Politechnika Gdańska
Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej

Anna Wieżel
Nr albumu: 132540

Funkcjonalne Modele Liniowe

Praca magisterska
na kierunku MATEMATYKA
w zakresie MATEMATYKA FINANSOWA

Praca wykonana pod kierunkiem
dra hab. Karola Dziedziula
Katedra Analizy Matematycznej i Numerycznej

Wrzesień 2015

Oświadczenie kierujcego prac

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje si do przedstawienia jej w postpowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data Podpis kierujcego prac

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowizujcymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur zwizanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załczon wersj elektroniczn.

Data Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

The paper's motivation is to contribute to popularization of mathematical statistics on infinite dimensional function Hilbert spaces. The author presents the fully functional linear model in form $Y = \beta X + \varepsilon$ and its significance test proposed by Kokoszka et al. The test detects nullity of operator β which implies the lack of linear dependence between X and Y. Using the principal component decomposition it is concluded with test statistic convergent by distribution to chi-squared.
The test is further used for magnetic field data collected in some stations in different latitudes. The results show linear dependence between horizontal intensities of the magnetic field in mid- and low-latitude stations with high-latitude station data with a day or two delay but they contradict the linear dependence between data with more than a two-day lag.

Słowa kluczowe

analiza danych funkcjonalnych, dane funkcjonalne, funkcjonalny model liniowy, test istotności

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka
11.2 Statystyka

Klasyfikacja tematyczna

62 Statistics
62-07 Data analysis
62J12 Generalized linear models

Tytuł pracy w jzyku angielskim

Functional Linear Models

Spis treści

Wstęp

[już tu: Przykłady danych funkcjonalnych?]
[już tu: próba = punkty - ostatecznie: funkcja gładka?]
[Odpowiednik testu istotności dla prostego modelu regresji = F-test (+ t-test) [patrz: artykuł]]
[pakiet w R: fda]
Praca opiera się głównie na artykule [Kokoszka et al. (2008)], który to został użyty i rozwinięty w książce [Horváth, Kokoszka].

Ze względu na to, że analiza danych funkcjonalnych (*ang.* Functional Data Analysis, FDA) jest stosunkowo nowym działem statystyki i jest wciąż mało popularna w polskiej literaturze, wiele pojęć czy określeń zawartych w pracy nie posiada jeszcze ogólnie przyjętych polskich odpowiedników. Dlatego zostały one przetłumaczone przez autora według własnego uznania, przytaczając oczywiście oryginalne (angielskie) nazwy.

ACKNOWLEDGEMENTS/podziękowania?
The results presented in this paper rely on data collected at magnetic observatories. We thank the national institutes that support them and INTERMAGNET for promoting high standards of magnetic observatory practice (www.intermagnet.org).

Rozdział 1

Preliminaria

Przestrzenią funkcyjną E nazywać będziemy przestrzeń liniową funkcji z dowolnego zbioru A do zbioru B.

Definicja 1.0.1 *[Ferraty, Vieu]*
*Zmienną losową X nazywamy **zmienną funkcjonalną** (ang. functional variable) wtedy i tylko wtedy, gdy przyjmuje wartości w nieskończenie wymiarowej przestrzeni (przestrzeni funkcyjnej). Obserwację χ zmiennej X nazywamy **daną funkcjonalną** (ang. functional data).*

Jeśli zmienna funkcjonalna X (odpowiednio obserwacja χ) jest krzywą, to możemy przedstawić X w następującej postaci $X = \{X(t),\ t \in T\}$ (odp. $\chi = \{\chi(t),\ t \in T\}$), gdzie zbiór indeksów $T \subset \mathbb{R}$. Taką zmienną funkcjonalną możemy zatem utożsamiać z procesem stochastycznym z nieskończenie wymiarową przestrzenią stanów. W szczególności, zmienna funkcjonalna może być powierzchnią, czyli dwuwymiarowym wektorem krzywych - wtedy, analogicznie, T będzie dwuwymiarowym zbiorem indeksów tj. $T \subset \mathbb{R}^2$ - lub dowolnie wymiarowym wektorem krzywych.
W niniejszej pracy skupimy się na zmiennych funkcjonalnych przyjmujących postać krzywych.
[przykłady? czy tylko we wstępie?]
[tu: próba = punkty - ostatecznie: funkcja gładka?]

Aby zbudować pojęcie operatora kowariancji dla zmiennych funkcjonalnych wprowadzimy niezbędne pojęcia z dziedziny operatorów liniowych.

1.1. Klasyfikacja operatorów liniowych

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, Ω jest zatem zbiorem scenariuszy ω, $\mathcal{F}$ jest σ-algebrą podzbiorów Ω, a P miarą prawdopodobieństwa nad $\mathcal{F}$. Dla uproszczenia zakładamy zupełność zadanej przestrzeni probabilistycznej. Rozważmy proces stochastyczny z czasem ciągłym $X = \{X_t,\ t \in T\}$, gdzie T jest przedziałem w $\mathbb{R}$, zdefiniowany na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, taki, że $X_t(\omega)$ należy do przestrzeni funkcyjnej E dla wszystkich $\omega \in \Omega$.
W pracy rozważać będziemy zmienne funkcjonalne przyjmujące wartości w przestrzeni Hilberta.

Rozważmy ośrodkową nieskończenie wymiarową rzeczywistą przestrzeń Hilberta H z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zadającym normę $\|\cdot\|$ i oznaczmy przez $\mathcal{L}$ przestrzeń ciągłych (ograni-

czonych) operatorów liniowych w H z normą

$$\|\Psi\|_{\mathcal{L}} := \sup\{\|\Psi(x)\| : \ \|x\| \leqslant 1\}.$$

Definicja 1.1.1 *[Horváth, Kokoszka]*
*Operator $\Psi \in \mathcal{L}$ nazywamy **operatorem zwartym**, jeśli istnieją dwie ortonormalne bazy w H $\{\upsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ i $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$, oraz ciąg liczb rzeczywistych $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ zbieżny do zera, takie że*

$$\Psi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, \upsilon_j \rangle f_j, \quad x \in H. \tag{1.1}$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że w przedstawionej reprezentacji λ_j są wartościami dodatnimi, w razie konieczności wystarczy f_j zamienić na $-f_j$.
Równoważną definicją operatora zwartego jest spełnienie przez Ψ następującego warunku: zbieżność $\langle y, x_n \rangle \to \langle y, x \rangle$ dla każdego $y \in H$ implikuje $\|\Psi(x_n) - \Psi(x)\| \to 0$.

Inną klasą operatorów są operatory Hilberta-Schmidta, którą oznaczać będziemy przez $\mathcal{S}$.

Definicja 1.1.2 *[Bosq]*
***Operatorem Hilberta-Schmidta** nazywamy taki operator zwarty $\Psi \in \mathcal{L}$, dla którego ciąg $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ w reprezentacji* (1.1) *spełnia $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 < \infty$.*

Uwaga 1.1.1 *[Bosq], [Horváth, Kokoszka]*
Klasa $\mathcal{S}$ jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle_{\mathcal{S}} := \sum_{j=1}^{\infty} \langle \Psi_1(e_j), \Psi_2(e_j) \rangle, \tag{1.2}$$

gdzie $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ jest dowolną bazą ortonormalną w H.
Powyższy iloczyn skalarny zadaje normę

$$\|\Psi\|_{\mathcal{S}} := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \right)^{1/2}. \tag{1.3}$$

Dowód równości (1.3).

$$\begin{aligned}
\|\Psi\|_{\mathcal{S}}^2 = \langle \Psi, \Psi \rangle_{\mathcal{S}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle e_n, \upsilon_j \rangle f_j, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle e_n, \upsilon_k \rangle f_k \right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_j \lambda_k \langle e_n, \upsilon_j \rangle \langle e_n, \upsilon_k \rangle \langle f_j, f_k \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \langle e_n, \upsilon_j \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, \upsilon_j \rangle \overset{\substack{\text{tożsamość} \\ \text{Parsevala}}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \|\upsilon_j\| = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2.
\end{aligned}$$

□

Definicja 1.1.3 *[Bosq]*
*Zwarty operator liniowy nazywamy **operatorem śladowym** (ang. nuclear operator), jeśli równość* (1.1) *spełniona jest dla ciągu $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ takiego, że $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < \infty$.*

Uwaga 1.1.2 *[Bosq]*
Klasa operatorów śladowych $\mathcal{N}$ z normą $\|\Psi\|_{\mathcal{N}} := \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|$ jest przestrzenią Banacha.

Definicja 1.1.4 *[Horváth, Kokoszka]*
Operator $\Psi \in \mathcal{L}$ nazywamy ***symetrycznym****, jeśli*

$$\langle \Psi(x), y\rangle = \langle x, \Psi(y)\rangle, \quad x, y \in H,$$

oraz ***nieujemnie określonym*** *(lub połowicznie pozytywnie określonym, ang. positive semi-definite), jeśli*

$$\langle \Psi(x), x\rangle \geqslant 0, \quad x \in H.$$

Uwaga 1.1.3 *[Horváth, Kokoszka]*
Symetryczny nieujemnie określony operator Hilberta-Schmidta Ψ możemy przedstawić w reprezentacji

$$\Psi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, \upsilon_j\rangle \upsilon_j, \quad x \in H, \tag{1.4}$$

gdzie ortonormalne υ_j są ***funkcjami własnymi*** *Ψ, tj. $\Psi(\upsilon_j) = \lambda_j \upsilon_j$. Funkcje υ_j mogą być rozszerzone do bazy, przez dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni rozpiętej przez oryginalne υ_j. Możemy zatem założyć, że funkcje υ_j w (1.4) tworzą bazę, a pewne wartości λ_j mogą być równe zero.*

1.2. Przestrzeń L^2

Przestrzeń $L^2 = L^2(T) = L^2(T, \mathcal{B}, \lambda)$ nad pewnym przedziałem $T \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem klas mierzalnych funkcji rzeczywistych całkowalnych z kwadratem określonych na T, tj.

$$x \in L^2(T) \iff x : T \to \mathbb{R} \ \wedge \ \int_T x^2(t)dt < \infty.$$

Przestrzeń L^2 jest ośrodkową przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle x, y\rangle := \int_T x(t)y(t)dt, \quad x, y \in L^2.$$

Normę zaś wyznacza wzór

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \int x^2(t)dt, \quad x \in L^2.$$

Tak jak zwyczajowo zapisujemy L^2 zamiast $L^2(T)$, tak w przypadku symbolu całki bez wskazania obszaru całkowania będziemy mieć na myśli całkowanie po całym przedziale T. Jeśli $x, y \in L^2$, równość $x = y$ zawsze oznaczać będzie $\int [x(t) - y(t)]^2 \, dt = 0$.

Ważną klasę operatorów liniowych na przestrzeni L^2 stanowią operatory całkowe.

Definicja 1.2.1 *[Pytlik]*
Operatorem całkowym *nazywamy operator liniowy Ψ dający się przedstawić w formie*

$$\Psi(x)(t) = \int \psi(t, s)x(s)ds, \quad x \in L^2, \ t \in T,$$

gdzie ψ jest mierzalną [ciągłą = całkowalną?] funkcją dwóch zmiennych nazywaną ***jądrem całkowym*** *operatora Ψ.*

Operator całkowy Ψ jest dobrze określony, jeśli spełnia pewnego rodzaju własność ograniczoności.

Uwaga 1.2.1 *[Wojtaszczyk]*
Niech (T,μ) będzie przestrzenią z miarą i niech $\psi(t,s)$ będzie mierzalną funkcją na $T\times T$. Zdefiniujmy

$$\Psi x(s)=\int_T \psi(t,s)x(t)d\mu(t).$$

Jeśli $1<p<\infty$ oraz istnieje mierzalna dodatnia funkcja y na T oraz stałe a, b takie że dla $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ mamy

$$\int_T |\psi(t,s)|y(t)^q d\mu(t)\leqslant [ay(s)]^q, \qquad \mu-pr.w. \tag{1.5}$$

oraz

$$\int_T |\psi(t,s)|y(t)^p d\mu(t)\leqslant [by(s)]^p, \qquad \mu-pr.w., \tag{1.6}$$

wtedy $T: L^p(T,\mu)\to L^p(T,\mu)$.

[całe twierdzenie? jakie dać oznaczenia?]
Dowód. Niech $x\in L^p$ i niech y spełnia założenia twierdzenia. Mamy

$$\begin{aligned}
|\Psi x(s)| &= \left|\int_T \psi(t,s)x(t)d\mu(t)\right| \leqslant \int_T |\psi(t,s)||x(t)|d\mu(t)\\
&= \int_T [|\psi(t,s)|^{1/q}y(t)]\cdot[|\psi(t,s)|^{1/p}|x(t)|y(t)^{-1}]d\mu(t)\\
&= \int_T \Big[|\psi(t,s)|y^q(t)\Big]^{1/q}\cdot\Big[|\psi(t,s)|(|x|/y)^p(t)^{-1}\Big]^{1/p}d\mu(t)\\
&\underset{(1.5)}{\overset{\text{nierówn. Höldera}}{\leqslant}} ay(s)\cdot\left[\int_T |\psi(t,s)|(|x|/y)^p(t)d\mu(t)\right]^{1/p}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Stąd, korzystając z twierdzenia Fubiniego, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\|\Psi x\|_p \leqslant \big\||\Psi x|\big\|_p &= \left[\int_T \Big|\int_T \psi(t,s)x(t)d\mu(t)\Big|^p d\mu(s)\right]^{1/p}\\
&\overset{(1.7)}{\leqslant} a\left[\int_T y^p(s)\int_T |\psi(t,s)|(|x|/y)^p(t)d\mu(t)d\mu(s)\right]^{1/p}\\
&\overset{\text{tw.F.}}{=} a\left[\int_T (|x|/y)^p(t)\int_T y^p(s)|\psi(t,s)|d\mu(s)d\mu(t)\right]^{1/p}\\
&\overset{(1.6)}{\leqslant} ab\left[\int_T (|x|/y)^p(t)y^p(t)d\mu(t)\right]^{1/p} = ab\left[\int_T |x(t)|^p d\mu(t)\right]^{1/p} = ab\|x\|_p<\infty.
\end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że $\Psi x\in L^p$, co kończy dowód. □

Uwaga 1.2.2 *[Horváth, Kokoszka]*
Operatory całkowe są operatorami Hilberta-Schmidta wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\iint \psi^2(t,s)dtds<\infty. \tag{1.8}$$

Ponadto zachodzi

$$\|\Psi\|_{\mathcal{S}}^2=\iint \psi^2(t,s)dtds.$$

Uwaga 1.2.3 *(Twierdzenie Mercera) [Horváth, Kokoszka]*
Niech operator Ψ będzie operatorem całkowym spełniającym (1.8). *Jeśli ponadto jego jądro całkowe ψ spełnia $\psi(s,t) = \psi(t,s)$ oraz $\iint \psi(t,s)x(t)x(s)dtds \geqslant 0$, to operator całkowy Ψjest symetryczny i nieujemnie określony, zatem z Uwagi 1.1.3 mamy*

$$\psi(t,s) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \upsilon_j(t)\upsilon_j(s) \quad w\ L^2(T \times T),$$

gdzie λ_j, υ_j są odpowiednio wartościami własnymi i funkcjami własnymi operatora Ψ.
Jeżeli funkcja ψ jest ciągła, powyższe rozwinięcie jest prawdziwe dla wszystkich $t, s \in T$ i szereg jest zbieżny jednostajnie.

1.3. Zmienne funkcjonalne w L^2. Pojęcie średniej i operatora kowariancji

Rozważmy zmienną funkcjonalną $X = \{X(t),\ t \in T\}$ będącą krzywą ($T \subset \mathbb{R}$) jako element losowy z przestrzeni $L^2(T)$ zaopatrzonej w σ-algebrę borelowskich podzbiorów T.
Mówimy, że zmienna X jest **całkowalna**, jeśli $\mathbb{E}\,\|X\| = \mathbb{E}\left[\int X^2(t)dt\right]^{1/2} < \infty$. Jeśli X jest całkowalna, to istnieje jedyna funkcja $\mu \in L^2$ taka, że $\mathbb{E}\langle y, X\rangle = \langle y, \mu\rangle$ dla dowolnej funkcji $y \in L^2$ (zauważmy, że wartość oczekiwana jest funkcjonałem liniowym, możemy zatem skorzystać z twierdzenia Riesza). Zachodzi $\mu(t) = \mathbb{E}[X(t)]$ dla prawie wszystkich $t \in T$, tak określoną funkcję μ nazywać będziemy **funkcją średniej**. Ponadto, wartość oczekiwana jest przemienna z operatorami ograniczonymi, tj. jeśli X jest całkowalna oraz $\Psi \in \mathcal{L}$, to mamy $\mathbb{E}\,\Psi(X) = \Psi(\mathbb{E}X)$.

Definicja 1.3.1 *[Bosq]*
Operator kowariancji *całkowalnej zmiennej funkcjonalnej X o funkcji średniej μ_X przyjmującej wartości w przestrzeni funkcyjnej L^2 spełniającej $\mathbb{E}\,\|X\|^2 < \infty$ definiujemy jako ograniczony operator liniowy według wzoru*

$$C_X(x) := \mathbb{E}[\langle X - \mu_X, x\rangle(X - \mu_X)], \quad x \in L^2.$$

Jeśli Y jest zmienną funkcjonalną o funkcji średniej μ_Y spełniającą powyższe warunki, wtedy operator kowariancji między zmiennymi X i Y (ang. cross-covariance operator) przedstawiamy jako

$$C_{X,Y}(x) := \mathbb{E}\Big[\langle (X - \mu_X), x\rangle(Y - \mu_Y)\Big], \quad x \in L^2$$

oraz

$$C_{Y,X}(x) := \mathbb{E}\Big[\langle (Y - \mu_Y), x\rangle(X - \mu_X)\Big], \quad x \in L^2.$$

Operator kowariancji jest operatorem całkowym, czyli

$$C_X(x)(t) = \int c(t,s)x(s)ds,$$

gdzie jądro całkowe $c(t,s)$ zdefiniowane następująco

$$c(t,s) = \mathbb{E}\Big[\big(X(t) - \mu(t)\big)\big(X(s) - \mu(s)\big)\Big]$$

nazywać będziemy **funkcją kowariancji**. Oczywistym jest, że $c(t,s) = c(s,t)$ i mamy

$$\iint c(t,s)x(t)x(s)dtds = \iint \mathbb{E}\big[(X(t)-\mu(t))(X(s)-\mu(s))\big]x(t)x(s)dtds$$
$$= \mathbb{E}\left[\left(\int X(t)x(t)dt\right)^2\right] \geqslant 0.$$

Zatem operator kowariancji C_X jest symetryczny oraz nieujemnie określony. Wartości własne λ_j operatora C_X są dodatnie i spełniony jest warunek $\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j = \mathbb{E}\,\|X\|^2 < \infty$. C_X jest operatorem Hilberta-Schmidta (a nawet operatorem śladowym) i posiada on następującą reprezentację

$$C_X(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\langle x, v_j\rangle v_j, \quad x \in L^2.$$

[więcej w Bosq (2000), rozdz. 1]

1.4. Estymacja średniej, funkcji kowariancji i operatora kowariancji

Naturalnym problemem pojawiającym się przy danych funkcjonalnych jest wnioskowanie o obiektach nieskończenie wymiarowych na podstawie skończonej próbki danych.
Obserwujemy zatem N krzywych $X_1, ..., X_N$, które możemy traktować jako realizacje losowej funkcji X lub obserwacje zmiennej funkcjonalnej X z przestrzeni L^2.

Założenie 1.4.1 *[Horváth, Kokoszka]*
Zakładamy, że $X_1, ..., X_N$ są niezależnymi zmiennymi losowymi w L^2 o jednakowym rozkładzie jak zmienna $X \in L^2$.

[rozkład?]
Poszukiwanymi parametrami są funkcja średniej, funkcja kowariancji oraz operator kowariancji, określone następująco

funkcja średniej:	$\mu(t) = \mathbb{E}[X(t)]$;
funkcja kowariancji:	$c(t,s) = \mathbb{E}[(X(t)-\mu(t)(X(s)-\mu(s))]$;
operator kowariancji:	$C = \mathbb{E}[\langle(X-\mu),\cdot\rangle(X-\mu)]$.

Funkcję średniej μ estymujemy średnią z funkcji z próby

$$\widehat{\mu}(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n(t), \quad t \in T,$$

funkcję kowariancji ze wzoru

$$\hat{c}(t,s) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\big(X_n(t)-\hat{\mu}(t)\big)\big(X_n(s)-\hat{\mu}(s)\big), \quad t,s \in T,$$

zaś operator kowariancji estymujemy

$$\widehat{C}(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\langle X_n-\hat{\mu}, x\rangle(X_n-\hat{\mu}), \quad x \in L^2. \tag{1.9}$$

[więcej w [Horváth, Kokoszka], rozdz. 2]

1.5. Estymacja wartości własnych i funkcji własnych operatora kowariancji

W dalszej części pracy istotne będzie dla nas oszacowanie również wartości i funkcji własnych operatora kowariancji C. W szczególności interesować nas będzie p największych wartości własnych spełniających

$$\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_p > \lambda_{p+1}$$

oraz aby p pierwszych wartości własnych było zerowych.
Funkcje własne zdefiniowane są przez równanie $Cv_j = \lambda_j v_j$. Zauważmy, że (z definicji operatora liniowego), jeśli v_j jest funkcją własną, to również av_j jest funkcją własną, gdzie $a \neq 0$ jest skalarem.
[...]
Wartości i funkcje własne estymujemy według wzoru

$$\int \hat{c}(t,s)\hat{v}_j(s)ds = \hat{\lambda}_j \hat{v}_j(t), \quad j = 1, 2, ..., N.$$

[...]
[EFPC: Interference... rozdz. 3]

1.6. Funkcjonalny model liniowy

Standardowy model liniowy dla par zmiennych skalarnych Y_n i wektorów $\mathbf{X}_n$ (tworzonych przez p skalarnych zmiennych X_{ni}, $i = 1, ..., p$), przy założeniu $\mathbb{E}Y_n = 0$, $\mathbb{E}\mathbf{X}_n = \mathbf{0}$[1] (gdzie $n = 1, ..., N$), przyjmuje postać

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{1.10}$$

gdzie

- $\mathbf{Y}$ jest wektorem zmiennych objaśnianych długości N,
- $\mathbf{X}$ jest macierzą zmiennych objaśniających wymiaru $N \times p$,
- $\boldsymbol{\beta}$ jest wektorem parametrów długości p,
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ jest wektorem błędów losowych długości N.

[Mając dane realizacje zmiennych $\mathbf{Y}$ oraz $\mathbf{X}$ poszukiwany wektor współczynników modelu $\boldsymbol{\beta}$ znajdujemy metodą najmniejszych kwadratów.]
Poza narzuconym już założeniem o scentrowanych zmiennych losowych $\mathbf{Y}$ i $\mathbf{X}$ (tu: jedynie aby uniknąć uwzględniania wyrazu wolnego[2]) najważniejszymi założeniami powyższego modelu liniowego są wymagania, aby zmienna losowa $\boldsymbol{\varepsilon}$ opisująca błąd modelu również spełniała $\mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0$ oraz aby nie była skorelowana ze zmiennymi X_n.

Rozważać będziemy odpowiednik modelu liniowego dla zmiennych funkcjonalnych. Dla uproszczenia (podobnie jak wyżej) zakładać będziemy, że zmienne objaśniane i objaśniające mają średnie równe zero. **Pełen model funkcjonalny** (ang. *fully functional model*) przyjmuje postać

$$Y_n = \Psi X_n + \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, ..., N, \tag{1.11}$$

gdzie krzywe Y_n, X_n oraz nieobserwowalny błąd ε_n należą do przestrzeni Hilberta $L^2(T)$. Operator $\Psi : L^2 \to L^2$ jest ograniczonym operatorem liniowym, który jest operatorem całkowym. Jądro całkowe $\psi(t,s)$ operatora Ψ jest funkcją całkowalną z kwadratem na $T \times T$.

[1] przenieść tę uwagę/wytłumaczenie do przypisu?
[2] przenieść tę uwagę/wytłumaczenie do przypisu?

Zauważmy ponadto, że, na mocy Uwagi 1.2.2, operator Ψ jest operatorem Hiberta-Schmidta. Równość (1.11) rozumiemy zatem następująco

$$Y_n(t) = \int \psi(t,s)X_n(s)ds + \varepsilon_n(t), \quad n = 1, 2, ..., N. \tag{1.12}$$

Jak i w przypadku standardowego modelu linowego, funkcjonalny model liniowy wymusza pewne założenia. Podobnie jak poprzednio, wymagamy, aby zmienna losowa ε_n opisująca błąd modelu spełniała $\mathbb{E}[\varepsilon_n] = 0$ oraz aby nie była skorelowana ze zmiennymi X_n.
["nieskorelowane zmienne" = (operator kowariancji = 0)?]
[inne założenia modelu? konsekwencje?]
[przykład - nawet jeśli nie zapisywać, to mieć w głowie]

Nazwa powyższego modelu wynika z faktu, że zarówno zmienne objaśniane Y_n jak i zmienne objaśniające X_n są zmiennymi funkcjonalnymi. Niewielkim uproszczeniem są pozostałe typy funkcjonalnych modeli liniowych, tj.

- model z odpowiedzią skalarną (ang. *scalar response model*)

  $$Y_n = \int \psi(s)X_n(s)ds + \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, ..., N,$$

  w którym tylko zmienne objaśniające X_n są zmiennymi funkcjonalnymi,
  [przykład - nawet jeśli nie zapisywać, to mieć w głowie]

- model z odpowiedzią funkcyjną (ang. *functional response model*)

  $$Y_n(t) = \psi(t)x_n + \varepsilon_n(t), \quad n = 1, 2, ..., N,$$

  w którym zmienne objaśniające x_n są deterministycznymi skalarami.
  [przykład - nawet jeśli nie zapisywać, to mieć w głowie]

Naturalnym problemem pojawiającym się przy funkcjonalnym modelu liniowym jest estymacja operatora Ψ należącego do nieskończenie wymiarowej przestrzeni na podstawie skończonej próbki danych. Możliwym jest znalezienie operatora, który daje idealne dopasowanie do danych (dla którego wszystkie różnice od próbki są równe zero), nie narzucając dodatkowych założeń, ale przypomina on biały szum i jego interpretacja jest często problemowa i nie funkcjonalna. Jednym ze sposobów na rozwiązanie tego problemu jest poszukiwanie operatora należącego do podprzestrzeni generowanej przez funkcje własne operatora kowariancji danych z próby, nazywane **empirycznymi funkcjonalnymi głównymi składowymi** (ang. *empirical functional principal components, EFPC's*), które zostały opisane w podrozdziale 1.5. Główne składowe odpowiadają istotnym czynnikom zmienności zmiennych, dobrze służą zatem do przybliżania ich wartości.
...
[sposób znalezienia Ψ]
Wykorzystany w dalszej części pracy pakiet *fda*, do programu *R-project*, do znalezienia operatora Ψ stosuje metodę najmniejszych kwadratów. Dlatego właśnie tę metodę przedstawiamy poniżej.

Niech $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ i $\{\theta_l\}_{l=1}^{\infty}$ będą pewnymi ustalonymi bazami, niekoniecznie ortonormalnymi, np. bazami Fouriera lub splajnowymi. Ponadto, niech funkcje η_k dobrze przybliżają funkcje X_n, a θ_l dobrze przybliżają Y_n. Nieznane jądro ψ estymujemy według postaci

$$\widehat{\psi}(t,s) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} p_{kl}\eta_k(s)\theta_l(t),$$

gdzie K i L są odpowiednio małymi liczbami wybranymi do wygładzenia przybliżenia X_n i Y_n. Podobnie jak w przypadku standardowego modelu linowego możemy znaleźć parametry p_{kl} metodą najmniejszych kwadratów przez minimalizację sumy kwadratów reszt

$$\sum_{n=1}^{N} \left\| Y_n - \int X_n(s)\widehat{\psi}(s,\cdot) \right\|^2.$$

[jak w pakiecie w R] (1.12)

Rozdział 2

Test istotności w funkcjonalnym modelu liniowym

2.1. Procedura testowa

Jednym z podstawowych testów na efektywność modelu jest test istotności zmiennych objaśniających. Jak w przypadku modelu liniowego dla zmiennych skalarnych (postaci (1.10)) testuje się hipotezę o zerowaniu się wektora $\boldsymbol{\beta}$, tak w przypadku funkcjonalnego modelu liniowego badamy zerowanie się operatora Ψ, tj. hipotezy

$$\mathrm{H}_0: \quad \Psi = 0 \quad \text{przeciw} \quad \mathrm{H}_A: \quad \Psi \neq 0.$$

Zauważmy, że przyjęcie H_0 nie oznacza braku związku między zmienną objaśnianą a objaśniającą. Prowadzi jedynie do stwierdzenia braku zależności liniowej.

Obserwujemy ciąg krzywych długości N. Zakładamy, że zmienna objaśniana Y_n, zmienne objaśniające X_n i błędy ε_n są scentrowanymi zmiennymi losowymi przyjmującymi wartości w przestrzeni Hilberta L^2. Oznaczając przez X (analogicznie Y) zmienną funkcjonalną o tym samym rozkładzie co X_n (Y_n) wprowadzamy operatory kowariancji

$$C(x) = \mathbb{E}[\langle X, x\rangle\, X], \quad \Gamma(x) = \mathbb{E}[\langle Y, x\rangle\, Y], \quad \Delta(x) = \mathbb{E}[\langle X, x\rangle\, Y], \quad x \in L^2. \tag{2.1}$$

Przez $\widehat{C}$, $\widehat{\Gamma}$, $\widehat{\Delta}$ oznaczamy ich estymatory (zgodnie z (1.9)), tj.

$$\widehat{C}(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \langle X_n, x\rangle\, X_n, \quad \widehat{\Gamma}(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \langle Y_n, x\rangle\, Y_n, \quad \widehat{\Gamma}(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \langle X_n, x\rangle\, Y_n, \quad x \in L^2.$$

Definiujemy również wartości i wektory własne C i Γ

$$C(\upsilon_k) = \lambda_k \upsilon_k, \quad \Gamma(u_j) = \gamma_j u_j, \tag{2.2}$$

których estymatory będziemy oznaczać $(\widehat{\lambda}_k, \widehat{\upsilon}_k)$, $(\widehat{\gamma}_j, \widehat{u}_j)$.
Test obejmuje obcięcie powyższych operatorów na podprzestrzenie skończenie wymiarowe. Podprzestrzeń $\mathcal{V}_p = \mathrm{span}\{\upsilon_1, ..., \upsilon_p\}$ zawiera najlepsze przybliżenia X_n, które są liniowymi kombinacjami pierwszych p głównych składowych (ang. *Functional Principal Components, FPC*). Metodą głównych składowych wyznaczamy p największych wartości własnych operatora $\widehat{C}$ tak, że $\widehat{\mathcal{V}}_p = \mathrm{span}\{\widehat{\upsilon}_1, ..., \widehat{\upsilon}_p\}$ zawiera najlepsze przybliżenie X_n. Analogicznie $\mathcal{U}_q = \mathrm{span}\{u_1, ..., u_q\}$ zawiera przybliżenia $\mathrm{span}\{Y_1, ..., Y_N\}$.

Z ogólnej postaci funkcjonalnego modelu liniowego

$$Y = \Psi X + \varepsilon$$

możemy wyprowadzić kolejne równości

$$\begin{aligned} \langle X, x\rangle Y &= \langle X, x\rangle \Psi X + \langle X, x\rangle \varepsilon \\ \mathbb{E}\left[\langle X, x\rangle Y\right] &= \mathbb{E}\left[\langle X, x\rangle \Psi X\right] + \mathbb{E}\left[\langle X, x\rangle \varepsilon\right]. \end{aligned}$$

Korzystając z definicji operatorów C oraz Δ (2.1), założenia, że Ψ jest operatorem ograniczonym oraz z założenia o braku korelacji między X a ε zachodzi

$$\Delta = \Psi C.$$

W szczególności, prawdziwa jest równość

$$\Delta(\upsilon_k) = \Psi C(\upsilon_k).$$

Na mocy definicji funkcji własnych (2.2), dla $k \leqslant p$, mamy

$$\Psi(\upsilon_k) = \lambda_k^{-1}\Delta(\upsilon_k).$$

Stąd, ψ zeruje się na $\operatorname{span}\{\upsilon_1, ..., \upsilon_p\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta(\upsilon_k) = 0$ dla każdego $k = 1, ..., p$. Zauważmy, że

$$\Delta(\upsilon_k) \approx \widehat{\Delta}(\upsilon_k) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \langle X_n, \upsilon_k\rangle Y_n.$$

Skoro zatem $\operatorname{span}\{Y_1, ..., Y_N\}$ są dobrze aproksymowane przez $\mathcal{U}_q$, to możemy ograniczyć się do sprawdzania czy

$$\left\langle \widehat{\Delta}(\upsilon_k), u_j \right\rangle = 0, \quad k = 1, ..., p, \quad j = 1, ..., q. \tag{2.3}$$

Jeśli H_0 jest prawdziwa, to dla każdego $x \in \mathcal{V}_p$, $\psi(x)$ nie należy do $\mathcal{U}_q$. Co znaczy, że żadna funkcja Y_n nie może być opisana jako liniowa kombinacja X_n, $n = 1, ..., N$. Statystyka testowa powinna zatem sumować kwadraty iloczynów skalarnych (2.3). Twierdzenie 2.2.1 stanowi, że statystyka

$$\widehat{T}_N(p, q) = N\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} \widehat{\lambda}_k^{-1}\widehat{\gamma}_j^{-1}\left\langle \widehat{\Delta}(\widehat{\upsilon}_k), \widehat{u}_j \right\rangle^2, \tag{2.4}$$

zbiega według rozkładu do rozkładu χ^2 z pq stopniami swobody.
Przy czym

$$\left\langle \widehat{\Delta}(\widehat{\upsilon}_k), \widehat{u}_j \right\rangle = \left\langle \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \langle X_n, \widehat{\upsilon}_k\rangle Y_n, \widehat{u}_j \right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \langle X_n, \widehat{\upsilon}_k\rangle \langle Y_n, \widehat{u}_j\rangle$$

oraz $\lambda_k = \mathbb{E}\langle X, \upsilon_k\rangle^2$ i $\gamma_j = \mathbb{E}\langle Y, u_j\rangle^2$.

Uwaga 2.1.1 *Oczywistym jest, że jeśli odrzucamy H_0, to $\psi(\upsilon_k) \neq 0$ dla pewnego $k \geqslant 1$. Jednak ograniczając się do p największych wartości własnych, test jest skuteczny tylko jeśli ψ nie zanika na którymś wektorze υ_k, $k = 1, ..., p$. Aczkolwiek takie ograniczenie jest intuicyjnie niegroźne, ponieważ test ma za zadanie sprawdzić czy główne źródła zmienności Y mogą być opisane przez główne źródła zmienności zmiennych X.*

Schemat przebiegu testu

1. Sprawdzamy założenie o liniowości metodą *FPC score predictor-response plots.*
2. Wybieramy liczbę głównych składowych p i q metodami *scree test* oraz *CPV.*
3. Wyliczamy wartość statystyki $\widehat{T}_N(p,q)$ (2.4).
4. Jeśli $\widehat{T}_N(p,q) > \chi^2_{pq}(1-\alpha)$, to odrzucamy hipotezę zerową o braku liniowej zależności. W przeciwnym razie nie mamy podstaw do odrzucenia H_0.

[rozwinąć i dopracować powyższe punkty]

2.2. Formalne podstawy [nazwa?]

Założenie 2.2.1 *[Kokoszka et al. (2008)], [Horváth, Kokoszka]*
Trójka $(Y_n, X_n, \varepsilon_n)$ tworzy ciąg niezależnych zmiennych funkcjonalnych o jednakowym rozkładzie, takich że ε_n jest niezależne od X_n oraz

$$\mathbb{E}X_n = 0, \quad \mathbb{E}\varepsilon_n = 0,$$

$$\mathbb{E}\|X_n\|^4 < \infty \quad i \quad \mathbb{E}\|\varepsilon_n\|^4 < \infty.$$

Założenie 2.2.2 *[Kokoszka et al. (2008)], [Horváth, Kokoszka]*
Wartości własne operatorów C oraz Γ spełniają, dla pewnych $p > 0$ i $q > 0$

$$\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_p > \lambda_{p+1}, \quad \gamma_1 > \gamma_2 > ... > \gamma_q > \gamma_{q+1}.$$

Twierdzenie 2.2.1 *[Kokoszka et al. (2008)], [Horváth, Kokoszka]*
Jeśli spełnione są powyższe Założenia 2.2.1, 2.2.2 oraz H_0, to $\widehat{T}_N(p,q) \xrightarrow{d} \chi^2_{pq}$ przy $N \to \infty$.

Twierdzenie 2.2.2 *[Kokoszka et al. (2008)], [Horváth, Kokoszka]*
Przy Założeniach 2.2.1, 2.2.2 oraz jeśli $\langle \psi(v_k), u_j \rangle \neq 0$ dla $k \leqslant p$ oraz $j \leqslant q$, to $\widehat{T}_N(p,q) \xrightarrow{P} \infty$ przy $N \to \infty$.

Dowody powyższych twierdzeń rozbijemy w krokach na kolejne lematy i wnioski. ...
Zauważmy, że konsekwencją prawdziwości H_0 i przyjęcia modelu postaci $Y_n = \Psi X_n + \varepsilon_n$ jest równość $Y_n = \varepsilon_n$. ?

Lemat 2.2.1 *[Kokoszka et al. (2008)], [Bosq]*
Według oznaczeń podrozdziału 1.5, przy Założeniach 2.2.1, 2.2.2 spełnione są nierówności

$$\limsup_{N\to\infty} N\mathbb{E}\left\|v_k - \widehat{v}_k\right\|^2 < \infty, \quad \limsup_{N\to\infty} N\mathbb{E}\left\|u_j - \widehat{u}_j\right\|^2 < \infty,$$

$$\limsup_{N\to\infty} N\mathbb{E}\left[\left|\gamma_k - \widehat{\gamma}_k\right|^2\right] < \infty, \quad \limsup_{N\to\infty} N\mathbb{E}\left[\left|\lambda_j - \widehat{\lambda}_j\right|^2\right] < \infty,$$

dla $k \leqslant p$ oraz $j \leqslant q$.

[

Twierdzenie 2.2.3 *Centralne Twierdzenie Graniczne [Horváth, Kokoszka], [Bosq]*
Niech $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem zmiennych funkcjonalnych o jednakowym rozkładzie przyjmujących wartości w ośrodkowej przestrzeni Hilberta. Jeśli $\mathbb{E}\|X_1\|^2 < \infty$, $\mathbb{E}X_1 = \mu$ i $C_{X_1} = C$, wtedy

$$N^{-1/2}\sum_{n=1}^{N} X_n \xrightarrow{d} \mathcal{N},$$

gdzie $\mathcal{N} \sim \mathcal{N}(0, C)$.

]

Lemat 2.2.2 *[Kokoszka et al. (2008)], [Horváth, Kokoszka]*
Jeśli spełnione są Założenia 2.2.1, 2.2.2 i H_0, to dla $k \leqslant p$, $j \leqslant q$

$$\sqrt{N}\langle\widehat{\Delta}v_k, u_j\rangle \xrightarrow{d} \eta_{kj}\sqrt{\gamma_k\lambda_j}, \tag{2.5}$$

gdzie $\eta_{kj} \sim N(0,1)$. Przy czym $\eta_{k,j}$ oraz $\eta_{k'j'}$ są niezależne dla $(k,j) \neq (k',j')$.

Dowód. Przy H_0

$$\sqrt{N}\langle\widehat{\Delta}v_k, u_j\rangle = N^{-1/2}\sum_{n=1}^{N}\langle X_n, v_k\rangle\langle\varepsilon_n, u_j\rangle,$$

gdzie elementy pod sumą po prawej stronie powyższej równości mają średnie 0 i wariancje równe $\lambda_k\gamma_j$, co na mocy CTG (Twierdzenie 2.2.3) kończy dowód (2.5). [skalarne CTG?]
Aby udowodnić niezależność między η_{kj} i $\eta_{k'j'}$ dla $(k,j) \neq (k',j')$, wystarczy pokazać, że $\sqrt{N}(\widehat{\Delta}(v_k), u_j)$ i $\sqrt{N}(\widehat{\Delta}(v_{k'}), u_{j'})$ są nieskorelowane. Mamy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sqrt{N}\langle\widehat{\Delta}(v_k), u_j\rangle, \sqrt{N}\langle\widehat{\Delta}(v_{k'}), u_{j'}\rangle\right] \\
&= N\mathbb{E}\left[\Big\langle\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\langle X_n, v_k\rangle Y_n, u_j\Big\rangle, \Big\langle\frac{1}{N}\sum_{n'=1}^{N}\langle X_{n'}, v_{k'}\rangle Y_{n'}, u_{j'}\Big\rangle\right] \\
&= N\mathbb{E}\left[\Big\langle\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\langle X_n, v_k\rangle(\Psi X_n + \varepsilon_n), u_j\Big\rangle, \Big\langle\frac{1}{N}\sum_{n'=1}^{N}\langle X_{n'}, v_{k'}\rangle(\Psi X_{n'} + \varepsilon_{n'}), u_{j'}\Big\rangle\right] \\
&\overset{H_0}{=} \frac{1}{N}\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N}\langle X_n, v_k\rangle\langle\varepsilon_n, u_j\rangle\sum_{n'=1}^{N}\langle X_{n'}, v_{k'}\rangle\langle\varepsilon_{n'}, u_{j'}\rangle\right] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n,n'=1}^{N}\mathbb{E}\left[\langle X_n, v_k\rangle\langle X_{n'}, v_{k'}\rangle\right]\mathbb{E}\left[\langle\varepsilon_n, u_j\rangle\langle\varepsilon_{n'}, u_{j'}\rangle\right] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}\left[\langle X_n, v_k\rangle\langle X_n, v_{k'}\rangle\right]\mathbb{E}\left[\langle\varepsilon_n, u_j\rangle\langle\varepsilon_n, u_{j'}\rangle\right] \\
&= \langle C(v_k), v_{k'}\rangle\langle\Gamma u_j, u_{j'}\rangle = \gamma_k\delta_{kk'}\gamma_j\delta_{jj'}.
\end{aligned}$$

[zastanowić się nad tym/dopracować] □

Przypomnijmy, że norma Hilberta-Schmidta operatora Hilberta-Schmidta S zdefiniowana jest wzorem $\|S\|_{\mathcal{S}}^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\|S(e_j)\|^2$, gdzie ciąg $\{e_1, e_2, ...\}$ stanowi bazę ortonormalną oraz, że norma ta jest nie mniejsza od normy operatorowej, tj. $\|S\|_{\mathcal{L}}^2 \leqslant \|S\|_{\mathcal{S}}^2$.

Lemat 2.2.3 *[Kokoszka et al. (2008)], [Horváth, Kokoszka]*
Przy założeniach Twierdzenia 2.2.1 mamy

$$\mathbb{E}\left\|\widehat{\Delta}\right\|_{\mathcal{S}}^2 = N^{-1}\mathbb{E}\left\|X\right\|^2\mathbb{E}\left\|\varepsilon_1\right\|^2.$$

Dowód. Zauważmy, że

$$\left\|\widehat{\Delta}(e_j)\right\|^2 = N^{-2}\sum_{n,n'=1}^{N}\langle X_n, e_j\rangle\langle X_{n'}, e_j\rangle\langle Y_n, Y_{n'}\rangle.$$

Stąd, przy założeniu H_0, mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\|\widehat{\Delta}\right\|_{\mathcal{S}}^2 &= N^{-2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n,n'=1}^{N}\mathbb{E}[\langle X_n, e_j\rangle\langle X_{n'}, e_j\rangle\langle\varepsilon_n, \varepsilon_{n'}\rangle]\\ &= N^{-2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}\langle X_n, e_j\rangle^2\,\mathbb{E}\left\|\varepsilon_n\right\|^2\\ &= N^{-1}\mathbb{E}\left\|\varepsilon_1\right\|^2\sum_{j=1}^{\infty}\langle X, e_j\rangle^2 = N^{-1}\mathbb{E}\left\|\varepsilon_1\right\|^2\left\|X\right\|^2.\end{aligned}$$

□

Lemat 2.2.4 *[Kokoszka et al. (2008)], [Horváth, Kokoszka]*
Załóżmy, że $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ oraz $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ są ciągami elementów losowych z przestrzeni Hilberta takich, że $\|U_n\| \xrightarrow{P} 0$ i $\|V_n\| = O_P(1)$, tj.

$$\lim_{C\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P(\|V_n\| > C) = 0.$$

Wtedy zachodzi

$$\langle U_n, V_n\rangle \xrightarrow{P} 0.$$

Dowód. Prawdziwość lematu wynika z analogicznej własności dla losowych ciągów liczb rzeczywistych i nierówności $|\langle U_n, V_n\rangle| \leqslant \|U_n\|\|V_n\|$.
[może lepiej przytoczyć skalarną wersję?] □

Lemat 2.2.5 *[Kokoszka et al. (2008)], [Horváth, Kokoszka]*
Przy założeniach Twierdzenia 2.2.1, dla $k \leqslant p$, $j \leqslant q$ zachodzi

$$\sqrt{N}\langle\widehat{\Delta}(\hat{v}_k), \hat{u}_j\rangle \xrightarrow{d} \eta_{kj}\sqrt{\lambda_k\gamma_j},$$

gdzie η_{kj} definiowane są jak w Lemacie 2.2.2.

Dowód. Na mocy Lematu 2.2.2, wystarczy pokazać, że

$$\sqrt{N}\langle\widehat{\Delta}(\hat{v}_k), \hat{u}_j\rangle - \sqrt{N}\langle\widehat{\Delta}(v_k), u_j\rangle \xrightarrow{P} 0. \tag{2.6}$$

Równość (2.6) wynika z nierówności trójkąta oraz z

$$\sqrt{N}\langle\widehat{\Delta}(\hat{v}_k), \hat{u}_j - u_j\rangle \xrightarrow{P} 0 \tag{2.7}$$

i

$$\sqrt{N}\langle\widehat{\Delta}(\hat{v}_k - v_k), \hat{u}_j\rangle \xrightarrow{P} 0. \tag{2.8}$$

Aby udowodnić równość (2.7), zauważmy, że z Lematu 2.2.1 mamy $\sqrt{N}(\hat{u}_j - u_j) = O_P(1)$ oraz, na mocy Lematu 2.2.3, $\mathbb{E}\|\widehat{\Delta}(v_k)\| \leqslant \mathbb{E}\|\widehat{\Delta}\|_{\mathcal{S}} = O(N^{-1/2})$. Stąd równość (2.7) wynika z Lematu 2.2.4.
Aby wykorzystać takie samo uzasadnienie dla (2.8) (skorzystać z Lematu 2.2.1), zauważmy, że

$$\sqrt{N}\langle\widehat{\Delta}(\hat{v}_k - v_k), \hat{u}_j\rangle = \sqrt{N}\langle\hat{v}_k - v_), \widetilde{\Delta}(\hat{u}_j)\rangle,$$

gdzie $\widetilde{\Delta}(x) = N^{-1}\sum_{n=1}^{N}\langle Y_n, x\rangle X_n$. Lemat 2.2.3 stanowi, że przy założeniu H_0 mamy $\mathbb{E}\|\widetilde{\Delta}\|_{\mathcal{S}} = \mathbb{E}\|\widehat{\Delta}\|_{\mathcal{S}}$, co kończy dowód.
[na pewno?] □

Z Lematu 2.2.1, $\hat{\lambda}_k \xrightarrow{P} \lambda_k$ oraz $\hat{\gamma}_j \xrightarrow{P} \gamma_j$.

Wniosek 2.2.1 *[Kokoszka et al. (2008)], [Horváth, Kokoszka]*
Przy założeniach Twierdzenia 2.2.1, dla $j \leqslant q$, $k \leqslant p$ zachodzi

$$\sqrt{N}\Big\langle\hat{\lambda}_k^{-1/2}\hat{\gamma}_j^{-1/2}\widehat{\Delta}(\hat{v}_k), \hat{u}_j\Big\rangle \xrightarrow{d} \eta_{kj},$$

gdzie η_{kj} definiowane są jak w Lemacie 2.2.2.

Dowód Twierdzenia 2.2.1 [...]

Lemat 2.2.6 *[Kokoszka et al. (2008)], [Horváth, Kokoszka]*
Jeśli $\{Y_n\}_{n\geqslant 1}$ są zmiennymi funkcjonalnymi o jednakowych rozkładach, to zachodzi

$$\mathbb{E}\|\widehat{\Delta}\| \leqslant \mathbb{E}\|Y\|^2.$$

Dowód. Dla dowolnego $u \in L^2$ takiego, że $\|u\| \leqslant 1$, mamy

$$\|\widehat{\Delta}u\| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|\langle Y_n, u\rangle|\|Y_n\| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\|Y_n\|^2.$$

Co ze względu na założenie, że Y_n mają jednakowy rozkład, jest równoważne tezie lematu. □

Twierdzenie 2.2.4 *Mocne Prawo Wielkich Liczb [Bosq]*
Niech $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem zmiennych funkcjonalnych o jednakowym rozkładzie przyjmujących wartości w ośrodkowej przestrzeni Hilberta takich, że $\mathbb{E}\|X_n\|^2 < \infty$. Niech $m = \mathbb{E}X_n$, wtedy mamy

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}X_n \xrightarrow{p.n.} m.$$

Lemat 2.2.7 *[Kokoszka et al. (2008)], [Horváth, Kokoszka]*
Jeżeli spełnione jest Założenie 2.2.1, to dla dowolnych funkcji $v, u \in L^2$

$$\langle\widehat{\Delta}(v), u\rangle \xrightarrow{P} \langle\Delta(v), u\rangle.$$

Dowód. Tezę otrzymujemy korzystając z Prawa Wielkich Liczb zauważając

$$\langle\widehat{\Delta}(v), u\rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\langle X_n, v\rangle\langle Y_n, u\rangle$$

oraz

$$\mathbb{E}\big[\langle X_n, v\rangle\langle Y_n, u\rangle\big] = \mathbb{E}\big[\langle\langle X_n, v\rangle Y_n, u\rangle\big] = \langle\Delta(v), u\rangle.$$

□

Lemat 2.2.8 *[Kokoszka et al. (2008)], [Horváth, Kokoszka]*
Jeżeli spełnione są Założenia 2.2.1 oraz 2.2.2, to

$$\langle \widehat{\Delta}(\hat{v}_k), \hat{u}_j \rangle \xrightarrow{P} \langle \Delta(v_k), u_j \rangle, \quad \textit{dla } k \leqslant p,\ j \leqslant q.$$

Dowód. Na mocy Lematu 2.2.7 wystarczy pokazać

$$\langle \widehat{\Delta}(v_k), \hat{u}_j - u_j \rangle \xrightarrow{P} 0$$

i

$$\langle \widehat{\Delta}(\hat{v}_k) - \widehat{\Delta}(v_k), \hat{u}_j \rangle \xrightarrow{P} 0.$$

Relacje te wynikają z Lematów 2.2.4, 2.2.1 [na pewno?] oraz 2.2.6. □

Dowód Twierdzenia 2.2.2. Wprowadźmy oznaczenie

$$\widehat{S}_N(p,q) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \hat{\lambda}_k^{-1} \hat{\gamma}_j^{-1} \langle \widehat{\Delta}(\hat{v}_k), \hat{u}_j \rangle^2.$$

Na mocy Lematu 2.2.8 oraz Lematu 2.2.1 [na pewno?], zachodzi

$$\widehat{S}_N(p,q) \xrightarrow{P} S(p,q) > 0.$$

Stąd,

$$\widehat{T}_N(p,q) = N \widehat{S}_N(p,q) \xrightarrow{P} \infty.$$

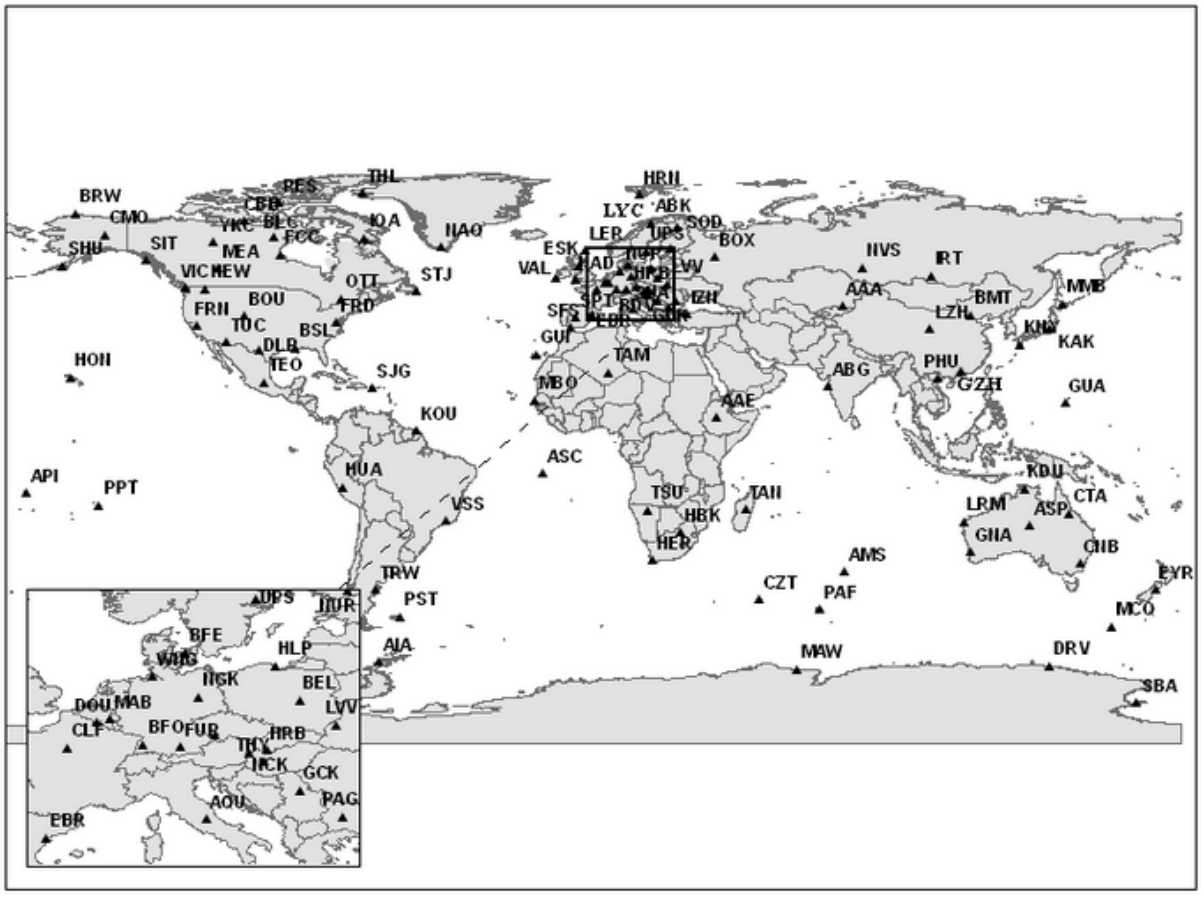
□

[...?]

Rozdział 3

Przykład zastosowania

Podobnie jak w artykule [Kokoszka et al. (2008)] oraz książce [Horváth, Kokoszka], zastosujemy przedstawiony test do modelu stworzonego na podstawie danych opisujących pola magnetyczne. Takie dane zbierane są przez stacje geofizyczne i publikowane są w ramach międzynarodowego programu INTERMAGNET i udostępniane są na stronie internetowej projektu [I]. Do programu należy obecnie 129 naziemnych obserwatoriów, w tym dwie stacje znajdujące się w Polsce (mapa stacji na Rysunku 3.1)



Rysunek 3.1: Mapa stacji geofizycznych należących do programu INTERMAGNET

Dane o polu magnetycznym zbierane są za pomocą tzw. magnetometru. Urządzenie to od-

czytuje informacje... [...]
Ze strony programu można pobrać dane dokładne: w odstępach jednosekundowych lub uproszczone: w odstępach jednominutowych (obserwacja jest średnią z 60 sekund). W pracy wykorzystano dane uproszczone, mamy zatem 1440 punktów każdego dnia (poza sytuacjami z brakiem części danych), które wykorzystamy do stworzenia danych funkcjonalnych. Tym sposobem jeden dzień stanie się jedną obserwacją.
Magnetometer data...
Zorze polarne + substorms (?)
Korzystając z dostępnego pakietu *fda* ([R: fda])...

3.1. Ameryka Północna (Kanada)

W kręgu zainteresowań autorów artykułu [Kokoszka et al. (2008)] leżą dane pochodzące z obserwatoriów Ameryki Północnej, zaczniemy zatem od analizy podobnych danych.
[do opracowania: punkt po punkcie według opisu procedury testowej w rozdziale 2]
[do opracowania: kod w R!]

3.2. Europa (Polska)

Do programu INTERMAGNET należą także dwie polskie stacje geofizyczne: obserwatorium w Belsku oraz obserwatorium na Helu. Przeprowadzimy zatem podobna j.w. analizę dla północnej Europy.
[...]

Dodatek A

Kod w R

[KOD] [Bosq]

Bibliografia

[Bosq] D. Bosq, *Linear Processes in Function Spaces*. Springer, 2000.

[Ferraty, Vieu] F. Ferraty, P. Vieu, *Nonparametric Functional Data Analysis. Theory and practice*. Springer, 2006.

[Horváth, Kokoszka] L. Horváth, P. Kokoszka, *Interference for Functional Data with Applications*. Springer, 2012.

[I] INTERMAGNET `http://www.intermagnet.org/index-eng.php`

[Kokoszka et al. (2008)] P. Kokoszka, I. Maslova, J. Sojka, L. Zhu, *Testing for lack of dependence in the functional linear model*. Canadian Journal of Statistics, 2008, 36, 207-222.

[Maslova et al. (2010)] Maslova, I., Kokoszka, P., Sojka, J. and Zhu, L., *Statistical significance testing for the association of magnetometer records at high–, mid– and low latitudes during substorm days*. Planetary and Space Science, 58 (2010), 437–445.

[Pytlik] T. Pytlik, *Analiza funkcjonalna*. Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, 2000.

[R: fda] J. O. Ramsay, H. Wickham, S. Graves, G. Hooker, *Package 'fda'*, wersja 2.4.4. Online: `https://cran.r-project.org/web/packages/fda/fda.pdf`

[Ramsay, et al. (2009)] J. O Ramsay, G. Hooker and S. Graves, *Functional Data Analysis with R and Matlab*. Springer, 2009.

[Ramsay, Silverman] J. O. Ramsay, B. W. Silverman, *Functional Data Analysis*. Springer, 2005.

[Wojtaszczyk] P. Wojtaszczyk, *Banach Spaces For Analysts*. Cambridge Universiti Press, 1991, 86-87.