Uppgiftsseriepaket november 2021

Även de enklaste uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och man bör inte anta att de ska gå att lösa utan ansträngning. *Det lönar sig att kämpa på när man arbetar med uppgifterna.* Även om man inte skulle få hela uppgiften löst, så lär man sig mera av modellösningarna om man först funderat länge på uppgiften. Även i de enklare uppgifterna är det bra att skriva ut motiveringar och inte bara beräkna slutresultatet med t.ex. en räknare. Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade enligt svårighetsgrad.

Vi är mycket medvetna om att det på nätet finns många platser där man kan hitta lösningar; `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` är troligen de mest kända. Användande av dessa är inte till skada, och man kan även lära sig mycket av dem, men vi rekommenderar att man först försöker lösa uppgifterna själv. Man kan även lära sig mycket av att fundera på uppgifterna tillsammans med andra personer som arbetar med uppgifterna, ifall att möjlighet till det erbjuds.

Ibland slinker det med fel i uppgifterna. Upptäckta fel kan meddelas på handledarnas sida

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Lösningar önskas senast den 12.1.2021 per epost.
De enklare uppgifterna till: nirmal.krishnan(at)helsinki.fi
och de svårare: anne-maria.ernvall-hytonen(at)helsinki.fi.
Uppmärksamma meddelandet om dataskyddet:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Lättare uppgifter

1. I en talföljd med positiva heltal fås ett element genom att man adderar den största siffran i det föregående elementet. Vad är det största antalet möjliga konsekutiva udda tal, som kan finnas i följden?

2. Låt n vara ett positivt heltal som är delbart med talet 24. Visa att summan av de positiva faktorerna för talet $n-1$ också är delbar med 24.

3. I triangeln ABC skär bisektrisen till vinkeln $\angle A$, mittpunktsnormalen till sträckan BC och höjdsträckan från punkten B varandra i punkten E. Visa att bisektrisen till vinkeln $\angle A$, mittpunktsnormalen till sträckan AC och höjdsträckan från punkten C skär varandra i samma punkt.

4. Låt C_1 vara en valfri punkt på sidan AB i triangeln ABC. Låt A_1 vara en punkt på linjen BC för vilken det gäller att $AA_1 \parallel CC_1$, och låt B_1 vara en punkt på linjen AC för vilken det gäller att $BB_1 \parallel CC_1$. Bevisa att

$$\frac{1}{|AA_1|} + \frac{1}{|BB_1|} = \frac{1}{|CC_1|}.$$

5. Vi bildar av bokstäverna A, B och C ett ord som är sex bokstäver långt. Bokstaven A väljs med sannolikheten x, bokstaven B med sannolikheten y och bokstaven C med sannolikheten z, där $x + y + z = 1$. För vilka sannolikheter x, y och z är sannolikheten att ordet $BACBAB$ bildas som störst?

6. Låt a, b och c vara positiva reella tal, för vilka det gäller att $abc = 1$. Bevisa att

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + 1 + \frac{1}{a}.$$

7. Bevisa att om $a, b \in \mathbb{R}$ och $a - b = 1$ så gäller

$$a^3 - b^3 \geq \frac{1}{4}.$$

8. För vilka av talsystemets baser kan 221 vara en faktor till 1215?

9. *Eulers funktion* $\phi(n)$ är antalet tal bland med heltalen $1, 2, \ldots, n-1$ vars största gemensamma faktor med n är 1. Bevisa att när m och n är positiva heltal så är $\phi(m^n - 1)$ delbart med n.

10. Hur många icke-kongruenta trianglar existerar, vars hörnpunkter har heltalen $0, 1, 2$ eller 3 som koordinater?

Svårare uppgifter

11. Låt $f(x)$ vara ett polynom av andra graden. Bevisa att det existerar andragradspolynom $g(x)$ och $h(x)$ för vilka det gäller att

$$f(x)f(x+1) = f(h(x)).$$

12. Leta efter alla polynom P som har reella koeficienter, för vilka det gäller att

$$P(x)P(2x^2-1) = P(x^2)P(2x-1)$$

för alla heltal x.

13. Låt ABC vara en spetsvinklig triangel, som har bisektriserna BL och CM. Visa att $\angle A = 60°$ om och endast om det existerar en punkt K på sträckan $BC(K \neq B, C)$, för vilken triangeln KLM är liksidig.

14. Låt a och n vara heltal och p ett primtal, för vilken det gäller att $p > |a| + 1$. Visa att polynomet $f(x) = x^n + ax + p$ inte kan presenteras som produkten av två icke konstanta polynom med heltalskoefficienter.

15. För vilka positiva heltalsvärden på n och p har ekvationsparet

$$x + py = n,$$
$$x + y = p^z$$

en lösning (x, y, z) bland med positiva heltal?

16. Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara positiva reella tal, som uppfyller kravet

$$x_1 x_2 \cdots x_n = 1.$$

Bevisa att olikheten

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \cdots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1$$

gäller.

17. Summan av kvadraten av de positiva reella talen x, y och z är 1. Bevisa att

(a) $$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - (x+y+z) \geq 2\sqrt{3}$$

(b) $$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + (x+y+z) \geq 4\sqrt{3}.$$

18. Visa att när x, y, z och α är icke-negativa reella tal,

$$x^\alpha(x-y)(x-z) + y^\alpha(y-x)(y-z) + z^\alpha(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Visa att likheten gäller om och endast om antingen $x = y = z$ eller två av talen x, y och z är lika stora, och den tredje är noll. (Olikheten kan vara bekant från något tidigare uppgiftsseriepaket, men hänvisa inte i den här uppgiften till det, utan bevisa olikheten!)

19. Kvadraten av längden på sidan AC i triangeln ABC är medeltalet av kvadraterna för de andra två sidornas längder. Bevisa att $\cot^2 B \geq \cot A \cot C$.

20. I den spetsvinkliga triangeln ABC är punkten D skärningspunkten mellan sidan BC och den inritade höjdsträckan emot sidan BC. Punkten E på linjen AD uppfyller ekvationen

$$\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|CD|}{|DB|}.$$

Punkten F är skärningspunkten mellan sidan BE och dess inritade höjdsträckan i triangeln BDE. Bevisa att $\angle AFC = 90°$