Syyskuun 2021 valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 31.10.2021 sähköpostitse. Helpommat tehtävät: nirmal.krishnan(at)helsinki.fi ja vaikemmat: anne-maria.ernvall-hytonen(at)helsinki.fi.

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

———— : ————

Joissakin seuraavista tehtävistä voi olla apua kyyhkyslakkaperiaatteen (laatikkoperiaatteen) tuntemisesta tai värityksistä. Voit tutustua kyyhkyslakkaperiaatteeseen esimerkiksi Janne Järvisen youtube-videon avulla

`https://www.youtube.com/watch?v=hOBZ8n6PYNY`

tai englanniksi esimerkiksi TheTrevTutor kanavan videon

https://www.youtube.com/watch?v=2-mxYrCNX60

avulla. Värityksiin voi tutustua esimerkiksi Pitkän matematiikan lisäsivujen 1: Täsmällinen päättely luvun 2 avulla:

`https://www.mayk.fi/wp-content/uploads/2017/06/Pitkan-matematiikan-lisasivut-1.pdf`.

Helpompia tehtäviä

1. Osoita, että jokaisella terävällä kulmalla α pätee

$$\tan\alpha + \cot\alpha \geq 2.$$

2. Olkoot a ja b positiivisia lukuja. Millä luvun x arvoilla lauseke

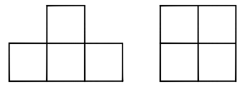
$$\frac{a + bx^4}{x^2}$$

saa pienimmän arvonsa?

3. Suomessa postinumero koostuu viidestä kokonaisluvusta, jotka ovat väliltä $[0, 9]$. Valitaan satunnaisesti n suomalaista. Mikä on pienin luku n, jolla vähintään kahden ihmisen postinumeroiden ensimmäinen ja viimeinen numero ovat varmasti samat?

4. Olkoon ABC kolmio, missä $\angle ABC = 90°$, $AC = 26$ ja $BC = 24$. Olkoon piste D sivulla BC pisteiden B ja C välissä. Lisäksi olkoon E sellainen piste, jolle $\angle CDE = 90°$, $\angle ECD = \angle BCA$ ja $CE = 13$. Laske AE.

5. Osoita, että 8×8-lautaa ei voida peittää 15 T-laatalla ja yhdellä neliölaatalla.



6. Luokassa on 33 oppilasta ja heidän ikiensä (vuosissa) summa on 430 vuotta. Osoita, että luokassa on aina 20 oppilasta, joiden ikien summa on yli 260 vuotta.

7. Osoita, että minkä tahansa seitsemän neliöluvun joukossa on kaksi neliölukua, joiden erotus on jaollinen kymmenellä.

8. Suorakulmion muotoinen lattia on peitetty 4×1- ja 2×2-laatoilla. Yksi laatta hajoaa, eikä samanlaisia laattoja enää ole jäljellä, mutta toisenlaisia on. Osoita, ettei lattiaa voi laatoittaa näillä laatoilla, vaikka laattojen paikkoja voisi muuttaa.

9. Etsi kaikki mahdolliset positiivisten kokonaislukujen väritykset, joissa kukin positiivinen kokonaisluku on väritetty valkoisella tai mustalla, mutta ei molemmilla, sekä kahden erivärisen luvun summa on aina musta ja kahden erivärisen luvun tulo on aina valkoinen. Selvitä myös, minkä värinen on kahden valkoisen luvun tulo.

10. Kutsutaan lukua *turhamaiseksi*, jos sen kymmenjärjestelmäesityksen numeroiden summa on suurempi tai yhtäsuuri kuin niiden tulo. Määritä turhamaisten kaksinumeroisten (11–99) lukujen lukumäärä.

11. Osoita, että ei ole olemassa positiivista kokonaislukua n, jolla

$$n!(n+1)!(n+2)!(n+3)!$$

on jonkin positiivisen kokonaisluvun neliö.

12. Määritellään Fibanaccin jono asettamalla $F_1 = F_2 = 1$ ja $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$, kun $k \geq 2$. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että on olemassa Fibonaccin luku, joka päättyy ainakin n nollaan.

Vaikeampia tehtäviä

13. Osoita, että jos a ja b ovat positiivisia lukuja ja $a + b = 1$, niin

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

14. Olkoot $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ ja $x_{n+3} = x_n + x_{n+1}x_{n+2}$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. Osoita, että jokaista positiivista kokonaislukua m kohti on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku k, että m jakaa luvun x_k.

15. Määritetään lukujono $a_1, a_2, \ldots$ asettamalla $a_1 = 2$, $a_2 = 500$ ja $a_3 = 1000$ sekä

$$\frac{a_{n+2} + a_{n+1}}{a_{n+1} + a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}},$$

kun $n = 2, 3, 4, \ldots$. Osoita, että kaikki tämän lukujonon jäsenet ovat positiivisia kokonaislukuja ja että 2^{2000} jakaa luvun a_{2000}.

16. Kolmessa laatikossa on kussakin ainakin yksi marmorikuula. Jokaisella askeleella valitaan kaksi laatikkoa ja tuplataan toisen laatikon marmorikuulien määrä ottamalla riittävä määrä marmorikuulia toisesta laatikosta. Onko mahdollista aina äärellisen toistomäärän jälkeen tyhjentää jokin laatikoista?

17. Olkoon ABC tasakylkinen kolmio, jossa $AB = AC$. Olkoon D sellainen piste janalla BC, jolla $BD = 2DC$ ja olkoon piste P janalla AD niin, että $\angle BAC = \angle BPD$. Osoita, että

$$\angle BAC = 2\angle DPC.$$

18. Määritä kaikki kokonaislukuparit (x, y), joilla $2xy$ on kokonaisluvun neliö ja $x^2 + y^2$ on alkuluku.

19. Kirjoitetaan yhteen 5×5-ruudukon ruutuun luku -1 ja loppuihin ruutuihin luku $+1$. Yhdellä askeleella muutetaan yhden 2×2-, 3×3-, 4×4- tai 5×5-neliön lukujen etumerkit. Missä ruudussa luvun -1 on oltava, jotta on mahdollista saada askeleita toistamalla kaikkiin ruutuihin luku -1?