Maarit Parkkonen Raportti 1

Tietojenkäsittely, polkuopinnot
TKMI17SM 16.12.2017

Diskreetti matematiikka
Jari Kortelainen

Tehtävä 1

Kirjoita seuraava argumentti propositiologiikassa:

Lenalla on tummat hiukset. Jos Lenalla on tummat hiukset, niin Lena käyttää kiharrinta. Jos Lena käyttää kiharrinta, niin Lena lähtee ulos. Siis, Lena lähtee ulos.

$p =$ tummat hiukset

$q =$ käyttää kiharrinta

$r =$ lähtee ulos

$p, p \to q, q \to r \vdash r$

Tehtävä 2

Todista formaalisesti propositiologiikassa, että tehtävän 1 argumentti on validi.

Argumentti:

$p, p \to q, q \to r \vdash r$

1. p (premissi)
2. $p \to q$ (premissi)
3. $q \to r$ (premissi)
4. $p \to r$ (2. ja 3. ketjusääntö)
5. r (1. ja 4. Modus Ponens) = päätelmä

Argumentti on tosi, koska premisseistä voidaan johtaa päättelysääntöjen kautta päätelmä.

Tehtävä 3

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$A = \{x \in U |\ x\ on\ aakkosissa\ ennen\ kirjainta\ e\}$

$B = \{x \in U |\ B\ ei\ ole\ c\ eik\ddot{a}\ g\}$

A on perusjoukon U alkioiden x joukko, jotka ovat aakkosissa ennen kirjainta e:

$A = \{a, b, c, d\}$

B on perusjoukon U alkoiden x joukko, jossa x ei ole c eikä g:

$B = \{a, b, d, e, f, h\}$

Tehtävä 4

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$A = \{a, b, c\}, B = \{c, d, e\}, C = \{b, d, f\}$

Joukon A ja B unioni:

$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$

Joukon A komplementin leikkaus joukkojen B ja C unionista:

$\left(A^c \cap (B \cup C)\right) = \{d, e, f, g, h\} \cap \{b, c, d, e, f\} = \{d, e, f\}$

Tehtävä 5

Pascalin kolmio on kolmion muotoon koottu lukujen järjestelmä, jossa esitetty luku on kahden sen yläpuolisen luvun summa. Rivin aloittava ja lopettava luku on yksi. Alla on esiteltynä Pascalin kolmion ensimmäiset yhdeksän riviä.

	Rivinumero:
1	n=0
1 1	n=1
1 2 1	n=2
1 3 3 1	n=3
1 4 6 4 1	n=4
1 5 10 10 5 1	n=5
1 6 15 20 15 6 1	n=6
1 7 21 35 35 21 7 1	n=7
1 8 28 56 70 56 28 8 1	n=8

Pascalin kolmion luvut perustuvat binomikertoimiin: $\binom{n}{k}$, $n, k \in \mathbb{N} \quad k \leq n$.
Binomikerroin on kaava, jolla voidaan laskea n alkioisen joukon k alkioisten osajoukkojen lukumäärä:

$n, k \in \mathbb{N} \quad k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{\mathrm{n!}}{(\mathrm{k!} \cdot (\mathrm{n}-\mathrm{k})!)}$$

Jokainen Pascalin kolmion luku on tietyn binomikertoimen arvo seuraavasti (kuusi ensimmäistä riviä):

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}
\end{array}$$

Pascalin kolmion binomikertoimista havaitaan, että binomikertoimen n vastaa kolmion rivinumeroa ja k luvun paikkanumeroa yhdessä rivissä. Rivi- ja paikkanumerointi alkavat siis luvusta nolla. Pascalin kolmiosta voidaan siis suoraan lukea n alkioisen perusjoukon k alkioisten osajoukkojen lukumäärä. Aloittavana numerona on nolla, koska tyhjä joukko on myös joukko.

Eli ”Kuinka monta erilaista 5 alkion joukkoa voidaan tehdä 8 alkion perusjoukosta?”

$n = 8$
$k = 5$

Katsotaan Pascalin kolmion 8.riviltä paikkaa 5, jossa on luku 56. (Huom! Rivi- ja paikkanumeroinnin aloittaa siis nolla)

Luvun tarkistus binomikertoimen kaavalla:

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{(5! \cdot (8-5)!)} = \frac{8!}{(5! \cdot 3!)} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{(5! \cdot 3!)} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 = 56$$

tämä vastaa siis Pascalin kolmion rivinumeron 8 paikan 5 lukua.

Lähteet:
https://fi.wikipedia.org/wiki/Pascalin_kolmio
https://fi.wikipedia.org/wiki/Binomikerroin
https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_triangle

Tehtävä 6

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$A = \{a, b, c\}, B = \{c, d, e\}, C = \{b, d, f\}$

$\mathscr{A} = \{A, B, C\}$

Onko joukkoluokka $\mathscr{A}$ perusjoukon U partitio vai ei?

Partitiossa perusjoukon U alkiot on jaettu osajoukkoihin A_i seuraavien ehtojen mukaisesti:

1. Partitiossa ei saa olla tyhjiä osajoukkoja, $A_i \neq \emptyset$
2. Jokainen perusjoukon U alkio x on oltava osana yhdessä osajoukossa
3. Osajoukoilla ei saa olla päällekkäisyyksiä eli
   i. osajoukkojen leikkaukset ovat tyhjiä, $A_i \cap A_j = \emptyset$
   ii. osajoukot eivät ole samoja, $A_i \neq A_j$

Testataan ehtojen toteutumista

Ehto 1.

$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, C \neq \emptyset$

- ➔ Toteutuu.

Ehto 2.

$a \in A$

$b \in A, C$

$c \in A, B$

$d \in B, C$

$e \in B$

$f \in C$

$g \notin A, B, C$

$h \notin A, B, C$

- ➔ Ei toteudu, alkiot b, c, d kuuluvat kahteen osajoukkoon ja alkiot g, h eivät kuulu yhteenkään osajoukkoon.

Ehto 3.

i)

$A \cap B = \{c\} \neq \emptyset$

$A \cap C = \{b\} \neq \emptyset$

$C \cap B = \{d\} \neq \emptyset$

- ➔ Ei toteudu, yhdenkään alijoukon leikkaus ei ole tyhjä

ii)

$A \neq B$

$B \neq C$

$C \neq A$

- ➔ Toteutuu.

Joukkoluokka $\mathscr{A}$ ei ole perusjoukon U partitio, koska

- perusjoukossa U on osajoukkoihin A, B, C kuulumattomia alkioita
- osa perusjoukon U alkioista kuuluu useampaan osajoukkoon
- osajoukkojen leikkaukset eivät ole tyhjiä

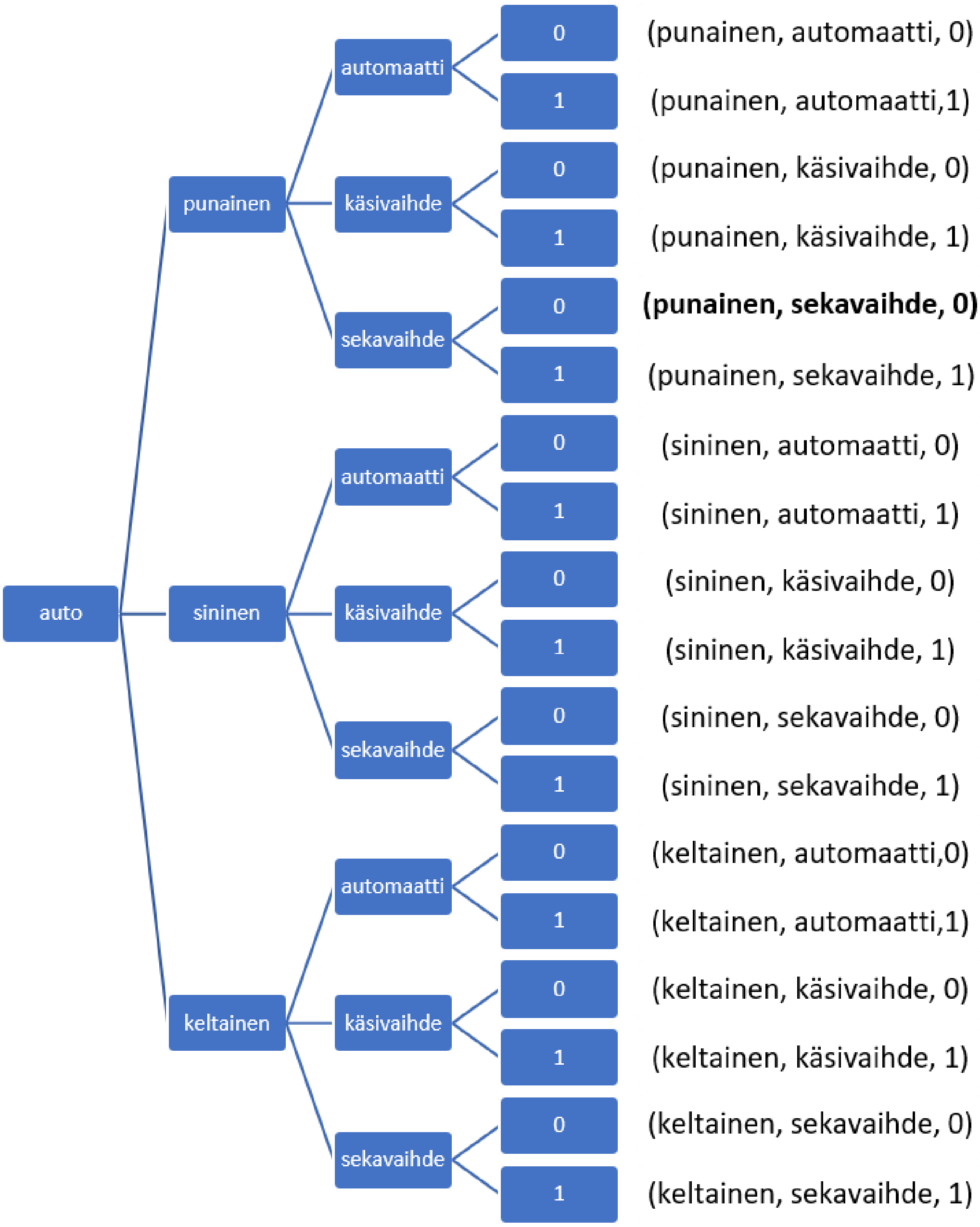
Tehtävä 7

$A = \{punainen, sininen, keltainen\}$

$B = \{automaatti, käsivaihteet, sekavaihteet\}$

$C = \{0,1\}$ (0 = ei navigaattoria, 1 = on navigaattori)

Karteesisen tulon $A \times B \times C$ tulojoukko puurakenteena:



Asiakas haluaa punaisen auton, sekavaihteistolla mutta ilman navigaattoria, sen 3-tupla on: (punainen, sekavaihde, 0).

Tehtävä 8

$U = \{a, b, c, d, e\}$

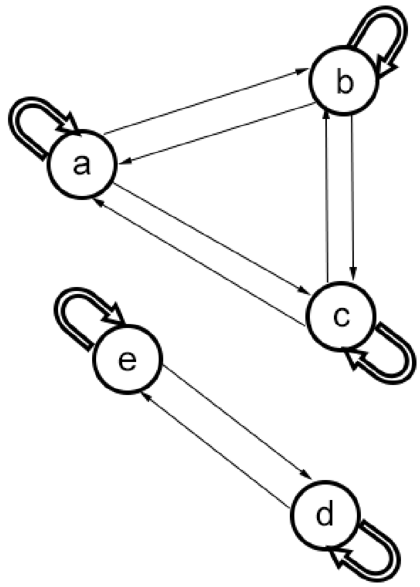
$R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, c), (a, c), (c, a), (b, b), (d, d), (e, e),$

$(d, e), (e, d)\}$, jossa

relaation R määrittelyjoukko $\{a, b, c, d, e\}$

relaation R arvojen joukko $\{a, b, c, d, e\}$

Relaation R suunnattu graafi:



Ekvivalenssirelaation ehdot ovat:

1. Reflektiivisyys eli jokaisella alkiolla on relaatio itseensä, $x_i \sim x_i$
2. Symmetrisyys eli jos alkiolla x_1 on relaatio alkioon x_2, niin tulee alkiolla x_2 olla myös relaatio alkioon x_1, ($x_1 \sim x_2$)→ $(x_2 \sim x_1)$
3. Transitiivisuus eli jos alkiolla x_1 on relaatio alkioon x_2 ja alkiolla x_2 on relaatio alkioon x_3 niin alkiolla x_1 on oltava myös relaatio alkioon x_3, $(x_1 \sim x_{2)}), (x_2 \sim x_3) \rightarrow (x_1 \sim x_3)$

Testataan onko R ekvivalenssirelaatio perusjoukolle U:

1. Reflektiivisyys: (a,a),(b,b),(c,c),(d,d)
   ➔ Toteutuu
2. Symmetrisyys: (a,b), (b,a)
   (b,c), (c,b)
   (a,c), (c,a)

(d,e), (e,d)

➔ Toteutuu

3. Transitiivisuus: (a,b), (b,c), (a,c)
(b,c), (c,a), (b,a)
(c,a), (a,b), (c,b)
(a,c), (c,b), (a,b)
(b,a), (a,c), (b,c)
(c,b), (b,a), (c,a)
e ja d alkioilla ei ole suhdetta kolmanteen alkioon

➔ Toteutuu

Relaatio R on ekvivalenssirelaatio perusjoukolle U, koska se toteuttaa kaikki ekvivalenssirelaatiolle annetut alkoiden välisten relaatioiden ehdot reflektiivisyydestä, symmetrisyydestä ja transitiivisuudesta. Näiden ehtojen toteutuminen on myös hyvin nähtävissä relaation suunnatusta graafista.

Relaatiota R vastaava partitio:
Jokaiselle perusjoukon U alkiolle x_i voidaan määrittää oma osajoukko, jonka alkioilla on relaatio x_i:n kanssa. Tätä joukkoa kutsutaan alkion x_i ekvivalenssiluokaksi $[x_i]$. Perusjoukon kaikkien alkioiden ekvivalenssiluokkien kokoelma muodostaa ekvivalenssirelaation partition eli osituksen.

Merkitään perusjoukon alkioiden ekvivalenssiluokat suunnatun graafin avulla:
[a] = {a,b,c}
[b] = {a,b,c}
[c] = {a,b,c}
[e] = {e,d}
[d] = {e,d}

Todetaan luokkien [a]=[b]=[c] ja [e]=[d] olevan keskenään samoja niiden sisältämien alkioiden perusteella. Toisaalta, todetaan luokkien [a],[b],[c]≠[e],[d] olevan toisistaan erillisiä. Nämä havainnot ovat nähtävissä myös suunnatussa graafissa. Näiden perusteella relaatiota R vastaava partitio on {[a],[e]}.

Tehtävä 9

$U = \{1,2,3,4\}$

$V = \{kaikki\ olemassa\ olevat\ etunimet\}$

$R = \{(1, Mikko), (2, Tiina), (3, Kale), (4, Liisa)\}$

$R \subseteq U \times V$

Onko R funktio?

Funktio on relaatio, jos jokaisella määrittelyjoukon alkiolla on suhde vain yhteen arvojen joukon alkioon. Määrittely- ja arvojen joukon alkiot muodostavat silloin yksilölliset parit relaatiossa. Arvojen joukossa voi olla alkioita, joilla ei ole relaatioita määrittelyjoukon alkion kanssa tai alkioita, joilla on useampi relaatio määrittelyjoukon alkioihin. Ratkaisevaa on, että määrittelyjoukon alkio osoittaa vain yhtä arvojen joukon alkiota.

Perusjoukko U on tehtävän määrittelyjoukko {1,2,3,4}. Joukko V eli kaikki olemassa olevat etunimet muodostavat arvojen joukon. Relaatio R on osajoukko joukkojen U ja V karteesisesta tulosta. Relaatiossa R määrittelyjoukon U jokaisella alkiolla on suhde vain yhteen arvojen joukon alkioon, jolloin määrittely- ja arvojen joukon alkiot muodostavat yksilölliset parit itse relaatiossa. Tällöin relaatio R on siis funktio, jonka arvoja ovat:

$$f(1) = Mikko, f(2) = Tiina, f(3) = Kale, f(4) = Liisa$$

Tehtävä 10

Operaatiot:

+ = pienin yhteinen jaettava (lcm)

$*$ = suurin yhteinen tekijä (gcd)

$'$ = $\frac{a}{70}$

Lauseke:

$E(x, y, z) = (x + y) * ((z' + x) * y)$

Luvut:

$x = 5, y = 14, z = 35$

Operaatiot lausekkeeseen:

$$E(x,y,z) = \gcd\Big((x+y),\big((z' + x) * y\big)\Big)$$
$$= \gcd(lcm(x,y), \gcd((z' + x)\,, y))$$
$$= \gcd(lcm(x,y), \gcd(lcm(z', x)\,, y))$$

Lukujen sijoitus ja laskenta sulkeiden mukaisessa järjestyksessä (joka vastaa myös boolen algebran laskujärjestystä) :

$$E(5{,}14{,}35) = \gcd(lcm(5{,}14), \gcd\left(lcm\left(\tfrac{70}{35}, 5\right), 14\right))$$
$$= \gcd(70, \gcd(lcm(2{,}5), 14))$$
$$= \gcd(70, \gcd(10{,}14))$$
$$= \gcd(70{,}2)$$
$$= 2$$

Tehtävä 11.

Sievennä lauseke $E(x,y,z) = (x+y) * ((z' + x) * y)$ täydelliseen tulojen summamuotoon.

1) Tulojen summamuoto:

$$E(x,y,z) = (x+y) * \big((z' + x) * y\big)$$

$= (x+y)\big((z' + x)y\big)$	2b) osittelulaki
$= (x+y)((yz') + yx))$	2b) osittelulaki
$= (x+y)(yz') + (x+y)(yx)$	2b) osittelulaki
$= (xyz' + yyz') + (xyx + yyx)$	5b) idempotenttilaki
$= (xyz' + yz') + (xy + yx)$	7a) absorptiolaki
$= (yz') + (yx + yx)$	1b) vaihdantalaki
$= (yz') + (yx + yx)$	5a) idempotenttilaki
$= yz' + yx$	

Tarkastin tuloksen vielä Karnaugh'n kartalla. Tein ensin lausekkeesta totuustaulun, josta sijoitin lausekkeen arvot Karnaugh'n karttaan ja muodostin ykkösten joukot. Joukoiksi sain: yz' ja yx, täsmää. Karnaugh'n kartan käytön opettelin Metropolian digitaalitekniikan matematiikan kytkentäalgebran luentomateriaalista:
http://users.metropolia.fi/~koiva/Rob_dig/Materiaali/05Lausekkeiden_sieventaminen.pdf

2) Täydellisessä tulojen summamuodossa jokaisessa tulotermissä on mukana kaikki lausekkeen muuttujat. Tulojen summamuodosta saadaan täydellinen kertomalla vaillinaiset tulotermit puuttuvan muuttujan x lauseella (x+x’).

$$
\begin{aligned}
E(x,y,z) &= yz' + yx \\
&= yz'(x+x') + yx(z+z') \\
&= yz'x + yz'x' + yxz + yxz' \\
&= yz'x + yz'x' + yzx + yz'x \\
&= \boldsymbol{yz'x} + \boldsymbol{yz'x'} + \boldsymbol{yzx}
\end{aligned}
$$

Oppimispäiväkirja

Viikko 8

Kuvankäsittelyn tehtävät työn alla. En ehtinyt tehdä matematiikkaa.

Viikko 9

Maanantaina luin propositio- ja predikaattilogiikan perusteita ja sääntöjä. Kaavojen ja propositioiden merkitsemistapa tuotti vaikeuksia. Huomasin ajattelevani kaikki pelkiksi propositioiksi, enkä aluksi ymmärtänyt esim. P olikin kaava, jossa propositioita. Samoin propositio- ja predikaattilogiikan ero, milloin käytetään propositioiden sääntöjä ja milloin päättelysääntöjä? Tiistaina laskin harjoitukset ja vähän ylimääräistäkin. Formaalinen todistelu tuotti hankaluuksia. Onneksi illasta oli matikan verkkokokous, jossa minulle hankalat asiat alkoivat avautua. Suurin välähdys oli, kun ymmärsin että voin sijoittaa propositioidenkin tilalle kokonaisia lausekkeita. Formaalinen todistelu helpottui.

Viikot 10-11

Ennen joukko-oppiin hyppäämistä luin kuitenkin läpi algoritmit ja vuokaavio -luvun ihan mielenkiinnosta. Joukko-opin aloitin taas pelkällä lukemisella. Minulle on jotenkin luonnollista lukea ja yrittää ymmärtää ensin kokonaisuuksia kuin aloittaa samaan aikaan laskemaan. Joukko-opissa yllätti sen tärkeys oikeastaan koko matematiikan kannalta. Olin kuvitellut sen olevan vain pieni osa-alue jossain reunalla mutta nyt jäi käsitys, että sen pohjalta rakentuu todella paljon. Joukko-opin tehtävät eivät tuottaneet kuitenkaan vaikeuksia.

Viikot 12-13

Tietokantoja olen käsitellyt kauan sitten aikaisemmissa opinnoissani. Relaatioiden suhde tietokantoihin oli mielenkiintoinen. Tehtävät sujuivat ok.

Viikko 14

Boolen algebraan tarvitsin paneutumista. Termistö oli hankalaa ja asiat eivät avautuneet yhdellä lukemalla. Hain netistä lisäapua ja Metropolian digitaalitekniikan matematiikan kytkentäalgebran luentomateriaalien avulla kirjan tekstikin alkoi selventyä. Lopulta harjoituksetkin sujuivat ja sain mielestäni tehtyä raportin viimeisen tehtävänkin ihan ok. 😊