

TD 08 – Méthode probabiliste et convergence des variables aléatoires

Exercice 1.

Théorème de Mycielski

La coloration d'un graphe G consiste à attribuer une couleur à chacun de ses sommets de manière que deux sommets reliés par une arête soient de couleurs différentes. Le nombre minimal de couleurs est appelé *nombre chromatique*, on le note $\chi(G)$.

Clairement, les graphes contenant de grandes cliques ont un grand nombre chromatique, mais la réciproque n'est pas vraie. Le but de cet exercice est de prouver le **théorème de Mycielski**¹ : pour tout entier $k \geq 2$, il existe un graphe G tel que G ne contient aucun triangle et avec pourtant $\chi(G) \geq k$.

1. Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ et soit G un graphe aléatoire avec n sommets où chaque arrête est présente indépendamment des autres avec probabilité $p = n^{\varepsilon-1}$. Montrer que quand n tend vers l'infini, la probabilité que G ait plus de $n/2$ triangles tend vers 0.
2. Soit $\alpha(G)$ la taille du plus grand *ensemble indépendant* de G (un ensemble indépendant est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents). Montrer que $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.
3. Soit $a = 3n^{1-\varepsilon} \ln n$. Montrer que :

$$\mathbf{P}\{\alpha(G) < a\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

En déduire qu'il existe n et G de taille n tels que G a au plus $\frac{n}{2}$ triangles et $\alpha(G) < a$.

¹. Jan Mycielski (1932–2025), mathématicien polono-américain.

4. Soit G un tel graphe. Soit G' un graphe obtenu à partir de G en supprimant le minimum de sommets afin que G' ne contienne aucun triangle. Montrer que :

$$\chi(G') > \frac{n^\varepsilon}{6 \ln n}$$

et conclure la preuve du théorème de Mycielski.

Exercice 2.

Second théorème de Borel–Cantelli

L'objectif de cet exercice est de montrer le second théorème de Borel–Cantelli². Il donne une réciproque du théorème de Borel–Cantelli vu en cours, dans le cas où les événements sont indépendants.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements *indépendants* de probabilité p_n , telle que la somme $\sum_n p_n$ diverge.

On veut montrer qu'alors, presque sûrement, une infinité d'événements A_n se réalisent.

1. Exprimer l'événement $E_\infty := \langle \text{« une infinité d'événements } A_n \text{ se réalisent »} \rangle$ en terme d'unions et d'intersections des événements A_n .
2. Soit $B_{k,\ell}$ l'événement $\cap_{k \leq n \leq \ell} \overline{A_n}$. Montrer que pour tout k fixé, $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{B_{k,\ell}\} = 0$.

Indice : on pourra utiliser l'inégalité $1 + x \leq e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. On note $B_k := \cap_{n \geq k} \overline{A_n}$. En déduire que $\mathbf{P}\{\cup_k B_k\} = 0$.
4. Conclure que $\mathbf{P}\{E_\infty\} = 1$.
5. *Application.* Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $p_n = \frac{1}{n}$.

Montrer que, presque sûrement, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contient un nombre infini de « 1 », mais un nombre fini de « 11 ».

2. Émile Borel (1871–1956), mathématicien français ; et Francesco Paolo Cantelli (1875–1966), mathématicien italien

Exercice 3.*Conditions de convergence*

Soit X_n une suite infinie de variables de Bernoulli indépendantes de paramètres $\mathbf{P}\{X_n = 1\} = 1 - p_n$, avec $0 \leq p_n \leq 1/2$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite X_n converge en distribution.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite X_n converge en probabilité.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite X_n converge presque sûrement.

Exercice 4.*Suite de bits aléatoires*

On se donne X_i une suite infinie de bits aléatoires non biaisés.

1. Montrer que presque sûrement tout mot fini apparaît dans la suite X_i .
2. En déduire que presque sûrement tout mot fini apparaît une infinité de fois dans la suite X_i .

Exercice 5.*Applications*

1. Soit $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires avec $\mathbf{E}[X_n] = 5$ et $\mathbf{Var}[X_n] = \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout n .
 $\{X_n\}$ converge-t-elle en probabilité vers 5 ?
2. Soient $\{X_n\}$ des variables aléatoires iid avec $\mathbf{E}[X_n] = 4$ et $\mathbf{Var}[X_n] = 9$ pour tout n .

Trouver $C(n, x)$ tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\{X_1 + \dots + X_n \leq C(n, x)\} = \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

3. Donner un exemple de suite $\{Y_n\}$ telle que :

- $\{Y_n\}$ converge en probabilité vers 0,
- $\{\frac{Y_n}{n}\}$ converge presque sûrement vers 0,
- mais $\{Y_n\}$ ne converge pas presque sûrement vers 0.