мы не сильно отличаемся от $N(0,1)$?

Давайте возьмем $t_{табл}(d)$, но только d посчитаем.

$$t_{изуч} = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2(d)/d}}$$ ← давайте $t_{расч}$ подгонять под неё.

Как "подгонять" $t_{расч}$ под $t_{идеал}$ при верной H_0

подгоняем, чтобы матож. и дисперсии были как надо

Преобразуем $t_{расч}$ так, чтобы

$E(\text{числитель}) = 0$ (1)

$Var(\text{числитель}) = 1$ (2)

$E(\text{подкоренного выр знаменателя}) = \text{матож. } \frac{\chi^2(d)}{d} = \frac{d}{d} = 1$ (3)

$Var(\text{подкоренного выражения знам}) = \text{дисп. } \frac{\chi^2(d)}{d} = \frac{2d}{d^2} = \frac{2}{d}$ (4)

отсюда получим d

выборочная дисперсия

$$\widehat{Var}(\bar{Y}^T - \bar{Y}^C) = \frac{\hat{\sigma}_T^2}{n_T} + \frac{\hat{\sigma}_C^2}{n_C},$$

где

$$\hat{\sigma}_T^2 = \frac{\sum (y_i^T - \bar{y}^T)^2}{n_T - 1}$$

$$t_{расч} = \frac{(\bar{y}^T - \bar{y}^C) \Big/ \sqrt{\frac{\sigma_T^2}{n_T} + \frac{\sigma_C^2}{n_C}}}{\sqrt{\left(\frac{\hat{\sigma}_T^2}{n_T} + \frac{\hat{\sigma}_C^2}{n_C}\right) \Big/ \left(\frac{\sigma_T^2}{n_T} + \frac{\sigma_C^2}{n_C}\right)}}$$

матож этого = 0 при верной H_0

(1) +

(2): $\overset{(\text{теор})}{Var}(\text{числитель}) = Var\left(\dfrac{\bar{Y}^T - \bar{Y}^C}{\sqrt{\frac{\sigma_T^2}{n_T} + \frac{\sigma_C^2}{n_C}}}\right) = \dfrac{1}{\frac{\sigma_T^2}{n_T} + \frac{\sigma_C^2}{n_C}} Var(\bar{y}^T - \bar{y}^C) =$

обратим внимание, что это теоретич.) а не выборочные!

$$= \frac{\sigma_T^2/n_T + \sigma_C^2/n_C}{\sigma_T^2/n_T + \sigma_C^2/n_C} = 1 \Rightarrow (2)\ +$$

, шелмясь подогнали

т.к. $\hat{\sigma}_T^2 = \dfrac{\sum (y_i^T - \bar{y}^T)^2}{n_T - 1}$, $E(\hat{\sigma}_T^2) = \sigma_T^2$

$$(3)\ E\left(\frac{\hat{\sigma}_T^2/n_T + \hat{\sigma}_C^2/n_C}{\sigma_T^2/n_T + \sigma_C^2/n_C}\right) = 1$$ ← да, очевидно, те (3) +

$$(4)\ V\left(\frac{\hat{\sigma}_T^2/n_T + \hat{\sigma}_C^2/n_C}{\sigma_T^2/n_T + \sigma_C^2/n_C}\right) = \frac{2}{d}$$ ← отсюда нужно вывести d.

$$(4) \Rightarrow d = \frac{2}{Var(\text{дробь})} = \frac{2\cdot\left(\frac{\sigma_T^2}{n_T}+\frac{\sigma_c^2}{n_c}\right)^2}{Var\left(\frac{\hat\sigma_T^2}{n_T}+\frac{\hat\sigma_c^2}{n_c}\right)} = \frac{2\left(\frac{\sigma_T^2}{n_T}+\frac{\sigma_c^2}{n_c}\right)^2}{\frac{1}{n_T^2}Var(\hat\sigma_T^2)+\frac{1}{n_c^2}Var(\hat\sigma_c^2)} =$$

т.к. $(n_T-1)\frac{\hat\sigma_T^2}{\sigma_T^2} \sim \chi^2(n_T-1)$

и $V\left((n_T-1)\frac{\hat\sigma_T^2}{\sigma_T^2}\right) = 2(n_T-1)$

$$V(\hat\sigma_T^2) = \frac{2\cancel{(n_T-1)}\,\sigma_T^4}{(n_T-1)^{\cancel{2}}}$$

$$= \boxed{\frac{2\left(\frac{\sigma_T^2}{n_T}+\frac{\sigma_c^2}{n_c}\right)^2}{\frac{1}{n_T^2}\frac{2\sigma_T^4}{(n_T-1)}+\frac{1}{n_c^2}\cdot\frac{2\sigma_c^4}{(n_c-1)}}}$$

и т.к. считаем реально $\hat d$ по выборке, то

$$\hat d = \frac{\left(\frac{\hat\sigma_T^2}{n_T}+\frac{\hat\sigma_c^2}{n_c}\right)^2}{\frac{\hat\sigma_T^4}{(n_T-1)\,n_T^2}+\frac{\hat\sigma_c^4}{(n_c-1)\,n_c^2}}$$

м.быть не целым, это ок

и сравнив. $t_{расч}$ с $t_{табл}(\hat d)$