

## TD 07 - Graphes aléatoires

**Exercice 1.***Grphe aléatoire bipartite*

Soit  $0 < p < 1$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On définit un graphe aléatoire non orienté  $H_{2n,p}$  de la manière suivante : on se donne une famille  $\{X_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n\}$  de v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . On pose alors  $H_{2n,p} = (V, E)$  avec  $V = \{1, \dots, 2n\}$  et

$$E = \{(i, j) \mid X_{i,j} = 1\} \subseteq \{1, \dots, n\} \times \{n+1, \dots, 2n\}.$$

1. Quelle est la loi du nombre d'arêtes de  $H_{2n,p}$  ?
2. Quelle est l'espérance du nombre de sommets isolés de  $H_{2n,p}$  ?
3. Dans cette question, on pose  $p = c \log(n)/n$  pour un nombre réel  $c > 0$ .
  - i. Montrer que si  $c > 1$ , alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{H_{2n,p} \text{ a au moins un sommet isolé}\} = 0.$$

- ii. Montrer que si  $c < 1$ , alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{H_{2n,p} \text{ a au moins un sommet isolé}\} = 1.$$

4. Dans cette question, on pose  $p = 1/2$ . Montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \text{tous les sommets de } H_{2n,p} \text{ ont un degré inférieur à } \frac{n}{2} + C\sqrt{n \log n} \right\} = 1.$$

**Exercice 2.***K<sub>4</sub>*

Soit  $G$  un graphe aléatoire de loi  $G_{n,p}$ . L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il y a un seuil  $p_0 := n^{-2/3}$  tel que pour  $p = o(p_0)$ , le graphe  $G$  n'a pas de clique de taille 4 avec bonne probabilité, et que pour  $p = \omega(p_0)$ , le graphe  $G$  a au moins une clique de taille 4 avec bonne probabilité.

**Rappels / définitions :**

- Un graphe aléatoire  $G$  suit la loi  $G_{n,p}$  s'il a  $n$  sommets et que chaque arête est présente dans  $G$  avec probabilité  $p$  ;
- une clique de taille 4 est un ensemble de 4 sommets tous reliés deux à deux par des arêtes ;
- $p = o(p_0)$  signifie  $\frac{p}{p_0} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$  ;
- $p = \omega(p_0)$  signifie  $\frac{p_0}{p} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

1. Pour  $p$  quelconque, calculer  $\mathbf{E}[X]$ , où  $X$  est le nombre de cliques de taille 4 du graphe  $G$ .
  2. Soit  $p = o(p_0)$ , montrer que  $\Pr(X \neq 0) \rightarrow 0$  quand  $n$  tend vers l'infini.
- On suppose maintenant  $p = \omega(p_0)$ , et on veut montrer que  $\mathbf{P}\{X = 0\} \rightarrow 0$  quand  $n$  tend vers l'infini.
3. Montrer que  $\mathbf{P}\{X = 0\} \leq \frac{\mathbf{Var}[X]}{\mathbf{E}[X]^2}$ . Il suffira donc de montrer que  $\frac{\mathbf{Var}[X]}{\mathbf{E}[X]^2} \rightarrow 0$ .
  4. Soit  $X_i$  des variables aléatoires à valeur dans  $0, 1$  (et non indépendantes). Montrer que

$$\mathbf{Var} \left[ \sum_i X_i \right] \leq \mathbf{E} \left[ \sum_i X_i \right] + \sum_{i \neq j} \mathbf{E} [(X_i - \mathbf{E}[X_i])(X_j - \mathbf{E}[X_j])].$$

5. En déduire que  $\mathbf{Var}[X] = o(\mathbf{E}[X]^2)$  et conclure.

**Exercice 3.***Graphes connexes*

Un graphe non-orienté  $G = (V, E)$  sur  $n$  sommets est *connexe* si, pour tous sommets  $u$  et  $v$ , il existe un chemin de  $u$  à  $v$ . Autrement dit, le graphe n'est pas connexe si l'on peut partitionner  $V$  en  $(A, B)$  de telle sorte qu'il n'existe aucune arête entre  $A$  et  $B$ .

1. Prouver que si  $p = (2 + \varepsilon) \log n / n$  avec  $\varepsilon > 0$ , alors la probabilité qu'un graphe choisi aléatoirement dans  $G_{n,p}$  soit connexe tend vers 1 quand  $n$  tend vers l'infini.

**Exercice 4.***Théorème de Mycielski*

La coloration d'un graphe  $G$  consiste à attribuer une couleur à chacun de ses sommets de manière que deux sommets reliés par une arête soient de couleurs différentes. Le nombre minimal de couleurs est appelé *nombre chromatique*, on le note  $\chi(G)$ .

Clairement, les graphes contenant de grandes cliques ont un grand nombre chromatique, mais la réciproque n'est pas vraie. Le but de cet exercice est de prouver le théorème de Mycielski<sup>1</sup> : pour tout entier  $k \geq 2$ , il existe un graphe  $G$  tel que  $G$  ne contient aucun triangle et avec pourtant  $\chi(G) \geq k$ .

1. Soit  $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$  et soit  $G$  un graphe aléatoire avec  $n$  sommets où chaque arête est présente indépendamment des autres avec probabilité  $p = n^{\varepsilon-1}$ . Montrer que quand  $n$  tend vers l'infini, la probabilité que  $G$  ait plus de  $n/2$  triangles tend vers 0.
2. Soit  $\alpha(G)$  la taille du plus grand *ensemble indépendant* de  $G$  (un ensemble indépendant est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents). Montrer que  $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$ .
3. Soit  $a = 3n^{1-\varepsilon} \ln n$ . Montrer que :

$$\mathbf{P}\{\alpha(G) < a\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

En déduire qu'il existe  $n$  et  $G$  de taille  $n$  tels que  $G$  a au plus  $\frac{n}{2}$  triangles et  $\alpha(G) < a$ .

4. Soit  $G$  un tel graphe. Soit  $G'$  un graphe obtenu à partir de  $G$  en supprimant le minimum de sommets afin que  $G'$  ne contienne aucun triangle. Montrer que :

$$\chi(G') > \frac{n^\varepsilon}{6 \ln n}$$

et conclure la preuve du théorème de Mycielski.

---

1. Jan Mycielski (1932–2025), mathématicien polono-américain.