

## TD 08 – Méthode probabiliste et convergence des variables aléatoires (corrigé)

---

### Exercice 1.

*Théorème de Mycielski*

La coloration d'un graphe  $G$  consiste à attribuer une couleur à chacun de ses sommets de manière que deux sommets reliés par une arête soient de couleurs différentes. Le nombre minimal de couleurs est appelé **nombre chromatique**, on le note  $\chi(G)$ .

Clairement, les graphes contenant de grandes cliques ont un grand nombre chromatique, mais la réciproque n'est pas vraie. Le but de cet exercice est de prouver le **théorème de Mycielski**<sup>1</sup> : pour tout entier  $k \geq 2$ , il existe un graphe  $G$  tel que  $G$  ne contient aucun triangle et avec pourtant  $\chi(G) \geq k$ .

- Soit  $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$  et soit  $G$  un graphe aléatoire avec  $n$  sommets où chaque arrête est présente indépendamment des autres avec probabilité  $p = n^{\varepsilon-1}$ . Montrer que quand  $n$  tend vers l'infini, la probabilité que  $G$  ait plus de  $n/2$  triangles tend vers 0.

☞ Pour trois sommets distincts  $a$ ,  $b$  et  $c$ , la probabilité d'être un triangle est  $p^3$ . Il y a  $\binom{n}{3}$  ensembles de trois sommets, donc l'espérance du nombre de triangle est  $E[N] \leq n^3 p^3$ . Par Markov,

$$\mathbf{P}\left\{N \geq \frac{n}{2}\right\} \leq \frac{n^3 p^3}{\frac{n}{2}} = 2n^2 p^3 = 2n^{3\varepsilon-1} \rightarrow 0.$$

- Soit  $\alpha(G)$  la taille du plus grand **ensemble indépendant** de  $G$  (un ensemble indépendant est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents). Montrer que  $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$ .

☞ Par définition de  $\chi(G)$ , il existe un coloriage de  $G$  avec  $\chi(G)$  couleurs, autrement dit une partition de  $V$  en  $\chi(G)$  ensembles indépendants. Alors pour chaque tel sous-ensemble  $A$ , on a  $\alpha(G) \geq |A|$ . Donc  $\chi(G) \times \alpha(G) \geq n$ , d'où le résultat.

- Soit  $a = 3n^{1-\varepsilon} \ln n$ . Montrer que :

$$\mathbf{P}\{\alpha(G) < a\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

En déduire qu'il existe  $n$  et  $G$  de taille  $n$  tels que  $G$  a au plus  $\frac{n}{2}$  triangles et  $\alpha(G) < a$ .

☞ Pour tous sommets  $v_1, \dots, v_a$  distincts, on a

$$\mathbf{P}\{\{v_1, \dots, v_a\} \text{ est indépendant}\} = (1-p)^{\frac{a(a-1)}{2}}.$$

Donc

$$\mathbf{P}\{\alpha(G) \geq a\} \leq \binom{n}{a} (1-p)^{\frac{a(a-1)}{2}} < n^a (1-p)^{\frac{a(a-1)}{2}} < n^a e^{-p \frac{a(a-1)}{2}} \rightarrow 0.$$

Donc (question 1 et question 3) il existe  $n$  et  $G$  de taille  $n$  tels que  $G$  a au plus  $\frac{n}{2}$  triangles et  $\alpha(G) < a$ .

- Soit  $G$  un tel graphe. Soit  $G'$  un graphe obtenu à partir de  $G$  en supprimant le minimum de sommets afin que  $G'$  ne contienne aucun triangle. Montrer que :

$$\chi(G') > \frac{n^\varepsilon}{6 \ln n}$$

et conclure la preuve du théorème de Mycielski.

☞ Par la question 2, on a

$$\chi(G') \geq \frac{|G'|}{\alpha(G')} > \frac{n}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{n^\varepsilon}{6 \ln n}.$$

Ce qui conclut la preuve du théorème (pour  $n$  assez grand, on peut obtenir  $G'$  sans triangle avec  $\chi(G')$  aussi grand que l'on veut).

---

1. Jan Mycielski (1932–2025), mathématicien polono-américain.

## Second théorème de Borel–Cantelli

L'objectif de cet exercice est de montrer le second théorème de Borel–Cantelli<sup>2</sup>. Il donne une réciproque du théorème de Borel–Cantelli vu en cours, dans le cas où les événements sont indépendants.

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements *indépendants* de probabilité  $p_n$ , telle que la somme  $\sum_n p_n$  diverge. On veut montrer qu'alors, presque sûrement, une infinité d'événements  $A_n$  se réalisent.

- Exprimer l'événement  $E_\infty := \langle\langle$  une infinité d'événements  $A_n$  se réalisent  $\rangle\rangle$  en terme d'unions et d'intersections des événements  $A_n$ .

Soit  $\omega \in \Omega$  un élément de l'espace de probabilité. Alors  $\omega$  appartient à  $E_\infty$  si et seulement si  $\omega$  appartient à une infinité de  $A_n$ , i.e. si et seulement si  $\omega \in \cap_{k \geq 0} \cup_{n \geq k} A_n$ . Donc :

$$E_\infty = \cap_{k \geq 0} \cup_{n \geq k} A_n.$$

On l'appelle aussi  $\limsup A_n$ .

- Soit  $B_{k,\ell}$  l'événement  $\cap_{k \leq n \leq \ell} \overline{A_n}$ . Montrer que pour tout  $k$  fixé,  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} P\{B_{k,\ell}\} = 0$ .

*Indice : on pourra utiliser l'inégalité  $1 + x \leq e^x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .*

Par indépendance des  $A_n$  (et donc indépendance de leur complémentaire), on a  $P\{B_{k,\ell}\} = \prod_{n=k}^{\ell} (1 - p_n)$ . En utilisant l'indice, on a alors  $P\{B_{k,\ell}\} \leq \prod_{n=k}^{\ell} e^{-p_n} = e^{-\sum_{n=k}^{\ell} p_n}$ . Mais par hypothèse, la somme des  $p_n$  diverge, donc pour tout  $k$  fixé,  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^{\ell} p_n = +\infty$ . On conclut que  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} P\{B_{k,\ell}\} = 0$ .

- On note  $B_k := \cap_{n \geq k} \overline{A_n}$ . En déduire que  $P\{\cup_k B_k\} = 0$ .

Il suffit de montrer que  $P\{B_k\} = 0$  pour tout  $k$ . On aura alors  $P\{\cup_k B_k\} \leq \sum_k P\{B_k\} = 0$ . Mais  $P\{B_k\} = P\{\cap_{n \geq k} \overline{A_n}\} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} P\{B_{k,\ell}\}$ , car les événements  $B_{k,\ell}$  sont décroissants et leur intersection est égale à  $B_k$ . On conclut avec la question précédente que  $P\{B_k\} = 0$ .

- Conclure que  $P\{E_\infty\} = 1$ .

Par la première question,  $E_\infty = \cap_{k \geq 0} \cup_{n \geq k} A_n$ . Le complémentaire de cet événement est  $\overline{E_\infty} = \cup_{k \geq 0} \cap_{n \geq k} \overline{A_n} = \cup_{k \geq 0} B_k$ . Par la question précédente, on a donc  $P\{\cap_{k \geq 0} \cup_{n \geq k} A_n\} = 1 - P\{\cup_{k \geq 0} B_k\} = 1$ .

- Application.* Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre  $p_n = \frac{1}{n}$ . Montrer que, presque sûrement, la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  contient un nombre infini de « 1 », mais un nombre fini de « 11 ».

Commençons par montrer que presque sûrement la suite  $X_n$  contient un nombre infini de '1'. On note  $A_n$  l'événement «  $X_n = 1$  ». On a  $P\{A_n\} = 1/n$ , et donc  $\sum_n P\{A_n\}$  diverge. De plus, les  $A_n$  sont indépendants car les  $X_n$  le sont. D'après le second théorème de Borel–Cantelli, on a donc  $P\{\langle\langle$  une infinité d'événements  $A_n$  se réalisent  $\rangle\rangle\} = 1$ , ce qui est équivalent à dire que presque sûrement la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  contient une infinité de 1.

Montrons maintenant que presque sûrement la suite  $X_n$  ne contient qu'un nombre fini de '11'. On utilise cette fois le théorème de Borel–Cantelli vu en cours. Soit  $C_n$  l'événement «  $X_n = X_{n+1} = 1$  ». Par indépendance de  $X_n$  et  $X_{n+1}$ , on a  $P\{C_n\} = 1/(n^2 + n) \leq 1/n^2$ .

*Remarque : Les  $C_n$  ne sont pas indépendants, mais l'indépendance n'est pas nécessaire pour le théorème de Borel–Cantelli dans ce sens. Donc la somme  $\sum_n P\{C_n\}$  converge. D'après le théorème de Borel–Cantelli, on conclut que presque sûrement, seuls un nombre fini d'événements  $C_n$  sont réalisés. C'est-à-dire, presque sûrement il n'y a qu'un nombre fini de '11' dans la suite des  $X_n$ .*

Comme l'intersection de deux événements presque sûrs est aussi presque sûre, on conclut que presque sûrement la suite  $X_n$  contient un nombre infini de '1', mais seulement un nombre fini de '11'.

2. Émile Borel (1871–1956), mathématicien français; et Francesco Paolo Cantelli (1875–1966), mathématicien italien

### Exercice 3.

*Conditions de convergence*

Soit  $X_n$  une suite infinie de variables de Bernoulli indépendantes de paramètres  $\mathbf{P}\{X_n = 1\} = 1 - p_n$ , avec  $0 \leq p_n \leq 1/2$ .

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite  $X_n$  converge en distribution.

☞ Supposons que les variables  $X_n$  convergent en distribution vers une variable  $X$ . Les fonctions de répartitions  $F_{X_n}$  des variables  $X_n$  sont comme sur la Figure ??.

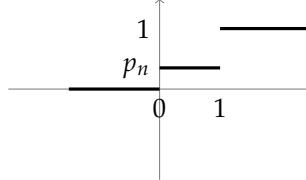


FIGURE 1 – Fonction de répartition de  $X_n$

En particulier, elles sont continues en  $1/2$ , et pour tout  $n$ , on a  $F_{X_n}(1/2) = p_n$ . Notons  $p = F_X(1/2)$ . Par définition de la convergence en distribution, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ ; en particulier, les  $p_n$  convergent.

À l'inverse, supposons que les  $p_n$  convergent vers une constante  $p$ . Comme  $[0, 1]$  est fermé et que les  $p_n$  vivent dans  $[0, 1]$ , on a  $p \in [0, 1]$ . Définissons  $X$  la variable de Bernoulli de paramètre  $p$ . Alors, on a bien, pour tout  $x \neq \{0, 1\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ , i.e.  $X_n$  converge en distribution vers  $X$ .

On conclut que  $X_n$  converge en distribution ssi  $p_n$  converge. *Intuitivement : « les lois des  $X_n$  sont proches. »*

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite  $X_n$  converge en probabilité.

☞ Comme la convergence en probabilité implique la convergence en distribution, on sait qu'une condition nécessaire est que les  $p_n$  convergent. Mais ce n'est pas une condition suffisante. Supposons par exemple que  $p_n = 1/2$  pour tout  $n$ . Alors les  $p_n$  sont bien convergents, mais, en prenant  $\varepsilon = 1/2$ , on a  $\mathbf{P}\{|X_n - X_{n+1}| \geq \varepsilon\} = \mathbf{P}\{X_n \neq X_{n+1}\} = 1/2$  par indépendance des  $X_n$ . Cette quantité ne tend clairement pas vers zéro, donc les  $X_n$  ne peuvent pas converger en probabilité. Le problème ici est que les  $X_n$  suivent bien la même loi, mais comme ils sont indépendants, rien ne nous assure que leurs valeurs seront proches.

Reprenons notre condition nécessaire. Supposons que  $X_n$  converge en probabilité vers  $X$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a  $\mathbf{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0$ . Par inégalité triangulaire, cela implique que  $\mathbf{P}\{|X_n - X_{n+1}| \geq 2\varepsilon\} \rightarrow 0$ . Prenons  $2\varepsilon = 1/2$ .

On obtient  $\mathbf{P}\{|X_n - X_{n+1}| \geq 2\varepsilon\} = \mathbf{P}\{X_n \neq X_{n+1}\} \geq p_n$ . En effet, une fois  $X_{n+1}$  fixé, on a  $\mathbf{P}\{X_n \neq X_{n+1}\} = p_n$  si  $X_{n+1} = 1$  et  $\mathbf{P}\{X_n \neq X_{n+1}\} = 1 - p_n$  si  $X_{n+1} = 0$ . Dans tous les cas, cette probabilité est supérieur à  $p_n$ , car on a choisi  $p_n \leq 1/2$ .

On en déduit donc que  $p_n \rightarrow 0$ .

Supposons maintenant  $p_n \rightarrow 0$ , et notons  $X$  la variable aléatoire valant toujours 1. On a, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mathbf{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = \mathbf{P}\{X_n = 0\} = p_n \rightarrow 0.$$

On en conclut que  $X_n$  converge en probabilité vers  $X$ .

On a donc que  $X_n$  converge en probabilité ssi  $p_n$  tend vers 0 (avec la contrainte  $p_n \leq 1/2$ ).

*Intuitivement : « les valeurs des  $X_n$  sont proches ».*

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite  $X_n$  converge presque sûrement.

☞ On a vu que si la suite  $X_n$  converge presque sûrement, alors elle converge vers 1 (car elle converge en probabilité). On veut donc montrer que  $\mathbf{P}\{X_n \rightarrow 1\} = 1$ , quitte à faire quelques hypothèses supplémentaires sur les  $p_n$ .

On sait, d'après le lemme de Borel–Cantelli, que si  $\sum_n p_n$  converge alors avec probabilité 1 un nombre fini de variables  $X_n$  valent 0 (car les événements «  $X_n = 0$  » ont probabilité  $p_n$ ). Mais dire qu'un nombre fini de variables  $X_n$  valent 0 est équivalent à dire que les  $X_n$  convergent vers 1, car les variables  $X_n$  sont à valeur dans  $\{0, 1\}$ . On en déduit donc que si  $\sum_n p_n$  converge, alors  $X_n$  converge vers 1 presque sûrement. Pour la réciproque, on utilise le second théorème de Borel–Cantelli, qui dit que si les  $X_n$  sont indépendants et que  $\sum p_n$  diverge, alors avec probabilité 1 il existe une infinité de  $X_n$  valant 0. En particulier,  $X_n$  ne peut pas converger vers 1. On en déduit donc que si  $X_n$  converge presque sûrement, alors  $\sum_n p_n$  converge.

On a donc que  $X_n$  converge presque sûrement ssi  $\sum_n p_n$  converge.

### Exercice 4.

*Suite de bits aléatoires*

On se donne  $X_i$  une suite infinie de bits aléatoires non biaisés.

1. Montrer que presque sûrement tout mot fini apparaît dans la suite  $X_i$ .

☞ Soit  $w$  un mot fini de longueur  $k$ . Pour tout  $j \geq 0$ , on définit  $A_j$  l'événement «  $X_{k(j+1)} \cdots X_{k(j+1)+k-1} = w$  ». On a  $\mathbf{P}\{A_j\} = \frac{1}{2^k}$ . De plus, par indépendance des  $X_i$  (et lemme de groupement par paquets), les événements  $A_j$  sont indépendants. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{w \text{ n'apparaît pas dans la suite } X_i\} &\leq \mathbf{P}\{\cap_{j \in \mathbb{N}} \overline{A_j}\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\cap_{0 \leq j \leq N} \overline{A_j}\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2^k - 1}{2^k}\right)^N \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc  $w$  apparaît dans la suite  $X_i$  avec probabilité 1.

On note maintenant  $Y_w$  l'événement « le mot  $w$  apparaît dans la suite  $X_i$  ». On a vu que pour tout  $w$  fini,  $\mathbf{P}\{Y_w\} = 1$ . De plus, il y a un nombre dénombrable de mots finis, i.e. un nombre dénombrables d'événements  $Y_w$ . On en déduit que  $\mathbf{P}\{\cup_w Y_w\} \leq \sum_w \mathbf{P}\{Y_w\} = 0$ , et finalement  $\mathbf{P}\{\cap_w Y_w\} = 1$ .

2. En déduire que presque sûrement tout mot fini apparaît une infinité de fois dans la suite  $X_i$ .

Tout mot fini est un sous-mot d'une infinité de mots fini distincts. Donc si une séquence infinie contient tout mot fini, elle contient tout mot fini une infinité de fois (car elle contiendra tous les sur-mots d'un mot fixé, et qu'il y en a une infinité).

### Exercice 5.

Applications

1. Soit  $\{X_n\}$  une suite de variables aléatoires avec  $\mathbf{E}[X_n] = 5$  et  $\mathbf{Var}[X_n] = \frac{1}{n}$  pour tout  $n$ .  $\{X_n\}$  converge-t-elle en probabilité vers 5 ?

Selon la définition,  $\{X_n\}$  converge en probabilité vers 5 signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\{|X_n - 5| > \varepsilon\} = 0.$$

Or, ici  $\mathbf{E}[X_n] = 5$ , donc pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'inégalité de Chebyshev nous donne :

$$\mathbf{P}\{|X_n - 5| > \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{Var}[X_n]}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$$

ce qui tend bien vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

2. Soient  $\{X_n\}$  des variables aléatoires iid avec  $\mathbf{E}[X_n] = 4$  et  $\mathbf{Var}[X_n] = 9$  pour tout  $n$ . Trouver  $C(n, x)$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\{X_1 + \dots + X_n \leq C(n, x)\} = \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Pour utiliser le Théorème Central Limite, on pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad \mu = \mathbf{E}[X_1], \quad \sigma = \sqrt{\mathbf{Var}[X_1]}, \quad Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}.$$

Soit  $Z$  une v.a. suivant une loi normale  $\mathcal{N}(0,1)$ , par le T.C.L. on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\{Z_n \leq x\} = \mathbf{P}\{Z \leq x\} = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt = \Phi(x).$$

Or, on a :

$$Z_n \leq x \iff \frac{\sum_{i=1}^n X_i - 4n}{3\sqrt{n}} \leq x \iff \sum_{i=1}^n X_i \leq 4n + 3x\sqrt{n}.$$

Donc en posant  $C(n, x) := 4n + 3x\sqrt{n}$  on obtient le résultat.

3. Donner un exemple de suite  $\{Y_n\}$  telle que :

- $\{Y_n\}$  converge en probabilité vers 0,
- $\{\frac{Y_n}{n}\}$  converge presque sûrement vers 0,
- mais  $\{Y_n\}$  ne converge pas presque sûrement vers 0.

On numérote tous les mots sur  $\{0,1\}$  par ordre croissant de longueur, i.e.  $w_1 = \varepsilon$ ,  $w_2 = 0$ ,  $w_3 = 1$ ,  $w_4 = 00$ , etc. On pose  $l_n$  la longueur du mot  $w_n$  ; on remarque que  $l_n$  est de l'ordre de  $\log n$ , car tous les mots entre  $w_{2^k}$  et  $w_{2^{k+1}-1}$  sont de longueur  $k$ .

On fait maintenant une infinité de lancers à pile ou face d'une pièce équilibrée, et on définit  $Y_n :=$  « le résultat des  $l_n$  premiers lancers correspond exactement au mot  $w_n$  » (avec par exemple 1 pour Pile et 0 pour Face).

De cette manière, pour tout  $k$ , exactement un  $Y_i$  parmi  $Y_{2^k}, \dots, Y_{2^{k+1}-1}$  vaut 1 et tous les autres valent 0.

Montrons que  $Y_n$  converge en probabilité vers 0. On a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}\{|Y_n| > \varepsilon\} = \mathbf{P}\{Y_n = 1\} = \frac{1}{2^{l_n}} \approx \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Puis, montrons que  $\frac{Y_n}{n}$  converge presque sûrement vers 0. Pour tout  $n$ , on a  $\left|\frac{Y_n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ , donc  $\mathbf{P}\left\{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Y_n}{n} = 0\right\} = 1$ .

Enfin, montrons que  $Y_n$  ne converge pas presque sûrement vers 0. Quel que soit  $k \in \mathbb{N}$ , il existe un  $Y_i$  parmi  $Y_{2^k}, \dots, Y_{2^{k+1}-1}$  qui vaut 1. Donc  $Y_n$  ne peut pas tendre vers 0, ce qui signifie que  $\mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = 0\} = 0$ .