Projekt 2

Zadanie nr 45

Anna Wawrzyńczak, 313552

12 czerwiec 2022

Spis treści

Wstęp

1.1 Opis zadania

W ramach projektu należało zaimplementować i porównać w środowisku MATLAB metodę Newtona i Halleya znajdowania miejsc zerowych wielomianów w postaci $w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ w dziedzinie zespolonej.
Ponadto, do obliczania wartości wielomianów i jego pochodnych w punkcie należało użyć algorytmu Hornera.

Algorytm Hornera

2.1 Opis działania i implementacji algorytmu

Za pomocą algorytmu Hornera można szybko obliczyć wartość wielomianu w danym punkcie. Schemat Hornera opiera się na poniższej przekształconej postaci wielomianu:
$w(z) = a_0 + z(a_1 + z(a_2 + \cdots + z(a_{n-1} + za_n)\ldots)),$
w której za z podstawia się wartość podanego argumentu.
Wykorzystując to przekształcenie można łatwo zaimplementować algorytm w dowolnym programie programistycznym. Ponadto, dzięki takiej postaci funkcji program wykonuje tylko n dodawań i n mnożeń, co wpływa na jego wysoką wydajność.

Metoda Newtona

3.1 Opis działania metody Newtona

Metoda Newtona wyznacza przybliżenie miejsca zerowego wielomianu na podstawie podanego punktu startowego z_0. Schemat polega głównie na sprawdzaniu czy wartość wielomianu dla kolejnych argumentów z_k rozpoczynając od punktu startowego jest zbliżona do zera. Kolejne punkty oblicza się za pomocą rekurencji:
$z_{k+1} = z_k + \frac{w(z_k)}{w'(z_k)}$, gdzie $k = 0, 1, \ldots$
Zgodnie z informacjami w [1] podany wzór wynika z równania stycznej do wykresu funkcji.
Jeżeli $w(z_k) \approx 0$, to z_k jest zwracane jako przybliżone miejsce zerowe wielomianu.
Do metody zostały dodane warunki stop, które są potrzebne, by algorytm został zatrzymany i zwracał wynik, który jest dostatecznie dobrym przybliżeniem. W projekcie zostały użyte następujące warunki stop:

- $|z_{k+1} - z_k| < \varepsilon$, gdzie ε to ustalona dokładność przybliżenia;
- osiagnięta zostanie ustalona maksymalna liczba literacji k_{max}.

3.2 Opis implementacji metody Newtona

Na podstawie opisu w 3.1 stworzono dwa algorytmy. Jeden z algorytmów (który jest nazywany zwykłą metodą Newtona) działa dokładnie tak jak przedstawiono w 3.1. Zauważono jednak, że w przypadku wielomianu o rzeczywistych współczynnikach i pierwiastkach o niezerowej części urojonej oraz przy rzeczywistym punkcie startowym z_0 zwykła metoda będzie zwracać jako przybliżenie jedynie punkty na osi rzeczywistej. Wynika to z postaci ilorazu $\frac{w(z_k)}{w'(z_k)}$, którego wartość będzie zawsze liczbą rzeczywistą. Zatem w takim przypadku ta metoda ma bardzo wolną zbieżność i zwraca wyniki istotnie różniące

się od miejsc zerowych wielomianu.
Stąd został opracowany drugi algorytm (nazwany 'ulepszoną' metodą Newtona), który rozdziela punkt startowy $z_0 = x_0 + iy_0$ na jego część rzeczywistą x_0 i urojoną y_0. Następnie jeśli $x_0 = 0$ lub $y_0 = 0$, to odpowiednio zachodzi $x_1 = x_0 - \mathrm{Im}(\frac{w(z_0)}{w'(z_0)})$ lub $y_1 = y_0 - \mathrm{Re}(\frac{w(z_0)}{w'(z_0)})$.
W dalszym ciągu działa schemat analogiczny jak dla zwykłej metody, przy czym punktem startowym jest odpowiednio $z_1 = x_1 + y_0 i$ lub $z_1 = x_0 + y_1 i$.
Dzięki zmianie punktu startowego na liczbę zespoloną o niezerowej części urojonej i rzeczywistej otrzymuje się lepsze przybliżenie miejsca zerowego.

Metoda Halleya

4.1 Opis działania metody Halleya

Metoda Halleya, podobnie jak metoda Newtona, wyznacza przybliżenie miejsca zerowego wielomianu na podstawie podanego punktu startowego z_0. Analogiczny schemat polega na sprawdzaniu czy wartość wielomianu dla kolejnych argumentów z_k zależnych od z_0 jest bliska do zeru. Kolejne punkty oblicza się za pomocą rekurencji:
$z_{k+1} = z_k + \frac{2 \cdot w(z_k) \cdot w'(z_k)}{2 \cdot w'(z_k)^2 - w(z_k) \cdot w''(z_k)}$, gdzie $k = 0, 1, \ldots$
Podany wzór wynika z rozwinięcia funkcji w szereg Taylora i rekurencji dla z_k w metodzie Newtona.
Analogicznie, jeżeli $w(z_k) \approx 0$, to z_k jest przybliżeniem miejsca zerowego wielomianu.
Do tej metody również zostały dodane warunki stop, które są potrzebne, aby algorytm zwracał wynik, który jest dostatecznie dobrym przybliżeniem. W tej metodzie występują takie same warunki stop jak w przypadku Newtona, zatem:

- $|z_{k+1} - z_k| < \varepsilon$, gdzie ε to ustalona dokładność przybliżenia;
- osiagnięta zostanie ustalona maksymalna liczba literacji k_{max}.

4.2 Opis implementacji metody Halleya

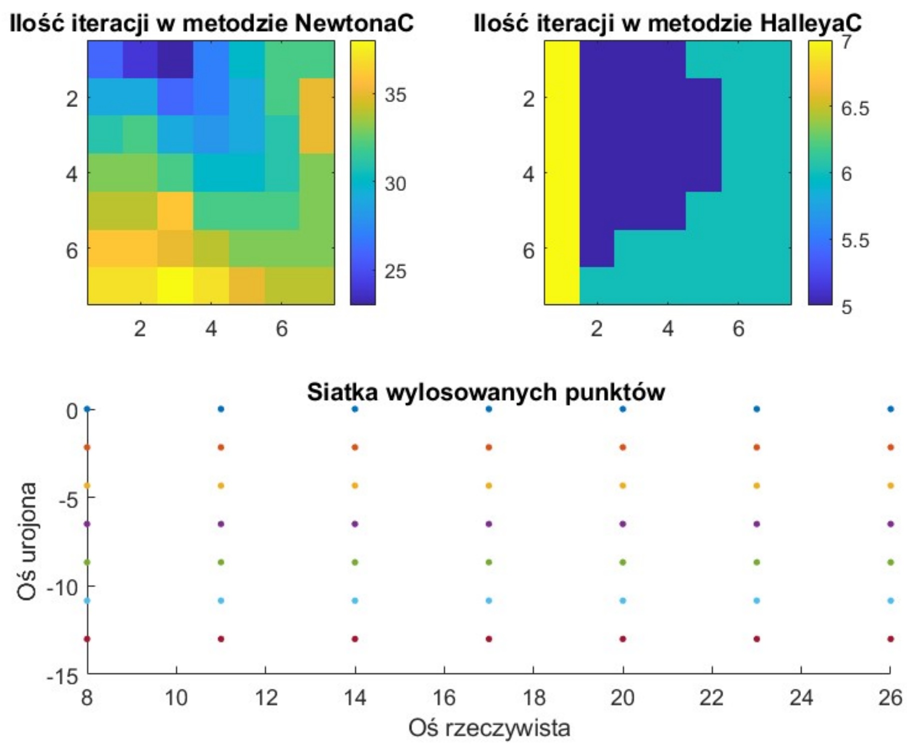
Tak samo jak w przypadku metody Newtona, na podstawie opisu w 4.1 stworzono dwa algorytmy. Jeden z algorytmów (który jest nazywany zwykłą metodą Halleya) działa dokładnie tak jak przedstawiono w 4.1. Zauważono, że w przypadku wielomianu o rzeczywistych współczynnikach i pierwiastkach o niezerowej części urojonej oraz przy punkcie startowym $z_0 \in \mathbb{R}$ zwykła metoda będzie zwracać jedynie punkty na osi rzeczywistej. Wynika to z postaci ilorazu $\frac{2 \cdot w(z_k) \cdot w'(z_k)}{2 \cdot w'(z_k)^2 - w(z_k) \cdot w''(z_k)}$, którego wartość będzie rzeczywista. Zatem

w takim przypadku ta metoda ma bardzo wolną zbieżność i zwraca wyniki istotnie różniące się od miejsc zerowych wielomianu.
Stąd powstał drugi algorytm (nazwany 'ulepszoną' metodą Halleya), który rozdziela punkt startowy $z_0 = x_0 + iy_0$ na jego część rzeczywistą x_0 i urojoną y_0. Następnie jeśli $x_0 = 0$ lub $y_0 = 0$, to odpowiednio zachodzi $x_1 = x_0 - \mathrm{Im}(\frac{2 \cdot w(z_k) \cdot w'(z_k)}{2 \cdot w'(z_k)^2 - w(z_k) \cdot w''(z_k)})$ lub $y_1 = y_0 - \mathrm{Re}(\frac{2 \cdot w(z_k) \cdot w'(z_k)}{2 \cdot w'(z_k)^2 - w(z_k) \cdot w''(z_k)})$.
W dalszym ciągu działa schemat analogiczny jak dla zwykłej metody, przy czym punktem startowym jest odpowiednio $z_1 = x_1 + y_0 i$ lub $z_1 = x_0 + y_1 i$.
Dzięki zmianie punktu startowego na liczbę zespoloną o niezerowej części urojonej i rzeczywistej otrzymuje się lepsze przybliżenie miejsca zerowego.

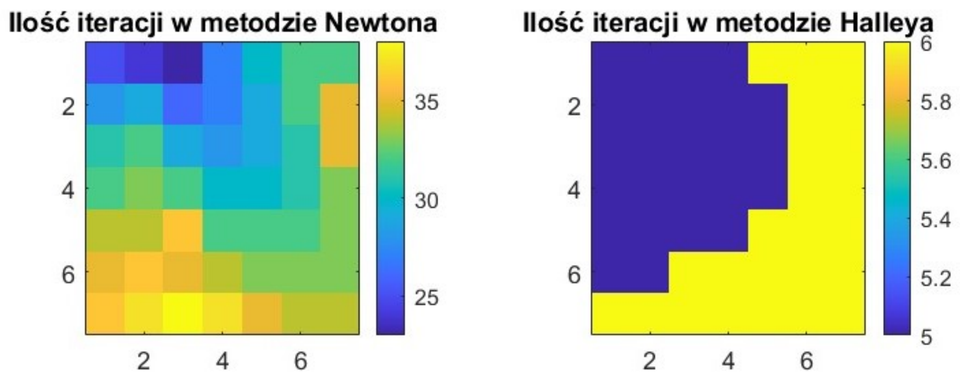
Porównanie metody Newtona i Halleya

5.1 Porównanie obu metod w dwóch wersjach ich algorytmów

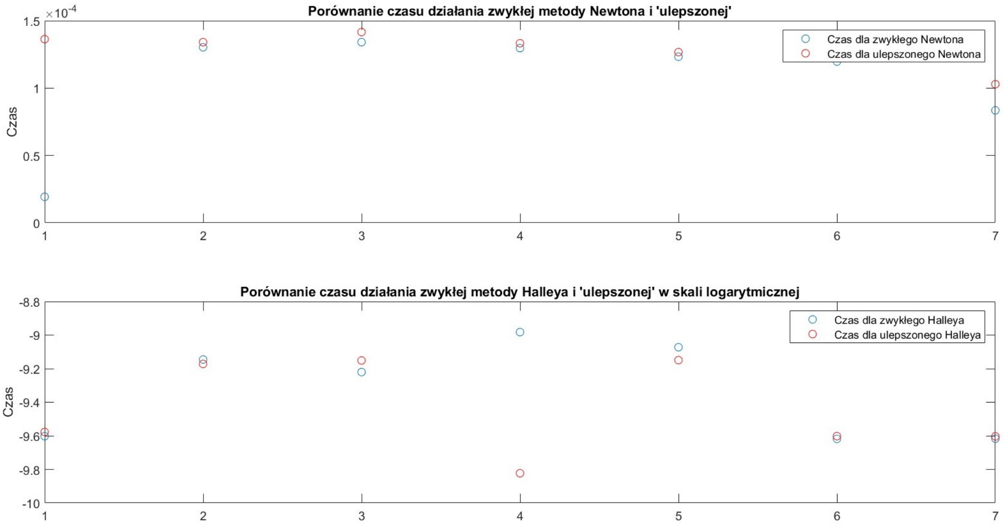
Badanie różnic pomiędzy dwoma metodami przeprowadzono zaczynając od porównania liczby literacji potrzebnych do wyznaczenia przybliżenia. Za pomocą rozkładu jednostajnego na przedziale [0, 20] wylosowano siatkę punktów startowych o wymiarach $m+1 \times n+1$, gdzie m i n to wylosowane w ten sam sposób liczby oraz wektor $w \in \mathbb{R}^{m+n}$, którego współrzędne to współczynniki wielomianu. Następnie obliczono przybliżone miejsce zerowe za pomocą obu algorytmów Newtona i Halleya w wersji zwykłej jak i ulepszonej. Wyniki przedstawiono za pomocą **colormap** na rysunkach 5.1 i 5.2.



Rysunek 5.1: Na wykresie została przedstawiona liczba iteracji potrzebna do obliczenia przybliżeń miejsc zerowych dla ulepszonych metod Newtona i Halleya oraz siatka wylosowanych punktów startowych



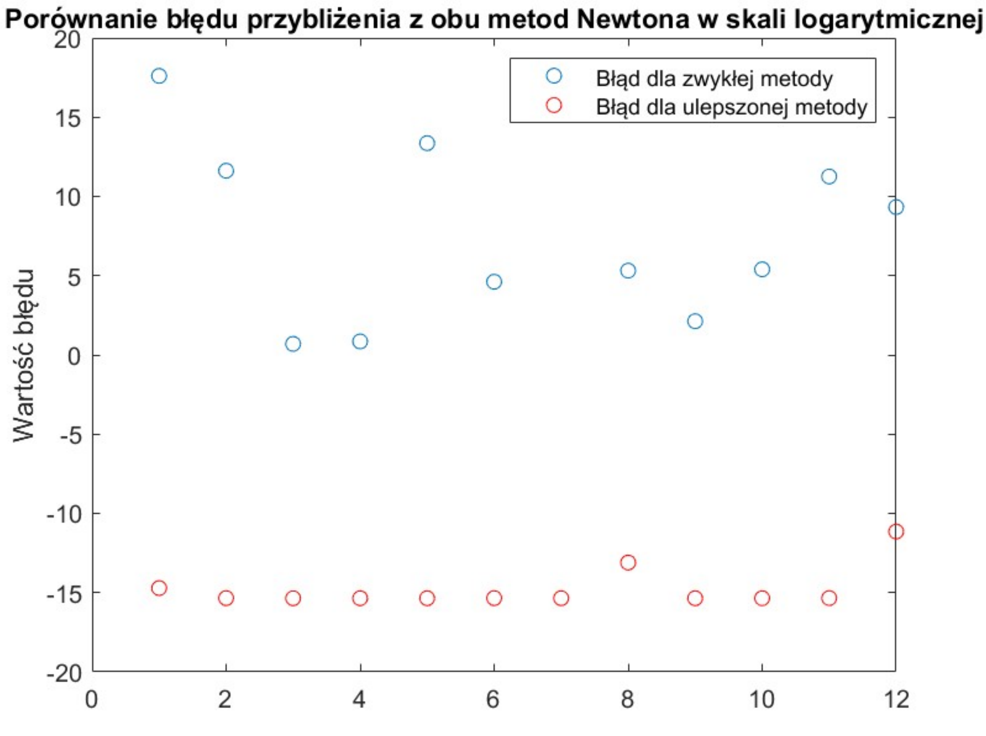
Rysunek 5.2: Na wykresie została przedstawiona liczba iteracji potrzebna do obliczenia przybliżeń miejsc zerowych dla zwykłych metod Newtona i Halleya



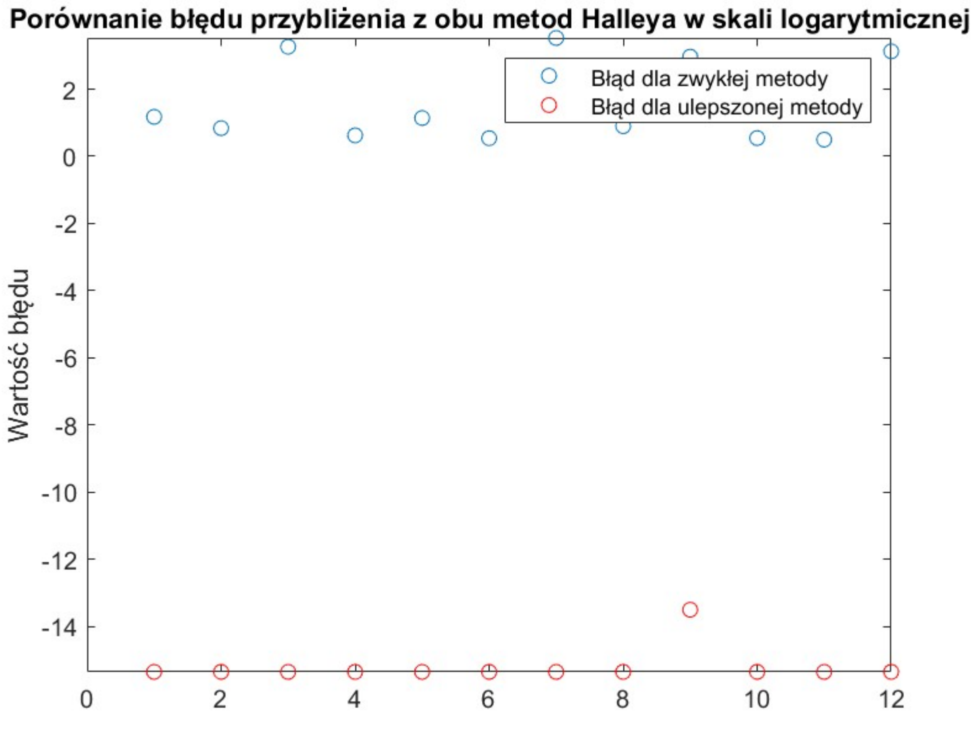
Rysunek 5.3: Wykres na górze przedstawia czas działania zwykłego i ulepszonego algorytmu Newtona, a wykres na dole obrazuje czas działania zwykłej i ulepszonej metody Halleya.

Drugim kryterium pod kątem, którego porównano wydajność obu metod, był ich czas działania, co obrazuje rysunek 5.3.

Następnie obliczono błąd przybliżeń miejsc zerowych, czyli $|w(z_k)|$, gdzie z_k to zwrócone przybliżenie z danego algorytmu. W celu pokazania użyteczności ulepszonych metod w tym teście wylosowano $z_0 \in \mathbb{R}$ oraz wielomian, który miał jedynie parzyste potęgi i dodatni wyraz wolny
$w(z) = 2z^{22} + 12z^{20} + 10z^{18} + 14z^{16} + 18z^{14} + 7z^{12} + 11z^{10} + 6z^8 + 16z^6 + 14z^4 + 14z^2 + 3$.
Porównanie błędów między metodami obrazują rysunki 5.4 i 5.5.



Rysunek 5.4: Wykres przedstawia błąd generowany przez przybliżenia ze zwykłej i ulepszonej metody Newtona.



Rysunek 5.5: Wykres przedstawia błąd generowany przez przybliżenia ze zwykłej i ulepszonej metody Halleya.

Wnioski

Podsumowując, metoda Halleya jest lepszym sposobem na przybliżanie miejsc zerowych niż metoda Newtona. Schemat Halleya oblicza pierwiastki w zdecydowanie mniejszej liczbie literacji oraz działa szybciej.
Porównując zwykłe i ulepszone wersje algorytmów można zauważyć, że zgodnie z wcześniejszymi obserwacjami zwykłe metody generują oszacowania o dużym błędzie przybliżenia w rozważanym przypadku wielomianów o rzeczywistych współczynnikach i parzystych potęgach oraz rzeczywistym punkcie startowym. Ponadto, zwykła metoda Halleya wyznacza lepsze oszacowania niż zwykły Newton, natomiast ulepszone metody dają tak samo dobre oszacowanie.

Bibliografia

[1] Iwona Wróbel. *Zapiski numeryczne 2021-22.*