ENS LYON
L3 Probabilités

Lison Blondeau-Patissier & Anne Gagneux

Devoir maison numéro 1 – Correction

A rendre pour le 24 octobre.

Exercice 1 Variante Chernoff I

Adapter la preuve donnée en cours de Chernoff I pour trouver des bornes supérieures (exponentiellement décroissantes) sur $\mathbf{P}(X > (1+\delta)n)$ et $\mathbf{P}(X < (1-\delta)n)$ (préciser pour quels δ), où $X = X_1 + \cdots + X_n$ et les v.a. $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont iid de loi uniforme sur $\{0,1,2\}$.

Comme dans le cours, on se ramène à des variables aléatoires centrées : $Y_i := X_i - 1$ et $Y_i \sim \mathcal{U}(\{-1,0,1\})$, et on note $Y = Y_1 + \ldots + Y_n$.

On a alors, pour tout δ,

$$X \geqslant (1+\delta)n \iff Y \geqslant \delta n \tag{1}$$

On applique Markov :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(X \geqslant (1+\delta)n\right) &= \mathbf{P}\left(Y \geqslant \delta n\right) &(2)\\
&= P(tY \geqslant t\delta n) \quad \forall t > 0 &(3)\\
&\leqslant e^{-t\delta n}\mathbf{E}\left[e^{tY}\right] \quad \text{(Markov)} &(4)\\
&= e^{-t\delta n}\left(\mathbf{E}\left[e^{tY_1}\right]\right)^n \quad ((Y_i)_i \text{ IID}) &(5)
\end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{E}[e^{tY_1}] = \frac{1}{3}(e^{-t} + 1 + e^t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cosh(t) \tag{6}$$

On veut une borne sup simple sur $\mathbf{E}[e^{tY_1}]$: on peut vérifier via développement en série entière que $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cosh(t) \leqslant \exp(\frac{t^2}{3})$.

On peut aussi faire la majoration $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cosh(t) \leqslant \exp(\frac{t^2}{2})$.

On a donc pour tout $t > 0$:

$$\mathbf{P}\left(X \geqslant (1+\delta)n\right) \leqslant e^{-t\delta n + \frac{nt^2}{3}} \tag{7}$$

soit

$$\mathbf{P}\left(X \geqslant (1+\delta)n\right) \leqslant \min_{t>0} e^{-t\delta n + \frac{nt^2}{3}} \tag{8}$$

qui donne finalement pour $t = \frac{3}{2}\delta$

$$\mathbf{P}\left(X \geqslant (1+\delta)n\right) \leqslant \exp\left(-\frac{3}{4}n\delta^2\right) \tag{9}$$

(valable pour tout $\delta > 0$).

Avec la majoration $\exp(t^2/2)$, on obtient avec $t = \delta$ $\mathbf{P}\left(X \geqslant (1+\delta)n\right) \leqslant \exp\left(-\frac{n\delta^2}{2}\right)$.

Puis, $X \leqslant (1-\delta)n \iff Y \leqslant -\delta n$, et par symétrie, on a $\mathbf{P}\left(Y \leqslant -\delta n\right) = \mathbf{P}(Y \geqslant \delta n)$.

Exercice 2 Algorithmes de Las Vegas et Monte Carlo

Il y a deux grandes catégories d'algorithmes probabilistes. On appelle *algorithme de Las Vegas* un algorithme probabiliste qui donne toujours un résultat correct et dont le temps d'exécution est aléatoire. On appelle *algorithme Monte Carlo* un algorithme probabiliste dont le temps d'exécution est fixé mais qui renvoie un résultat parfois incorrect.

Soit $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ une fonction que l'on cherche à calculer.

1. Supposons que l'on a un algorithme de Las Vegas $\mathcal{A}$ pour f, i.e., l'algorithme $\mathcal{A}$ sur l'entrée x renvoie toujours $f(x)$ mais le temps d'exécution est aléatoire. On sait seulement que le temps d'exécution moyen est majoré par $T(n)$, où $n = |x|$. Construire un algorithme de temps d'exécution majoré (déterministiquement) par $O(T(n))$ mais qui peut renvoyer une réponse fausse avec probabilité au plus $\frac{1}{10}$.
L'algorithme $\mathcal{B}$ fonctionne de la manière suivante : on laisse tourner $\mathcal{A}$ pendant au plus $10T(n)$ unités de temps. Si $\mathcal{A}$ termine, on renvoie la réponse donnée par $\mathcal{A}$. Sinon, on interrompt $\mathcal{A}$ et on renvoit une réponse arbitraire, disons "Oui". Alors $\mathcal{B}$ est bien un algorithme de Monte-Carlo car il renvoie toujours une réponse au bout d'un temps donné (le temps d'execution n'est pas aléatoire), mais la réponse peut

être fausse dans certains cas. Soit x une entrée de taille n, et on note $t(x)$ la v.a. comptant le temps d'execution de $\mathcal{A}$ sur x lors de l'appel de $\mathcal{B}$: alors :

$$\mathbf{P}(\mathcal{B} \text{ se trompe sur } x) \leqslant \mathbf{P}(t(x) > 10T(n)) \leqslant \frac{\mathbf{E}(t(x))}{10\mathbf{E}(t(x))} = \frac{1}{10}$$

(On a appliqué Markov).

2. Supposons maintenant que l'on a un autre algorithme $\mathcal{A}$ qui, sur l'entrée x, renvoie $f(x)$ avec probabilité au moins $p > 0$, et dont le temps d'exécution est majoré par $T_1(n)$ où $n = |x|$. Supposons en plus qu'étant donné x et $\mathcal{A}(x)$, il est possible de vérifier de manière déterministe $\mathcal{A}(x) = f(x)$ en temps $T_2(n)$. Décrire un algorithme de Las Vegas pour calculer f avec un temps d'exécution d'espérance $O(\frac{T_1(n)+T_2(n)}{p})$.
L'algorithme total $\mathcal{B}$ consiste à appeler successivement $\mathcal{A}$ et l'algorithme qui vérifie $\mathcal{A} = f(x)$ jusqu'à que celui-ci renvoie "Vrai".

On calcule une borne sup sur $\mathbf{E}[T_\mathcal{B}]$ le temps d'espérance moyen :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_\mathcal{B}] &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathcal{B} \text{ se finit au tour } k) k (T_\mathcal{A} + T_2(n)) && (10)\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathcal{B} \text{ se finit au tour } k) k (T_1(n) + T_2(n)) && (11)\\
&= \mathbf{E}[X](T_1(n) + T_2(n)) && (12)\\
& && (13)
\end{aligned}$$

Où $X \leqslant \tilde{X} \sim \mathcal{G}(p)$ (temps d'attente du premier succès de $\mathcal{A}$ avec proba de succès $\geqslant p$). d'où

$$\mathbb{E}[T_\mathcal{B}] \leqslant \frac{1}{p}(T_1(n) + T_2(n)) \qquad (14)$$

Exercice 3 Aiguille de Buffon

Georges-Louis Leclerc de Buffon (1707–1788, scientifique et écrivain français) a proposé l'expérience suivante, visant à obtenir une approximation de π.

Considérons une aiguille de longueur a et un parquet composé de planches parallèles de même largeur l.

Dans un premier temps, on suppose $a < l$, et on s'intéresse à la probabilité que l'aiguille tombe à cheval sur deux planches. On se donne la modélisation suivante :

— r désigne la distance du centre de l'aiguille à la rainure la plus proche,

— $\theta \in [0, \pi/2]$ désigne l'angle formé par l'aiguille et l'une des rainures.

1. Quelles lois suivent r et θ ? r suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0, l/2])$ et θ suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0, \pi/2])$ (on se fiche du signe et des demi-tours que l'aiguille a effectuée durant sa chute).

2. Trouver une relation traduisant le fait que l'aiguille est tombée sur deux planches. En déduire la probabilité de cet événement.

FAIRE UN DESSIN.

L'aiguille repose sur deux planches lorsque $r < \frac{a}{2}\cos\theta$. Ainsi, la probabilité cherchée est :

$$\begin{aligned}
p &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{l/2} 1_{r<\frac{a}{2}\cos\theta}\ dF_r\ dF_\theta \\
&= \frac{4}{\pi l}\int_0^{\pi/2}\int_0^{l/2} 1_{r<\frac{a}{2}\cos\theta}\ dr\ d\theta \\
&= \frac{4}{\pi l}\int_0^{\pi/2} \frac{a}{2}\cos\theta\ d\theta \\
&= \frac{4}{\pi l}\frac{a}{2} = \frac{2a}{\pi l}.
\end{aligned}$$

La plupart l'ont fait avec $r < \frac{a}{2}\sin\theta$, mais ça dépend de qui est θ.

Ici on a $\sin(\theta) = \frac{r}{h}$ avec h la longueur de l'hypoténuse pour le triangle en pointillés, et on veut $\frac{a}{2} > h$, donc la condition est $r < \frac{a}{2}\sin(\theta)$.

On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{\text{croiser une rainure}\} &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{l/2} \mathbf{1}_{r<\frac{a}{2}\sin\theta}\, dF_r\, dF_\theta \\
&= \frac{4}{\pi l}\int_0^{\pi/2}\int_0^{l/2} \mathbf{1}_{r<\frac{a}{2}\sin\theta}\, dr\, d\theta \\
&= \frac{4}{\pi l}\int_0^{\pi/2} \frac{a}{2}\sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{4}{\pi l}\times\frac{a}{2}\times 1 = \frac{2a}{\pi l}.
\end{aligned}$$

3. Dans le cas où $a \geq l$, calculer la probabilité que l'aiguille tombe sur au moins deux planches. Qu'obtient on pour $a = l$? et pour $a \gg l$?

Cette fois, il est plus simple de calculer la probabilité que l'aiguille tombe sur exactement une planche. Déjà, il faut que $a\cos\theta < l$ sinon la "largeur" de l'aiguille est plus grande que la largeur d'une planche. Ensuite, il faut que $\frac{a}{2}\cos\theta < r$ pour que l'aiguille soit bien sur une seule planche.

FAIRE UN DESSIN.

Ainsi, la probabilité cherchée vérifie :

$$\begin{aligned}
1-p &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{l/2} 1_{\frac{a}{2}\cos\theta<r \text{ et } a\cos\theta<l}\ dF_r\ dF_\theta \\
&= \frac{4}{\pi l}\int_0^{\pi/2}\int_0^{l/2} 1_{\frac{a}{2}\cos\theta<r \text{ et } a\cos\theta<l}\ dr\ d\theta \\
&= \frac{4}{\pi l}\int_{\arccos\frac{l}{a}}^{\pi/2} (\frac{l}{2}-\frac{a}{2}\cos\theta)\ d\theta \\
&= \frac{2}{\pi l}\int_{\arccos\frac{l}{a}}^{\pi/2} (l-a\cos\theta)\ d\theta \\
&= \frac{2}{\pi l}\left((\frac{\pi l}{2}-a)-(l\arccos\frac{l}{a}-a\sin\arccos\frac{l}{a})\right) \\
&= 1-\frac{2a}{\pi l}\left(1+\frac{l}{a}\arccos\frac{l}{a}-\sqrt{1-\frac{l^2}{a^2}}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$p=\frac{2a}{\pi l}\left(1+\frac{l}{a}\arccos\frac{l}{a}-\sqrt{1-\frac{l^2}{a^2}}\right).$$

Si $a=l$, on retrouve $p=\frac{2}{\pi}$ comme à la question précédente.
Si $a>>l$, alors on a $u=\frac{l}{a}<<1$, et un développement limité donne :

$$p\approx\frac{2}{\pi}\frac{1}{u}\left(1+u(\frac{\pi}{2}-u)-(1-\frac{1}{2}u^2)+o(u^2)\right)=1-\frac{u}{\pi}=1-\frac{l}{\pi a}.$$

4. Maintenant qu'on a jeté des aiguilles, il ne reste plus qu'à jeter des ficelles. Une fois tombée à terre, la ficelle va former une courbe quelconque de longueur a dans le plan formé par le parquet, et on va s'intéresser cette fois au nombre de points d'intersection entre la ficelle et les rainures du parquet.
Calculer l'espérance du nombre de points d'intersection en fonction de la longueur de la ficelle. *Indice : on pourra approximer la ficelle par une succession de petits*

segments.

On voudrait calculer E_a l'espérance du nombre de points d'intersections pour une ficelle de longueur a.

Méthode 1. On constate la linéarité de E_*. En effet, jeter deux ficelles de longueurs a et b est équivalent à jeter une seule ficelle de longueur $a+b$ (on peut faire un dessin et montrer qu'on peut translater l'une des ficelles pour la "coller" à une extrémité de l'autre et ainsi obtenir une unique ficelles). Donc $E_a = C \times a + B$ (linéarité), et par ailleurs $E_0 = 0$ (ficelle de longueur nulle), d'où $B = 0$ et $E_a = C \times a$.

> **Méthode 1.1.** Par ailleurs, dans le cas d'une ficelle très courte, on se rapproche du cas de l'aiguille courte (avec $a < l$), et dans ce cas $E_a = \frac{2a}{\pi l}$, d'où $C = \frac{2}{\pi l}$.
> **Méthode 1.2.** On constate que dans le cas d'un cercle de rayon $\rho = \frac{l}{2}$, on a exactement 2 intersections avec les rainures du parquet, quelle que soit la façon dont la ficelle retombe dans l'espace. Donc $E_{\pi l} = 2$, et $C = \frac{2}{\pi l}$.

Dans les deux cas, on trouve $E_a = \frac{2a}{\pi l}$.

Méthode 2. L'idée dans le cas de la ficelle est d'approcher la courbe obtenue suite au lancer par une courbe affine par morceaux, avec des morceaux de même longueur $\varepsilon \to 0$. Chaque morceau peut alors être vu comme une aiguille de taille ε.

Soit $N \in \mathbf{N}$. On approche la ficelle par N aiguilles de taille $\frac{a}{N}$. On associe à chaque morceau la variable aléatoire X_i qui vaut 1 si le morceau touche deux planches, et 0 sinon (on néglige le cas où un morceau est pile sur une rainure car la probabilité d'un tel événement est nulle). Alors le nombre de points d'intersections est donné par $X(a, N) := X_1 + \ldots + X_N$. Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbf{E}[X(a, N)] = \mathbf{E}[X_1 + \cdots + X_N] = \mathbf{E}[X_1] + \cdots + \mathbf{E}[X_N] .$$

Comme on s'intéresse à la limite pour $N \to +\infty$, on peut supposer $\frac{a}{N} < l$, et on se retrouve dans le cas de l'aiguille courte. Mais alors on sait que $\mathbf{E}[X_i] = \frac{2}{\pi l} \times \frac{a}{N}$ pour tout i, d'où $\mathbf{E}[X(a, N)] = \frac{2a}{\pi l}$ *et l'espérance est constante quel que soit N.*

Conclusion : quelle que soit la méthode employée, on obtient $E_a = \dfrac{2a}{\pi l}$.

5. On se replace dans le cadre $a \leqslant l$. On a donc un moyen d'estimer $\frac{1}{\pi}$ puis π. On cherche désormais à contrôler l'erreur faite par cet estimateur.

Soit $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$ la variable aléatoire qui compte le nombre d'aiguilles tombées sur deux planches parmi n lancers. Trouver une borne supérieure sur

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{A}{n} - \frac{c}{\pi}\right| \geqslant \delta\right),$$

où c est une constante à définir.

Pour $a = l$, comment choisir n pour obtenir une précision 10^{-3} de $\frac{1}{\pi}$ avec 95% de confiance ?

Bonus : vous pouvez faire une simulation numérique pour vérifier ce résultat empiriquement.

$A \sim \mathcal{B}(n, p)$ où $p = \frac{2a}{\pi l}$ d'après la question 2. On peut utiliser Chebychev directement avec $\mu := \mathbf{E}[A] = \frac{2an}{\pi l}$ (la constante c vaut $c = \frac{2a}{l}$) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\left|\frac{A}{n} - \frac{2a}{\pi l}\right| \geqslant \delta\right) &= \mathbf{P}\left(|A - \mathbf{E}[a]| \geqslant n\delta\right) && (15)\\
&\leqslant \frac{\mathrm{Var}[A]}{n^2\delta^2} && (16)\\
&= \frac{np(1-p)}{n^2\delta^2} && (17)\\
&= \frac{1}{n\delta^2}\frac{2a}{\pi l}\left(1 - \frac{2a}{\pi l}\right) && (18)
\end{aligned}$$

On fixe $\delta = 10^{-3}$. On cherche n tel que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n\delta^2}\frac{2a}{\pi l}\left(1 - \frac{2a}{\pi l}\right) &= 0.05 && (19)\\
n &= \frac{1}{0.05 \times 10^{-6}}\frac{2a}{\pi l}\left(1 - \frac{2a}{\pi l}\right) && (20)
\end{aligned}$$

Pour le setting $a = l$, une application numérique donne $n \approx 4 \times 10^6$ (il faudrait donc lancer plus de 4 millions d'allumettes !)