Matematiikan olympiavalmennus: valmennustehtävät, kesä 2021

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää – `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista. Kuuleman mukaan ainakin Maunulassa on järjestetty ryhmäratkomistilaisuuksia.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla `https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan 19.9.2021 mennessä sähköpostitse. Helpommat tehtävät: `n.palojarvi@gmail.com`, vaativammat: `anne-maria.ernvall-hytonen@helsinki.fi`.

Joukkuevalinnat perustuvat kokonaisharkintaan, jossa otetaan huomioon palautetut tehtävät ja menestyminen kilpailuissa ja valintakokeissa.

Huomioi tietosuojalauseke: `https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`

❦ ❦ ❦

Osa tehtävistä käsittelee funktionaaliyhtälöitä, ts. yhtälöitä joissa tuntematon ei olekaan luku vaan funktio. Tutustu yksinkertaisiin ajatuksiin lähestyä funktionaaliyhtälöitä esimerkiksi Osman Nalin videon avulla: `https://www.youtube.com/watch?v=X44WxjocvVE`. Tai lue syvällisempää tietoa OOOO-kirjan luvusta 16: `https://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/OOOO.pdf`.

Helpompia tehtäviä

Lähetä perustellut ratkaisut osoitteeseen `n.palojarvi@gmail.com`. Muista mainita viestissä nimesi.

1. Olkoon $ABC-DEF-GHIJ$ jokin puhelinnumero, missä jokainen kirjain kuvaa eri numeroa. Lisäksi luvut D, E ja F ovat peräkkäisiä parillisia lukuja, luvut G, H, I ja J peräkkäisiä parittomia lukuja sekä on voimassa $A > B > C$, $D > E > F$, $G > H > I > J$ ja $A + B + C = 9$. Mikä puhelinnumero on?

2. Olkoon $f(x + 7) = x^2 - 1$. Mitä on $f(x)$?

3. Olkoon $f(x)$ funktio, joka on määritelty *joiltain* reaaliluvuilta reaaliluvuille ja jolle pätee

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x.$$

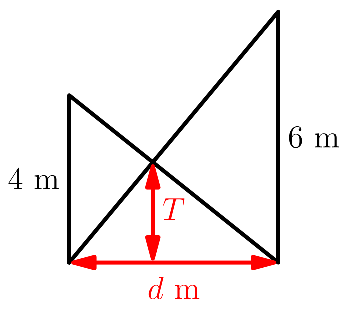
Mikä on suurin reaalilukujen joukko, jonka arvoja x voi saada?

4. a) Ympyrä kulkee pisteiden $(0, 1)$ ja $(0, 9)$ kautta ja sivuaa positiivista x-akselia. Selvitä ympyrän säde ja keskipisteen koordinaatit.

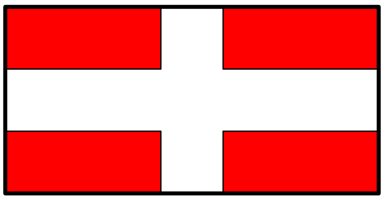
b) Olkoot a ja b kaksi reaalilukua, joilla on sama etumerkki (joko molemmat positiivisia tai molemmat negatiivisia). Ympyrä kulkee pisteiden $(0, a)$ ja $(0, b)$ kautta ja sivuaa positiivista x-akselia. Selvitä ympyrän säde ja keskipisteen koordinaatit lukujen a ja b lausekkeina.

5. Lontoossa toimii kaksi taidevarasta A ja B. He piilottavat varastamansa maalaukset salaisiin kätköihin eri puolille kaupunkia. Lopulta taidegalleriat suljetaan, joten varkaat alkavat varastaa toistensa kokoelmista. Aluksi A:lla on 16 maalausta enemmän kuin B:llä. Joka viikko A varastaa neljäsosan B:n maalauksista ja B varastaa neljäsosan A:n maalauksista. (Varkaudet tapahtuvat yhtä aikaa.) Kolmen viikon kuluttua Sherlock Holmes nappaa molemmat varkaat. Kummalla varkaalla on tällöin enemmän maalauksia ja kuinka paljon enemmän?

6. Kaksi puhelinpylvästä on pystytetty d metrin päähän toisistaan. Pylväiden pituudet ovat 4 ja 6 metriä. Kummankin pylvään huipulta on vedetty kaapeli toisen pylvään juureen. Kaapelit risteävät korkeudella T. Selvitä T. Mitä sille tapahtuu, kun d:tä kasvatetaan?



7. Kuvan lipussa on valkoinen risti punaisella pohjalla. Vaaka- ja pystysuorat valkoiset raidat ovat yhtä leveät. Lipun koko on 48 cm $\times$ 24 cm ja valkoisen alueen pinta-ala on yhtä suuri kuin punaisen alueen pinta-ala. Mikä on valkoisten raitojen leveys?



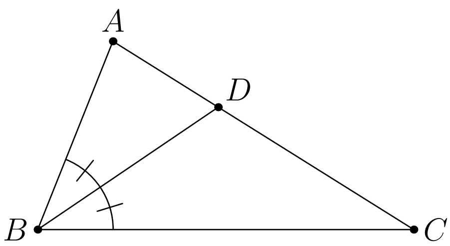
8. Yhtälöllä $x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$ on reaalijuuret a, b ja c. Selvitä lausekkeen $a^2 + b^2 + c^2$ arvo.

9. Kahden reaaliluvun summa on n ja niiden neliöiden summa on $n + 19$, missä n on positiivinen kokonaisluku. Mikä on suurin mahdollinen n:n arvo?

10. Säännölliseen kymmenkulmioon piirretään kaikki lävistäjät. Jos valitaan satunnainen lävistäjä, mikä on todennäköisyys, että se ei ole yksi kaikkein lyhimmistä eikä yksi kaikkein pisimmistä lävistäjistä?

11. Olkoon $T(n)$ positiivisen kokonaisluvun n numeroiden summa. Esimerkiksi $T(5018) = 5+0+1+8 = 14$. Selvitä, kuinka monella kolminumeroisella luvulla n pätee $T(n) + 3n = 2020$.

12. Piste D on kolmion ABC sivulla AC. Jana BD puolittaa kulman $\angle CBA$ ja eräiden janojen pituudet ovat $BD = 3\sqrt{5}$, $AB = 8$ ja $DC = \dfrac{3}{2}$. Laske $AD + BC$, ts. janojen AD ja BC pituuksien summa. (Kuvan janojen pituudet eivät vastaa tehtävänantoa!)



13. Olkoon $ABCD$ suunnikas ja E ja F pisteet sivuilla BC ja CD, tässä järjestyksessä. Jos $CE = 3BE$, $CF = DF$, suorat DE ja AF leikkaavat pisteessä K ja $KF = 6$, selvitä pituus AK.

14. Oletetaan, että ympyrän ω sisällä on säännöllinen n-kulmio ($n \geq 3$). Tämän n-kulmion yksi sivu on erään ympyrän ω sisään piirretyn kolmion $\triangle ABC$ sivu AB. Lisäksi kolmiossa $\triangle ABC$ on voimassa $AC = BC$ ja kaikkien kolmion kulmien suuruudet ovat (asteina) positiivisia kokonaislukuja.

Osoita, että n on jokin luvuista $3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45$ tai 90.

15. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, missä

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$$

kaikilla nollasta eroavilla reaaliluvuille x ja y.

16. Todista kaikille epänegatiivisille reaaliluvuilla x, y, z:

$$x^2y^3 + x^2z^3 + y^2x^3 + y^2z^3 + z^2x^3 + z^2y^3 \leq xy^4 + xz^4 + yx^4 + yz^4 + zx^4 + zy^4.$$

Vaativampia tehtäviä

Lähetä perustellut ratkaisut osoitteeseen `anne-maria.ernvall-hytonen@helsinki.fi`. Muista mainita viestissä nimesi.

17. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joilla pätee

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

18. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

- Kaikilla kokonaislukupareilla (m, n), joilla $m < n$, pätee $f(m) < f(n)$;
- Kaikilla kokonaislukupareilla (m, n) on kokonaisluku k, jolla $f(m) - f(n) = f(k)$.

19. Kutsutaan reaaliarvoista funktiota f tosi konveksiksi, jos epäyhtälö

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x - y|$$

pätee kaikilla reaaliluvuilla x ja y. Todista, ettei yhtään tosi konveksia funktiota ole olemassakaan.

20. Määritä kaikki positiivisten kokonaislukujen kolmikot (a, b, c), joilla

$$a^2 + 2^{b+1} = 3^c$$

21. Osoita, että jos kolmion ala on A, niin kolmiossa on oltava jotkut sivut, joiden pituuksien tulo on vähintään $\frac{4}{\sqrt{3}}A$.

22. Määritä pienin positiivinen kokonaisluku n, joka toteuttaa seuraavan ehdon: Jos n yksikköruutua väritetään 1000×1000-yksikköruudukosta, niin on olemassa kolme väritettyä yksikköruutua, joiden keskustat muodostavat suorakulmaisen kolmion, jonka kateetit ovat yhdensuuntaisia ruudukon sivujen kanssa.

23. Olkoon a, b, c epänegatiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \leq \max\left\{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2, \sqrt{b} - \sqrt{c})^2, \sqrt{c} - \sqrt{a})^2\right\}.$$

24. Olkoon $a_1, a_2, \ldots a_n$ lukujen $\{1, 2, \ldots, n\}$ permutaatio. Määritä summan

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n$$

kaikki mahdolliset arvot.

25. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut m, joille

$$1! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot (2m-1)! = \frac{m(m+1)}{2}\,!$$

26. Ruutupaperilla on 21×21 ruudun neliö, jossa jokainen hilapiste on väritetty punaiseksi tai siniseksi (siten 22×22 väritettyä pistettä). Kaikki neliön ylä- ja oikean reunan pisteet ovat punaisia, muut reunapisteet ovat sinisiä. Todista, että neliössä on 1×1 ruutu, jossa on kaksi punaista pistettä yhdellä puolella ja kaksi sinistä pistettä vastakkaisella puolella.