POLITECHNIKA GDAŃSKA
WYDZIAŁ FIZYKI TECHNICZNEJ I MATEMATYKI STOSOWANEJ

Imię i nazwisko studenta: Anna Wieżel
Nr albumu: 132540
Studia drugiego stopnia
Forma studiów: stacjonarne
Kierunek studiów: Matematyka
Specjalność/profil: Matematyka finansowa

PRACA DYPLOMOWA MAGISTERSKA

Tytuł pracy w języku polskim: Statystyczna analiza danych funkcjonalnych

Tytuł pracy w języku angielskim: Inference for Functional Data

Potwierdzenie przyjęcia pracy	
Opiekun pracy *podpis*	Kierownik Katedry *podpis*
dr hab. Karol Dziedziul	prof. dr hab. Marek Izydorek

Data oddania pracy do dziekanatu:

POLITECHNIKA GDAŃSKA
WYDZIAŁ FIZYKI TECHNICZNEJ I MATEMATYKI STOSOWANEJ

OŚWIADCZENIE

Imię i nazwisko: Anna Wieżel
Data i miejsce urodzenia: 28.09.1991, Ostróda
Nr albumu: 132540
Wydział: Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej
Kierunek: matematyka
Poziom studiów: II stopnia
Forma studiów: stacjonarne

Ja, niżej podpisany(a), wyrażam zgodę/nie wyrażam zgody* na korzystanie z mojej pracy dyplomowej zatytułowanej: Statystyczna analiza danych funkcjonalnych do celów naukowych lub dydaktycznych.[1]

Gdańsk, dnia ....
podpis studenta

Świadomy(a) odpowiedzialności karnej z tytułu naruszenia przepisów ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. z 2006 r., nr 90, poz. 631) i konsekwencji dyscyplinarnych określonych w ustawie Prawo o szkolnictwie wyższym (Dz. U. z 2012 r., poz. 572 z późn. zm.),[2] a także odpowiedzialności cywilno-prawnej oświadczam, że przedkładana praca dyplomowa została opracowana przeze mnie samodzielnie.

Niniejsza(y) praca dyplomowa nie była wcześniej podstawą żadnej innej urzędowej procedury związanej z nadaniem tytułu zawodowego.

Wszystkie informacje umieszczone w ww. pracy dyplomowej, uzyskane ze źródeł pisanych i elektronicznych, zostały udokumentowane w wykazie literatury odpowiednimi odnośnikami zgodnie z art. 34 ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych.

Potwierdzam zgodność niniejszej wersji pracy dyplomowej z załączoną wersją elektroniczną.

Gdańsk, dnia ....
podpis studenta

Upoważniam Politechnikę Gdańską do umieszczenia ww. pracy dyplomowej w wersji elektronicznej w otwartym, cyfrowym repozytorium instytucjonalnym Politechniki Gdańskiej oraz poddawania jej procesom weryfikacji i ochrony przed przywłaszczaniem jej autorstwa.

Gdańsk, dnia ....
podpis studenta

*) niepotrzebne skreślić

[1] Zarządzenie Rektora Politechniki Gdańskiej nr 34/2009 z 9 listopada 2009 r., załącznik nr 8 do instrukcji archiwalnej PG.

[2] Ustawa z dnia 27 lipca 2005 r. Prawo o szkolnictwie wyższym:
Art. 214 ustęp 4. W razie podejrzenia popełnienia przez studenta czynu podlegającego na przypisaniu sobie autorstwa istotnego fragmentu lub innych elementów cudzego utworu rektor niezwłocznie poleca przeprowadzenie postępowania wyjaśniającego.
Art. 214 ustęp 6. Jeżeli w wyniku postępowania wyjaśniającego zebrany materiał potwierdza popełnienie czynu, o którym mowa w ust. 4, rektor wstrzymuje postępowanie o nadanie tytułu zawodowego do czasu wydania orzeczenia przez komisję dyscyplinarną oraz składa zawiadomienie o popełnieniu przestępstwa.

Streszczenie

Polski abstrakt!

Słowa kluczowe: dane funkcjonalne, analiza danych funkcjonalnych, funkcjonalny model liniowy, test istotności

Dziedzina nauki i techniki, zgodnie z wymogami OECD: 1.1 Matematyka.

Abstract

The paper's motivation is to contribute to popularization of mathematical statistics on infinite dimensional function Hilbert spaces. The author presents the fully functional linear model in form $Y = \Psi X + \varepsilon$ and its significance test proposed by Kokoszka et al. The test detects nullity of Hilbert-Schmidt operator Ψ, which implies the lack of linear dependence between X and Y. Using the principal component decomposition it is concluded with test statistic convergent by distribution to chi-squared.
The test is further used for magnetic field data collected in some stations in different latitudes. The results show linear dependence between horizontal intensities of the magnetic field in mid- and low-latitude stations with high-latitude station data with a day or two delay but they contradict the linear dependence between data with more than a two-day lag.

Keywords: functional data, functional data analysis, functional linear model, significance test.

Spis treści

Wstęp

[już tu: Przykłady danych funkcjonalnych?]
[już tu: próba = punkty - ostatecznie: funkcja gładka?]
[Odpowiednik testu istotności dla prostego modelu regresji = F-test (+ t-test) [patrz: artykuł]]
Praca opiera się głównie na artykule [Kokoszka et al. (2008)], który to został rozwinięty w książce [Horváth, Kokoszka].
+pozostała literatura, gdzie można doczytać, itd.

[pakiet w R: fda] W załączniku na końcu pracy załączony został kod napisany w języku R na potrzeby przykładu zaprezentowanego w pracy.

Ze względu na to, że analiza danych funkcjonalnych (*ang.* Functional Data Analysis, FDA) jest stosunkowo nowym działem statystyki i jest wciąż mało popularna w polskiej literaturze, wiele pojęć czy określeń zawartych w pracy nie posiada jeszcze ogólnie przyjętych polskich odpowiedników. Dlatego zostały one przetłumaczone przez autora według własnego uznania, przytaczając oryginalne (angielskie) nazwy.

W pracy wykorzystano dane o polu magnetycznym Ziemi publikowane na stronie programu INTERMAGNET oraz organizacji SuperMAG. Załączam zatem specjalne podziękowania:

ACKNOWLEDGEMENTS

The results presented in this paper rely on data collected at magnetic observatories. We thank the national institutes that support them and INTERMAGNET for promoting high standards of magnetic observatory practice (www.intermagnet.org).

For the ground magnetometer data we gratefully acknowledge: Intermagnet; USGS, Jeffrey J. Love; CARISMA, PI Ian Mann; CANMOS; The S-RAMP Database, PI K. Yumoto and Dr. K. Shiokawa; The SPIDR database; AARI, PI Oleg Troshichev; The MACCS program, PI M. Engebretson, Geomagnetism Unit of the Geological Survey of Canada; GIMA; MEASURE, UCLA IGPP and Florida Institute of Technology; SAMBA, PI Eftyhia Zesta; 210 Chain, PI K. Yumoto; SAMNET, PI Farideh Honary; The institutes who maintain the IMAGE magnetometer array, PI Eija Tanskanen; PENGUIN; AUTUMN, PI Martin Connors; DTU Space, PI Dr. Juergen Matzka; South Pole and McMurdo Magnetometer, PI's Louis J. Lanzarotti and Alan T. Weatherwax; ICESTAR; RAPIDMAG; PENGUIn; British Artarctic Survey; McMac, PI Dr. Peter Chi; BGS, PI Dr. Susan Macmillan; Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation (IZMIRAN); GFZ, PI Dr. Juergen Matzka; MFGI, PI B. Heilig; IGFPAS, PI J. Reda; University of L'Aquila, PI M. Vellante; SuperMAG, PI Jesper W. Gjerloev.

Rozdział 1

Preliminaria

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Ω jest zatem zbiorem scenariuszy ω, $\mathcal{F}$ jest σ-algebrą podzbiorów Ω, a P miarą probabilistyczną na $\mathcal{F}$. Dla uproszczenia zakładamy zupełność zadanej przestrzeni probabilistycznej.

Definicja 1.1 *Niech B będzie przestrzenią Banacha. **σ-ciałem zbiorów borelowskich na $\mathbf{B}$** nazywamy σ-ciało $\mathcal{B}(B)$ generowane przez rodzinę zbiorów otwartych w normie przestrzeni B.*

Definicja 1.2 *Niech B będzie przestrzenią Banacha, zaś $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ przestrzenią probabilistyczną. Odwzorowanie $X : \Omega \to B$ nazywamy **$\mathbf{B}$-elementem losowym**, gdy X jest mierzalne, tzn. dla każdego zbioru borelowskiego $A \in \mathcal{B}(B)$ zachodzi $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.*

W pracy przedstawiona zostanie teoria estymacji elementów losowych przyjmujących wartości w nieskończenie wymiarowej ośrodkowej (rzeczywistej) przestrzeni Hilberta. W środowisku statystyków przyjęło się aby w przypadku, gdy $X(\omega)$ są funkcjami (krzywymi), takie zmienne nazywać **zmiennymi funkcjonalnymi** (ang. *functional variable*), zaś obserwacje χ zmiennej X nazywać **daną funkcjonalną** (ang. *functional data*). Statystyki takich obiektów są bardziej skomplikowane niż dla zmiennych losowych przyjmujących wartości w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, dlatego, aby zbudować pojęcia funkcji średniej oraz operatora kowariancji dla zmiennych tego typu, wprowadzimy najpierw niezbędne pojęcia z dziedziny operatorów liniowych.

1.1 Klasyfikacja operatorów liniowych

Rozważmy ośrodkową nieskończenie wymiarową rzeczywistą przestrzeń Hilberta H z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zadającym normę $\|\cdot\|$. Przez $\mathcal{L}$ oznaczmy przestrzeń ograniczonych (ciągłych) operatorów liniowych w H, tj.

$$\Psi \in \mathcal{L} \iff \exists_{C>0}\, \forall_{x \in H} \ \|\Psi x\| \leqslant C \|x\| .$$

Każdy operator $\Psi \in \mathcal{L}$ posiada **operator sprzężony** Ψ^*, zdefiniowany następująco

$$\langle \Psi^* x, y \rangle = \langle x, \Psi y \rangle.$$

Przestrzeń $\mathcal{L}$ z normą

$$\|\Psi\|_{\mathcal{L}} := \sup\{\|\Psi(x)\| : \ \|x\| \leqslant 1\} = \min\{C > 0 : \|\Psi x\| \leqslant C \|x\|, x \in H\}, \quad \Psi \in \mathcal{L}$$

jest przestrzenią Banacha.

Definicja 1.3 *[Horváth, Kokoszka]*
Operator $\Psi \in \mathcal{L}$ nazywamy ***operatorem zwartym****, jeśli istnieją dwie ortonormalne bazy w H $\{\upsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ i $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$, oraz ciąg liczb rzeczywistych $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ zbieżny do zera, takie że*

$$\Psi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, \upsilon_j \rangle f_j, \quad x \in H. \tag{1.1}$$

Klasę operatorów zwartych oznacza się przez $\mathcal{C}$.

Bez straty ogólności możemy założyć, że w przedstawionej reprezentacji λ_j są wartościami dodatnimi, w razie konieczności wystarczy f_j zamienić na $-f_j$.
Równoważną definicją operatora zwartego jest spełnienie przez Ψ następującego warunku: zbieżność $\langle y, x_n \rangle \to \langle y, x \rangle$ dla każdego $y \in H$ implikuje $\| \Psi(x_n) - \Psi(x) \| \to 0$.

Inną klasą operatorów są operatory Hilberta-Schmidta, którą oznaczać będziemy przez $\mathcal{S}$.

Definicja 1.4 *[Bosq]*
Operatorem Hilberta-Schmidta *nazywamy taki operator zwarty $\Psi \in \mathcal{L}$, dla którego ciąg $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ w reprezentacji (1.1) spełnia $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 < \infty$.*

Uwaga 1.1 *[Bosq], [Horváth, Kokoszka]*
Klasa $\mathcal{S}$ jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle_{\mathcal{S}} := \sum_{j=1}^{\infty} \langle \Psi_1(e_j), \Psi_2(e_j) \rangle, \tag{1.2}$$

gdzie $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ jest dowolną bazą ortonormalną w H.
Powyższy iloczyn skalarny zadaje normę

$$\| \Psi \|_{\mathcal{S}} := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \right)^{1/2},$$

co wynika z szeregu równości

$$\begin{aligned} \| \Psi \|_{\mathcal{S}}^2 = \langle \Psi, \Psi \rangle_{\mathcal{S}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle e_n, \upsilon_j \rangle f_j, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle e_n, \upsilon_k \rangle f_k \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_j \lambda_k \langle e_n, \upsilon_j \rangle \langle e_n, \upsilon_k \rangle \langle f_j, f_k \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \langle e_n, \upsilon_j \rangle^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, \upsilon_j \rangle^2 \overset{\substack{\text{tożsamość} \\ \text{Parsevala}}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \| \upsilon_j \|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2. \end{aligned}$$

□

Definicja 1.5 *[Bosq]*
Zwarty operator liniowy nazywamy ***operatorem śladowym*** *(ang. nuclear operator), jeśli równość (1.1) spełniona jest dla ciągu $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ takiego, że $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < \infty$.*

Uwaga 1.2 *[Bosq]*
Klasa operatorów śladowych $\mathcal{N}$ z normą $\| \Psi \|_{\mathcal{N}} := \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|$ jest przestrzenią Banacha.

Uwaga 1.3 *[Bosq]*
Prawdziwe są inkluzje: $\mathcal{N} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{L}$.

Definicja 1.6 *[Horváth, Kokoszka]*
Operator $\Psi \in \mathcal{L}$ nazywamy ***symetrycznym****, jeśli*

$$\langle \Psi(x), y\rangle = \langle x, \Psi(y)\rangle, \quad x, y \in H,$$

oraz ***nieujemnie określonym*** *(lub połowicznie pozytywnie określonym, ang. positive semidefinite), jeśli*

$$\langle \Psi(x), x\rangle \geqslant 0, \quad x \in H.$$

Uwaga 1.4 *[Horváth, Kokoszka]*
Symetryczny nieujemnie określony operator Hilberta-Schmidta Ψ możemy przedstawić w postaci

$$\Psi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, \upsilon_j\rangle \upsilon_j, \quad x \in H, \tag{1.3}$$

gdzie ortonormalne υ_j są ***funkcjami (wektorami) własnymi*** *Ψ, a λ_j odpowiadającymi im* ***wartościami własnymi****, tj. $\Psi(\upsilon_j) = \lambda_j \upsilon_j$. Funkcje υ_j mogą być rozszerzone do bazy, przez dodanie bazy ortonormalnej dopełnienia ortogonalnego podprzestrzeni rozpiętej przez oryginalne υ_j. Możemy zatem założyć, że funkcje υ_j w* (1.3) *tworzą bazę, a pewne wartości λ_j mogą być równe zero.*

W dalszej części pracy ograniczymy się do przypadku $H = L^2(T, \mathcal{B}(T), \lambda)$.

Na przedziale $T \subset \mathbb{R}$ rozważmy σ-algebrę zbiorów borelowskich $\mathcal{B}(T)$ wraz z miarą Lebesgue'a λ. Przestrzeń $L^2 = L^2(T) = L^2(T, \mathcal{B}, \lambda)$ nad przedziałem T jest zbiorem mierzalnych funkcji rzeczywistych całkowalnych z kwadratem określonych na T, tj.

$$x \in L^2(T) \iff x : T \to \mathbb{R} \ \wedge \int_T x^2(t)dt < \infty,$$

z utożsamieniem funkcji równych prawie wszędzie. Przestrzeń L^2 jest ośrodkową przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle x, y\rangle := \int_T x(t)y(t)dt, \quad x, y \in L^2,$$

wyznaczającym normę

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \int x^2(t)dt, \quad x \in L^2.$$

Tak jak zwyczajowo zapisujemy L^2 zamiast $L^2(T)$, tak w przypadku symbolu całki bez wskazania obszaru całkowania będziemy mieć na myśli całkowanie po całym przedziale T. Jeśli $x, y \in L^2$, równość $x = y$ zawsze oznaczać będzie $\int [x(t) - y(t)]^2 \, dt = 0$.

Ważną klasę operatorów liniowych na przestrzeni L^2 stanowią operatory całkowe. Przedstawimy pomocnicze definicje i twierdzenia, a następnie twierdzenie opisujące warunki, które powinny być spełnione, aby taki operator był dobrze określony.

Definicja 1.7 *Niech $(T, \mathcal{A})$ i $(S, \mathcal{C})$ będą przestrzeniami mierzalnymi.* ***σ-algebrę produktową*** *na $T \times S$ określa wzór*

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{C} = \sigma(\{A \times C : A \in \mathcal{A}, \ C \in \mathcal{C}\}).$$

Twierdzenie 1.1 *skrypt dra Beśki*
Niech $(T, \mathcal{A}, \mu)$ i $(S, \mathcal{C}, \nu)$ będą przestrzeniami z miarami σ-skończonymi. Wówczas istnieje jedyna miara na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$ oznaczana symbolem $\mu \times \nu$ taka, że

$$(\mu \times \nu)(A \times C) = \mu(A)\nu(C), \quad A \in \mathcal{A},\ C \in \mathcal{C}.$$

Taką miarę nazywamy ***miarą produktową****.*

Twierdzenie 1.2 *(Twierdzenie Fubiniego)*
Niech $(T, \mathcal{A}, \mu)$ i $(S, \mathcal{C}, \nu)$ będą przestrzeniami z miarami σ-skończonymi. Niech $f : T \times U \to \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną względem σ-algebry produktowej $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$.

(a) Załóżmy, że całka $\int\limits_S f(t,s)d\nu(s)$ istnieje dla μ-prawie każdego $t \in T$ oraz całka $\int\limits_T f(t,s)d\mu(t)$ istnieje dla ν-prawie każdego $s \in S$. Wówczas funkcja $T \ni t \mapsto \int\limits_S f(t,s)d\nu(s) \in \mathbb{R}$ jest $\mathcal{A}$-mierzalna i funkcja $S \ni s \mapsto \int\limits_T f(t,s)d\mu(t) \in \mathbb{R}$ jest $\mathcal{C}$-mierzalna.

(b) Załóżmy, że przynajmniej jedna z całek jest skończona:

$$\int\limits_{T\times S} |f| d\mu \otimes \nu, \quad \int\limits_T \left(\int\limits_S |f(t,s)| d\nu(s) \right) d\mu(t), \quad \int\limits_S \left(\int\limits_T |f(t,s)| d\mu(t) \right) d\nu(s).$$

Wtedy dla μ-prawie wszystkich $t \in T$ funkcja $f(t,\cdot) : S \to \mathbb{R}$ jest ν-skończenie całkowalna i dla ν-prawie wszystkich $s \in S$ funkcja $f(\cdot, s) : T \to \mathbb{R}$ jest μ-skończenie całkowalna. Ponadto, funkcja $T \ni t \mapsto \int\limits_S f(t,s)d\nu(s) \in \mathbb{R}$ jest μ-skończenie całkowalna i funkcja $S \ni s \mapsto \int\limits_T f(t,s)d\mu(t) \in \mathbb{R}$ jest ν-skończenie całkowalna. Prawdziwe są poniższe równości

$$\int\limits_{T\times S} f d\mu \otimes \nu = \int\limits_T \left(\int\limits_S f(t,s) d\nu(s) \right) d\mu(t) = \int\limits_S \left(\int\limits_T f(t,s) d\mu(t) \right) d\nu(s).$$

Uwaga 1.5 *skrypt dra Beśki*
Zauważmy, że funkcje $T \ni t \mapsto \int\limits_S f(t,s)d\nu(s) \in \mathbb{R}$, $S \ni s \mapsto \int\limits_T f(t,s)d\mu(t) \in \mathbb{R}$ mogą nie być poprawnie określone dla wszystkich $t \in T$ oraz $s \in S$. Są one zdefiniowane μ- i ν-prawie wszędzie, co wystarcza, aby poprawnie zdefiniować ich całki.

Lemat 1.1 *[Hsing, Eubank]*
Niech (T, μ) będzie przestrzenią z miarą. Dla funkcji $\psi \in L^2(T \times T)$ zdefiniujmy

$$\Psi x(t) = \int\limits_T \psi(t,s)x(s)d\mu(s), \quad x \in L^2,\ t \in T.$$

Wówczas $\Psi : L^2(T) \to L^2(T)$ jest ograniczonym operatorem liniowym spełniającym

$$\|\Psi\| \leqslant \Big(\int\limits_T \int\limits_T |\psi(t,s)|^2 d\mu(t) d\mu(s) \Big)^{1/2} = \|\psi\|_{L^2(T\times T)}.$$

Dowód. Pokażemy, że dla $x \in L^2(T)$ zachodzi $\Psi x \in L^2(T)$.
Oznaczmy $M := \Big(\int\limits_T \int\limits_T |\psi(t,s)|^2 d\mu(t) d\mu(s)\Big)^{1/2}$. Mierzalność funkcji Ψx wynika z twierdzenia Fubiniego. Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza mamy

$$\begin{aligned}\|\Psi x\|^2 &= \int\limits_T |\Psi x(t)|^2 d\mu(t) = \int\limits_T \Big|\int\limits_T \psi(t,s)x(s)d\mu(s)\Big|^2 d\mu(t)\\ &\leqslant \int\limits_T \Big(\int\limits_T |\psi(t,s)|^2 d\mu(s) \cdot \int\limits_T |x(s)|^2 d\mu(s)\Big) d\mu(t)\\ &= \int\limits_T \int\limits_T |\psi(t,s)|^2 d\mu(s) d\mu(t) \cdot \int\limits_T |x(s)|^2 d\mu(s) = M^2 \|x\|^2,\end{aligned}$$

więc $\Psi x \in L^2(T)$ oraz Ψ jest operatorem ograniczonym z normą $\|\Psi\| \leqslant M$. Liniowość operatora wynika z liniowości całki. □

Tak określony operator Ψ nazywamy **operatorem całkowym**, zaś funkcję ψ nazywamy **jądrem całkowym** operatora Ψ.

Uwaga 1.6 *[Horváth, Kokoszka]*
Operatory całkowe są operatorami Hilberta-Schmidta wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\iint \psi^2(t,s)dtds < \infty. \tag{1.4}$$

Ponadto zachodzi

$$\|\Psi\|_{\mathcal{S}}^2 = \iint \psi^2(t,s)dtds.$$

Twierdzenie 1.3 *(Twierdzenie Mercera) [Horváth, Kokoszka]*
Niech operator Ψ będzie operatorem całkowym spełniającym (1.4)*. Jeśli ponadto jego jądro całkowe ψ spełnia $\psi(s,t) = \psi(t,s)$ oraz $\iint \psi(t,s)x(t)x(s)dtds \geqslant 0$, to operator całkowy Ψ jest symetryczny i nieujemnie określony, zatem z Uwagi 1.4 mamy*

$$\psi(t,s) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \upsilon_j(t)\upsilon_j(s) \quad w\ L^2(T \times T),$$

gdzie λ_j, υ_j są odpowiednio wartościami własnymi i funkcjami własnymi operatora Ψ. Jeżeli funkcja ψ jest ciągła, powyższe rozwinięcie jest prawdziwe dla wszystkich $t, s \in T$ i szereg jest zbieżny jednostajnie.

1.2 L^2-elementy losowe. Pojęcie funkcji średniej i operatora kowariancji

W pracy przedstawiona zostanie teoria estymacji elementów losowych przyjmujących wartości w ośrodkowej (rzeczywistej) przestrzeni Hilberta $L^2(T)$, gdzie $T \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem. Ponieważ elementy przestrzeni $L^2(T)$ są formalnie klasami abstrakcji funkcji równych prawie wszędzie, to powyższe podejście uniemożliwia rozważanie wartości obserwacji elementu losowego w ustalonym punkcie $t \in T$. Z kolei w praktyce mamy do dyspozycji dane historyczne będące wartościami wylosowanej funkcji w pewnej ilości punktów z przedziału T. Dlatego naturalne jest rozważanie jako wyjściowego obiektu procesu stochastycznego $\{X_t\}_{t\in T}$, a następnie związanie z nim $L^2(T)$-elementu losowego. W tym celu potrzebujemy warunku który zagwarantuje, że odwzorowanie $\Omega \ni \omega \mapsto X(\omega, \cdot)$ będzie $L^2(T)$-elementem losowym.
statystyka: zmienne funkcjonalne?

Definicja 1.8 *Niech $T \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem, a $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ przestrzenią probabilistyczną. Proces stochastyczny $\{X_t\}_{t\in T}$ nazywamy* ***mierzalnym****, gdy jest mierzalny jako odwzorowanie z przestrzeni mierzalnej $(\Omega \times T, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(T))$ w przestrzeń $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*

Lemat 1.2 *[Hsing, Eubank]*
Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, a H ośrodkową przestrzenią Hilberta. Odwzorowanie $X : \Omega \to H$ jest H-elementem losowym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $y \in H$ odwzorowanie $\Omega \ni \omega \mapsto \langle y, X(\omega)\rangle \in \mathbb{R}$ jest mierzalne (rozważając na $\mathbb{R}$ σ-ciało zbiorów borelowskich).

Dowód. Załóżmy najpierw, że X jest H-elementem losowym. Ponieważ dla dowolnego $y \in H$ odwzorowanie $H \ni x \mapsto \langle y, x\rangle \in \mathbb{R}$ jest ciągłe, to jest także mierzalne (rozpatrując σ-ciała borelowskie zarówno na H oraz $\mathbb{R}$). W takim razie odwzorowanie $\omega \mapsto \langle y, X(\omega)\rangle$ jest mierzalne jako złożenie odwzorowań mierzalnych.
Aby przeprowadzić dowód w drugą stronę wystarczy pokazać, że przeciwobrazy kul domkniętych w H są mierzalne (ponieważ generują one $\mathcal{B}(H)$). Ustalmy w tym celu $h \in H$ oraz $\varepsilon > 0$ oraz bazę ortonormalną $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ przestrzeni H. Z tożsamości Parsevala mamy

$$\{x \in H : \|x - h\| \leqslant \varepsilon\} = \{x \in H : \|x - h\|^2 \leqslant \varepsilon^2\} = \{x \in H : \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j, x - h\rangle^2 \leqslant \varepsilon^2\}$$

$$= \{x \in H : \sum_{j=1}^{\infty} \left(\langle e_j, x\rangle - \langle e_j, h\rangle\right)^2 \leqslant \varepsilon^2\}.$$

Podobnie

$$X^{-1}(\{x \in H : \|x - h\| \leqslant \varepsilon\}) = \{\omega \in \Omega : \|X(\omega) - h\| \leqslant \varepsilon\}$$

$$= \{\omega \in \Omega : \sum_{j=1}^{\infty} \left(\langle e_j, X(\omega)\rangle - \langle e_j, h\rangle\right)^2 \leqslant \varepsilon^2\}$$

Ponieważ wszystkie odwzorowania $\omega \mapsto \langle e_j, X(\omega)\rangle$ są mierzalne z założenia, a skończone sumy oraz granice funkcji mierzalnych są mierzalne, to mierzalne jest także odwzorowanie $\omega \mapsto \sum\limits_{j=1}^{\infty} \left(\langle e_j, X(\omega)\rangle - \langle e_j, h\rangle\right)^2$, więc (na mocy powyższej równości) zbiór $X^{-1}(\{x \in H : \|x - h\| \leqslant \varepsilon\})$ jest mierzalny. □

Podamy teraz kryterium gwarantujące, że proces stochastyczny zada L^2-element losowy.

Lemat 1.3 *[Hsing, Eubank]*
Niech $\{X_t\}_{t\in T}$ będzie mierzalnym procesem stochastycznym. Jeśli dla każdego $\omega \in \Omega$ funkcja $X(\omega, \cdot)$ jest całkowalna z kwadratem (względem miary Lebesgue'a na T), to odwzorowanie $\Omega \ni \omega \mapsto X(\omega, \cdot) \in L^2(T)$ jest L^2-elementem losowym (gdzie $X(\omega, \cdot)$ rozumiemy już jako klasę abstrakcji funkcji równych prawie wszędzie).

Dowód. Założenie o całkowalności z kwadratem gwarantuje, że funkcja $X(\omega, \cdot)$ rzeczywiście należy do $L^2(T)$. Wystarczy zatem wykazać mierzalność odwzorowania. Skorzystamy w tym celu z Lematu 1.2. Weźmy $y \in L^2(T)$. Ponieważ odwzorowanie $\omega \mapsto \langle X(\omega, \cdot), y\rangle = \int\limits_T X(\omega, t)y(t)dt$ nie zmieni się gdy funkcje podcałkowe zmienimy na zbiorze miary zero, to y możemy traktować jako reprezentanta klasy abstrakcji. Skoro $X : \Omega \times T \to \mathbb{R}$ jest mierzalne względem σ-ciała produktowego $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(T)$, a $y : T \to \mathbb{R}$ jest mierzalne względem $\mathcal{B}(T)$, to odwzorowanie $\Omega \times T \ni (\omega, t) \mapsto X(\omega, t)y(t)$ także jest mierzalne względem $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(T)$. Z twierdzenia Fubiniego (Twierdzenie 1.2) wynika teraz, że odwzorowanie $\omega \mapsto \int\limits_T X(\omega, t)y(t)dt = \langle X(\omega, \cdot), y\rangle$ jest mierzalne. Z Lematu 1.2 otrzymujemy, że odwzorowanie $\omega \mapsto X(\omega, \cdot) \in L^2(T)$ jest L^2-elementem losowym. □

Definicja 1.9 *Niech X będzie $L^2(T)$-elementem losowym. Mówimy, że X jest* ***całkowalny****, jeśli* $\mathbb{E}\,\|X\| = \mathbb{E}\left[\int X^2(t)dt\right]^{1/2} < \infty$.

Zauważmy, że jeśli X jest L^2-elementem losowym, to odwzorowanie $\omega \mapsto \|X(\omega)\|$ jest mierzalne (gdyż odwzorowanie $L^2 \ni h \mapsto \|h\|$ jest ciągłe), więc można rozważać powyższą wartość oczekiwaną. Wprowadzimy teraz pojęcie wartością oczekiwnej dla L^2-elementu losowego.

Definicja 1.10 *Niech X będzie całkowalnym $L^2(T)$-elementem losowym. Jedyny element $\mu \in L^2$ taki, że $\langle y, \mu\rangle = \mathbb{E}\langle y, X\rangle$ dla dowolnego $y \in L^2$ nazywamy* ***wartością oczekiwaną (funkcją średniej)*** *elementu losowego X. Ozn. $\mathbb{E}X := \mu$.*

Aby uzasadnić powyższa definicję, zauważmy najpierw, że odwzorowanie $\omega \mapsto \langle y, X(\omega)\rangle$ jest zmienną losową na mocy Lematu 1.2. Odwzorwanie $f : L^2 \to \mathbb{R}$ zadane jako $f(y) := \mathbb{E}\langle y, X\rangle$ jest ograniczonym funkcjonałem liniowym na L^2. Liniowość wynika z liniowości wartości oczekiwanej oraz iloczynu skalarnego, zaś ograniczoność z nierówności Cauchy'ego-Schwarza:

$$|f(y)| = |\mathbb{E}\langle y, X\rangle| \leqslant \mathbb{E}|\langle y, X\rangle| \leqslant \mathbb{E}\|y\|\|X\| = \|y\| \cdot \mathbb{E}\left[\int X^2(t)dt\right]^{1/2} = \mathbb{E}\,\|X\| \cdot \|y\|.$$

Istnienie i jednoznaczność funkcji $\mu \in L^2$ takiej, że $f(y) = \langle y, \mu\rangle$ wynika teraz z twierdzenia Riesza o reprezentacji funkcjonału liniowego ciągłego na przestrzeni Hilberta. Wartość oczekiwana jest przemienna z operatorami ograniczonymi, tj. jeśli X jest całkowalna oraz $\Psi \in \mathcal{L}$, to $\Psi(X)$ także jest całkowalna (gdyż $\mathbb{E}\|\Psi(X)\| \leqslant \mathbb{E}\|\Psi\|\|X\| = \|\Psi\| \cdot \mathbb{E}\|X\| < \infty$) oraz mamy $\mathbb{E}\,\Psi(X) = \Psi(\mathbb{E}X)$. Istotnie, niech $\mu = \mathbb{E}X$ oraz $\nu = \mathbb{E}\,\Psi(X)$. Wówczas dla dowolnego $y \in L^2$ mamy

$$\langle y, \nu\rangle = \mathbb{E}\langle y,\, \Psi(X)\rangle = \mathbb{E}\langle\, \Psi^* y, X\rangle = \langle\, \Psi^* y, \mu\rangle = \langle y,\, \Psi\mu\rangle,$$

gdzie Ψ^* oznacza operator sprzężony do operatora Ψ. W takim razie $\Psi(\mathbb{E}X) = \Psi\mu = \nu = \mathbb{E}\,\Psi(X)$.
Jeśli dodatkowo założymy, że $\{X_t\}_{t\in T}$ jest mierzalnym procesem stochastycznym o całkowalnych z kwadratem trajektoriach (więc, z Lematu 1.3 zadaje L^2-element losowy) oraz takim, że $\int\limits_T |\mathbb{E}X(t)|^2 dt < \infty$, to funkcję średniej zadanego przez niego L^2-elementu losowego możemy znaleźć wprost jako $\mu(t) = \mathbb{E}X(t)$ dla prawie wszystkich $t \in T$. Po pierwsze zauważmy, że dodatkowe założenie gwarantuje, że funkcja $t \mapsto \mathbb{E}X(t)$ należy do $L^2(T)$ (w szczególności wartość oczekiwana $\mathbb{E}X(t)$ istnieje dla prawie każdego $t \in T$). Dla dowolnego $y \in L^2$ zachodzi (na mocy tw. Fubiniego, 1.2)

$$\int y(t)\mathbb{E}X(t)dt = \mathbb{E}\int y(t)X(t)dt = \mathbb{E}\langle y, X\rangle,$$

więc funkcja $t \mapsto EX(t)$ spełnia definicję bycia wartością oczekiwaną elementu losowego $\omega \mapsto X(\omega, \cdot)$, który jest jedyny. Na koniec zauważmy, że jeśli proces $\{X_t\}_{t\in T}$ spełnia $\mathbb{E}\|X\|^2 < \infty$ (założenie to będzie obowiązywało w dalszej części pracy), to spełnia także $\int\limits_T |\mathbb{E}X(t)|^2 dt < \infty$, gdyż (z nierówności Jensena oraz ponownie twierdzenia Fubiniego)

$$\int\limits_T |\mathbb{E}X(t)|^2 dt \leqslant \int\limits_T \left(\mathbb{E}|X(t)|\right)^2 dt \leqslant \int\limits_T \mathbb{E}(|X(t)|^2) dt = \mathbb{E}\int\limits_T |X(t)|^2 dt = \mathbb{E}\|X\|^2 < \infty.$$

statystyka: zmienne funkcjonalne?

Definicja 1.11 *[Bosq]*
Operator kowariancji *całkowalnej zmiennej funkcjonalnej X o funkcji średniej μ_X przyjmującej wartości w przestrzeni funkcyjnej L^2 spełniającej $\mathbb{E}\,\|X\|^2 < \infty$ definiujemy jako ograniczony operator liniowy według wzoru*

$$C_X(x) := \mathbb{E}[\langle X - \mu_X, x\rangle(X - \mu_X)], \quad x \in L^2.$$

Jeśli Y jest zmienną funkcjonalną o funkcji średniej μ_Y spełniającą powyższe warunki, wtedy operator kowariancji między zmiennymi X i Y (ang. cross-covariance operator) przedstawiamy jako

$$C_{X,Y}(x) := \mathbb{E}\Big[\langle X - \mu_X, x\rangle(Y - \mu_Y)\Big], \quad x \in L^2,$$

oraz

$$C_{Y,X}(x) := \mathbb{E}\Big[\langle Y - \mu_Y, x\rangle(X - \mu_X)\Big], \quad x \in L^2.$$

Uzasadnimy, że powyższe operatory są dobrze określonymi operatorem ograniczonymi na L^2. Wystarczy to zrobić dla $C_{X,Y}$, gdyż $C_X = C_{X,X}$. W pierwszej kolejności należy sprawdzić, że $Z := \langle X - \mu_X, x\rangle(Y - \mu_Y)$ jest L^2-elementem losowym. Z Lematu 1.2 wystarczy sprawdzić, że dla każdego $z \in L^2$ funkcja $\omega \mapsto \langle Z(\omega), z\rangle$ jest zmienną losową. Mamy

$$\langle Z, z\rangle = \langle\langle X - \mu_X, x\rangle(Y - \mu_Y), z\rangle = \langle X - \mu_X, x\rangle\langle Y - \mu_Y, z\rangle$$

$$= \langle X, x\rangle\langle Y, z\rangle - \langle X, x\rangle\langle \mu_Y, z\rangle - \langle \mu_X, x\rangle\langle Y, z\rangle + \langle \mu_X, x\rangle\langle \mu_Y, z\rangle.$$

Skoro X oraz Y są L^2-elementami losowymi, to $\langle X, x\rangle$ oraz $\langle Y, z\rangle$ są zmiennymi losowymi. Pozostałe wyrażenia są stałe, więc ostatecznie $\langle Z, z\rangle$ jest zmienną losową. Z jest całkowalny, gdyż (z nierówności Cauchy'ego-Schwarza)

$$\mathbb{E}\|Z\| = \mathbb{E}\|\langle X - \mu_X, x\rangle(Y - \mu_Y)\| \leqslant \mathbb{E}|\langle X - \mu_X, x\rangle| \cdot \|(Y - \mu_Y)\|$$

$$\leqslant \|x\|\mathbb{E}\|X - \mu_X\| \cdot \|(Y - \mu_Y)\| \leqslant \|x\|\mathbb{E}\Big((\|X\| + \|\mu_X\|)(\|Y\| + \|\mu_Y\|)\Big)$$

$$\leqslant \|x\|\Big(\mathbb{E}\|X\|\|Y\| + \|\mu_X\|\mathbb{E}\|Y\| + \|\mu_Y\|\mathbb{E}\|X\| + \|\mu_X\|\|\mu_Y\|\Big).$$

Skoro $\mathbb{E}\|X\|^2$, $\mathbb{E}\|Y\|^2 < \infty$, to także $\mathbb{E}\|X\|\|Y\|$, $\mathbb{E}\|X\|$, $\mathbb{E}\|Y\| < \infty$, więc zachodzi też $\mathbb{E}\|Z\| < \infty$. W takim razie, $C_{X,Y}(x) = \mathbb{E}Z$ istnieje i należy do $L^2(T)$. Powyższy rachunek pokazuje także, że operator $C_{X,Y}$ jest ograniczony, zaś jego liniowość wynika z liniowości iloczynu skalarnego oraz wartości oczekiwanej (liniowość wartości oczekiwanej dla L^2-elementów losowych wynika wprost z definicji).
Załóżmy teraz ponownie, że $\{X_t\}_{t\in T}$ jest mierzalnym procesem stochastycznym takim, że $\mathbb{E}\|X\|^2 < \infty$ z funkcją średniej $\mu \in L^2(T)$. Wówczas operator kowariancji jest operatorem całkowym, czyli

$$C_X(x)(t) = \int c(t,s)x(s)ds,$$

z jądrem całkowym $c(t,s)$ zdefiniowanym następująco:

$$c(t,s) = \mathbb{E}\Big[\big(X(t) - \mu(t)\big)\big(X(s) - \mu(s)\big)\Big].$$

Zauważmy, że mierzalność procesu implikuje, że funkcja $c(t,s)$ jest mierzalna na produkcie $T \times T$ (twierdzenie Fubiniego). Najpierw pokażemy, że jądro $c(t,s)$ podanej postaci rzeczywiście zadaje ograniczony operator liniowy na L^2. W tym celu, na mocy Lematu 1.1, wystarczy sprawdzić, że $c \in L^2(T \times T)$. Mamy

$$\int_T \int_T |c(t,s)|^2 dtds = \int_T \int_T \Big|\mathbb{E}\big(X(t) - \mu(t)\big)\big(X(s) - \mu(s)\big)\Big|^2 dtds$$

$$\leqslant \int_T \int_T \Big(\mathbb{E}|X(t)-\mu(t)||X(s)-\mu(s)|\Big)^2 dtds = (*).$$

Zauważmy, że dla prawie każdego $t \in T$ zmienna losowa $X(t)$ jest całkowalna z kwadratem, tzn. $X(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Wynika to z faktu, że

$$\int_T \mathbb{E}X^2(t)dt = \mathbb{E}\int_T X^2(t)dt = \mathbb{E}\|X\|^2 < \infty,$$

więc funkcja $t \mapsto \mathbb{E}X^2(t)$ musi być skończona prawie wszędzie. W takim razie także $X(t) - \mu(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i możemy skorzystać z nierówności Cauchy'ego-Schwarza:

$$(*) \leqslant \int_T \int_T \mathbb{E}|X(t)-\mu(t)|^2 \mathbb{E}|X(s)-\mu(s)|^2 dtds = \Big(\int_T \mathbb{E}|X(t)-\mu(t)|^2 dt\Big)^2$$

$$= \Big(\mathbb{E}\int_T |X(t)-\mu(t)|^2 dt\Big)^2 = \Big(\mathbb{E}\|X-\mu\|^2\Big)^2 \leqslant \Big(\mathbb{E}\|X\|^2 + \|\mu\|\mathbb{E}\|X\| + \|\mu\|^2\Big)^2 < \infty.$$

Pokażemy teraz, że przy powyższych założeniach operator kowariancji istotnie jest operatorem całkowym z jądrem c. Ponieważ mamy do czynienia z L^2-elementem losowym pochodzącym od mierzalnego procesu stochastycznego, to wartość oczekiwaną elementu losowego $Z := \langle X-\mu, x\rangle(X-\mu)$ możemy liczyć punktowo (por. uwaga po Definicji **??**), czyli dla $x \in L^2(T)$ zachodzi dla prawie wszystkich $t \in T$:

$$C_X(x)(t) = \mathbb{E}\langle X-\mu, x\rangle(X(t)-\mu(t)) = \mathbb{E}\Big[\int_T (X(s)-\mu(s))x(s)ds\Big](X(t)-\mu(t))$$

$$= \mathbb{E}\Big[\int_T (X(s)-\mu(s))(X(t)-\mu(t))x(s)ds\Big] = \int_T \Big[\mathbb{E}(X(s)-\mu(s))(X(t)-\mu(t))\Big]x(s)ds$$

$$= \int_T c(t,s)x(s)ds,$$

zatem funkcja c jest jądrem operatora C_X, który, jako operator całkowy, jest operatorem Hilberta-Schmidta (Uwaga 1.6). Oczywistym jest, że $c(t,s) = c(s,t)$ i mamy

$$\iint c(t,s)x(t)x(s)dtds = \iint \mathbb{E}\big[(X(t)-\mu(t))(X(s)-\mu(s))\big]x(t)x(s)dtds$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\int (X(t)-\mu(t))x(t)dt\right)^2\right] \geqslant 0.$$

Zatem operator kowariancji C_X jest symetryczny oraz nieujemnie określony (Twierdzenie 1.3). Z Uwagi 1.4 wynika, że posiada on reprezentację

$$C_X(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, v_j\rangle v_j, \quad x \in L^2,$$

gdzie λ_j są wartościami własnymi operatora C_X (lub zerami), a v_j odpowiadającymi im wektorami własnymi tworzącymi bazę ortonormalną przestrzeni $L^2(T)$. Co więcej, spełnione jest

$$\lambda_j = \lambda_j\|v_j\|^2 = \langle \lambda_j v_j, v_j\rangle = \langle C_X v_j, v_j\rangle = \langle \mathbb{E}\langle X-\mu, v_j\rangle(X-\mu), v_j\rangle =$$

$$= \int_T \mathbb{E}\Big[\Big(\int_T (X(s)-\mu(s))v_j(s)ds\Big)\Big(X(t)-\mu(t)\Big)\Big]v_j(t)dt$$

$$= \mathbb{E} \int_T \int_T \Big((X(s) - \mu(s)) v_j(s) \Big) \Big((X(t) - \mu(t)) v_j(t) \Big) ds dt$$

$$= \mathbb{E} \left[\left(\int (X(t) - \mu(t)) v_j(t) dt \right)^2 \right] = \mathbb{E} \langle X - \mu, v_j \rangle^2.$$

W takim razie wartości własne operatora kowariancji są nieujemne oraz tożsamość Parsevala pokazuje, że

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} \langle X - \mu, v_j \rangle^2 = \mathbb{E} \sum_{j=1}^{\infty} \langle X - \mu, v_j \rangle^2 = \mathbb{E} \|X - \mu\|^2 < \infty.$$

Widzimy zatem, że operator C_X jest operatorem nuklearnym.

[ROZKŁAD? zmienne niezależne? funkcjonał charakterystyczny? rozkład normalny?]

1.3 Estymacja średniej, funkcji kowariancji i operatora kowariancji. FPC

Naturalnym problemem pojawiającym się przy danych funkcjonalnych jest wnioskowanie o obiektach nieskończenie wymiarowych na podstawie skończonej próbki danych.
[WYGŁADZENIE OBSERWACJI X? bazy ortonormalne?! Reprezentacja $X_n(t) = \mu(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn} v_k$???]
Obserwujemy zatem N krzywych $X_1, ..., X_N$, które możemy traktować jako realizacje losowej funkcji X lub obserwacje zmiennej funkcjonalnej X z przestrzeni L^2.

Założenie 1.1 *Zakładamy, że $X_1, ..., X_N$ są niezależnymi zmiennymi losowymi w L^2 o jednakowym rozkładzie jak zmienna $X \in L^2$.*

Poszukiwanymi parametrami są funkcja średniej, funkcja kowariancji oraz operator kowariancji, określone następująco

funkcja średniej:	$\mu(t) = \mathbb{E}[X(t)]$;
funkcja kowariancji:	$c(t,s) = \mathbb{E}[(X(t) - \mu(t)(X(s) - \mu(s))]$;
operator kowariancji:	$C = \mathbb{E}[\langle (X - \mu), \cdot \rangle (X - \mu)]$.

Funkcję średniej μ estymujemy średnią z funkcji z próby

$$\widehat{\mu}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} X_n(t), \quad t \in T,$$

funkcję kowariancji ze wzoru

$$\hat{c}(t,s) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \big(X_n(t) - \hat{\mu}(t) \big) \big(X_n(s) - \hat{\mu}(s) \big), \quad t, s \in T,$$

zaś operator kowariancji estymujemy

$$\widehat{C}(x)(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \langle X_n - \hat{\mu}, x \rangle (X_n(t) - \hat{\mu}(t)), \quad x \in L^2, \ t \in T. \tag{1.5}$$

Zauważmy, że powyższa równość ilustruje wspomniany problem wnioskowania statystycznego o zmiennych funkcjonalnych. Estymator $\widehat{C}$ rzutuje L^2 na skończenie wymiarową podprzestrzeń generowaną przez $X_1, ..., X_N$, co ogranicza dokładność znalezienia obiektu nieskończenie wymiarowego posiadając skończoną próbę.

Niemniej jednak powyższe estymatory są dobrze określone, a estymator funkcji średniej jest estymatorem nieobciążonym. Dowody poprawności tych estymatorów można znaleźć w Rozdziale 2 [Horváth, Kokoszka].

W dalszej części pracy istotne będzie dla nas oszacowanie również wartości i funkcji własnych operatora kowariancji C. W szczególności interesować nas będzie p największych wartości własnych spełniających

$$\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_p > \lambda_{p+1} \tag{1.6}$$

oraz aby p pierwszych wartości własnych było niezerowych.
Funkcje własne zdefiniowane są przez równanie $Cv_j = \lambda_j v_j$. Zauważmy, że (z definicji operatora liniowego), jeśli v_j jest funkcją własną, to również av_j jest funkcją własną, gdzie $a \neq 0$ jest skalarem. Funkcje własne v_j są zazwyczaj normalizowane, tak aby $\|v_j\| = 1$.
[...]
Wartości i funkcje własne estymujemy według wzoru

$$\int \hat{c}(t,s)\hat{v}_j(s)ds = \hat{\lambda}_j\hat{v}_j(t), \quad j = 1, 2, ..., N.$$

Twierdzenie 1.4 *[Kokoszka et al. (2008)], [Bosq]*
Według powyższych oznaczeń, przy Założeniu 1.6 dla pewnego $p > 0$ spełnione są nierówności

$$\limsup_{N\to\infty} N\mathbb{E}\,\|v_k - \widehat{v}_k\|^2 < \infty, \quad \limsup_{N\to\infty} N\mathbb{E}\,\|u_j - \widehat{u}_j\|^2 < \infty,$$

dla $k \leqslant p$.

[to twierdzenie pojawia się również w rozdziale 2? Lemat 2.1]

[czy dodać *asymptotyczną normalność* funkcji własnych: $N^{1/2}(v_j - \hat{v_j})$ i $N^{1/2}(\lambda_j - \hat{\lambda_j})$? (na potrzeby rozdziału 2?)]
[...]
[EFPC: Interference... rozdz. 3] (ang. *empirical functional principal components, EFPC's*)

Rozdział 2

Test istotności w funkcjonalnym modelu liniowym

2.1 Funkcjonalny model liniowy

[WYRZUCIĆ TĘ CZĘŚĆ,zastąpić tylko odnośnikiem do literatury
] Standardowy model liniowy dla par zmiennych skalarnych Y_n i wektorów $\mathbf{X}_n$ (tworzonych przez p skalarnych zmiennych X_{ni}, $i = 1, ..., p$), przy założeniu $\mathbb{E}Y_n = 0$, $\mathbb{E}\mathbf{X}_n = \mathbf{0}$[1] (gdzie $n = 1, ..., N$), przyjmuje postać

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2.1}$$

gdzie
- $\mathbf{Y}$ jest wektorem zmiennych objaśnianych długości N,
- $\mathbf{X}$ jest macierzą zmiennych objaśniających wymiaru $N \times p$,
- $\boldsymbol{\beta}$ jest wektorem parametrów długości p,
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ jest wektorem błędów losowych długości N.

[Mając dane realizacje zmiennych $\mathbf{Y}$ oraz $\mathbf{X}$ poszukiwany wektor współczynników modelu $\boldsymbol{\beta}$ znajdujemy metodą najmniejszych kwadratów.]
Poza narzuconym już założeniem o scentrowanych zmiennych losowych $\mathbf{Y}$ i $\mathbf{X}$ (tu: jedynie aby uniknąć uwzględniania wyrazu wolnego[2]) najważniejszymi założeniami powyższego modelu liniowego są wymagania, aby zmienna losowa $\boldsymbol{\varepsilon}$ opisująca błąd modelu również spełniała $\mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0$ oraz aby nie była skorelowana ze zmiennymi X_n.

Rozważać będziemy odpowiednik modelu liniowego dla zmiennych funkcjonalnych. Dla uproszczenia (podobnie jak wyżej) zakładać będziemy, że zmienne objaśniane i objaśniające mają średnie równe zero. **Pełen model funkcjonalny** (ang. *fully functional model*) przyjmuje postać

$$Y_n = \Psi X_n + \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, ..., N, \tag{2.2}$$

gdzie krzywe Y_n, X_n oraz nieobserwowalny błąd ε_n należą do przestrzeni Hilberta $L^2(T)$. Operator $\Psi : L^2 \to L^2$ jest ograniczonym operatorem liniowym, który jest operatorem całkowym. Jądro całkowe $\psi(t, s)$ operatora Ψ jest funkcją całkowalną z kwadratem na $T \times T$. Zauważmy ponadto, że, na mocy Uwagi 1.6, operator Ψ jest operatorem Hiberta-Schmidta.
Równość (2.2) rozumiemy zatem następująco

$$Y_n(t) = \int \psi(t, s)X_n(s)ds + \varepsilon_n(t), \quad n = 1, 2, ..., N. \tag{2.3}$$

[1] przenieść tę uwagę/wytłumaczenie do przypisu?
[2] przenieść tę uwagę/wytłumaczenie do przypisu?

Jak i w przypadku standardowego modelu linowego, funkcjonalny model liniowy wymusza pewne założenia. Podobnie jak poprzednio, wymagamy, aby zmienna losowa ? ε_n opisująca błąd modelu spełniała $\mathbb{E}[\varepsilon_n] = 0$ oraz aby nie była skorelowana ze zmiennymi X_n.
["nieskorelowane zmienne" = (operator kowariancji = 0)?]
[inne założenia modelu? konsekwencje?]
[przykład - nawet jeśli nie zapisywać, to mieć w głowie]

Nazwa powyższego modelu wynika z faktu, że zarówno zmienne objaśniane Y_n jak i zmienne objaśniające X_n są zmiennymi funkcjonalnymi. Niewielkim uproszczeniem są pozostałe typy funkcjonalnych modeli liniowych, tj.

- model z odpowiedzią skalarną (ang. *scalar response model*) postaci

$$Y_n = \int \psi(s) X_n(s) ds + \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, ..., N,$$

  w którym tylko zmienne objaśniające X_n są zmiennymi funkcjonalnymi,
  [przykład - nawet jeśli nie zapisywać, to mieć w głowie]

- model z odpowiedzią funkcyjną (ang. *functional response model*) postaci

$$Y_n(t) = \psi(t) x_n + \varepsilon_n(t), \quad n = 1, 2, ..., N,$$

  w którym zmienne objaśniające x_n są deterministycznymi skalarami.
  [przykład - nawet jeśli nie zapisywać, to mieć w głowie]

Naturalnym problemem pojawiającym się przy funkcjonalnym modelu liniowym jest estymacja operatora Ψ należącego do nieskończenie wymiarowej przestrzeni na podstawie skończonej próbki danych. Możliwym jest znalezienie operatora, który daje idealne dopasowanie do danych (dla którego wszystkie różnice od próbki są równe zero), nie narzucając dodatkowych założeń, ale przypomina on biały szum i jego interpretacja jest często problemowa i nie funkcjonalna. Jednym ze sposobów na rozwiązanie tego problemu jest poszukiwanie operatora należącego do podprzestrzeni generowanej przez funkcje własne operatora kowariancji danych z próby, nazywane **empirycznymi funkcjonalnymi głównymi składowymi** (ang. *empirical functional principal components, EFPC's*), które zostały opisane w podrozdziale 1.3. Główne składowe odpowiadają istotnym czynnikom zmienności zmiennych, dobrze służą zatem do przybliżania ich wartości.
...
[sposób znalezienia Ψ]
Wykorzystany w dalszej części pracy pakiet *fda*, do programu *R-project*, do znalezienia operatora Ψ stosuje metodę najmniejszych kwadratów. Dlatego właśnie tę metodę przedstawiamy poniżej.

Niech $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ i $\{\theta_l\}_{l=1}^{\infty}$ będą pewnymi ustalonymi bazami, niekoniecznie ortonormalnymi, np. bazami Fouriera lub splajnowymi. Ponadto, niech funkcje η_k dobrze przybliżają funkcje X_n, a θ_l dobrze przybliżają Y_n. Nieznane jądro ψ estymujemy według postaci

$$\widehat{\psi}(t, s) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} p_{kl} \eta_k(s) \theta_l(t),$$

gdzie K i L są odpowiednio małymi liczbami wybranymi do wygładzenia przybliżenia X_n i Y_n. Podobnie jak w przypadku standardowego modelu linowego możemy znaleźć parametry p_{kl} metodą najmniejszych kwadratów przez minimalizację sumy kwadratów reszt

$$\sum_{n=1}^{N} \left\| Y_n - \int X_n(s) \widehat{\psi}(s, \cdot) \right\|^2.$$

[jak w pakiecie w R lub...] [WYGŁADZENIE OBSERWACJI X? bazy ortonormalne?! Reprezentacja $X_n(t) = \mu(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn} \upsilon_k$] (2.3)

2.2 Procedura testowa

Jednym z podstawowych testów na efektywność modelu jest test istotności zmiennych objaśniających. Jak w przypadku modelu liniowego dla zmiennych skalarnych (postaci (2.1)) testuje się hipotezę o zerowaniu się wektora $\boldsymbol{\beta}$, tak w przypadku funkcjonalnego modelu liniowego badamy zerowanie się operatora Ψ, tj. hipotezy

$$\mathrm{H}_0: \quad \Psi = 0 \quad \text{przeciw} \quad \mathrm{H}_A: \quad \Psi \neq 0.$$

Zauważmy, że przyjęcie H_0 nie oznacza braku związku między zmienną objaśnianą a objaśniającą. Prowadzi jedynie do stwierdzenia braku zależności liniowej.

Obserwujemy ciąg krzywych długości N. Zakładamy, że zmienna objaśniana Y_n, zmienne objaśniające X_n i błędy ε_n są scentrowanymi zmiennymi losowymi przyjmującymi wartości w przestrzeni Hilberta L^2. Oznaczając przez X (analogicznie Y) zmienną funkcjonalną o tym samym rozkładzie co X_n (Y_n) wprowadzamy operatory kowariancji
[ROZKŁAD]

$$C(x) = \mathbb{E}[\langle X, x\rangle\, X], \quad \Gamma(x) = \mathbb{E}[\langle Y, x\rangle\, Y], \quad \Delta(x) = \mathbb{E}[\langle X, x\rangle\, Y], \quad x \in L^2. \tag{2.4}$$

Przez $\widehat{C}$, $\widehat{\Gamma}$, $\widehat{\Delta}$ oznaczamy ich estymatory (zgodnie z (1.5)), tj.

$$\widehat{C}(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \langle X_n, x\rangle\, X_n, \quad \widehat{\Gamma}(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \langle Y_n, x\rangle\, Y_n, \quad \widehat{\Gamma}(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \langle X_n, x\rangle\, Y_n, \quad x \in L^2.$$

Definiujemy również wartości i wektory własne C i Γ

$$C(\upsilon_k) = \lambda_k \upsilon_k, \quad \Gamma(u_j) = \gamma_j u_j, \tag{2.5}$$

których estymatory będziemy oznaczać $(\widehat{\lambda}_k, \widehat{\upsilon}_k)$, $(\widehat{\gamma}_j, \widehat{u}_j)$.
Test obejmuje obcięcie powyższych operatorów na podprzestrzenie skończenie wymiarowe. Podprzestrzeń $\mathcal{V}_p = \mathrm{span}\{\upsilon_1, ..., \upsilon_p\}$ zawiera najlepsze przybliżenia X_n, które są liniowymi kombinacjami pierwszych p głównych składowych (ang. *Functional Principal Components, FPC*). Metodą głównych składowych wyznaczamy p największych wartości własnych operatora $\widehat{C}$ tak, że $\widehat{\mathcal{V}}_p = \mathrm{span}\{\widehat{\upsilon}_1, ..., \widehat{\upsilon}_p\}$ zawiera najlepsze przybliżenie X_n. Analogicznie $\mathcal{U}_q = \mathrm{span}\{u_1, ..., u_q\}$ zawiera przybliżenia $\mathrm{span}\{Y_1, ..., Y_N\}$.

Z ogólnej postaci funkcjonalnego modelu liniowego

$$Y = \Psi X + \varepsilon$$

możemy wyprowadzić kolejne równości

$$\begin{aligned} \langle X, x\rangle Y &= \langle X, x\rangle\, \Psi X + \langle X, x\rangle \varepsilon \\ \mathbb{E}\left[\langle X, x\rangle Y\right] &= \mathbb{E}\left[\langle X, x\rangle\, \Psi X\right] + \mathbb{E}\left[\langle X, x\rangle \varepsilon\right]. \end{aligned}$$

Korzystając z definicji operatorów C oraz Δ (2.4), założenia, że Ψ jest operatorem ograniczonym oraz z założenia o braku korelacji między X a ε zachodzi

$$\Delta = \Psi C.$$

W szczególności, prawdziwa jest równość

$$\Delta(\upsilon_k) = \Psi C(\upsilon_k).$$

Na mocy definicji funkcji własnych (2.5), dla $k \leqslant p$, mamy

$$\Psi(\upsilon_k) = \lambda_k^{-1}\Delta(\upsilon_k).$$

Stąd, ψ zeruje się na $\text{span}\{\upsilon_1, ..., \upsilon_p\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta(\upsilon_k) = 0$ dla każdego $k = 1, ..., p$. Zauważmy, że

$$\Delta(\upsilon_k) \approx \widehat{\Delta}(\upsilon_k) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \langle X_n, \upsilon_k\rangle Y_n.$$

Skoro zatem $\text{span}\{Y_1, ..., Y_N\}$ są dobrze aproksymowane przez $\mathcal{U}_q$, to możemy ograniczyć się do sprawdzania czy

$$\left\langle \widehat{\Delta}(\upsilon_k), u_j \right\rangle = 0, \quad k = 1, ..., p, \quad j = 1, ..., q. \tag{2.6}$$

Jeśli H_0 jest prawdziwa, to dla każdego $x \in \mathcal{V}_p$, $\psi(x)$ nie należy do $\mathcal{U}_q$. Co znaczy, że żadna funkcja Y_n nie może być opisana jako liniowa kombinacja X_n, $n = 1, ..., N$. Statystyka testowa powinna zatem sumować kwadraty iloczynów skalarnych (2.6). Twierdzenie 2.1 stanowi, że statystyka

$$\widehat{T}_N(p, q) = N\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} \widehat{\lambda}_k^{-1}\widehat{\gamma}_j^{-1}\left\langle \widehat{\Delta}(\widehat{\upsilon}_k), \widehat{u}_j \right\rangle^2, \tag{2.7}$$

zbiega według rozkładu do rozkładu χ^2 z pq stopniami swobody.
Przy czym

$$\left\langle \widehat{\Delta}(\widehat{\upsilon}_k), \widehat{u}_j \right\rangle = \left\langle \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \langle X_n, \widehat{\upsilon}_k\rangle Y_n, \widehat{u}_j \right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \langle X_n, \widehat{\upsilon}_k\rangle \langle Y_n, \widehat{u}_j\rangle$$

oraz $\lambda_k = \mathbb{E}\langle X, \upsilon_k\rangle^2$ i $\gamma_j = \mathbb{E}\langle Y, u_j\rangle^2$.

Uwaga 2.1 *Oczywistym jest, że jeśli odrzucamy H_0, to $\psi(\upsilon_k) \neq 0$ dla pewnego $k \geqslant 1$. Jednak ograniczając się do p największych wartości własnych, test jest skuteczny tylko jeśli ψ nie zanika na którymś wektorze υ_k, $k = 1, ..., p$. Takie ograniczenie jest intuicyjnie niegroźne, ponieważ test ma za zadanie sprawdzić czy główne źródła zmienności Y mogą być opisane przez główne źródła zmienności zmiennych X.*

Schemat przebiegu testu

1. Sprawdzamy założenie o liniowości metodą *FPC score predictor-response plots.*
2. Wybieramy liczbę głównych składowych p i q metodami *scree test* oraz *CPV.*
3. Wyliczamy wartość statystyki $\widehat{T}_N(p, q)$ (2.7).
4. Jeśli $\widehat{T}_N(p, q) > \chi^2_{pq}(1-\alpha)$, to odrzucamy hipotezę zerową o braku liniowej zależności. W przeciwnym razie nie mamy podstaw do odrzucenia H_0.

[rozwinąć i dopracować powyższe punkty]

Przedstawiony test można stosować już do prób wielkości 40, co pokazują autorzy pozycji [Horváth, Kokoszka] w Rozdziale 9.3.

2.3 Rozkład statystyki testowej

Założenie 2.1 *Trójka $(Y_n, X_n, \varepsilon_n)$ tworzy ciąg niezależnych zmiennych funkcjonalnych o jednakowym rozkładzie, takich że ε_n jest niezależne od X_n oraz*

$$\mathbb{E}X_n = 0, \quad \mathbb{E}\varepsilon_n = 0,$$

$$\mathbb{E}\|X_n\|^4 < \infty \quad i \quad \mathbb{E}\|\varepsilon_n\|^4 < \infty.$$

Założenie 2.2 *Wartości własne operatorów C oraz Γ spełniają, dla pewnych $p > 0$ i $q > 0$*

$$\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_p > \lambda_{p+1}, \quad \gamma_1 > \gamma_2 > ... > \gamma_q > \gamma_{q+1}.$$

Twierdzenie 2.1 *[Kokoszka et al. (2008)], [Horváth, Kokoszka]*
Jeśli spełnione są powyższe Założenia 2.1, 2.2 oraz H_0, to $\widehat{T}_N(p,q) \xrightarrow{d} \chi^2_{pq}$ przy $N \to \infty$.

Twierdzenie 2.2 *[Kokoszka et al. (2008)], [Horváth, Kokoszka]*
Przy Założeniach 2.1, 2.2 oraz jeśli $\langle \psi(\upsilon_k), u_j \rangle \neq 0$ dla $k \leqslant p$ oraz $j \leqslant q$, to $\widehat{T}_N(p,q) \xrightarrow{P} \infty$ przy $N \to \infty$.

Dowody powyższych twierdzeń rozbijemy w krokach na kolejne lematy i wnioski. ...
Najpierw jednak zauważmy, że konsekwencją prawdziwości H_0 i przyjęcia modelu postaci $Y_n = \Psi X_n + \varepsilon_n$ jest równość $Y_n = \varepsilon_n$. ?

[WCZEŚNIEJ - w podrozdziale 1.3 ?

Lemat 2.1 *[Kokoszka et al. (2008)], [Bosq]*
Według oznaczeń podrozdziału 1.3, przy Założeniach 2.1, 2.2 spełnione są nierówności

$$\limsup_{N\to\infty} N\mathbb{E}\left\|\upsilon_k - \widehat{\upsilon}_k\right\|^2 < \infty, \quad \limsup_{N\to\infty} N\mathbb{E}\left\|u_j - \widehat{u}_j\right\|^2 < \infty,$$

$$\limsup_{N\to\infty} N\mathbb{E}\left[\left|\gamma_k - \widehat{\gamma}_k\right|^2\right] < \infty, \quad \limsup_{N\to\infty} N\mathbb{E}\left[\left|\lambda_j - \widehat{\lambda}_j\right|^2\right] < \infty,$$

dla $k \leqslant p$ oraz $j \leqslant q$.

]
[

Twierdzenie 2.3 *Centralne Twierdzenie Graniczne [Horváth, Kokoszka], [Bosq]*
Niech $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem zmiennych funkcjonalnych o jednakowym rozkładzie przyjmujących wartości w ośrodkowej przestrzeni Hilberta. Jeśli $\mathbb{E}\|X_1\|^2 < \infty$, $\mathbb{E}X_1 = \mu$ i $C_{X_1} = C$, wtedy

$$N^{-1/2}\sum_{n=1}^{N} X_n \xrightarrow{d} \mathcal{N},$$

gdzie $\mathcal{N} \sim \mathcal{N}(0, C)$.

rozkład normalny zmiennej funkcjonalnej?]

Lemat 2.2 *[Kokoszka et al. (2008)], [Horváth, Kokoszka]*
Jeśli spełnione są Założenia 2.1, 2.2 i H_0, to dla $k \leqslant p$, $j \leqslant q$

$$\sqrt{N}\langle \widehat{\Delta}\upsilon_k, u_j \rangle \xrightarrow{d} \eta_{kj}\sqrt{\gamma_k \lambda_j}, \tag{2.8}$$

gdzie $\eta_{kj} \sim N(0,1)$. Przy czym $\eta_{k,j}$ oraz $\eta_{k'j'}$ są niezależne dla $(k,j) \neq (k',j')$.

Dowód. Przy H_0

$$\sqrt{N}\langle\widehat{\Delta}\upsilon_k, u_j\rangle = N^{-1/2}\sum_{n=1}^{N}\langle X_n, \upsilon_k\rangle\langle\varepsilon_n, u_j\rangle,$$

gdzie elementy pod sumą po prawej stronie powyższej równości mają średnie 0 i wariancje równe $\lambda_k\gamma_j$, co na mocy CTG (Twierdzenie 2.3) kończy dowód (2.8). [skalarne CTG?] Aby udowodnić niezależność między η_{kj} i $\eta_{k'j'}$ dla $(k,j) \neq (k',j')$, wystarczy pokazać, że $\sqrt{N}(\widehat{\Delta}(\upsilon_k), u_j)$ i $\sqrt{N}(\widehat{\Delta}(\upsilon_{k'}), u_{j'})$ są nieskorelowane. Mamy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sqrt{N}\langle\widehat{\Delta}(\upsilon_k), u_j\rangle, \sqrt{N}\langle\widehat{\Delta}(\upsilon_{k'}), u_{j'}\rangle\right] \\
&= N\mathbb{E}\left[\left\langle\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\langle X_n, \upsilon_k\rangle Y_n, u_j\right\rangle, \left\langle\frac{1}{N}\sum_{n'=1}^{N}\langle X_{n'}, \upsilon_{k'}\rangle Y_{n'}, u_{j'}\right\rangle\right] \\
&= N\mathbb{E}\left[\left\langle\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\langle X_n, \upsilon_k\rangle(\Psi X_n + \varepsilon_n), u_j\right\rangle, \left\langle\frac{1}{N}\sum_{n'=1}^{N}\langle X_{n'}, \upsilon_{k'}\rangle(\Psi X_{n'} + \varepsilon_{n'}), u_{j'}\right\rangle\right] \\
&\overset{H_0}{=} \frac{1}{N}\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N}\langle X_n, \upsilon_k\rangle\langle\varepsilon_n, u_j\rangle\sum_{n'=1}^{N}\langle X_{n'}, \upsilon_{k'}\rangle\langle\varepsilon_{n'}, u_{j'}\rangle\right] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n,n'=1}^{N}\mathbb{E}\left[\langle X_n, \upsilon_k\rangle\langle X_{n'}, \upsilon_{k'}\rangle\right]\mathbb{E}\left[\langle\varepsilon_n, u_j\rangle\langle\varepsilon_{n'}, u_{j'}\rangle\right] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}\left[\langle X_n, \upsilon_k\rangle\langle X_n, \upsilon_{k'}\rangle\right]\mathbb{E}\left[\langle\varepsilon_n, u_j\rangle\langle\varepsilon_n, u_{j'}\rangle\right] \\
&= \langle C(\upsilon_k), \upsilon_{k'}\rangle\langle\Gamma u_j, u_{j'}\rangle = \gamma_k\delta_{kk'}\gamma_j\delta_{jj'}.
\end{aligned}$$

[zastanowić się nad tym/dopracować] □

Przypomnijmy, że norma Hilberta-Schmidta operatora Hilberta-Schmidta S zdefiniowana jest wzorem $\|S\|_{\mathcal{S}}^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\|S(e_j)\|^2$, gdzie ciąg $\{e_1, e_2, ...\}$ stanowi bazę ortonormalną oraz, że norma ta jest nie mniejsza od normy operatorowej, tj. $\|S\|_{\mathcal{L}}^2 \leqslant \|S\|_{\mathcal{S}}^2$.

Lemat 2.3 *[Kokoszka et al. (2008)], [Horváth, Kokoszka]*
Przy założeniach Twierdzenia 2.1 mamy

$$\mathbb{E}\left\|\widehat{\Delta}\right\|_{\mathcal{S}}^2 = N^{-1}\mathbb{E}\|X\|^2\,\mathbb{E}\|\varepsilon_1\|^2.$$

Dowód. Zauważmy, że

$$\left\|\widehat{\Delta}(e_j)\right\|^2 = N^{-2}\sum_{n,n'=1}^{N}\langle X_n, e_j\rangle\langle X_{n'}, e_j\rangle\langle Y_n, Y_{n'}\rangle.$$

Stąd, przy założeniu H_0, mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\|\widehat{\Delta}\right\|_{\mathcal{S}}^2 &= N^{-2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n,n'=1}^{N}\mathbb{E}[\langle X_n, e_j\rangle\langle X_{n'}, e_j\rangle\langle\varepsilon_n, \varepsilon_{n'}\rangle] \\
&= N^{-2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}\langle X_n, e_j\rangle^2\,\mathbb{E}\|\varepsilon_n\|^2 \\
&= N^{-1}\mathbb{E}\|\varepsilon_1\|^2\sum_{j=1}^{\infty}\langle X, e_j\rangle^2 = N^{-1}\mathbb{E}\|\varepsilon_1\|^2\|X\|^2.
\end{aligned}$$

□

Lemat 2.4 *[Kokoszka et al. (2008)], [Horváth, Kokoszka]*
Załóżmy, że $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ *oraz* $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ *są ciągami elementów losowych z przestrzeni Hilberta takich, że* $\|U_n\| \xrightarrow{P} 0$ *i* $\|V_n\| = O_P(1)$*, tj.*

$$\lim_{C\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(\|V_n\| > C) = 0.$$

Wtedy zachodzi

$$\langle U_n, V_n\rangle \xrightarrow{P} 0.$$

Dowód. Prawdziwość lematu wynika z analogicznej własności dla losowych ciągów liczb rzeczywistych i nierówności $|\langle U_n, V_n\rangle| \leqslant \|U_n\|\|V_n\|$.
[może lepiej przytoczyć skalarną wersję?] □

Lemat 2.5 *[Kokoszka et al. (2008)], [Horváth, Kokoszka]*
Przy założeniach Twierdzenia 2.1, dla $k \leqslant p$*,* $j \leqslant q$ *zachodzi*

$$\sqrt{N}\langle\widehat{\Delta}(\hat{v}_k), \hat{u}_j\rangle \xrightarrow{d} \eta_{kj}\sqrt{\lambda_k\gamma_j},$$

gdzie η_{kj} *definiowane są jak w Lemacie 2.2.*

Dowód. Na mocy Lematu 2.2, wystarczy pokazać, że

$$\sqrt{N}\langle\widehat{\Delta}(\hat{v}_k), \hat{u}_j\rangle - \sqrt{N}\langle\widehat{\Delta}(v_k), u_j\rangle \xrightarrow{P} 0. \tag{2.9}$$

Równość (2.9) wynika z nierówności trójkąta oraz z

$$\sqrt{N}\langle\widehat{\Delta}(\hat{v}_k), \hat{u}_j - u_j\rangle \xrightarrow{P} 0 \tag{2.10}$$

i

$$\sqrt{N}\langle\widehat{\Delta}(\hat{v}_k - v_k), \hat{u}_j\rangle \xrightarrow{P} 0. \tag{2.11}$$

Aby udowodnić równość (2.10), zauważmy, że z Lematu 2.1 mamy $\sqrt{N}(\hat{u}_j - u_j) = O_P(1)$ oraz, na mocy Lematu 2.3, $\mathbb{E}\|\widehat{\Delta}(v_k)\| \leqslant \mathbb{E}\|\widehat{\Delta}\|_{\mathcal{S}} = O(N^{-1/2})$. Stąd równość (2.10) wynika z Lematu 2.4.
Aby wykorzystać takie samo uzasadnienie dla (2.11) (skorzystać z Lematu 2.1), zauważmy, że

$$\sqrt{N}\langle\widehat{\Delta}(\hat{v}_k - v_k), \hat{u}_j\rangle = \sqrt{N}\langle\hat{v}_k - v_), \widetilde{\Delta}(\hat{u}_j)\rangle,$$

gdzie $\widetilde{\Delta}(x) = N^{-1}\sum_{n=1}^{N}\langle Y_n, x\rangle X_n$. Lemat 2.3 stanowi, że przy założeniu H_0 mamy $\mathbb{E}\|\widetilde{\Delta}\|_{\mathcal{S}} = \mathbb{E}\|\widehat{\Delta}\|_{\mathcal{S}}$, co kończy dowód.
[na pewno?] □

Z Lematu 2.1, $\hat{\lambda}_k \xrightarrow{P} \lambda_k$ oraz $\hat{\gamma}_j \xrightarrow{P} \gamma_j$.

Wniosek 2.1 *[Kokoszka et al. (2008)], [Horváth, Kokoszka]*
Przy założeniach Twierdzenia 2.1, dla $j \leqslant q$*,* $k \leqslant p$ *zachodzi*

$$\sqrt{N}\left\langle\hat{\lambda}_k^{-1/2}\hat{\gamma}_j^{-1/2}\widehat{\Delta}(\hat{v}_k), \hat{u}_j\right\rangle \xrightarrow{d} \eta_{kj},$$

gdzie η_{kj} *definiowane są jak w Lemacie 2.2.*

Dowód Twierdzenia 2.1 [...]

Lemat 2.6 *[Kokoszka et al. (2008)], [Horváth, Kokoszka]*
Jeśli $\{Y_n\}_{n\geqslant 1}$ *są zmiennymi funkcjonalnymi o jednakowych rozkładach, to zachodzi*

$$\mathbb{E}\|\widehat{\Delta}\| \leqslant \mathbb{E}\|Y\|^2.$$

Dowód. Dla dowolnego $u \in L^2$ takiego, że $\|u\| \leqslant 1$, mamy

$$\|\widehat{\Delta}u\| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |\langle Y_n, u\rangle| \|Y_n\| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \|Y_n\|^2.$$

Co ze względu na założenie, że Y_n mają jednakowy rozkład, jest równoważne tezie lematu. □

Twierdzenie 2.4 *Mocne Prawo Wielkich Liczb [Bosq]*
Niech $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem zmiennych funkcjonalnych o jednakowym rozkładzie przyjmujących wartości w ośrodkowej przestrzeni Hilberta takich, że $\mathbb{E}\|X_n\|^2 < \infty$. Niech $m = \mathbb{E}X_n$, wtedy mamy

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n \xrightarrow{p.n.} m.$$

Lemat 2.7 *[Kokoszka et al. (2008)], [Horváth, Kokoszka]*
Jeżeli spełnione jest Założenie 2.1, to dla dowolnych funkcji $v, u \in L^2$

$$\langle \widehat{\Delta}(v), u\rangle \xrightarrow{P} \langle \Delta(v), u\rangle.$$

Dowód. Tezę otrzymujemy korzystając z Prawa Wielkich Liczb zauważając

$$\langle \widehat{\Delta}(v), u\rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \langle X_n, v\rangle\langle Y_n, u\rangle$$

oraz

$$\mathbb{E}[\langle X_n, v\rangle\langle Y_n, u\rangle] = \mathbb{E}[\langle\langle X_n, v\rangle Y_n, u\rangle] = \langle \Delta(v), u\rangle.$$

□

Lemat 2.8 *[Kokoszka et al. (2008)], [Horváth, Kokoszka]*
Jeżeli spełnione są Założenia 2.1 oraz 2.2, to

$$\langle \widehat{\Delta}(\hat{v}_k), \hat{u}_j\rangle \xrightarrow{P} \langle \Delta(v_k), u_j\rangle, \quad \text{dla } k \leqslant p,\ j \leqslant q.$$

Dowód. Na mocy Lematu 2.7 wystarczy pokazać

$$\langle \widehat{\Delta}(v_k), \hat{u}_j - u_j\rangle \xrightarrow{P} 0$$

i

$$\langle \widehat{\Delta}(\hat{v}_k) - \widehat{\Delta}(v_k), \hat{u}_j\rangle \xrightarrow{P} 0.$$

Relacje te wynikają z Lematów 2.4, 2.1 [na pewno?] oraz 2.6. □

Dowód Twierdzenia 2.2. Wprowadźmy oznaczenie

$$\widehat{S}_N(p,q) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} \hat{\lambda}_k^{-1}\hat{\gamma}_j^{-1}\langle \widehat{\Delta}(\hat{v}_k), \hat{u}_j\rangle^2.$$

Na mocy Lematu 2.8 oraz Lematu 2.1 [na pewno?], zachodzi

$$\widehat{S}_N(p,q) \xrightarrow{P} S(p,q) > 0.$$

Stąd,

$$\widehat{T}_N(p,q) = N\widehat{S}_N(p,q) \xrightarrow{P} \infty.$$

□

[...?]

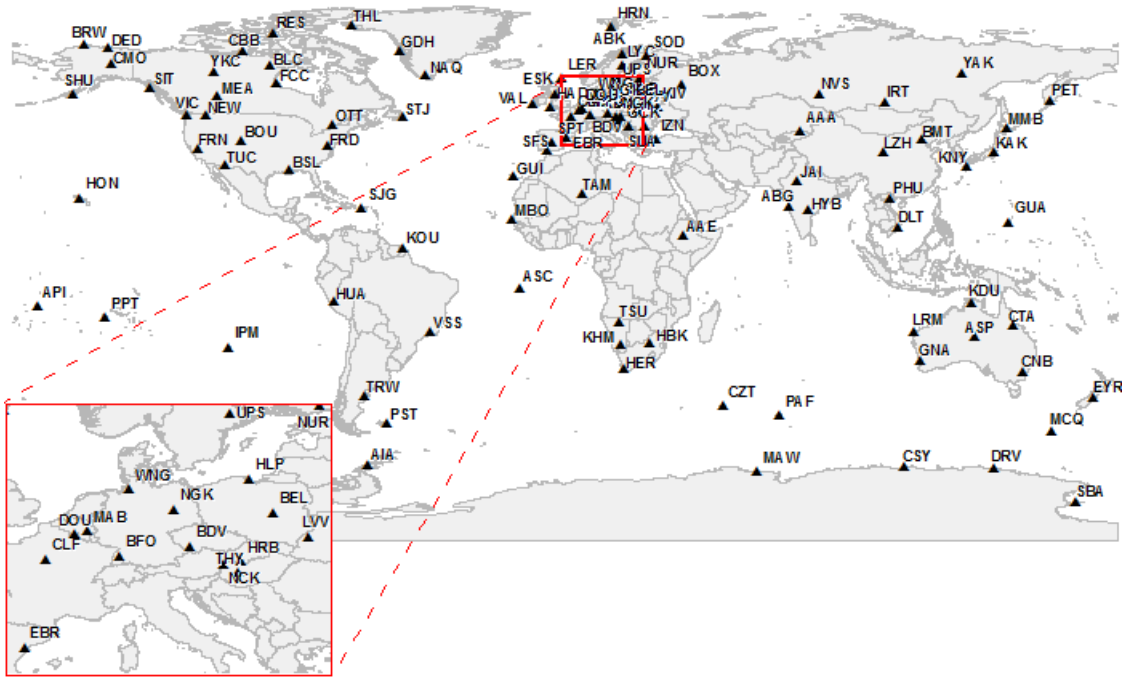
Rozdział 3

Przykład zastosowania

[Co to za dane? Co to będzie za model?]

3.1 Opis danych magnetometrycznych

Podobnie jak w artykule [Kokoszka et al. (2008)] oraz książce [Horváth, Kokoszka], zastosujemy przedstawiony test do/dla? modelu stworzonego na podstawie danych opisujących natężenie pola magnetycznego Ziemi. Takie dane zbierane są przez stacje geofizyczne i publikowane są w ramach międzynarodowego programu INTERMAGNET na stronie internetowej projektu [Intermagnet]. Do programu należy obecnie 129 naziemnych obserwatoriów, w tym dwie stacje znajdujące się w Polsce (mapa stacji na Rysunku 3.1).



Rysunek 3.1: Mapa stacji geofizycznych należących do programu INTERMAGNET, źródło: strona internetowa projektu [Intermagnet]

[odnośnik do rysunku z przykładowymi obserwacjami]
[...](poziome i pionowe intensywności?)
Magnetometer data...
Mianem **pogody kosmicznej** nazywamy charakteryzację zjawisk w przestrzeni między-

planetarnej oddziałujących na atmosferę ziemską. Głównym źródłem jej zmian są wahania aktywności słonecznej. Słońce stale emituje naładowane cząsteczki, które docierają do Ziemi w postaci tzw. wiatrów słonecznych i mogą powodować pewne anomalie w magnetosferze i jonosferze ziemskiej. ...zorze polarne + subburze (substorms),...
Pogoda kosmiczna wpływa na działanie satelitów, promów kosmicznych, komunikację radiową i telefoniczną, loty samolotowe, na funkcjonowanie elektrowni, możliwe że także na klimat na Ziemi oraz na życie zwierząt oraz roślin. Zatem obserwacja i zrozumienie jej procesów, w tym subburz, jest niezwykle istotne do kontrolowania i przewidywania jej skutków.
Celem testu jest zbadanie, czy zmiany w polu magnetycznym na wysokich szerokościach geograficznych mają wpływ na pole na średnich szerokościach geograficznych, ...
Dane o polu magnetycznym, generowanym przez prąd elektryczny przepływający przez ziemską magnetosferę i jonosferę, rejestrowane są za pomocą tzw. magnetometru. To naziemne urządzenie odczytuje kilka składowych natężenia pola magnetycznego, nas interesować będzie składowa horyzontalna (H, *Horizontal*), która wskazuje na wielkość natężenia pola magnetycznego skierowanego w stronę magnetycznej północy. ...
[...]
Ze strony programu INTERMAGNET można pobrać dane dokładne: w odstępach jednosekundowych lub uproszczone: w odstępach jednominutowych (obserwacja jest średnią z 60 sekund). W pracy wykorzystano dane uproszczone, mamy zatem 1440 punktów każdego dnia, przypisanych według czasu centralnego, które posłużą nam do stworzenia danych funkcjonalnych. Tym sposobem jeden dzień stanie się jedną obserwacją.
Korzystając z dostępnego pakietu *fda* ([R: fda 1])...
scentrowanie danych?
założenia
Ze względu na częściowe braki danych w obserwacjach musieliśmy przyjąć pewne założenia odnośnie ich traktowania. W przypadku niektórych dni brakuje tylko jednej czy dwóch obserwacji, niekiedy jednak luki w zapisie danych dotyczą przynajmniej kilku godzin. Odsetek dni z brakami danych jest na tyle duży, że nie chcemy odrzucać bezwzględnie wszystkich dni z niedoborem danych. Przyjmujemy zatem następujące podejście: w przypadku braku więcej niż 10 wartości (10 minut) dzień zostanie odrzucony z analiz, jeśli jednak brakuje nie więcej niż 10 punktów w ciągu dnia obserwacje zostaną zachowane przy dopełnieniu braków danych ostatnią znaną wartością (w przypadku braku wartości początkowych bierzemy pierwszą znaną wartość).

3.2 Ameryka Północna (Kanada)

W kręgu zainteresowań autorów artykułu [Kokoszka et al. (2008)] leżą dane pochodzące z obserwatoriów Ameryki Północnej, zaczniemy zatem od analizy podobnych danych.

Rozważać będziemy okres od 1 stycznia do 30 czerwca 2001 roku...[do sierpnia?]
[podać liczbę braków danych - liczbę wykluczeń oraz nadpisanych wartości]
[wskazanie obserwatoriów z podziałem na wysokie, średnie i niskie szerokości geograficzne - wraz z dokładnymi szerokościami]
[WYKRESY - przykład danych] [jednostka!? nT]
[...]

[do opracowania: punkt po punkcie według opisu procedury testowej w rozdziale 2]
[do opracowania: kod w R!]
[pytanie: wykonać to samo dla nowszych danych?]

3.3 Europa (Polska)

Do programu INTERMAGNET należą także dwie polskie stacje geofizyczne: obserwatorium w Belsku oraz obserwatorium na Helu. Przeprowadzimy zatem podobna j.w. analizę dla Europy. Wybraliśmy ? obserwatoriów:
[wskazanie obserwatoriów z podziałem na wysokie, średnie i niskie szerokości geograficzne - wraz z dokładnymi szerokościami]
Do analiz wykorzystamy najświeższe dane: od 1 stycznia do ? 2015 roku...
[podać liczbę braków danych - liczbę wykluczeń oraz nadpisanych wartości]
[...]

Dodatek A

Kod w R

Poniżej załączony jest kod napisany w języku R wykorzystany w przedstawionym wyżej przykładzie.
[zaktualizuj KOD]

```
#---------------------------------------------------------------------------
# WCZYTYWANIE DANYCH BEZPOŚREDNIO Z PLIKÓW .min
#---------------------------------------------------------------------------
# BOU - STYCZEŃ
BOU.1.1<-t(matrix(as.numeric(array(scan(file="D:/.../bou20010101dmin.min",
what="list", skip=26), dim=c(7,1440))[3:4,]),nrow=2,ncol=1440))
BOU.1.2<-t(matrix(as.numeric(array(scan(file="D:/.../bou20010102dmin.min",
what="list", skip=26), dim=c(7,1440))[3:4,]),nrow=2,ncol=1440))
...
#
BOU.1<-cbind(BOU.1.1[,2],BOU.1.2[,2],...,BOU.1.30[,2],BOU.1.31[,2])
...
#---------------------------------------------------------------------------
# PREZENTACJA DANYCH
#---------------------------------------------------------------------------
t<-1:1440
plot(x=t,y=BOU.1.1[,2],type="l")
...
#---------------------------------------------------------------------------
# USUNIĘCIE BRAKÓW DANYCH
#---------------------------------------------------------------------------
# braki danych = 99999 lub 88888
#
# ZLICZANIE BRAKÓW DANYCH
zlicz.braki<-function(zbior){
braki<<-c()
n<-dim(zbior)
for (i in 1:n[2]){
braki<<-c(braki,length(which(zbior[,i]>80000)))
}
braki
}
zlicz.braki(BOU.1)
length(which(braki>0))
```

```
# ZAMIANA ZBIORU - USUNIĘCIE/PODMIANA BRAKÓW DANYCH
zmien.braki<-function(zbior){
n<-dim(zbior)
temp<<-zbior
braki<<-c()
for (i in 1:30){
b1<<-which(zbior[,i]>80000)
b2<<-length(b1)
braki<<-c(braki,b2)
if (b2>0 & b2<11){
if(b1[1]==1 & b2==1){
temp[1,i]<<-temp[2,i]
}else if(b1[1]==1 & b2>1 & b1[2]!=2){
temp[1,i]<<-temp[2,i]
for (j in b1[-1]) temp[j,i]<-temp[j-1,i]
}else if(b1[1]==1 & b1[2]==2){
pierwsza<<-which(b1[-b2]!=b1[-1]-1)
if (length(pierwsza)<1){ pierwsza<<-b1[b2]
temp[1:pierwsza,i]<<-temp[pierwsza+1,i]
}else{ temp[1:pierwsza[1],i]<-temp[pierwsza[1]+1,i]
for (j in b1[pierwsza[1]+1:(b2-pierwsza[1])]){ temp[j,i]<-temp[j-1,i]} }
}else if(b1[1]>1){ for (j in b1) temp[j,i]<-temp[j-1,i]
}
}
}
temp<<-temp[,-which(braki>10)]
}

zmien.braki(BOU.1)

# Magnetic Local Time (MLT), Magnetic Longitude (MLON), Magnetic Latitude (MLAT)
```

[zaktualizuj KOD]

Bibliografia

[Bosq] D. Bosq, *Linear Processes in Function Spaces*, Springer 2000.

[Ferraty, Vieu] F. Ferraty, P. Vieu, *Nonparametric Functional Data Analysis. Theory and practice*, Springer 2006.

[Horváth, Kokoszka] L. Horváth, P. Kokoszka, *Interference for Functional Data with Applications*, Springer 2012.

[Hsing, Eubank] T. Hsing, R. Eubank, *Theoretical Foundations of Functional Data Analysis, with an Introduction to Linear Operators*, Wiley 2015.

[Intermagnet] INTERMAGNET `http://www.intermagnet.org/index-eng.php`

[Johnson, Wichern] R.D. Johnson, D.W. Wichern, *Applied Multivatiate Statistical Analysis (6th edition)*, Pearson 2007.

[Kokoszka et al. (2008)] P. Kokoszka, I. Maslova, J. Sojka, L. Zhu, *Testing for lack of dependence in the functional linear model*, Canadian Journal of Statistics, 36 (2008), 207-222.

[Maslova et al. (2010)] I. Maslova, P. Kokoszk, J. Sojka and L. Zhu, *Statistical significance testing for the association of magnetometer records at high–, mid– and low latitudes during substorm days*. Planetary and Space Science, 58 (2010), 437–445.

[R: fda 1] J.O. Ramsay, H. Wickham, S. Graves, G. Hooker, *Package 'fda'*, wersja 2.4.4. On-line: `https://cran.r-project.org/web/packages/fda/fda.pdf`

[R: fda 2] J.O. Ramsay, G. Hooker and S. Graves, *Functional Data Analysis with R and Matlab*, Springer 2009.

[Ramsay, Silverman] J.O. Ramsay, B.W. Silverman, *Functional Data Analysis*, Springer 2005.

[Wojtaszczyk] P. Wojtaszczyk, *Banach Spaces For Analysts*. Cambridge University Press 1991, 86-87.

[SuperMAG1] IMAGE Chain: Tanskanen, E.I. (2009), A comprehensive high-throughput analysis of substorms observed by IMAGE magnetometer network: Years 1993-2003 examined, 114, A05204, doi:10.1029/2008JA013682.

[SuperMAG2] MACCS: Engebretson, M. J., W. J. Hughes, J. L. Alford, E. Zesta, L. J. Cahill, Jr., R. L. Arnoldy, and G. D. Reeves (1995), Magnetometer array for cusp and cleft studies observations of the spatial extent of broadband ULF magnetic pulsations at cusp/cleft latitudes , J. Geophys. Res., 100, 19371-19386, doi:10.1029/95JA00768.

[SuperMAG3] MAGDAS / 210 Chain: Yumoto, K,. and the CPMN Group (2001), Characteristics of Pi 2 magnetic pulsations observed at the CPMN stations: A review of the STEP results, Earth Planets Space, 53, 981-992.

[SuperMAG4] SuperMAG: Gjerloev, J. W. (2012), The SuperMAG data processing technique, J. Geophys. Res., 117 , A09213, doi:10.1029/2012JA017683.

[SuperMAG5] McMAC Chain: Chi, P. J., M. J. Engebretson, M. B. Moldwin, C. T. Russell, I. R. Mann, M. R. Hairston, M. Reno, J. Goldstein, L. I. Winkler, J. L. Cruz-Abeyro, D.-H. Lee, K.Yumoto, R. Dalrymple, B. Chen, and J. P. Gibson (2013), Sounding of the plasmasphere by Mid-continent MAgnetoseismic Chain magnetometers, J. Geophys. Res. Space Physics, 118, doi:10.1002/jgra.50274.

[SuperMAG6] EMMA: Lichtenberger J., M. Clilverd, B. Heilig, M. Vellante, J. Manninen, C. Rodger, A. Collier, A. Jørgensen, J. Reda, R. Holzworth, and R. Friedel (2013), The plasmasphere during a space weather event: first results from the PLASMON project, J. Space Weather Space Clim., 3, A23 (`www.swsc-journal.org/articles/swsc/pdf/2013/01/swsc120062.pdf`).