TD 11 – Chaînes de Markov : récurrence et transience (corrigé)

Exercice 1. *Suite de 1*

On considère $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernouilli de paramètre $p \in [0,1]$. On note $p_{k,n}$ la probabilité d'obtenir au moins k 1 consécutifs dans $U_1 \dots U_n$. Donner une formule pour $p_{k,n}$ en utilisant le formalisme des chaînes de Markov.

☞ On considère la chaîne de Markov $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $X_0 = 0$ et $X_{n+1} = (X_n+1)\,\mathbf{1}_{U_{n+1}=1}\mathbf{1}_{X_n<k} + k\,\mathbf{1}_{X_n=k}$ (autrement dit, X représente la longueur de la plus grande suite de 1 consécutifs rencontrée de longueur strictement inférieure à k, et dès qu'on observe une suite de k 1 consécutifs, X est constante égale à k). On a alors $p_{k,n} = \mathbf{P}\{X_n = k\} = P^n(0,k)$, où P est la matrice de transition de X. Elle est donnée par $P(x,0) = 1-p$ si $x<k$, $P(x,x+1) = p$ si $x<k$, $P(k,k) = 1$, et $P(x,y) = 0$ sinon.

Exercice 2. *Récurrence et Transience*

1. Soit $S = \{0,1,\dots,n\}$ et $0<p<1$. On considère M_1 la chaîne de Markov de matrice de transition P donnée par :

$$\text{pour } 0\le x<n,\ P(x,y) = \begin{cases} p & \text{si } y = x+1 \\ 1-p & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et } P(n,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dessiner le graphe associé à M_1. Quels sont ses états récurrents et ses états transients ?

☞ (Faire un dessin au tableau.) On a deux classes d'équivalence (deux sous-chaînes irréductibles) dans cette chaîne. La première contient les états $\{0,1,\dots,n-1\}$ et l'autre l'état n. L'état n est récurrent, car $\mathbf{P}\{T_n<\infty|X_0=n\} = 1$. Les autres états sont soit tous récurrents, soit tous transients (car ils sont dans la même composante fortement connexe du graphe). Étudions l'état $n-1$. On a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{T_{n-1}<\infty|X_0=n-1\} &\le \mathbf{P}\{X_1=0|X_0=n-1\}\\ &= 1-p\\ &<1.\end{aligned}$$

Les états 0 à $n-1$ sont donc transients.

2. Soit $S = \{1,\dots,6\}$. Compléter la matrice suivante pour qu'elle corresponde à la matrice de transition d'une chaîne de Markov.

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & . & 0 & 0 & 0 & 0\\ . & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & . & 0 & 7/8 & 0\\ 1/4 & 1/4 & 0 & . & 1/4 & 1/4\\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & . & 0\\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & . \end{pmatrix}$$

Déterminer quels sont ses états transitoires et récurrents.

☞ On complète avec

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0\\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4\\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0\\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

(Faire un dessin au tableau.) On voit qu'il y a deux composantes fortement connexes fermées (avec aucune arrête sortante) qui sont $C_1 = \{1,2\}$ et $C_2 = \{3,5\}$. L'ensemble $\{4,6\}$ est aussi fortement connexe mais n'est pas fermé. Si on regroupe ces composantes connexes et qu'on dessine l'arbre associé, l'ensemble $\{4,6\}$ est la racine de l'arbre, et les noeuds C_1 et C_2 sont ses fils et sont des feuilles de l'arbre. On pourrait s'arrêter là : comme le graphe est fini, on sait que les états dans les feuilles sont récurrents et les autres sont transients.
On va quand même faire la démonstration.

— Comme la composante C_1 est fermée et fortement connexe, la chaîne de Markov (X_n) d'état initial 1 ou 2 et de matrice de transition M est la même que la chaîne de Markov de même état initial et de matrice de transition $\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/3 & 2/3\end{pmatrix}$, sur l'ensemble d'états $\{1,2\}$. Cette chaîne est irréductible et a un nombre fini d'états, donc ses états sont récurrents.

— On montre de même que les états de C_2 sont récurrents.

— Montrons maintenant que l'état 4 n'est pas récurrent (comme il communique avec 6, cela montrera aussi que 6 est transitoire). On a $\mathbf{P}\{T_x<\infty|X_0=4\} \le \mathbf{P}\{X_1=6|X_0=4\} < 1$, donc 4 et 6 sont transitoires.

3. Montrer que la chaîne de Markov précédente contient deux ensembles fermés (*i.e.* aucun état en dehors de l'ensemble n'est accessible depuis un état dans l'ensemble) irréductibles non vides C_1 et C_2. Calculer, pour $i \in \{1,2\}$, la probabilité

$$\mathbf{P}\{X_n \in C_i \text{ à partir d'un certain temps} \mid X_0 = 6\}.$$

☞ On a déjà défini à la question précédents deux ensembles non vides C_1 et C_2 fermés et irréductibles. Calculons la probabilité que $X_n \in C_1$ à partir d'un certain temps, en partant de 6. Comme C_1 est fermé, une suite qui entre dans C_1 n'en ressortira plus. De même, une telle suite ne peut pas rentrer dans C_2 (sinon elle n'en sortirait plus pour aller dans C_1). Donc une telle suite oscille entre 4 et 6 puis fini par rentrer dans C_1. On partitionne ces suites en fonction de l'instant k du dernier passage en 6 (un tel instant existe car on part de 6). Après ce dernier passage en 6, la suite ira soit directement en 2, soit en 4 puis en 1 ou 2. On obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X_n \in C_1 \text{ à partir d'un certain temps} \mid X_0 = 6\} &= \sum_k \mathbf{P}\{X_k = 6\} \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{3}{10} \times \sum_k \mathbf{P}\{X_k = 6\}.\end{aligned}$$

De même, en inversant les rôles de C_1 et C_2 on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X_n \in C_2 \text{ à partir d'un certain temps} \mid X_0 = 6\} &= \sum_k \mathbf{P}\{X_k = 6\} \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{5}{20} \times \sum_k \mathbf{P}\{X_k = 6\}.\end{aligned}$$

Pour finir le calcul, il faut calculer $\sum_k \mathbf{P}\{X_k = 6\}$. On peut éviter un calcul direct en remarquant que

$$\mathbf{P}\{X_n \in C_1 \text{ à partir d'un certain temps} \mid X_0 = 6\} + \mathbf{P}\{X_n \in C_2 \text{ à partir d'un certain temps} \mid X_0 = 6\} = 1.$$

En effet, on sait qu'une suite qui rentre dans C_1 ou C_2 n'en ressort jamais. On a donc trois possibilités, la suite rentre dans C_1, ou bien elle rentre dans C_2, ou bien elle reste tout le temps dans $\{4,6\}$. Mais si $X_n \in \{4,6\}$ pour tout n, alors N_6 ou N_4 est infini (nombre de passage en 4 ou 6). Or, on a vu que 4 et 6 sont transitoires, donc on sait qu'un tel événement arrive avec probabilité 0.
Par conséquent, $\sum_k \mathbf{P}\{X_k = 6\}(3/10 + 5/20) = 1$. On obtient $\sum_k \mathbf{P}\{X_k = 6\} = 20/11$, d'où :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X_n \in C_1 \text{ à partir d'un certain temps} \mid X_0 = 6\} = 6/11 \\ \mathbf{P}\{X_n \in C_2 \text{ à partir d'un certain temps} \mid X_0 = 6\} = 5/11.\end{aligned}$$

Exercice 3. *Chaines de Markov ?*

Soit $M_0 = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov associée à une matrice de transition P sur un ensemble d'états S. On définit les suites M_i suivantes :

1. Soit $r \in N$. On pose $M_1 = (X_{r+n})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On pose $M_2 = (X_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On suppose $S \subset \mathbb{Z}$, et on pose $M_3 = (2X_n + 1)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Toujours en supposant $S \subset \mathbb{Z}$, on pose $M_4 = (\lfloor X_n/10 \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. On pose $M_5 = (X_n, X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
6. On suppose les états de S numérotés avec $S = \{S_1, S_2, \dots\}$. On définit $S' = \{T_{12}, S_3, S_4, \dots\}$ (on a remplacé les deux premiers états de S par un nouvel état T_{12}). On définit $Y_n = X_n$ si $X_n \in S \setminus \{S_1, S_2\}$ et $Y_n = T_{12}$ sinon (on a fusionné les deux premiers états de la chaîne). On pose $M_6 = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour chaque M_i, on vous demande de dire :

- **a.** Est-ce que M_i est une chaîne de Markov ? On demande une preuve ou un contre-exemple.
- **b.** Si oui, donner la matrice de transition de M_i.

☞ Pour montrer qu'une suite de variables Y_n est une chaîne de Markov, il faut montrer qu'elle n'a pas de mémoire (dans les cas positifs ci dessus, il suffit d'écrire les choses et tout marche bien). Plus bas, on donne seulement les matrices de transitions ou les contre-exemples.

1. Oui, avec la même matrice P.
2. Oui, avec la matrice P^2.
3. Oui, car $x \mapsto 2x+1$ est une injection. On note S' l'image de S par cette injection. La matrice de transition de $(2X_n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ est toujours P, une fois qu'on a appliqué la bijection sur les états.
4. Non, car $x \mapsto \lfloor x/10 \rfloor$ n'est pas une injection. Par exemple, on considère une marche sur $\mathbb{Z}$ qui à chaque fois se déplace de 1 sur la droite avec probabilité 1 (i.e. $P(x, x+1) = 1$). Alors :

$$\mathbf{P}\{\lfloor X_n/10 \rfloor = 2 \mid \lfloor X_{n-1}/10 \rfloor = 1 \cap \lfloor X_{n-2}/10 \rfloor = 0\} = 0 \neq \mathbf{P}\{\lfloor X_n/10 \rfloor = 2 \mid \lfloor X_{n-1}/10 \rfloor = 1\}.$$

L'intuition est que comme $\lfloor X_n/10 \rfloor$ augmente de 1 tous les 10 coups, alors les 10 coups précédents peuvent apporter de l'information (et pas juste le précédent).

5. Oui, avec la matrice de transition Q donnée par :

$$Q((x,y),(u,v)) = 0 \quad \text{si } y \neq u \qquad \text{et} \qquad Q((x,y),(y,z)) = P(y,z) \quad \text{sinon.}$$

Par exemple, pour $S = \{0,1\}$, on peut dessiner Q en fonction de P :

$$\text{si } P := \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}, \qquad \text{alors } Q := \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1-q \\ 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1-q \end{pmatrix}.$$

6. Non, contre-exemple : la chaîne définie sur $\{1,2,3\}$ par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (i.e. un cycle de taille 3). Si on fusionne les états 1 et 2 ce n'est plus une chaîne de Markov : on a $\mathbf{P}\{Y_2 = 3 \mid Y_1 = T_{12} \text{ et } Y_0 = T_{12}\} = 1 \neq 0 = \mathbf{P}\{Y_2 = 3 | Y_1 = T_{12} \text{ et } Y_0 = 3\}$.

Exercice 4. *Classification des états*

On dispose de trois chaînes de Markov définies par les matrices de transition suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune d'entre elles :

1. Donner sa représentation graphique.
2. Partitionner les états en composantes irréductibles.
3. Pour chaque état, dire s'il est transient ou récurrent.
4. Pour chaque état, dire s'il est périodique ou apériodique.
5. Donner la distribution stationnaire.
6. Pour chaque état, donner le temps de retour moyen.

☞

A
2. Il y a une composante fortement connexe fermée $C_1 = \{1,3\}$ et une composante fortement connexe non fermée $C_2 = \{2\}$.
3. Pour l'état 1, on a $\sum_{t\geq 1} r_{1,1}^t = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{2^t} = 1$, donc 1 est récurrent.
   De même, pour 3 a $\sum_{t\geq 1} r_{3,3}^t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^t = 1$, donc 3 est récurrent.
   Enfin, l'état 2 est transient.
4. La chaîne est apériodique (car la diagonale de la matrice de transition est non nulle).
5. La distribution stationnaire, *i.e.* l'unique mesure de probabilité invariante, est $\pi = (\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5})$.
6. Par le théorème du cours, on a, pour tout x, $\pi(x) = \frac{1}{\mathsf{E}_x(T_x)}$. On obtient $\mathsf{E}_1(T_1) = \frac{5}{2}$, $\mathsf{E}_2(T_2) = \infty$ et $\mathsf{E}_3(T_3) = \frac{5}{3}$.

B
2. Il y a une composante fortement connexe fermée $C_1 = \{4\}$ et une composante fortement connexe non fermée $C_2 = \{1,3,3\}$.
3. L'état 4 est récurrent. Les états 2, 3 et 4 sont transients.
4. L'état 4 est apériodique. Les états 2, 3 et 4 sont périodiques de période 3.
5. On calcule $\pi = (0,0,0,1)$ (et 4 est un état absorbant).
6. On en déduit $\mathsf{E}_4(T_4) = 1$ et $\mathsf{E}_1(T_1) = \mathsf{E}_2(T_2) = \mathsf{E}_3(T_3) = \infty$.

C
2. La chaîne est irréductible : tous les états communiquent.
3. Tous les états sont récurrents.
4. Tous les états sont apériodiques.
5. Le distribution stationnaire est $\pi = (\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{4}{7})$ (on peut la calculer avec un pivot de Gauss).
6. On en déduit $\mathsf{E}_1(T_1) = \frac{7}{2}$, $\mathsf{E}_2(T_2) = 7$ et $\mathsf{E}_3(T_3) = \frac{7}{4}$.

Exercice 5. *Marche aléatoire sur Z non biaisée*

Soit $\{X_k\}$ des variables aléatoires discrètes indépendantes et identiquement distribuées. Chaque X_k prend la valeur 1 avec probabilité $1/2$ et -1 avec probabilité $1/2$. On définit alors une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On s'intéresse à la probabilité d'un retour à l'origine (en un temps fini).

1. S'il y a eu un retour à l'origine au temps m, que peut-on dire de m ? Montrer qu'un retour à l'origine au temps $2n$ arrive avec une probabilité $u_{2n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n}$.

☞ Déjà, on ne peut revenir à l'origine que si le temps m est pair.

Ensuite, on revient à l'origine au temps $2n$ si on a fait n pas à gauche parmi les $2n$ pas. Cela donne bien $u_{2n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n}$.

2. On définit de même la probabilité f_{2n} qu'un premier retour à l'origine se fasse au temps $2n$. Montrer que pour $n > 0$ les probabilités $\{f_{2k}\}$ et $\{u_{2k}\}$ vérifient la relation $u_{2n} = f_0 u_{2n} + f_2 u_{2n-2} + \cdots + f_{2n} u_0$ (on pose $u_0 = 1$ et $f_0 = 0$).

☞ On a pour tout $n > 0$:

$$\begin{aligned}
u_{2n} &= \mathbf{P}\{S_{2n}=0\} = \mathbf{P}\left\{\bigcup_{0<k\leq n} S_{2n}=0 \cap S_{2k}=0 \cap S_i \neq 0 \text{ pour } i<2k\right\} \\
&= \mathbf{P}\{S_{2n}=0 \cap S_i \neq 0 \text{ pour } i<2n\} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} S_{2n}=0 \cap S_{2k}=0 \cap S_i \neq 0 \text{ pour } i<2k \qquad \text{(par indépendance)} \\
&= u_0 f_{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} u_{2(n-k)} f_{2k} \qquad \text{(par indépendance + décalage)} \\
&= u_0 f_{2n} + u_2 f_{2n-2} + \ldots + u_{2n-2} f_2 + f_0 u_{2n}.
\end{aligned}$$

3. On définit les fonctions génératrices :

$$U(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{2m} x^m \text{ et } F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{2m} x^m$$

Déduire de la question précédente une relation simple entre $U(x)$ et $F(x)$.

☞ On a $U(x) = 1 + U(x) \cdot F(x)$.

Attention : la formule de la question précédente n'est pas vraie pour $n = 0$.

4. Montrer que $U(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. En déduire que $F(x) = 1 - \sqrt{1-x}$.

Indication : *on rappelle que* $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$.

☞ On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-4x}} &= (1-4x)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\ldots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!}(-4x)^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{(-2)^k k!}(-2)^k 2^k x^k = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k)!}{k!k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} x^k
\end{aligned}$$

On en déduit par changement de variable que

$$U(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} 2^{-2k} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Ainsi :

$$F(x) = \frac{U(x)-1}{U(x)} = 1 - \sqrt{1-x}.$$

5. Montrer que $f_{2m} = \frac{\binom{2m}{m}}{(2m-1)2^{2m}}$. ***Indication :*** *considérer* F'.

☞ On a $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{U(x)}{2}$.

Ainsi, $m \cdot f_{2m} = \frac{u_{2(m-1)}}{2} = \binom{2m-2}{m-1} 2^{-2m+1} = \frac{m}{2(2m-1)} \frac{\binom{2m}{m}}{2^{2m-1}}$, d'où la formule annoncée.

6. Définissons w_n la probabilité qu'un retour à l'origine se fasse au plus tard au temps n. Notre but est de savoir si l'on va revenir en un temps fini, c'est-à-dire déterminer $w_* = \lim_{n\to\infty} w_n$. Montrer que $w_* = F(1)$. Conclure.

☞ On a $w_n = \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} f_{2k} \to w_* = F(1) = 1$. On retourne presque sûrement à l'origine en un temps fini.