

## TD 08 – Méthode probabiliste et convergence des variables aléatoires

---

### Exercice 1.

*Théorème de Mycielski*

La coloration d'un graphe  $G$  consiste à attribuer une couleur à chacun de ses sommets de manière que deux sommets reliés par une arête soient de couleurs différentes. Le nombre minimal de couleurs est appelé *nombre chromatique*, on le note  $\chi(G)$ .

Clairement, les graphes contenant de grandes cliques ont un grand nombre chromatique, mais la réciproque n'est pas vraie. Le but de cet exercice est de prouver le **théorème de Mycielski**<sup>1</sup> : pour tout entier  $k \geq 2$ , il existe un graphe  $G$  tel que  $G$  ne contient aucun triangle et avec pourtant  $\chi(G) \geq k$ .

1. Soit  $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$  et soit  $G$  un graphe aléatoire avec  $n$  sommets où chaque arête est présente indépendamment des autres avec probabilité  $p = n^{\varepsilon-1}$ . Montrer que quand  $n$  tend vers l'infini, la probabilité que  $G$  ait plus de  $n/2$  triangles tend vers 0.
2. Soit  $\alpha(G)$  la taille du plus grand *ensemble indépendant* de  $G$  (un ensemble indépendant est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents). Montrer que  $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$ .
3. Soit  $a = 3n^{1-\varepsilon} \ln n$ . Montrer que :

$$\mathbf{P} \{ \alpha(G) < a \} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

En déduire qu'il existe  $n$  et  $G$  de taille  $n$  tels que  $G$  a au plus  $\frac{n}{2}$  triangles et  $\alpha(G) < a$ .

---

1. Jan Mycielski (1932–2025), mathématicien polono-américain.

4. Soit  $G$  un tel graphe. Soit  $G'$  un graphe obtenu à partir de  $G$  en supprimant le minimum de sommets afin que  $G'$  ne contienne aucun triangle. Montrer que :

$$\chi(G') > \frac{n^\varepsilon}{6 \ln n}$$

et conclure la preuve du théorème de Mycielski.

## Exercice 2.

*Second théorème de Borel–Cantelli*

L'objectif de cet exercice est de montrer le second théorème de Borel–Cantelli<sup>2</sup>. Il donne une réciproque du théorème de Borel–Cantelli vu en cours, dans le cas où les événements sont indépendants.

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements *indépendants* de probabilité  $p_n$ , telle que la somme  $\sum_n p_n$  diverge.

On veut montrer qu'alors, presque sûrement, une infinité d'événements  $A_n$  se réalisent.

1. Exprimer l'événement  $E_\infty :=$  « une infinité d'événements  $A_n$  se réalisent » en terme d'unions et d'intersections des événements  $A_n$ .
2. Soit  $B_{k,\ell}$  l'événement  $\cap_{k \leq n \leq \ell} \overline{A_n}$ . Montrer que pour tout  $k$  fixé,  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{B_{k,\ell}\} = 0$ .

*Indice : on pourra utiliser l'inégalité  $1 + x \leq e^x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .*

3. On note  $B_k := \cap_{n \geq k} \overline{A_n}$ . En déduire que  $\mathbf{P} \{\cup_k B_k\} = 0$ .
4. Conclure que  $\mathbf{P} \{E_\infty\} = 1$ .
5. *Application.* Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre  $p_n = \frac{1}{n}$ .

Montrer que, presque sûrement, la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  contient un nombre infini de « 1 », mais un nombre fini de « 11 ».

---

2. Émile Borel (1871–1956), mathématicien français ; et Francesco Paolo Cantelli (1875–1966), mathématicien italien

**Exercice 3.***Conditions de convergence*

Soit  $X_n$  une suite infinie de variables de Bernoulli indépendantes de paramètres  $\mathbf{P}\{X_n = 1\} = 1 - p_n$ , avec  $0 \leq p_n \leq 1/2$ .

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite  $X_n$  converge en distribution.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite  $X_n$  converge en probabilité.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite  $X_n$  converge presque sûrement.

**Exercice 4.***Suite de bits aléatoires*

On se donne  $X_i$  une suite infinie de bits aléatoires non biaisés.

1. Montrer que presque sûrement tout mot fini apparaît dans la suite  $X_i$ .
2. En déduire que presque sûrement tout mot fini apparaît une infinité de fois dans la suite  $X_i$ .

**Exercice 5.***Applications*

1. Soit  $\{X_n\}$  une suite de variables aléatoires avec  $\mathbf{E}[X_n] = 5$  et  $\mathbf{Var}[X_n] = \frac{1}{\sqrt{n}}$  pour tout  $n$ .  
 $\{X_n\}$  converge-t-elle en probabilité vers 5?
2. Soient  $\{X_n\}$  des variables aléatoires iid avec  $\mathbf{E}[X_n] = 4$  et  $\mathbf{Var}[X_n] = 9$  pour tout  $n$ .  
Trouver  $C(n, x)$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\{X_1 + \dots + X_n \leq C(n, x)\} = \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

3. Donner un exemple de suite  $\{Y_n\}$  telle que :

- $\{Y_n\}$  converge en probabilité vers 0,
- $\{\frac{Y_n}{n}\}$  converge presque sûrement vers 0,
- mais  $\{Y_n\}$  ne converge pas presque sûrement vers 0.