Uppgiftsseriepaket september 2021

Även de enklaste uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och man bör inte anta att de ska gå att lösa utan ansträngning. *Det lönar sig att kämpa på när man arbetar med uppgifterna.* Även om man inte skulle få hela uppgiften löst, så lär man sig mera av modellösningarna om man först funderat länge på uppgiften. Även i de enklare uppgifterna är det bra att skriva ut motiveringar och inte bara beräkna slutresultatet med t.ex. en räknare. Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade enligt svårighetsgrad.

Vi är mycket medvetna om att det på nätet finns många platser där man kan hitta lösningar; `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` är troligen de mest kända. Användande av dessa är inte till skada, och man kan även lära sig mycket av dem, men vi rekommenderar att man först försöker lösa uppgifterna själv. Man kan även lära sig mycket av att fundera på uppgifterna tillsammans med andra personer som arbetar med uppgifterna, ifall att möjlighet till det erbjuds.

Ibland slinker det med fel i uppgifterna. Upptäckta fel kan meddelas på handledarnas sida

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Lösningar önskas senast den 31.10.2021 per epost. De enklare uppgifterna till: nirmal.krishnan(at)helsinki.fi och de svårare: anne-maria.ernvall-hytonen(at)helsinki.fi.

Uppmärksamma meddelandet om dataskyddet:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

—————:—————

I några av uppgifterna kan man ha nytta av att känna till lådprincipen (Dirichlets lådprincip) och färgläggningar. Du kan bekanta dig med lådprincipen t.ex. genom Janne Järvinens youtube-video

`https://www.youtube.com/watch?v=hOBZ8n6PYNY`

eller på engelska, t.ex. genom videon

https://www.youtube.com/watch?v=2-mxYrCNX60

på TheTrevTutors kanal. Färgläggningar kan man bekanta sig med, t.ex. genom (på finska) Pitkän matematiikan lisäsivujen 1: Täsmällinen päättely kapitel 2:

`https://www.mayk.fi/wp-content/uploads/2017/06/Pitkan-matematiikan-lisasivut-1.pdf`.

Enklare uppgifter

1. Visa att det för alla spetsiga vinklar α gäller att

$$\tan\alpha + \cot\alpha \geq 2.$$

2. Låt a och b vara positiva tal. För vilket värde på talet x antar uttrycket

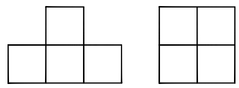
$$\frac{a+bx^4}{x^2}$$

sitt minsta värde?

3. I Finland består postnumren av fem siffror, som tillhör intervallet $[0, 9]$. Vi väljer slumpmässigt n finländare. Vad är det minsta talet n, så att den första och den sista siffran i två personers postnummer är lika.

4. Låt ABC vara en triangel, där $\angle ABC = 90°, AC = 26$ och $BC = 24$. Låt punkten D ligga mellan punkterna B och C på sidan BC. Vidare, låt E vara en sådan punkt för vilken det gäller att $\angle CDE = 90°, \angle ECD = \angle BCA$ och $CE = 13$. Beräkna AE.

5. Visa att ett 8×8-bräde inte kan täckas med 15 stycken T-formade brickor och en kvadratformad bricka.



6. I klassen finns det 33 studerande och summan av deras åldrar (i år) är 430. Visa att det i klassen alltid finns 20 studerande för vilka det gäller att summan av deras åldrar är över 260 år.

7. Visa att det i vilken som helst mängd med sju kvadrattal finns två kvadrattal, vars differens är delbar med tio.

8. Ett golv i formen av en kvadrat är belagt med plattor av storlekarna 4×1 och 2×2. En platta går sönder, och det finns inte kvar flera av den sortens platta, men nog av den andra varianten. Visa att det inte går att belägga golvet med dessa plattor, även om man kunde flytta på plattorna.

9. Hitta alla möjliga färgläggningar för positiva heltal, där varje positivt heltal är färglagd antingen svart eller vit, men inte både och, samt att summan av två olikfärgade tal alltid är svart och produkten av två olikfärgade tal alltid är vit. Ta även reda på vilken färg produkten av två vita tal är.

10. Vi kallar ett tal *onyttigt*, om summan av dess siffror i tiotalssystemsframställningen är större eller lika stor som siffrornas produkt. Bestäm hur många tvåsiffriga $(11 - 99)$ onyttiga tal det finns.

11. Visa att det inte existerar ett positiva heltal n, för vilket

$$n!(n+1)!(n+2)!(n+3)!$$

är kvadraten av något positivt heltal

12. Definierar Fibonaccis talföljd genom att skriva $F_1 = F_2 = 1$ och $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$, för $k \geq 2$. Låt n vara ett positivt heltal. Visa att det existerar ett Fibonnacci tal, som slutar med iallafall n nollor.

Svårare uppgifter

13. Visa att om a och b är positiva tal, och $a + b = 1$, så är

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

14. Låt $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ och $x_{n+3} = x_n + x_{n+1}x_{n+2}$ för alla positiva heltal n. Visa, att det för varje positivt heltal m existerar ett sådant positivt heltal k, att m delar talet x_k.

15. Definierar talföljden $a_1, a_2, \ldots$ genom att sätta $a_1 = 2, a_2 = 500$ och $a_3 = 1000$ samt

$$\frac{a_{n+2} + a_{n+1}}{a_{n+1} + a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}},$$

för $n = 2, 3, 4, \ldots$. Visa att alla element i talföljden är positiva heltal och att 2^{2000} delar talet a_{2000}.

16. Tre lådor har var och en iallafall en marmorkula. I varje drag väljs två av lådorna och den ena lådans marmorkulaantal dubbleras genom att tillräckligt med kulor tas från den andra lådan. Är det alltid möjligt att med ett ändligt antal drag tömma någon av lådorna?

17. Låt ABC vara en likbent triangel där $AB = AC$. Låt D vara en sådan punkt på sträckan BC att $BD = 2DC$ och låt punkten P vara på sträckan AD så att $\angle BAC = \angle BPD$. Visa att

$$\angle BAC = 2\angle DPC.$$

18. Bestäm alla heltalspar (x, y), för vilka $2xy$ är kvadraten av ett heltal och $x^2 + y^2$ är ett primtal.

19. I en av rutorna i ett 5×5-rutfält skriver vi talet -1 och i resten av rutorna talet $+1$. I ett drag ändrar vi förtecknet för alla tal i en $2 \times 2-, 3 \times 3-, 4 \times 4-$ eller 5×5-kvadrat. I vilken ruta måste talet -1 vara, för att det ska vara möjligt att med dessa drag få alla tal i kvadraten att bli $+1$?