

モデル予測制御問題に対するいくつかの試み

Some attempts at solving model predictive control problems

田地 宏一
Kouichi Taji

名古屋大学大学院工学研究科機械理工学専攻

Department of Mechanical Science
Graduate School of Engineering
Nagoya University

Nagoya 464-8603, Japan
taji@nuem.nagoya-u.ac.jp

概要

モデル予測制御とは、各時刻において有限時間の最適制御問題を解きながら制御入力を決定する制御手法の一つである。制御入力を決めるために、非線形最適化問題を解かねばならないので、従来は石油プラントなどのサンプリング時間の長いシステムに適用が限られていたが、計算機などの発達とともに、近年はロボットや自動車の制御などにも適用が期待され、注目を集めている。モデル予測制御を用いて実時間制御を行う場合には、最適制御問題を効率よく解くことが重要であり、そのための方法がさまざま提案されている。本稿では、いくつかのシステムに対し、著者らが提案したモデル予測制御の計算手法を紹介する。

Keywords: モデル予測制御, 最適制御, 相補システム, 特異摂動系

1 はじめに

モデル予測制御 (Model Predictive Control) [9] は、リシーディングホライズン制御 (Receding Horizon control, 後退ホライズン制御) とも呼ばれる制御手法の一つであり、各時刻において有限区間の最適制御問題を解きながら制御入力を決定していく方法である。制御入力は、各時刻での状態によって決まるため、最適制御でありながら状態フィードバックの性質もあわせ持つという特徴がある。

モデル予測制御は、

- 考え方は直感的でわかりやすい
- さまざまな制約条件を取り扱える
- チューニングが容易で、操業条件の変化などに対応しやすい

など、実際の現場で受け入れられやすい特徴を持っている。その一方、制御入力を決定するためには、各時刻で制約付き非線形最適化問題を解かねばならない。そのため、モデル予測

制御は、その誕生以来、主として産業界とくに石油化学などの化学プラントに適用され、他の制御手法に比べ、より制約の限界に近いところでの操業を可能にしてきた。これらのシステムでは、サンプリング時間が比較的長いため、オンラインで制御入力を計算するのに十分な時間をとることが可能である。

近年、計算機の発達と低価格化により高性能の計算機が身近になってきたこと、また、こちらの影響が大きいと思われるが、最適化アルゴリズムの発展とそれに伴う商用ソフトウェアの充実と普及により、化学プラントだけではなく、ロボットや自動車などサンプリング時間の短いシステムへもモデル予測制御の適用が期待されている。そのため、実時間で制御入力を計算するための計算手法が研究され、注目を集めている [10, 12, 15]。

本稿では、著者らがこの 2, 3 年の間に取り扱ったモデル予測制御に対する計算手法のいくつかを紹介する。まず、次節でモデル予測制御問題を紹介する。3 節では、入力に上下限制約を持つ線形システムの高速解法について述べる。4 節では、クーロン摩擦を考慮したロボットアームのモデル予測制御問題を取り扱う。この問題は、相補システムとして表現される非線形システムであり、近年注目されているハイブリッドシステムの一つである。5 節では、特異摂動系とよばれる早いダイナミクスと遅いダイナミクスが混在したシステムに対し、二段階法のような解法を紹介する。最後に、まとめと今後の課題について述べる。

2 モデル予測制御問題

本節では、モデル予測制御問題について簡単にまとめる。 n 次元の状態 $x(t)$ および m 次元の制御入力 $u(t)$ に対し、次の状態方程式で表現される一般的な非線形システムを考える。

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1)$$

制御目的は、時刻 t における状態 $x(t)$ が与えられたときに、評価区間(予測区間) $[t, t+T]$ において以下の評価関数を最小化することとする。

$$J = \varphi(x(T, t), t) + \int_0^T L(x(\tau, t), u(\tau, t), t) d\tau \quad (2)$$

ここで、 $x(\tau, t)$ は $x(0, t) = x(t)$ を初期値とする時刻 $t+\tau$ における状態であり、 $u(\tau, t)$ は時刻 $t+\tau$ における制御入力である。また、 $L(x(\tau, t), u(\tau, t), t)$ は非負の評価関数であり、 $\varphi(x(T, t), t)$ は終端時刻 $t+T$ における状態 $x(T, t)$ に対する評価関数である。レギュレータや軌道追従などのよく取り扱われる問題では、関数 L や φ は二次関数が選ばれことが多い。例えばレギュレータ問題では、適当な半正定値対称行列 Q と正定値対称行列 R を用いて、

$$L := \frac{1}{2}x^T Q x + \frac{1}{2}u^T R u$$

のようにする。

モデル予測制御では、目的関数として評価関数 (2)、制約条件として状態方程式 (1)、お

よび状態 $x(t)$ と入力 $u(t)$ に対する制約を持つ次の最適制御問題を解く.

$$\begin{aligned}
 & \text{最小化} \quad J = \varphi(x(T, t), t) + \int_0^T L(x(\tau, t), u(\tau, t), t) d\tau \\
 & \text{制約} \quad [\text{状態方程式}] \frac{dx}{d\tau} = f(x(\tau, t), u(\tau, t)) \\
 & \quad [\text{初期条件}] \quad x(0, t) = x(t) \\
 & \quad \text{状態 } x(\tau, t) \text{ と入力 } u(\tau, t) \text{ に対する制約 } (0 \leq \tau \leq T)
 \end{aligned} \tag{3}$$

そして、得られた最適制御入力 $u^*(\tau, t)$ のうち、 $u^*(0, t)$ のみを時刻 t における入力として用いる制御手法である.

最適化問題 (3) は、連続時間問題であり、解析的な解を求めるのはほぼ不可能である。そこで、問題 (3) を予測区間 $[t, t+T]$ を時間軸 τ に沿って、サンプリング時間 $\Delta\tau = T/N$ で N ステップに離散化した次の離散時間最適制御問題を考える。

$$\begin{aligned}
 & \text{最小化} \quad J = \varphi(x_N(t), t) + \sum_{i=0}^{N-1} L(x_i(t), u_i(t), t) \Delta\tau \\
 & \text{制約} \quad [\text{状態方程式}] \quad x_{i+1}(t) = x_i(t) + f(x_i(t), u_i(t)) \Delta\tau \\
 & \quad [\text{初期条件}] \quad x_0(t) = x(t) \\
 & \quad \text{状態 } x_i(t) \text{ と入力 } u_i(t) \text{ に対する制約 } (i = 0, 1, \dots, N-1)
 \end{aligned} \tag{4}$$

ここで、 $x_i(t), u_i(t)$ はそれぞれ、 $x_i(t) = x(t + i\Delta\tau), u_i(t) = u(t + i\Delta\tau)$ を表す。実際には、時間軸 t についてもサンプリング時間 $\Delta\tau$ で離散化することが多いが、必ずしも t と τ のサンプリング時間を同一にする必要もないため、ここではそのまま t と記した。問題 (4) は普通の非線形最適化問題であり、非線形最適化の解法を用いて解くことができる。モデル予測制御では、(4) を解いて得られた最適制御入力列 $\{u_i^*(t)\}_{i=0}^{N-1}$ のうち、 $u_0^*(t)$ のみを（場合によつては、最初の数ステップを）時刻 t における制御入力として用い、次のステップへ進む。

問題 (4) は時系列最適化問題 [3] ともよばれ、化学プラントのような大規模な問題では、時系列構造を利用した並列計算の手法なども提案されている [19]。一方、ロボットの制御などに適用するような場合、数十ミリ秒間隔で適当なサイズの最適化問題 (4) を実際に繰り返し解きながら、制御入力を生成しなければならない。これは、モデル予測制御の特徴でもあるが、計算時間を短縮する工夫が必要であり、モデル予測制御問題の解法に対する研究の動機付けとなっている。

3 入力に上下限制約のある線形システム

本節では、簡単な例として入力のみに上下限制約を持つ線形システムのモデル予測制御を考える [15, 16]。システムの状態方程式は、すでに適当なサンプリング時間で離散化されているものとし、以下で表されるものとする。

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \tag{5}$$

また、各時刻での入力には以下の上下限制約を仮定する。

$$\underline{e} \leq u_k \leq \bar{e}$$

このシステムに対し、最適制御問題(4)として以下のような予測区間 N の問題を考える。

$$\text{最小化} \quad J = x_{k+N}^T Q_f x_{k+N} + \sum_{i=0}^{N-1} \left(x_{k+i}^T Q x_{k+i} + u_{k+i}^T R u_{k+i} \right) \quad (6a)$$

$$\text{制約} \quad x_{k+i+1} = Ax_{k+i} + Bu_{k+i} \quad (6b)$$

$$\underline{e} \leq u_{k+i} \leq \bar{e}, \quad (i = 0, 1, \dots, N-1) \quad (6c)$$

ここで、重み行列 Q は半正定値対称、 R は正定対称であり、 Q_f は終端時刻の重み行列である。

制約(6c)が無ければ、可制御の仮定の下で最適制御問題(6)の解は状態 x_k を用いて書き表すことができる[10]。そしてこれは、軌道追従のような、状態に目標値が与えられている場合でも可能である。しかし、制約(6c)があるために、制御入力を求めるためには、問題(6)を最適化手法を用いて解かねばならない。

問題(6)をそのまま取り扱ってもよいが、ここではまず、状態方程式(6b)を目的関数(6a)に代入して以下のように書き換える。

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \frac{1}{2} v_k^T Q v_k + x_k^T G v_k \\ \text{制約} \quad & \underline{h} \leq v_k \leq \bar{h} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで $Q \in \Re^{nN \times nN}$, $G \in \Re^{m \times nN}$ は Q, Q_f, R, A, B を用いて構成される行列である。行列 R が正定値であることから、 Q も正定対称となることに注意しておく。また、 v_k は u_k, \dots, u_{k+N-1} を縦に並べたベクトルであり、 \underline{h}, \bar{h} はそれぞれ \underline{e}, \bar{e} を縦に N 個並べたベクトルである。以下では、添字 k を省略して記す。

モデル予測制御では、問題(7)の解を時間軸 k に沿って繰り返し求め、制御入力を生成する。ところで、システム(5)において一時刻進んだとの状態の変化はほとんどの場合微小であると考えられる。したがって、最適化問題(7)の解も時刻ごとの変化は微小であり、一時刻前の最適解は現時刻の問題の初期解として有効であると考えられる。この考えに基づけば、いわゆるホットスタートが可能な解法は有効に働くはずである。そこで、ここでは問題(7)の解法として、射影ガウス・ザイデル法[8]、セミスムーズ・ニュートン法[4]、反射的ニュートン法[2]を適用し、比較検討した。

問題(7)の最適性の必要十分条件は、箱形制約を持つ変分不等式

$$(Qv + G^T x)^T (y - v) \geq 0 \quad \underline{h} \leq y \leq \bar{h}$$

で表される。これはさらに、方程式

$$v = \text{mid} \left\{ \underline{h}, v - (Qv + G^T x), \bar{h} \right\}$$

に書き換えることができ、これに射影ガウス・ザイデル法を適用する。ただし、 mid は、要素ごとに 3 つの値の中で中間の値を取る関数である。

一方、問題(7)の制約条件を $\underline{h} \leq v$ と $-\bar{h} \leq -v$ の二つの制約に分けると、KKT 条件は二つのラグランジュ乗数 \underline{w} と \bar{w} を用いて以下の線形相補性問題に帰着できる。

$$\begin{aligned} 0 \leq \underline{w} \perp (Q^{-1}(-G^T x - \underline{w} + \bar{w}) - \underline{h}) & \geq 0 \\ 0 \leq \bar{w} \perp (-Q^{-1}(-G^T x - \underline{w} + \bar{w}) + \bar{h}) & \geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

これをセミスムーズ・ニュートン法を用いて解く。問題(7)の最適解 v^* は、相補性問題(8)の解 \underline{w}^* , \bar{w}^* より、

$$v^* = \mathcal{Q}^{-1}(-G^\top x - \underline{w}^* + \bar{w}^*)$$

で与えられる。

初期解について

前述したように、最適化問題(7)を繰り返し解くにあたり、一時刻前の最適解を現時刻の問題の初期解として使用できる。ベクトル v_k は、予測区間内の入力 $\{u_{k+i}\}_{i=0}^{N-1}$ を時系列に沿って並べたものであり、

$$v_k = (u_k^T, u_{k+1}^T, \dots, u_{k+N-1}^T)^T$$

と表される。したがって、時刻 $k-1$ での最適解 v_{k-1}^* から u_{k-1}^* を除いたベクトルをシフトさせたベクトルは、一時刻前の解 v_{k-1}^* そのものよりも、時刻 k の問題に対するよりよい初期値と考えられる。

しかしこの方法では u_{k+N-1} に対応する部分の初期値が得られない。そこで、一時刻前の解をシフトして得られる初期値が最適解に近いことを利用し、問題(7)において、 $\{u_{k+i}\}_{i=0}^{N-2}$ を一時刻前の最適解 $\{u_{k+i}^*\}_{i=0}^{N-2}$ に固定した問題を考える。このように設定した問題は、 u_{k+N-1} に関する二次計画問題であるが、問題のサイズは入力の次元 m しかないので、非常に高速に解けるので、その解を u_{k+N-1} の初期値とする。

セミスムーズ・ニュートン法と反射的ニュートン法では、この方法により各ステップでの初期解を作成した。なお、射影ガウス・ザイデル法では u_{k+N-1} から u_k へ向かって更新することが可能なので、 u_{k+N-1} に対する初期解の生成は不要である。

計算実験結果

表1に、2入力4状態の線形システムを、サンプリングタイム0.02秒で8秒間制御したシミュレーション結果を示す。実験はPentium 4, 2.60 GHz, 480MB, Windows XPのパソコン上でMatlab(ver. 7.0.1)を用いて行った。反射的ニュートン法はMatlabの最適化ツールボックスにあるものをそのまま用いた。表の中で、total iter. はアルゴリズムの総反復回数、max timeは最も時間を要したステップにおける計算時間、total timeは総計算時間をそれぞれ秒で表す。各解法において、上段は予測区間 $N=50$ のときの結果、下段は $N=100$ のときの結果である。

4 クーロン摩擦を考慮したロボットアームの制御

本節では、図1に示すような二次元のマニピュレータによる対象物の制御問題を取り扱う[17]。対象物の慣性行列を M_o 、重力などの外力に関するベクトルを g_o 、速度や粘性に関する力のベクトルを h_o 、対象物の一般化座標を q とすると、対象物の運動方程式は以下で表される。

$$M_o \ddot{q} = W_n f_n + W_t f_t + g_o + h_o \quad (9)$$

表 1: 計算結果

	total iter.	max time	total time
射影ガウス・ザイデル法	1432	0.031	2.233
	1687	0.078	5.483
セミスムーズ・ニュートン法	210	0.031	2.105
	160	0.172	7.545
反射的ニュートン法	1412	0.140	20.462
	1580	0.321	56.218

また、マニピュレータの慣性行列を M_m 、外力に関するベクトルを g_m 、速度に関するベクトルを h_m 、関節の角度を θ とすると、マニピュレータに対する運動方程式は、

$$M_m(\theta)\ddot{\theta} = \tau - (J_n^T f_n + J_t^T f_t + g_m + h_m) \quad (10)$$

となる。ここで、 τ は関節角にかかるトルクであり、 f は接触点座標に固定した接触力、 W と J はそれぞれ、接触点座標を基準座標に変換するレンチ行列と関節方向に変換するヤコビ行列を表す。さらに、添字 n と t はそれぞれを法線方向と接線方向に関してまとめたものであることを示すものとする。

各接触点は剛体接触するが、クーロン摩擦力が働くものと仮定する。Pang と Trinkle ら [13, 18] は、式 (9), (10) の f_n , f_t を求める問題を線形相補性問題に定式化し、対象物との接触点における相対加速度や接触力、また、瞬間における接触状態の判別を行った。まず、この定式化について説明する。 R と S を、それぞれ転がり接触と滑り接触に対応する添字集合をあらわすものとする。接触点座標におけるマニピュレータに対する対象物の相対速度、加速度を v , a とすると、それぞれの法線方向成分、接線方向成分は以下で表される。

$$\begin{aligned} v_\alpha &= W_\alpha^T \dot{q} - J_\alpha \dot{\theta} \quad \alpha \in \{n, t\} \\ a_\alpha &= W_\alpha^T \ddot{q} - J_\alpha \ddot{\theta} + \dot{W}_\alpha^T \dot{q} - \dot{J}_\alpha^T \dot{\theta} \quad \alpha \in \{n, t\} \end{aligned} \quad (11)$$

マニピュレータと対象物が接触を維持するためには、すべての接触点における相対速度の法線方向成分は $v_n = 0$ でなければならない。また、接触点が転がり接触である場合、接線方向の相対速度は $v_{Rt} = 0$ でなければならない。物体にめりこまないという条件から、相対加速度の法線方向成分は非負である。さらに、接触点では、接触しているときは法線方向の相対加速度は 0、接触力は非負となり、離脱するときは相対加速度が正、接触力は 0 となるので、法線方向の力と加速度の関係は以下の相補条件として表すことができる。

$$f_n^T a_n = 0, \quad f_n \geq 0, \quad a_n \geq 0 \quad (12)$$

各接触点にはクーロン摩擦が存在するため、摩擦係数を μ とすると、

$$\mu f_{jn} \geq |f_{jt}| \quad (13)$$

を満たさねばならない。接触点が滑り接触のとき、接戦方向の接触力の大きさは μf_{jn} であり、相対速度と反対方向に働くので

$$\mu f_{jn} v_{jt} + f_{jt} |v_{jt}| = 0 \text{ for all } j \in S \quad (14)$$

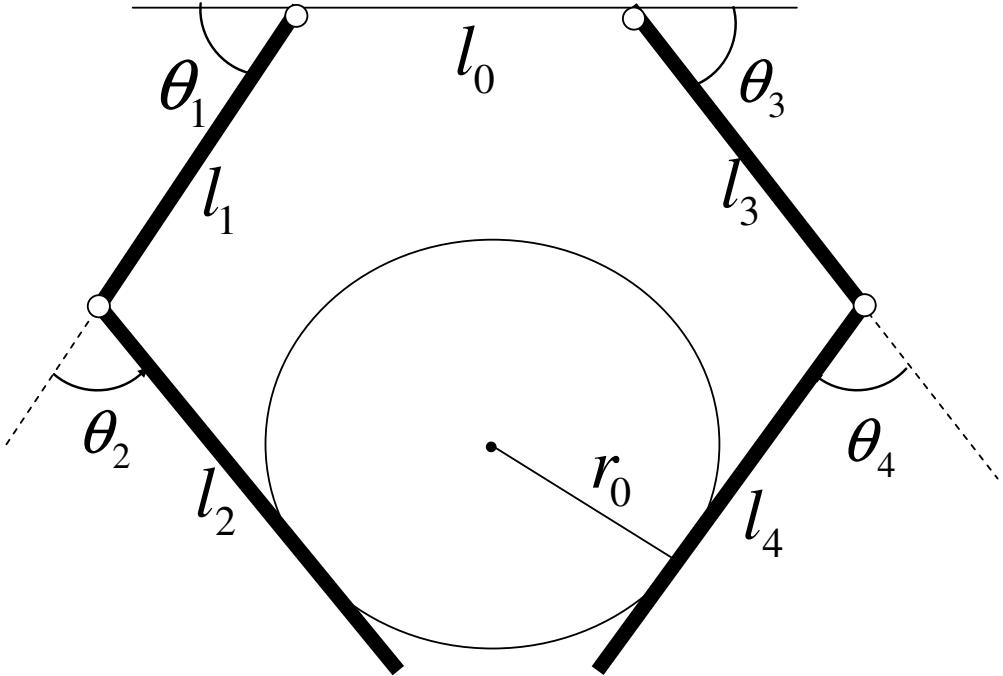


図 1: 2 リンク 2 マニピュレータ

が成り立つ。一方、接触点が転がり接触のとき、接触力は(13)式を満たす任意の方向と大きさを持ちうるが、転がり接触から滑り接触に切り替わるときには、生じる相対加速度と反対方向に摩擦力が発生するため、接触点の相対加速度は以下を満たさなければならない。

$$\mu f_{jn} a_{jt} + f_{jt} |a_{jt}| = 0 \text{ for all } j \in R \quad (15)$$

なお、転がり接触を維持し続けるときには、接線方向の加速度成分 $a_{jt} = 0$ となるので、式(15)は必ず成り立つことに注意する。

対象物およびマニピュレータの慣性行列 M_o , M_m は正定値対称である。そこで、式(9), (10)より \ddot{q} , $\ddot{\theta}$ を求め相対加速度の式(11)に代入すると、関節角 θ に依存する半正定値対称行列 A と、状態 θ, q に依存するベクトル b を用いて

$$a = A(\theta)f + b \quad (16)$$

となる。

接触点での法線方向相対加速度 a_n を、滑り接触と転がり接触に分けて a_{Sn} , a_{Rn} と表す。同様に、接線方向相対加速度 a_t も、 a_{St} , a_{Rt} と分けて書く。滑り接触の場合、接線方向に働く接触力 f_{jt} は(14)式から直接計算することができ、また相対加速度に対する制約は無いので、相補条件から a_{St} を除外できる。したがって、式(16)より

$$\begin{pmatrix} a_{Sn} \\ a_{Rn} \\ a_{Rt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{SnSn} - A_{SnSt}V_{St} & A_{SnRn} & A_{SnRt} \\ A_{RnSn} - A_{RnSt}V_{St} & A_{RnRn} & A_{RnRt} \\ A_{RtSn} - A_{RtSt}V_{St} & A_{RtRn} & A_{RtRt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{Sn} \\ f_{Rn} \\ f_{Rt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{Sn} \\ b_{Rn} \\ b_{Rt} \end{pmatrix} \quad (17)$$

を得る。ただし、 V_{St} は $\text{diag}\left(\frac{\mu v_{jt}}{|v_{jt}|}\right)$ を対角成分とする対角行列である。

転がり接触点 $j \in R$ において、摩擦制約 (13) に対し非負のスラック変数 s_{jt}^+ , s_{jt}^- を導入し、

$$s_{jt}^+ = \mu f_{jn} + f_{jt}, \quad s_{jt}^- = \mu f_{jn} - f_{jt}$$

とおく。また、接線方向の相対加速度の正と負の部分をそれぞれ a_{jt}^+ , a_{jt}^- と書くことになると、

$$a_{jt} = a_{jt}^+ - a_{jt}^-, \quad |a_{jt}| = a_{jt}^+ + a_{jt}^-, \quad a_{jt}^+ \geq 0, a_{jt}^- \geq 0$$

となる。これらを用いると、式 (12), (13), (15), (17) で表される非線形相補性問題は、次の線形相補性問題に書き換えることができる。

$$\begin{pmatrix} a_{Sn} \\ a_{Rn} \\ a_{Rt}^+ \\ s_{Rt}^- \end{pmatrix} = \tilde{A} \begin{pmatrix} f_{Sn} \\ f_{Rn} \\ s_{Rt}^+ \\ a_{Rt}^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{Sn} \\ b_{Rn} \\ b_{Rt} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \begin{pmatrix} a_{Sn} \\ a_{Rn} \\ a_{Rt}^+ \\ s_{Rt}^- \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} f_{Sn} \\ f_{Rn} \\ s_{Rt}^+ \\ a_{Rt}^- \end{pmatrix} \geq 0 \quad (18)$$

行列 \tilde{A} は、摩擦係数 μ を対角成分を持つ対角行列 U_R をもちいて、以下のように表される。

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{SnSn} - A_{SnSt}V_{St} & A_{SnRn} - A_{SnRt}U_R & A_{SnRt} & 0 \\ A_{RnSn} - A_{RnSt}V_{St} & A_{RnRn} - A_{RnRt}U_R & A_{RnRt} & 0 \\ A_{RtSn} - A_{RtSt}V_{St} & A_{RtRn} - A_{RtRt}U_R & A_{RtRt} & I \\ 0 & 2U_R & -I & 0 \end{pmatrix}$$

相補性問題 (18) の解の存在と一意性について、以下の定理が成り立つ [13].

定理 4.1 行列 $A(\theta)$ が正定値対称と仮定する。ある正の定数 $\bar{\mu}$ が存在し、摩擦係数が $\mu \leq \bar{\mu}$ であれば、線形相補性問題 (18) は唯一の解をもつ。

制御アルゴリズム

以上より、図 1 に示すようなマニピュレータによる対象物の制御問題は、接触点でのクーロン摩擦を考慮すると、運動方程式 (9), (10) と相補条件 (18) にしたがうこととなる。これは、相補システム [14] とよばれるハイブリッドシステムの一つの表現形である。したがって、これにモデル予測制御を適用した場合、制御入力を決定するために各時刻で解かねばならない最適化問題 (4) は、制約条件に相補性問題を含む均衡制約つき最適化問題 (MPEC) となる。このとき、運動方程式をそのまま扱うと、最適制御問題の制約条件は非線形となる。そこで、短い予測区間の間では状態の変化は微小であると見なし、慣性行列やレンチ行列などを初期条件の値に固定して運動方程式などを全て線形近似した。したがって、時刻 k における制御入力を決定する問題は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\text{最小化} \quad & J = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \left((x(k+i) - x^*)^T Q (x(k+i) - x^*) + \tau(k+i)^T R \tau(k+i) \right) \\
\text{制約} \quad & M_o(k) \ddot{q}(k+i) = W_n f_n(k+i) + W_t f_t(k+i) + g_o \\
& M_m(k) \ddot{\theta}(k+i) = \tau(k+i) - (J_n^T f_n(k+i) + J_t^T f_t(k+i) + h_m + g_m) \\
& 0 \leq \begin{pmatrix} a_{Sn}(k+i) \\ a_{Rn}(k+i) \\ a_{Rt}^+(k+i) \\ s_{Rt}^-(k+i) \end{pmatrix} = \tilde{A}(k) \begin{pmatrix} f_{Sn}(k+i) \\ f_{Rn}(k+i) \\ s_{Rt}^+(k+i) \\ a_{Rt}^-(k+i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{Sn}(k+i) \\ b_{Rn}(k+i) \\ b_{Rt}(k+i) \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} f_{Sn}(k+i) \\ f_{Rn}(k+i) \\ s_{Rt}^+(k+i) \\ a_{Rt}^-(k+i) \end{pmatrix} \geq 0 \\
& i = 0, 1, \dots, N-1
\end{aligned} \tag{19}$$

ここで、 $x(k) = (q(k), \theta(k))^T$ であり、 $x^* = (q^*, \theta^*)^T$ は目標の状態である。

この問題は、線形相補制約付きの二次計画問題であるが、既存の解法 [5] を適用するには次のような問題点がある。それは、相補条件 (18) を表す式が、接触点の接触モードにより異なることである。さらに、接触モードの変化はそれより前の時点での関節トルクにも依存するため、短い予測区間であっても、前もって各時点での接触モードを予測することは難しい。各時点での接触モードを固定した MPEC を複数回解く方法も考えられるが、得られたトルクに対するモードが固定したモードと異なる可能性があり、また MPEC の一回の計算にも時間を要するため、全てのモードを探索するのは膨大な時間を要する。

ところで、上の問題 (19)において、各時点での接触力と相対加速度を固定すれば、トルクに関する二次計画問題となる。また、入力トルクを固定した下で、接触点における接触力と相対加速度を求める問題は線形相補性問題であり、それぞれ比較的高速に解くことができる。このことを利用し、まず適当なトルク列の初期値を与え、トルクが収束するまで、線形相補性問題と二次計画問題を交互に繰り返し解くという方法を提案した。問題 (19) の解法を含む、モデル予測制御による制御アルゴリズムの全体は以下のとおりである。

step 0 初期設定. $k = 0$

step 1 入力トルク $\tilde{\tau}(k+i)$, $i = 0, \dots, N$ を与え、線形相補性問題を解き、接触力と相対加速度を求める。

step 2 step 1 で求めた接触力と相対加速度に基づく接触モードを固定し、二次計画問題を解いて入力トルク列 $\tau(k+i)$, $i = 0, \dots, N$ を求める。

step 3 $\|\tilde{\tau} - \tau\| \leq \epsilon$ であれば step 4 へ。そうでなければ、 $\tilde{\tau} \leftarrow \tau$ として step 1 へ。

step 4 得られた入力トルク列の 1 ステップ目 $\tau(k)$ を与えて相補性問題 (18) を解き、接触力 $f(k)$ と相対加速度 $a(k)$ を求める。

step 5 運動方程式から、状態を更新する。 $k \leftarrow k + 1$ として step 1 へ戻る。

提案したアルゴリズムを用いて、図 1 に示すような 2 リンク 2 マニピュレータに対するシミュレーション実験を行った。実験は、Pentium4 3.4GHz, 1GB, Windows XP の計算機上で、MATLAB 7.1 を用いて行った。マニピュレータのパラメータは、各リンクの質量は 1.0、リンクの長さは $l_1 = l_3 = 0.5$, $l_2 = l_4 = 0.8$ であり、 $l_0 = 0.3$ である。また、対象物は均質な

円盤状の物体であり、質量は 0.4、半径は 0.3 である。対象物は図 1 のようにマニピュレータと 2 点で接触しており、摩擦係数は 0.4 とした。

シミュレーションでは、 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 60^\circ$ で静止した初期状態から、 $\theta_1 = \theta_3 = 60^\circ$ 、 $\theta_2 = \theta_4 = 70^\circ$ で静止している状態を目標状態とする鉛直方向への物体の持ち上げについて計算実験を行った。提案アルゴリズムの部分問題を解く内部反復の収束性は証明されていなかったため、Step 1～3 の反復は最大 20 回の打ち切るようにしたが、ほとんどの場合数回程度の反復で収束した。なお、計算時間は、サンプリング時間 0.01 秒、予測区間 $N = 20$ で 2 秒間の制御を行った場合 125 秒ぐらいであった。

5 特異摂動系に対するモデル予測制御

本節では、特異摂動系に対するモデル予測制御について考える。特異摂動系とは、速いダイナミクスと遅いダイナミクスを併せ持つシステムであり、以下のように定式化される。

$$\dot{x} = f(x, z, u) \quad (20)$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(x, z, u) \quad (21)$$

$\varepsilon > 0$ は微小なパラメータであり、 $z \in R^{n_f}$ は速いダイナミクスの状態変数を、 $x \in R^{n_s}$ は遅いダイナミクスの状態変数をそれぞれ表現している。特異摂動系にモデル予測制御を適用すると、各時刻に解く有限時間の最適制御問題の予測区間は遅いダイナミクスの動きを評価するために長く、また、最適制御問題を離散化する際のサンプリング時間は速いダイナミクスにあわせ短くする必要がある。そのため、最適制御問題の次元が非常に大きくなる。

ところで、特異摂動系は、速いダイナミクスが遅いダイナミクスに比べ、短い時間で定常状態に収束するといった特性を持っている。この特性を利用し、Kokotovic [7] は特異摂動法を提案した。特異摂動法は、システムを速いダイナミクスに注目した退化システムと、遅いダイナミクスに注目した境界層システムとに分け、それぞれのシステムに対する入力を組み合わせることで、システム全体の制御を実現する制御手法である。ここでは、特異摂動法に基づいたモデル予測制御の方法を紹介する [6]。

特異摂動法

まず、基礎となる特異摂動法 [7] について述べる。特異摂動系 (20), (21) に対し、初期状態を $x(t) = x_t, z(t) = z_t$ とし、次の評価関数を最小化する有限時間の最適制御問題を考える。

$$J = \varphi(x(T, t), z(T, t), t) + \int_0^T L(x(\tau, t), z(\tau, t), u(\tau, t), t) d\tau \quad (22)$$

特異摂動系は、速いダイナミクスの状態 z が比較的短い時間で定常状態に収束するのに対し、遅いダイナミクスの状態 x は長時間過渡状態であり続けた後、定常状態に収束するといった特性を持っている。そこで、 ε が微小のとき、状態 z はほぼ定常状態にあるとみなして $\varepsilon \downarrow 0$ と近似する。このようにして得られたシステムを 退化システム と呼ぶ。式 (21) 式の左辺を 0 とおいて z について解いた解を \hat{z} とおくと、

$$\hat{z} := h(\hat{x}, \hat{u}) \quad (23)$$

となる。記号 $\hat{\cdot}$ は退化システムの状態変数であることを意味する。式(23)を式(20)式に代入すると、退化システムは

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, \hat{u}) := f(\hat{x}, h(\hat{x}, \hat{u})) \quad (24)$$

となる。式(23)を式(22)に代入し、最小化する評価関数を \hat{x}, \hat{u} の関数として再定義する。

$$\hat{J} = \hat{\varphi}(\hat{x}(T, t), t) + \int_0^T \hat{L}(\hat{x}(\tau, t), \hat{u}(\tau, t), t) d\tau$$

初期状態を $\hat{x}(t) = x_t$ とおいて、最適制御問題を解くと退化システム(24)に対する最適制御入力 $\hat{u}^*(t + \tau)$, ($0 \leq \tau \leq T$)が得られる。なお、退化システムにおける速いシステムの状態 $\hat{z}(t)$ は遅いシステムの状態 $\hat{x}(t)$, 入力 $\hat{u}(t)$ から(23)式によって決定される。

退化システムを考える際、速いダイナミクスの動きは定常状態にあるものと見なし、その過渡応答は無視している。しかし、 ε が小さくともその近似誤差は存在し、 ε が大きくなると誤差も大きくなってくる。そこで、退化誤差の影響を補正するために、元のシステムと退化システムとの間の誤差システムである境界層システムを考える。

退化システムの状態 \hat{x} は元のシステムを良く近似していると仮定し、

$$x - \hat{x} = O(\varepsilon)$$

が成立しているものとする。このとき、 \hat{z} と z , \hat{u} と u との近似誤差を、

$$\eta := z - \hat{z}, \quad \nu := u - \hat{u} \quad (25)$$

とおいて、式(20), (21)に代入すると、

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, \eta + h(\hat{x}, \nu + \hat{u})), \nu + \hat{u} \quad (26)$$

$$\varepsilon \dot{\eta} = g(\hat{x}, \eta + h(\hat{x}, \nu + \hat{u})), \nu + \hat{u} - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial \hat{x}} \dot{\hat{x}} - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial \nu} \dot{\nu} \quad (27)$$

となる。時間軸の変換 $\tau = \varepsilon \zeta$ を行い $\varepsilon \downarrow 0$ とすると、式(26), (27)は

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{d\zeta} &= 0 \\ \frac{d\eta}{d\zeta} &= g(\hat{x}(t), \eta(\zeta) + h(\hat{x}(t), \nu(\eta) + \hat{u}(t)), \nu(\eta) + \hat{u}(t)) \end{aligned} \quad (28)$$

となる。これが境界層システムであるが、ここではさらに(28)を $\hat{x}(t)$, $\hat{z}(t)$, $\hat{u}(t)$ の近傍で線形化し、次式を得る。

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{\partial g}{\partial \eta} \Big|_{\substack{x = \hat{x}(t) \\ z = \hat{z}(t) \\ u = \hat{u}(t)}} \eta + \frac{\partial g}{\partial \nu} \Big|_{\substack{x = \hat{x}(t) \\ z = \hat{z}(t) \\ u = \hat{u}(t)}} \nu \quad (29)$$

式(25)を式(22)に代入すると、 η と ν に関する以下の評価関数を得る。

$$\bar{J} = \bar{\varphi}(\eta(T, t), t) + \int_0^T \bar{L}(\eta(\zeta, t), \nu(\zeta, t), t) d\zeta$$

これを最小化する最適制御問題を解くと、境界層システム (29) に対する最適制御入力 $\nu^*(\tau, t)$, ($0 \leq \tau \leq T$) を得る。元のシステムに対する入力 $u^*(t)$ は

$$u^*(t + \tau) = \hat{u}^*(t + \tau) + \nu^*(t + \tau) \quad (0 \leq \tau \leq T) \quad (30)$$

である。以上が、特異摂動法の概要である。適當な仮定の下で特異摂動法による解 (30) は、評価関数 (22) を最小化する元のシステム (20), (21) の最適制御問題の解に収束することが示されている [7]。

モデル予測制御

ここでは、上で紹介した特異摂動法の考え方をモデル予測制御に応用する。まず、退化システム (24) について考える。予測区間 $[t, t + T]$ は遅いダイナミクスを表現するのに十分な長さを持つとし、分割幅 $\Delta\tau_s = T/N_s$ で N_s ステップに離散時間化する。すると、退化システムに対する離散時間化された最適制御問題は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \hat{J} = \hat{\varphi}(x_{N_s}(t), t) + \sum_{i=0}^{N_s-1} \hat{L}(\hat{x}_i(t), \hat{u}_i(t), t) \Delta\tau_s \\ \text{制約} \quad & \hat{x}_{i+1}(t) = \hat{x}_i(t) + \hat{f}(\hat{x}_i(t), \hat{u}_i(t)) \Delta\tau_s \\ & \hat{x}_0(t) = x(t), \quad (i = 0, 1, \dots, N_s - 1) \end{aligned} \quad (31)$$

この最適制御問題 (31) を解き、退化システムに対する最適入力 $\{\hat{u}_i^*(t)\}_{i=0}^{N_s-1}$ および状態 $\{\hat{x}_i^*(t)\}_{i=1}^{N_s}$ を得る。

モデル予測制御では通常、最適制御問題を解いて得られた入力のうち最初の 1 ステップのみを制御入力として用いる。したがって、最適制御問題 (31) の解 $\hat{u}_0^*(t)$ のみが実際の制御入力となる。ところが、 $\hat{u}_0^*(t)$ は速いダイナミクスを定常状態にあるものと見なして近似した問題の解であるため、近似誤差を含む。そこで、それを修正するために境界層システムを利用する。このとき、境界層システムは全予測区間 $[t, t + T]$ について考える必要はなく、退化システムの最適制御問題のはじめの 1 ステップ分 $[t, t + \Delta\tau_s]$ についてのみ考えればよい。

予測区間 $[t, t + \Delta\tau_s]$ を分割幅 $\Delta\tau_f = \Delta\tau_s/N_f$ で N_f ステップに分割し、離散時間化する。境界層システム (29) に対する最適制御問題は、

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \bar{J} = \bar{\varphi}(\eta_{N_f}(t), t) + \sum_{i=0}^{N_f-1} \bar{L}(\eta_i(t), \nu_i(t), t) \Delta\tau_f \\ \text{制約} \quad & \eta_{i+1}(t) = \eta_i(t) + \frac{1}{\varepsilon} (A(t)\eta_i(t) + B(t)\nu_i(t)) \Delta\tau_f \\ & \eta_0(t) = 0, \quad (i = 0, 1, \dots, N_f - 1) \end{aligned} \quad (32)$$

となる。ただし、

$$A(t) = \left. \frac{\partial g}{\partial \eta} \right|_{\substack{x = \hat{x}(t) \\ z = \hat{z}(t)}} \quad , \quad B(t) = \left. \frac{\partial g}{\partial \nu} \right|_{\substack{x = \hat{x}(t) \\ z = \hat{z}(t)}} \\ u = \hat{u}^*(t) \quad u = \hat{u}(t)$$

である。境界層システムに対する最適制御問題 (32) を解き、最適解 $\{\nu_i^*(t)\}_{i=0}^{N_f-1}$ を得る。時刻 t における元の問題に対するリシーディングホライズン制御入力は、

$$u^*(t) = \hat{u}_0^*(t) + \nu_0^*(t)$$

である。まとめると、以下のようになる。

特異摂動系に対するモデル予測制御アルゴリズム

Step 1 時刻 t の状態を用いて退化システムに対する最適制御問題 (31) を解き、入力 $\{\hat{u}_i^*(t)\}_{i=0}^{N_s-1}$ よび状態 $\{\hat{x}_i^*(t)\}_{i=1}^{N_s}$ を求める。

Step 2 境界層システムに対する最適制御問題 (32) を解き、最適入力 $\{\nu_i^*(t)\}_{i=0}^{N_f-1}$ を求める。

Step 3 $u^*(t) = \hat{u}_0^*(t) + \nu_0^*(t)$ を入力。

Step 4 $t = t + \Delta\tau_f$ とし Step 1 に戻る。

上のアルゴリズムにおいて、退化システム (24) を評価する予測区間 T は十分長くする必要があるが、特異摂動系の特性を利用すれば、分割幅 $\Delta\tau_s$ を大きくとることができる。一方、境界層システムを評価する分割幅 $\Delta\tau_f$ は、元のシステムにモデル予測制御をそのまま適用する場合の分割幅と同じくらいに十分に短くする必要があるが、予測区間は $[t, t + \Delta\tau_s]$ にすぎない。したがって、退化システム、境界層システムの双方の最適制御問題のサイズを小さくすることができ、計算時間の低減が期待できる。

計算実験

提案した手法の適用例として、二次元の簡単な特異摂動システムに適用した場合の結果を示す。システムおよび評価関数 J は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} a\dot{x}_1 &= 3\frac{x_2}{x_1} - 5x_1 + 3u_1 \\ \varepsilon\dot{x}_2 &= -3x_2 - 0.8x_1x_2 + u_2 \end{aligned}$$

$$J = (x^* - x(T))^T S_f (x^* - x(T)) + \int_0^T ((x^* - x)^T Q (x^* - x) + (u^* - u)^T R (u^* - u)) dt \quad (33)$$

初期状態を $x_0 = (0, 0)$ とし、 $x^* = [18.28, 11.35]^T$, $u^* = [30, 200]^T$ を目標状態として $a = 100$, $\varepsilon = 40$ の場合についてシミュレーションを行った。評価関数 (33) で用いられる行列は

$$S_f = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 6.7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおいた。退化システムの予測区間は $T = 20$ 秒とし、これを分割幅 $\Delta\tau_s = 1$ 秒で $N_s = 20$ ステップに分割した。一方、境界層システムの方は、 $\Delta\tau_s = 1$ 秒を $N_f = 100$ に分割した。したがって、 $\Delta\tau_f = 0.01$ 秒である。実験は、Pentium4 2.6GHz, 1GB, Windows XP の計算機上で、Microsoft Visual C++ を用いて行った。

元の問題に、予測区間 $T = 20$ 秒、ステップサイズ $\Delta\tau = 0.01$ 秒でモデル予測制御を適用した場合、1ステップの入力を計算するのに最大 0.06 秒かかった。一方、提案手法を用いた場合、最大計算時間は 0.01 秒であり、実時間制御が可能である。

6 おわりに

本稿では、いくつかのシステムに対し、システムの特徴を生かしたモデル予測制御の解法を紹介した。このほか、この分野ではハイブリッドシステムに対するモデル予測制御の解法の研究が近年盛んに行われている。とくに、ハイブリッドシステムは混合論理動的システム [1] として定式化されることが多いが、モデル予測制御問題は組み合わせ最適化問題となるため、まだ有効な解法は少ない。さいごに、制御入力の計算法だけではなく、モデル予測制御を用いた閉ループシステムの安定性などの理論的な結果も得られている。それについては、Mayne 他 [11] を参照されたい。

謝辞

本研究は、一部（独）日本学術振興会科学研究費補助金（C）18560429 の援助を受けている。

参考文献

- [1] A. Bemporad and M. Morari: Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints, *Automatica*, **35** (1999) 407-427.
- [2] T.F. Coleman and Y. Li: A Reflective Newton Method for Minimizing a Quadratic Function Subject to Bounds on some of the Variables, *SIAM Journal on Optimization*, **6** (1996) 1040-1058.
- [3] 江本, 福島: プロセス産業における時系列最適化のための逐次2次計画分解法, システム制御情報学会論文誌, **15** (2002) 34-40.
- [4] F. Facchinei, A. Fischer and C. Kanzow: A semismooth Newton method for variational inequalities: the case of box constraints, In M.C. Ferris and J.S. Pang (eds.) *Complementarity and variational problems: state of the art*, (SIAM, Philadelphia, PA, 1997) 76-90.
- [5] M. Fukushima, Z.Q. Luo and J.S. Pang: A globally convergent sequential quadratic programming algorithm for mathematical programs with linear complementarity constraints, *Computational Optimization and Applications* **10** (1998) 5-34.
- [6] 木村, 細江, 田地: 特異摂動系に対するリシーディングホライズン制御, 第49回自動制御連合講演会（神戸大学工学部）CD-ROM (2006).
- [7] P.V. Kokotovic: *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*, (Academic Press, 1986).
- [8] Z.Q. Luo and P. Tseng: Error Bound and Convergence Analysis of Matrix Splitting Algorithms for the Affine Variational Inequality Problem, *SIAM Journal on Optimization*, **2** (1992) 43-54.

- [9] J.M. Maciejowski (足立, 菅野 訳) : モデル予測制御—制約のもとでの最適制御, (東京電機大学出版局, 東京, 2005) .
- [10] G. Marro, D. Prattichizzo and E. Zattoni: A nested computational approach to the discrete-time finite-horizon LQ control problem, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **42** (2003) 1002-1012.
- [11] D.Q. Mayne, J.B. Rawlings, C.V. Rao and P.O.M. Scokaert: Constrained model predictive control: stability and optimality, *Automatica*, **36** (2000) 789-814.
- [12] T. Ohtsuka: A continuation/GMRES method for fast computation of nonlinear receding horizon control, *Automatica*, **40** (2004) 563-574.
- [13] J.S. Pang and J.C. Trinkle: Complementarity Formulations and Existence of Solutions of Dynamic Multi-Rigid-Body Contact Problems with Coulomb Friction, *Mathematical Programming*, **73** (1996) 199-226.
- [14] J.M. Schumacher: Complementarity systems in optimization, *Mathematical Programming*, **101** (2004) 263-295.
- [15] 斎藤, 井村: 入力拘束システムのモデル予測制御に対する M-行列を用いた高速解法, 計測自動制御学会論文集, **40** (2004) 906-914.
- [16] 田地, 中島, 細江: 入力拘束のあるモデル予測制御に対する高速解法, 第 49 回システム制御情報学会研究発表講演会講演論文集, (2005) 505-506.
- [17] 田地, 三井: クーロン摩擦を伴うロボットアームの相補条件を用いた解析と制御, 最適化: モデリングとアルゴリズム 20 (統計数理研究所共同研究リポート 203) (2007) 105-119.
- [18] J.C. Trinkle, J.A. Tzizouris and J.S. Pang: Dynamic Multi-Rigid-Body Systems with Concurrent Distributed Contacts: Theory and Examples, *Philosophical Transactions Mathematical, Physical, and Engineering Sciences*, **359-1789** (2001) 2575-2593.
- [19] 山川, 江本: 複数装置から成るプラントの多期間生産計画問題に対する並列型主双対内点法, システム制御情報学会論文誌, **16** (2003) 356-365.