

TD 07 - Graphes aléatoires

Exercice 1.*Graphe aléatoire bipartite*

Soit $0 < p < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit un graphe aléatoire non orienté $H_{2n,p}$ de la manière suivante : on se donne une famille $\{X_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n\}$ de v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p . On pose alors $H_{2n,p} = (V, E)$ avec $V = \{1, \dots, 2n\}$ et

$$E = \{(i, j) \mid X_{i,j} = 1\} \subseteq \{1, \dots, n\} \times \{n+1, \dots, 2n\}.$$

1. Quelle est la loi du nombre d'arêtes de $H_{2n,p}$?
2. Quelle est l'espérance du nombre de sommets isolés de $H_{2n,p}$?
3. Dans cette question, on pose $p = c \log(n)/n$ pour un nombre réel $c > 0$.
 - i. Montrer que si $c > 1$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{H_{2n,p} \text{ a au moins un sommet isolé}\} = 0.$$

- ii. Montrer que si $c < 1$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{H_{2n,p} \text{ a au moins un sommet isolé}\} = 1.$$

4. Dans cette question, on pose $p = 1/2$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\text{tous les sommets de } H_{2n,p} \text{ ont un degré inférieur à } \frac{n}{2} + C\sqrt{n \log n}\right\} = 1.$$

Exercice 2. *K_4*

Soit G un graphe aléatoire de loi $G_{n,p}$. L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il y a un seuil $p_0 := n^{-2/3}$ tel que pour $p = o(p_0)$, le graphe G n'a pas de clique de taille 4 avec bonne probabilité, et que pour $p = \omega(p_0)$, le graphe G a au moins une clique de taille 4 avec bonne probabilité.

Rappels / définitions :

- Un graphe aléatoire G suit la loi $G_{n,p}$ s'il a n sommets et que chaque arrête est présente dans G avec probabilité p ;
- une clique de taille 4 est un ensemble de 4 sommets tous reliés deux à deux par des arêtes ;
- $p = o(p_0)$ signifie $\frac{p}{p_0} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$;
- $p = \omega(p_0)$ signifie $\frac{p_0}{p} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

1. Pour p quelconque, calculer $\mathbf{E}[X]$, où X est le nombre de cliques de taille 4 du graphe G .

2. Soit $p = o(p_0)$, montrer que $\Pr(X \neq 0) \rightarrow 0$ quand n tend vers l'infini.

On suppose maintenant $p = \omega(p_0)$, et on veut montrer que $\mathbf{P}\{X = 0\} \rightarrow 0$ quand n tend vers l'infini.

3. Montrer que $\mathbf{P}\{X = 0\} \leq \frac{\mathbf{Var}[X]}{\mathbf{E}[X]^2}$. Il suffira donc de montrer que $\frac{\mathbf{Var}[X]}{\mathbf{E}[X]^2} \rightarrow 0$.

4. Soit X_i des variables aléatoires à valeur dans $0, 1$ (et non indépendantes). Montrer que

$$\mathbf{Var}\left[\sum_i X_i\right] \leq \mathbf{E}\left[\sum_i X_i\right] + \sum_{i \neq j} \mathbf{E}[(X_i - \mathbf{E}[X_i])(X_j - \mathbf{E}[X_j])].$$

5. En déduire que $\mathbf{Var}[X] = o(\mathbf{E}[X]^2)$ et conclure.

Exercice 3.*Graphes connexes*

Un graphe non-orienté $G = (V, E)$ sur n sommets est *connexe* si, pour tous sommets u et v , il existe un chemin de u à v . Autrement dit, le graphe n'est pas connexe si l'on peut partitionner V en (A, B) de telle sorte qu'il n'existe aucune arête entre A et B .

1. Prouver que si $p = (2 + \varepsilon) \log n / n$ avec $\varepsilon > 0$, alors la probabilité qu'un graphe choisi aléatoirement dans $G_{n,p}$ soit connexe tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Exercice 4.*Théorème de Mycielski*

La coloration d'un graphe G consiste à attribuer une couleur à chacun de ses sommets de manière que deux sommets reliés par une arête soient de couleurs différentes. Le nombre minimal de couleurs est appelé *nombre chromatique*, on le note $\chi(G)$.

Clairement, les graphes contenant de grandes cliques ont un grand nombre chromatique, mais la réciproque n'est pas vraie. Le but de cet exercice est de prouver le théorème de Mycielski¹ : pour tout entier $k \geq 2$, il existe un graphe G tel que G ne contient aucun triangle et avec pourtant $\chi(G) \geq k$.

1. Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ et soit G un graphe aléatoire avec n sommets où chaque arrête est présente indépendamment des autres avec probabilité $p = n^{\varepsilon-1}$. Montrer que quand n tend vers l'infini, la probabilité que G ait plus de $n/2$ triangles tend vers 0.
2. Soit $\alpha(G)$ la taille du plus grand *ensemble indépendant* de G (un ensemble indépendant est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents). Montrer que $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.
3. Soit $a = 3n^{1-\varepsilon} \ln n$. Montrer que :

$$\mathbf{P}\{\alpha(G) < a\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

En déduire qu'il existe n et G de taille n tels que G a au plus $\frac{n}{2}$ triangles et $\alpha(G) < a$.

4. Soit G un tel graphe. Soit G' un graphe obtenu à partir de G en supprimant le minimum de sommets afin que G' ne contienne aucun triangle. Montrer que :

$$\chi(G') > \frac{n^\varepsilon}{6 \ln n}$$

et conclure la preuve du théorème de Mycielski.

¹. Jan Mycielski (1932–2025), mathématicien polono-américain.