Лабораторная работа 3.13V

Кольца Гельмгольца

Цели работы

1. Изучение системы, позволяющей создавать в пространстве однородные магнитные поля; экспериментально исследовать распределение магнитного поля вдоль оси системы катушек Гельмгольца.

Теория эксперимента. Общие положения

Магнитное поле в вакууме

Движущиеся заряды (проводники с токами) изменяют свойства окружающего их пространства – создают магнитное поле. На движущиеся в нем заряды действуют силы. Силовую характеристику магнитного поля называют магнитной индукцией и обозначают как **B**. Единица магнитной индукции в СИ – Тесла [Тл]. Опыт показывает, что магнитное поле имеет направленный характер, поэтому индукция магнитного поля – векторная величина. Для магнитного поля справедлив принцип суперпозиции: магнитное поле, создаваемое несколькими движущимися зарядами или токами, равно векторной сумме магнитных полей, создаваемых каждым зарядом или током в отдельности, т.е.

$$B = \sum_{i=1}^{N} B_i \tag{1}$$

Магнитная индукция во всех случаях пропорциональна силе тока, создающей магнитное поле и зависит от расстояния до той точки, в которой определялась величина вектора **B**. Также магнитное поле любого тока может быть вычислено как векторная сумма (суперпозиция) полей, создаваемых отдельными элементарными участками тока. Так для магнитной индукции поля, создаваемого элементом тонкого проводника с током I и длиной dl:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[dl,r]}{r^3}, \tag{2}$$

где μ_0 - магнитная постоянная ($\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ Гн/м), dl - вектор, совпадающий с элементарным участком тока и направленный по

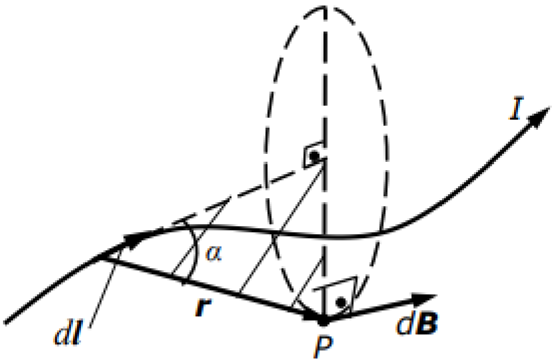

Рис. 1. Магнитная индукция от элемента проводника с током

току, r - радиус-вектор, проведенный от того элемента в точку P, в которой определяется поле dB.

Затем проинтегрировав формулу (2) по всем элементам можно получить выражение для результирующего поля от всего проводника:

$$B = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[dl,r]}{r^3}, \tag{3}$$

Формула (3) является одним из аналитических выражений закона Био – Савара – Лапласа.

Поле вектора **B** можно представить наглядно с помощью линий магнитной индукции, которые проводятся так, чтобы касательная к этим линиям в каждой точке совпадала с направлением вектора **B**, а густота линий соответствовала модулю этого вектора в данном месте.

Исходя из закона Био – Савара – Лапласа можно доказать, что циркуляция вектора **B** по произвольному замкнутому контуру Г равна произведению магнитной постоянной μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром, т.е.

$$\oint Bdl = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i, \tag{4}$$

Выражение (4) справедливо только для поля в вакууме. Вычисляя сумму токов, положительным нужно считать ток, направление которого связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта. Выражение (4) называют *теоремой о циркуляции вектора* ***B***. Тот факт, что циркуляция вектора **B** не равна нулю, означает, что магнитное поле не потенциально. Такое поле называют вихревым.

Близкое к однородному магнитное поле может быть создано с помощью катушек с током – соленоидов и катушек Гельмгольца.

Соленоидом называется цилиндрическая катушка с обмоткой (провод, навитый на цилиндрический каркас). Внутри длинного соленоида, с отношением длины соленоида к его диаметру не меньше 10, магнитное поле однородно и его индукция равна

$$B = \mu_0 n I, \tag{5}$$

где n – число витков соленоида, приходящееся на единицу его длины, I – сила тока в соленоиде.

Катушками (кольцами) Гельмгольца называется система, состоящая из двух одинаковых тонких катушек (колец), расположенных соосно на расстоянии, равном их радиусу. В пространстве между катушками создается почти однородное магнитное поле, и его индукцию можно рассчитать по формуле:

$$B = \mu_0 \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \frac{IN}{R}, \tag{6}$$

где N – число витков в каждой катушке, I – сила тока, проходящего через последовательно соединенные катушки, R – средний радиус катушки. В виртуальной лабораторной установке исследуется магнитное поле колец Гельмгольца, смоделированных на базе Comsol.

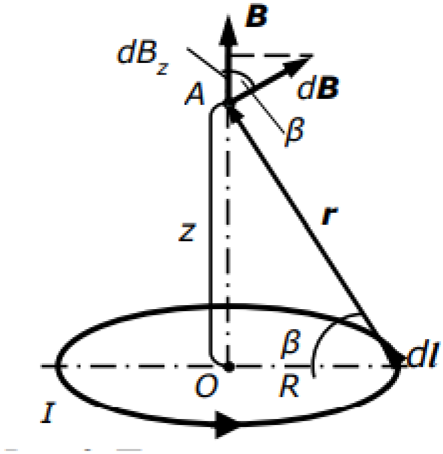

Рис. 2. Поле кругового тока

Магнитное поле колец Гельмгольца

Получим приведенную выше формулу (6) магнитной индукции в центре колец Гельмгольца. Рассмотрим магнитное поле, создаваемое током, протекающим по тонкому проводу, имеющему форму окружности радиуса R (круговой ток). Найдем магнитную индукцию B на оси кругового тока на расстоянии z от центра контура (рис. 2). Элемент тока dl создает в точке согласно закону Био – Савара – Лапласа индукцию, модуль которой равен

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}. \tag{7}$$

От всех элементов тока будет образовываться конус векторов dB. Из соображений осевой симметрии можно заключить, что результирующий вектор в точке будет направлен по оси z вверх. Это значит, что для нахождения модуля этого вектора необходимо сложить проекции векторов dB на ось z:

$$dB_z = dB\cos\beta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}\frac{R}{r} \tag{8}$$

Интегрируя выражение (7) по всему токовому контуру и учитывая, что $r = (z^2 + R^2)^{1/2}$, получим

$$B = B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \tag{9}$$

Формула (9) определяет величину магнитной индукции на оси кругового тока. Рассмотрим далее систему из двух кольцевых проводников одинакового радиуса R, соосно расположенных на оси z на расстоянии a друг от друга. Поместим начало координат в центре одного из колец (рис. 3). Если токи в каждом кольце одинаково направлены и равны по величине, то индукция магнитного поля в точке на расстоянии z от первого кольца равна сумме магнитных индукций полей, создаваемых токами первого 1 и второго 2 колец. Согласно формуле (9) имеем:

$$\begin{aligned} B_{1z} &= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}}; \\ B_{1z} &= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{[(z-a)^2 + R^2]^{3/2}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда индукция магнитного поля на оси колец в точке с координатой z равна

$$B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left[\frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} + \frac{1}{[(z-a)^2 + R^2]^{3/2}} \right], \tag{11}$$

где I – сила тока в каждом кольце, R – радиус кольца.

Неоднородность B_z в первом приближении характеризуется первой производной

$$\frac{dB_z}{dz} = \frac{3\mu_0 I R^2}{2} \left[\frac{-z}{(z^2 + R^2)^{5/2}} + \frac{-(z-a)}{[(z-a)^2 + R^2]^{5/2}} \right]. \tag{12}$$

При $z = \frac{a}{2}$ получаем $\frac{dB_z}{dz} = 0$. Найдем вторую производную:

$$\frac{d^2 B_z}{d^2 z} = \frac{3\mu_0 I R^2}{2} \cdot K \tag{13}$$

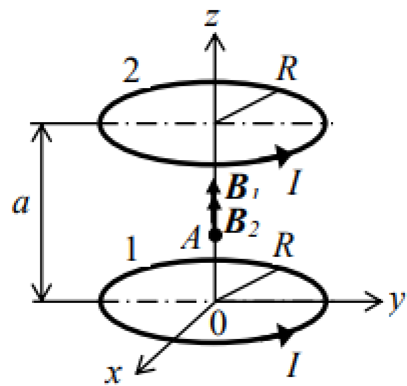

Рис. 3. Caption

где

$$K = \frac{5z^2}{(z^2+R^2)^{7/2}} - \frac{1}{(z^2+R^2)^{5/2}} + \\ + \frac{5(z-a)^2}{[(z-a)^2+R^2]^{7/2}} - \frac{1}{[(z-a)^2+R^2]^{5/2}} \quad (14)$$

В точке с $z = \frac{a}{2}$ вторая производная обращается в нуль при условии, что $a = R$.

Условия обращения в нуль выражений (12) и (13) позволяют утверждать, что для получения наилучшей однородности поля расстояние между кольцами должно равняться их радиусу. Два коаксиальных кольцевых проводника одинакового радиуса, расположенные в параллельных плоскостях, расстояние между которыми равно радиусу колец, называют кольцами Гельмгольца. Магнитное поле на оси колец Гельмгольца вблизи точки $z = \frac{R}{2}$ обладает высокой степенью продольной однородности. Можно также показать, что высокая однородность поля будет и в поперечном направлении. Таким образом, поле однородно в значительной части объема пространства между кольцами Гельмгольца. Графически результат сложения магнитных полей на оси колец Гельмгольца показан на рис.4

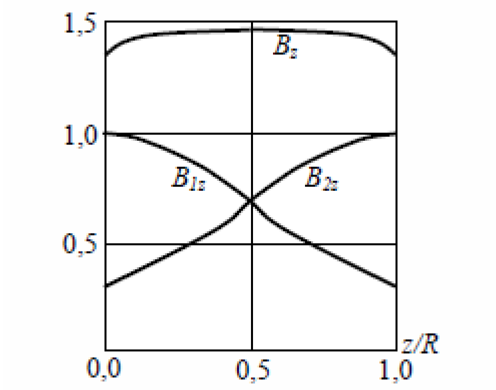

Рис. 4. Распределения магнитных полей между кольцами Гельмгольца

На рисунке представлены графики изменения B_{1z} и B_{2z} (в условных единицах) магнитных полей на оси каждого из колец Гельмгольца, а также суммарное поле B_z на оси системы колец. На рис. 5 изображены силовые линии магнитного поля колец Гельмгольца. Показаны лишь линии, лежащие в одной из плоскостей, проходящей через ось системы колец. Подобная картина имеет место в любой из этих плоскостей.

Данный результат получен для двух тонких колец с током. На практике, в реальной лабораторной работе, такую систему колец использовать нельзя, так как величина тока, необходимая для получения даже небольших полей будет слишком велика. Поэтому для получения однородных полей используют катушки с большим числом витков, которые называют катушками Гельмгольца. Катушки должны выполняться так, чтобы размеры сечения катушек были малы по сравнению с их средним радиусом. Расстояние между катушками, отсчитываемое от их центров, равно среднему радиусу катушек. Несмотря на конечный размер сечения катушек, высокая степень однородности магнитного поля сохраняется в большом объеме пространства между катушками Гельмгольца.

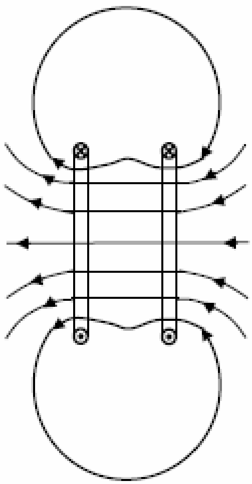

Рис. 5. Силовые линии от колец Гельмгольца

Описание виртуальной установки

Виртуальная установка представляет из себя приложение, собранное на базе Comsol Multiphysics - универсальной среде для численного моделирования систем, устройств и процессов во всех областях проектирования, производства и научных исследований. Установка (рис. 6) состоит из модели, состоящей из двух тонких колец, находящихся на произвольном расстоянии друг от друга. Значения радиусов, расстояния между кольцами и тока в кольцах в такой системе задаются пользователем с клавиатуры. Программа строит заданную модель и производит расчет магнитного поля в сферической области вокруг кольц Гельмгольца, используя встроенную в задачу физику магнитных полей, процесс вычисления может занять до 5 минут, в зависимости от производительности компьютера, на которой она запущена.

Лабораторный стенд содержит в себе область для ввода параметров с клавиатуры, кнопки с исполняемыми функциями и окно геомет-

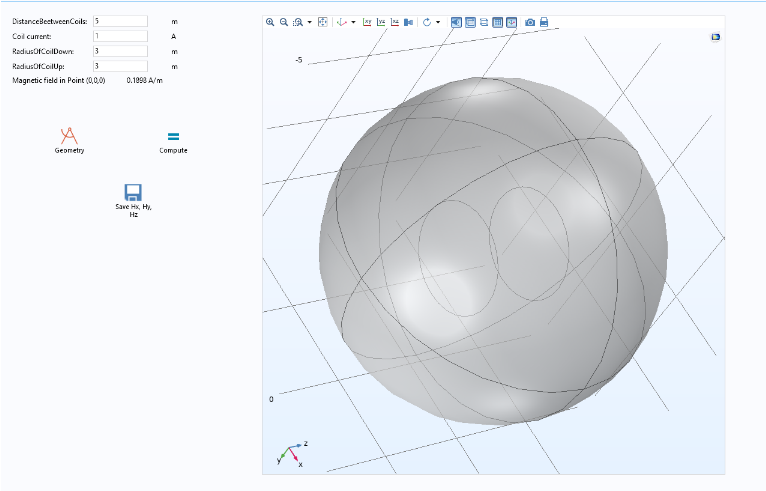

Рис. 6. Окно виртуальной лабораторной установки

рии модели колец Гельмгольца. С помощью панели инструментом, модель можно увеличивать (1) и уменьшать (2), а также увеличивать заданную пользователем область (3). Рассмотреть модель в удобном масштабе (или вернуть её в случае сдвига) можно с помощью стрелочек (4) в удобной проекции. С помощью (5) можно сохранить изображение геометрии или результатов визуализации в файл (рис.7). Ориентация определяется с помощью системы координат, расположенной под геометрией. Начало системы координат: точка, расположенная на оси симметрии системы на половине расстояния между кольцами.

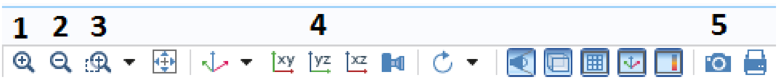

Рис. 7. Панель инструментов

Порядок выполнения работы

1. Запустите лабораторный стенд. Доступ к нему появится, после прохождения теста.

2. Установите значения расстояния между кольцами **Distance Between Coils** в диапазоне от 0 до 1 м. Запишите это значение d в лабораторный журнал.

3. Установите значение тока **Coil current** до 1 А. Запишите это значение I в лабораторный журнал.

4. Установите одинаковые значения для радиусов колец **Radius Of Coil Down** и **Radius Of Coil Up** в диапазоне от 0 до 1 м. Запишите эти значения R_1, R_2 в лабораторный журнал соответственно.

5. Постройте полученную геометрию кнопкой 

. Сохраните полученную геометрию, используя опцию 5 на панели сверху или сделайте скриншот экрана.

6. Запустите расчет магнитного поля системы колец кнопкой 

.

   Дождитесь окончания процесса. При необходимости отменить процесс нажмите .

7. Сохраните изображения с линиями магнитного поля в 3 различных проекциях как это описано в "Описание виртуальной лабораторной установки"или сделав скриншоты.

8. Выгрузите расчеты проекций величины магнитного поля B_x, B_y, B_z кнопкой 

.

   В названии файла должны быть указаны дата и время проведенных измерений, а также порядковый номер расчета..

9. Откройте файл. Убедитесь, что расчет происходил вдоль оси симметрии ($X = 0$, $Y = 0$)

10. Проделайте п.2-8 для 3-х случаев:

    - Радиусы колец равны, расстояние между кольцами меньше радиуса колец $(R_1 = R_2 > d)$.
    - Радиус колец одинаков, расстояние между кольцами больше радиуса колец $(R_1 = R_2 < d)$.
    - Радиус колец и расстояние между кольцами равны $(R_1 = R_2 = d)$.
    - Радиусы колец и расстояния между кольцами неравны друг другу $(R_1 \neq R_2 \neq d)$.

    Значение тока постоянно.

Обработка результатов

1. Используя массив выгруженных данных, восстановите векторное поле $\vec{B}$ и его величину $|\vec{B}|$ ($\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$, $\mu = 1$) вдоль оси системы колец. Изобразите на чертеже расположение колец.
$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z), |\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \tag{15}$$

2. Постройте графики зависимости величины поля $|\vec{B}|$ от расстояния z между кольцами.

3. Определите степень однородности поля вдоль оси z, посчитав величину градиента ∇B_z:
$$\nabla B_z \sim \frac{B_{z_i}}{B_{z_{i+1}}}, \tag{16}$$
где i - соотвествует значению B_z в точке с координатой z.

4. Определите степень однородности поля в плоскости $0XY$.
$$\nabla B_{xy} \sim \frac{B_{xy_i}}{B_{xy_{i+1}}}, \tag{17}$$
где $B_{xy_i} = \sqrt{B_{x_i}^2 + B_{y_i}^2}$

5. Определите интервалы Δz, в которых поле однородно с точностью до 1%, 2%, 3%,...,10%.

6. Расчитайте величину поля B_z по формуле 11 и сравните с полученными экспериментальными данными.

7. Проделайте п.1-6 для каждого случая из п.10 "Порядок выполнения работы".

8. Сделайте выводы о степени однородности поля внутри системы колец. Сформулируйте условие, при котором достигается наилучшая однородность магнитного поля в кольцах Гельмгольца. Сравните результат с теорией.

9. Занесите полученные расчеты и результаты в бланк отчета.

Контрольные вопросы

1. Что такое принцип суперпозиции?
2. Как называется силовая характеристика магнитного поля? В чем она измеряется в СИ?
3. Индукция магнитного поля это векторная или скалярная физическая величина?
4. Сформулируйте теорему о циркуляции вектора.
5. Что такое соленоид?
6. Что такое кольца Гельмгольца?
7. Как получить магнитное поле высокой однородности?