Marraskuun 2021 valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 12.1.2022 sähköpostitse.
Helpommat tehtävät: nirmal.krishnan(at)helsinki.fi
Vaikemmat tehtävät: anne-maria.ernvall-hytonen(at)helsinki.fi.

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Helpompia tehtäviä

1. Positiivisten kokonaislukujen jonossa termi saadaan lisäämällä edelliseen termiin sen suurin numero. Mikä on suurin mahdollinen määrä peräkkäisiä parittomia lukuja, joita jonossa voi olla?

2. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, joka on jaollinen luvulla 24. Osoita, että luvun $n-1$ positiivisten tekijöiden summa on myös jaollinen luvulla 24.

3. Kolmiossa ABC kulman $\angle A$ puolittaja, janan BC keskinormaali ja kärjestä B piirretty korkeusjana leikkaavat pisteessä E. Osoita, että kulman $\angle A$ puolittaja, janan AC keskinormaali ja kärjestä C piirretty korkeusjana leikkaavat samassa pisteessä.

4. Olkoon C_1 kolmion ABC sivun AB mielivaltainen sisäpiste. Olkoon A_1 sellainen piste suoralla BC, että $AA_1 \parallel CC_1$, ja olkoon B_1 sellainen piste suoralla AC, että $BB_1 \parallel CC_1$. Todista, että

$$\frac{1}{|AA_1|} + \frac{1}{|BB_1|} = \frac{1}{|CC_1|}.$$

5. Muodostetaan kirjaimista A, B ja C kuuden kirjaimen sana. Kirjain A valitaan todennäköisyydellä x, kirjain B todennäköisyydellä y ja kirjain C todennäköisyydellä z, missä $x+y+z=1$. Millä todennäköisyyksillä x, y ja z sanan $BACBAB$ todennäköisyys on maksimaalinen?

6. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja, joilla pätee $abc = 1$. Todista, että

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + 1 + \frac{1}{a}.$$

7. Todista, että jos $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a - b = 1$,

$$a^3 - b^3 \geq \frac{1}{4}.$$

8. Millä lukujärjestelmän kantaluvuilla voi 221 olla 1215:n tekijä?

9. *Eulerin funktio* $\phi(n)$ on niiden kokonaislukujen $1, 2, \ldots, n-1$ lukumäärä, joiden suurin yhteinen tekijä n:n kanssa on 1. Todista, että kun m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja, $\phi(m^n - 1)$ on jaollinen n:llä.

10. Montako sellaista epäyhtenevää kolmiota on olemassa, joiden kärkipisteiden koordinaatit ovat kokonaislukuja 0, 1, 2 tai 3?

Vaikeampia tehtäviä

11. Olkoon $f(x)$ toisen asteen polynomi. Todista, että on olemassa toisen asteen polynomit $g(x)$ ja $h(x)$, joilla

$$f(x)f(x+1) = f(h(x)).$$

12. Etsi kaikki reaalikertoimiset polynomit P, joille

$$P(x)P(2x^2-1) = P(x^2)P(2x-1)$$

kaikilla reaaliluvuilla x.

13. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jolla on kulmanpuolittajat BL ja CM. Osoita, että $\angle A = 60°$ jos ja vain jos on olemassa piste K janalla BC ($K \neq B, C$), jolla kolmio KLM on tasasivuinen.

14. Olkoot a ja n kokonaislukuja ja olkoon p alkuluku, joka toteuttaa ehdon $p > |a| + 1$. Osoita, että polynomia $f(x) = x^n + ax + p$ ei voi esittää kahden vakiosta poikkeavan kokonaislukukertoimisen polynomin tulona.

15. Millä n:n ja p:n positiivisilla kokonaislukuarvoilla yhtälöparilla

$$\begin{aligned} x + py &= n, \\ x + y &= p^z \end{aligned}$$

on ratkaisu (x, y, z) positiivisten kokonaislukujen joukossa?

16. Olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positiivisia reaalilukuja, jotka toteuttavat ehdon

$$x_1 x_2 \cdots x_n = 1.$$

Todista, että epäyhtälö

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \cdots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1$$

pätee.

17. Positiivisten reaalilukujen x, y ja z neliöiden summa on 1. Todista, että

(a) $$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - (x+y+z) \geq 2\sqrt{3}$$

(b) $$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + (x+y+z) \geq 4\sqrt{3}.$$

18. Osoita, että kun x, y, z ja α ovat ei-negatiivisia reaalilukuja,

$$x^\alpha(x-y)(x-z) + y^\alpha(y-x)(y-z) + z^\alpha(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Osoita, että yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos joko $x = y = z$ tai luvuista x, y ja z kaksi on yhtäsuuria ja kolmas on nolla. (Epäyhtälö voi olla tuttu jostakin valmennusmateriaalista, mutta älä tässä yhteydessä vetoa siihen vaan todista se!)

19. Kolmion ABC sivun AC pituuden neliö on kahden muun sivun pituuksien neliöiden keskiarvo. Todista, että $\cot^2 B \geq \cot A \cot C$.

20. Teräväkulmaisen kolmion ABC sivulle BC piirretyn korkeusjanan kantapiste on D. Suoran AD piste E toteuttaa yhtälön

$$\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|CD|}{|DB|}.$$

Piste F on kolmion BDE sivulle BE piirretyn korkeusjanan kantapiste. Todista, että $\angle AFC = 90°$.