

TD 06

Exercice 1.

Interrupteurs

1. Montrer qu'il existe une constante $\gamma > 0$ rendant l'énoncé suivant vrai :

« Si une v.a. positive X vérifie $\mathbf{E}[X] = 1$ et $\mathbf{E}[X^2] \leq 3$, alors
 $\mathbf{P}\{X \geq 1/4\} \geq \gamma$. »

Indication : définir la variable aléatoire $Y = \mathbf{1}_{X \geq 1/4}$ et se ramener à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. $\mathbf{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2)}$

2. Soient (X_1, \dots, X_n) des v.a. i.i.d. vérifiant $\mathbf{P}\{X_i = 1\} = \mathbf{P}\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}$.
On pose $Y = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \dots + X_n)$. Calculer $\mathbf{E}[Y^2]$ et $\mathbf{E}[Y^4]$ et en déduire que :

$$\mathbf{E}[|X_1 + \dots + X_n|] \geq \frac{\gamma}{2}\sqrt{n}.$$

On considère une grille $n \times n$ d'ampoules ainsi que 3 séries d'interrupteurs : des interrupteurs $a = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ associés à chaque ampoule, des interrupteurs $b = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ associés à chaque ligne et des interrupteurs $c = (c_j)_{1 \leq j \leq n}$ associés à chaque colonne. Chaque interrupteur prend la valeur -1 ou 1 . L'ampoule en position (i, j) est allumée si et seulement si $a_{ij} \times b_i \times c_j = 1$. On considère la quantité

$$\mathbf{F}(a, b, c) = \sum_{i, j=1}^n a_{ij} b_i c_j$$

qui est le nombre d'ampoules allumées moins le nombre d'ampoules éteintes.

Deux joueuses jouent au jeu suivant :

- la joueuse 1 choisit la position des interrupteurs (a_{ij}) ,
- puis la joueuse 2 choisit la position des interrupteurs (b_i) et (c_j) .

La joueuse 1 veut minimiser $\mathbf{F}(a, b, c)$ et la joueuse 2 veut le maximiser. On considère donc :

$$\mathbf{V}(n) = \min_{a \in \{-1, 1\}^{n \times n}} \max_{b, c \in \{-1, 1\}^n} \mathbf{F}(a, b, c).$$

3. Montrer que $V(n) = \mathcal{O}(n^{3/2})$ en considérant le cas où la joueuse 1 joue au hasard.
4. La joueuse 2 applique la stratégie suivante : elle choisit b au hasard, puis ensuite choisit c de façon à allumer le maximum de lampes. Estimer le nombre moyen de lampes allumées par cette stratégie (*indication : utiliser la question 2*) et en déduire que $V(n) = \Omega(n^{3/2})$.

Exercice 2.

Arrondi

Soit U un ensemble à n éléments. On appelle recouvrement de U un ensemble $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_m)$ de parties de U qui vérifie $\bigcup S_i = U$. Étant donné \mathcal{S} un recouvrement de U , on note $\text{OPT}(\mathcal{S})$ le cardinal minimal d'un sous-ensemble de \mathcal{S} qui est encore un recouvrement de U .

1. Expliquer rapidement pourquoi $\text{OPT}(\mathcal{S})$ est la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\text{Minimiser } \sum_{i=1}^m x_i \text{ sous les contraintes } x_i \in \{0, 1\} \text{ et } \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{1}_{S_i} \geq \mathbf{1}_U \quad (1)$$

On considère le problème suivant qui est une relaxation de (1) :

$$\text{Minimiser } \sum_{i=1}^m z_i \text{ sous les contraintes } z_i \in [0, 1] \text{ et } \sum_{i=1}^m z_i \mathbf{1}_{S_i} \geq \mathbf{1}_U \quad (2)$$

Alors que le problème (1) est NP-difficile, le problème (2) peut être résolu en temps polynomial par les méthodes de programmation linéaire.

2. Soit k un entier, et $(z_i)_{1 \leq i \leq m}$ qui minimisent (2). Soient $(X_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k}$ des variables aléatoires indépendantes vérifiant $\mathbf{P}\{X_{i,j} = 1\} = z_i$, $\mathbf{P}\{X_{i,j} = 0\} = 1 - z_i$. On définit un sous-ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ par la condition :

$$S_i \in \mathcal{T} \iff \exists j \in \{1, \dots, k\} : X_{i,j} = 1.$$

Montrer que :

$$\mathbf{E} [\#\mathcal{T}] \leq k \text{OPT}(\mathcal{S}).$$

3. Déterminer une valeur de $c > 0$ telle que, si on pose $k = \lfloor c \log n \rfloor$, on ait :

$$\mathbf{P}\{\mathcal{T} \text{ est un recouvrement de } U\} \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

Exercice 3.*Estimer l'intersection avec un rectangle*

Soit $P \subset \mathbb{Z}^2$ un ensemble de n coordonnées. On veut répondre (rapidement) à des questions du type :

\mathcal{Q}_r : « Quel est la proportion de points de P qui se situent dans le rectangle $r = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$? »

Pour n'importe quel rectangle r , on note $\mathbf{r}[P] = \frac{|P \cap r|}{n}$ la proportion recherchée.

Pour estimer $\mathbf{r}[P]$ de façon efficace, on considère $S \subseteq P$ un sous-ensemble de taille m de P (choisi aléatoirement) et on renvoie $\mathbf{r}[S] = \frac{|S \cap r|}{m}$.

On dit que S est une ε -approximation si pour tout r , on a $|\mathbf{r}[P] - \mathbf{r}[S]| \leq \varepsilon$.

1. Avec quelle taille m obtient-on une ε -approximation avec une probabilité $1 - \delta$?

Indication : on peut considérer un ensemble S dont l'espérance de la taille est m , plutôt que de taille exactement m .

Exercice 4.*Graphe aléatoire bipartite*

Soit $0 < p < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit un graphe aléatoire non orienté $H_{2n,p}$ de la manière suivante : on se donne une famille $\{X_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n\}$ de v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p . On pose alors $H_{2n,p} = (V, E)$ avec $V = \{1, \dots, 2n\}$ et

$$E = \{(i, j) \mid X_{i,j} = 1\} \subseteq \{1, \dots, n\} \times \{n+1, \dots, 2n\}.$$

1. Quelle est la loi du nombre d'arêtes de $H_{2n,p}$?
2. Quelle est l'espérance du nombre de sommets isolés de $H_{2n,p}$?
3. Dans cette question, on pose $p = c \log(n)/n$ pour un nombre réel $c > 0$.

- i. Montrer que si $c > 1$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{H_{2n,p} \text{ a un sommet isolé}\} = 0.$$

- ii. Montrer que si $c < 1$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{H_{2n,p} \text{ a un sommet isolé}\} = 1.$$

4. Dans cette question, on pose $p = 1/2$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \text{tous les sommets de } H_{2n,p} \text{ ont un degré inférieur à } \frac{n}{2} + C\sqrt{n \log n} \right\} =$$