

# 角加速度、外加力矩及轉動慣量之關係

作者：張娟鳴(E94086107)

系別：工科系 112

Email:gina25369@yahoo.com.tw

**摘要:**此實驗主要探討角加速度、外加力矩及轉動慣量三者之間的關係，從實驗中，我們可以瞭解理論值與實際值的差異，並得出以下結論：一、定力矩下角加速度為定值。二、角加速度與外加力矩成正比。三、在定力矩作用下，角加速度與轉動慣量成反比。四、平行軸定理為真。五、練習利用 Tracker 測量角加速度。

**關鍵字：**力矩、轉動慣量、角加速度、平行軸定理。

## 介紹

轉動慣量是一物體對其旋轉運動的慣性大小的量度，與人的生活有極大關係；因此，實驗藉轉盤旋轉、碼表計時，計算轉動體的角位移量以及時間、角加速度，再利用質量和半徑計算轉動慣量、秤盤砝碼來求外加力矩，以此觀察三者的關係。

## 理論：

### (一) 力矩與角加速度、轉動慣量之關係

當剛體繞固定轉軸時，可將物體細分為許多質點，再把每一質點質量 $m_i$ 乘上與轉軸的距離 $r_i$ 平方後，累加起來，稱作此剛體對某一固定轉軸的轉動慣量 $I$ ，其關係式如下：

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

對一連續物體，可將其切割成無限多個極小的點，其質量皆為 $dm$ ，每個質點到固定轉軸的距離為 $r$ ，則轉動慣量 $I$ 可表示成積分的形式： $I = \int r^2 dm$

由牛頓第二運動定律 $F = ma$ ，可推出當物體受力矩作用時，滿足式子： $\tau = I\alpha$   
其中， $\tau$ 為物體所受力矩， $\alpha$ 為角加

速度。

### (二) 規則物體轉動慣量、平行軸定理

下列幾種對稱物體之轉動慣量（其固定軸均為中心軸， $M$ 均為質量， $R$ 為半徑。）

1. 質點： $I = MR^2$

2. 實心圓盤： $I = \frac{1}{2}MR^2$

3. 實心圓柱： $I = \frac{1}{2}MR^2$

4. 實心圓柱：通過中心，與長度垂直之軸的轉動慣量為  $I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$  其中， $R$ 為圓柱半徑， $L$ 為圓柱長度

5. 圓環： $I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$  其中， $R_1$ 為內半徑， $R_2$ 為外半徑

6. 薄圓環： $I = MR^2$

7. 實心球體： $I = \frac{2}{5}MR^2$

8. 細棒：對通過中心，與長度垂直之軸的轉動慣量為  $I = \frac{1}{12}ML^2$  其中， $L$ 為長度  
平行軸定理

從剛體相對於質心軸所計算出的轉動慣量 $I_{CM}$ ，可計算出該物平移至某一轉軸的轉動慣量，其值為 $I = I_{CM} + ML^2$

其中， $L$  為兩平行軸之距離。

### (三) 不規則物體之轉動慣量

形狀不規則之物體，其轉動慣量不易由切割後的積分求得。因此，我們對物體施固定力矩，使物體繞軸轉動，根據 $\tau = I\alpha$ ，物體將作等角加速度轉動。測量其從靜止至轉動 $\theta$ 角度所需的時間，再用下列公式求得角加速度 $\alpha$ ：

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

接著測量物體所受力矩，即可求得該物體對轉軸之轉動慣量。

此次實驗中的支架，就屬不規則形狀之物體，在實驗中，我們可經由測量角加速度 $\alpha$ ，再由下列公式求得支架的轉動慣量：

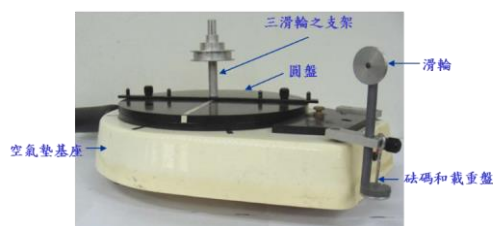
$$\tau = I'\alpha = (I + I_{\text{支架}})\alpha = Fr = (mg - ma)r$$

其中， $I'$  為總轉動慣量， $I$  為扣除支架的轉動慣量， $F$  為尼龍線所受張力， $r$  為力臂， $a = r\alpha$

### 實驗過程

#### (一) 儀器

空氣墊基座、送風機、圓盤、圓環、滑輪、三滑輪之支架、碼表、水平儀、砝碼、游標尺、螺絲、載重盤、尼龍線、兩對圓柱體



圖一、實驗裝置圖

#### (二) 步驟

調整空氣墊基座，使其保持水平；放上圓盤並調整，輕推圓盤使其以等角速度轉動，確保圓盤與基座無摩擦力。

##### (A) 在定力矩下測量角加速度

1. 將三滑輪支架用短螺絲鎖在圓盤上
2. 將尼龍線固定在支架上，使一端通過滑輪，掛上載重盤
3. 轉動圓盤使尼龍線環繞支架上轉軸，直至載重盤掛勾接近滑輪下方
4. 使圓盤在載重盤重量所產生的力矩作用下，由靜止開始轉動 $\frac{1}{8}$ 轉，以碼表紀錄轉動時間，重複五次

5. 改變轉動角度，重複步驟 4 之測量

6. 用游標尺測量力臂 $r$ ，計算 $I$  支架

##### (B) 驗證角加速度與外力矩成正比

1. 在載重盤上分別放上空盤、10g、20g、30g 砝碼，使圓盤由靜止轉動一周，計算所需時間
2. 求角加速度後，再以 $\tau$ 為縱軸， $\alpha$ 為橫軸作圖

##### (C) 定力矩下，角加速度與轉動慣量之關係並驗證 $\tau = I'\alpha$

1. 在載重盤上放砝碼 20g
2. 分別使 (a) 圓盤 (b) 圓盤加圓環 (c) 兩個圓盤 從靜止轉動一圈，紀錄轉動時間
3. 計算角加速度，並將實驗 (A) 所得到的 $I$  支架分別與三種情況的轉動慣量相加得 $I'$

4. 以 $\frac{1}{I'}$ 為橫軸， $\alpha$ 為縱軸作圖；測量力臂 $r$ ，計算力矩 $\tau = mgr$

5. 驗證 $\tau = I'\alpha$ 是否成立

##### (D) 驗證平行軸定理

1. 在載重盤上放砝碼 20g

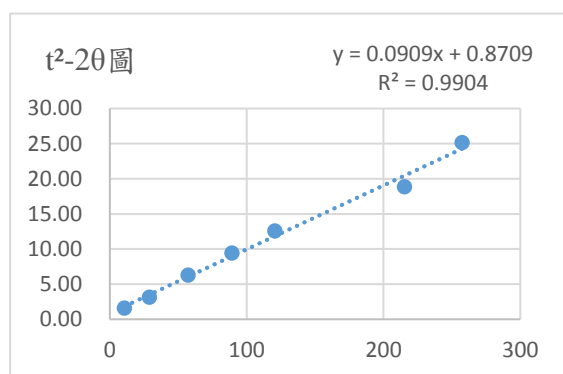
2. 使 (a) 圓盤加一對 1kg 重圓柱體 (圓柱體放  $\frac{d}{2}$  處,  $d$  為圓盤半徑) (b) 圓盤加一對 250g 重圓柱體 (圓柱體放  $d$  處) 由靜止轉動一圈, 紀錄時間
  3. 以測得時間計算角加速度, 並測量力臂  $r$ , 計算力矩
  4. 利用  $\tau = I'\alpha$  計算  $I'$ , 再以  $I'$  求出  $I$ , 驗證平行軸定理是否吻合
- (E) 利用 Tracker 軟體測量物體角加速度, 並將其與原本實驗比較

## 結果與討論

### 實驗 (A)

圈數	$2\theta$	$ta^2$
1/8	1.57	10.732
1/4	3.14	28.858
1/2	6.28	57.123
3/4	9.42	89.303
1	12.57	120.692
1 1/2	18.85	215.268
2	25.13	257.603

表一、 定力矩下同一物體轉動不同角度所需的時間



圖二、  $t^2$  與  $2\theta$  的關係圖, 斜率為角加速度  $\alpha$ 。

將  $\alpha$  帶回公式  $\tau = (I + I_{\text{支架}})\alpha = Fr = (mg - ma)r$ , 得到  $I' = 111428.21$ 。

依照講義給的數據, 光是圓盤的轉動慣量就已大於  $I'$  的 112500, 如此計算  $I$  支架為負值, 不合實驗結果。

對此, 我推論實驗造成的誤差可能有: (1) 鬆手時無意施加的外力 (2) 視差造成轉盤還沒到定位就停止計時 (3) 測量時基座移位, 轉盤受到摩擦力 (4) 桌子和尼龍繩造成的摩擦力 (5) 並未再次確認圓盤的尺寸

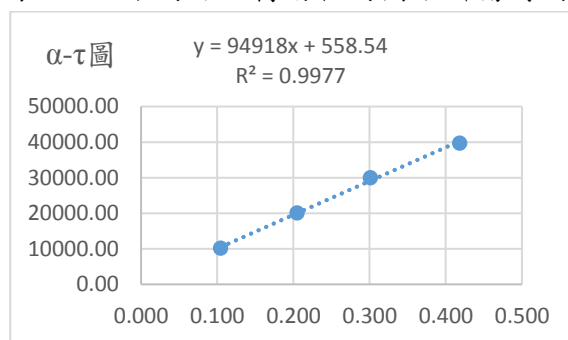
第一點和第二點在同學提點後雖然進行修正, 嘗試把秒數誤差控制在 0.3 秒內, 但仍無法排除這部分造成的誤差; 第三點和第四點是後來想到的, 還沒有試著修正。

使用這組數據做後面的實驗, 產生的誤差是在可接受範圍內, 我猜測或許是  $I$  比書上的小, 又或者我們還是沒有調整好, 以致累積的小失誤造成結果上的錯誤。

### 實驗 (B)

掛重	力矩	$ta^2$	$\alpha$
10	10128.83	120.69	0.104
20(19.8)	20055.07	61.34	0.205
30(29.6)	29981.32	41.73	0.301
40(39.2)	39704.99	30.05	0.418

表二、 不同力矩轉動相同圈數所需時間



圖三. 力矩與  $\alpha$  的關係圖, 得到回歸線  $y = 94918x + 558.54$

由於 558.54 在以萬為單位的  $y$  軸下顯得很小, 因此可視其通過原點, 角加速度與外加力矩成正比。

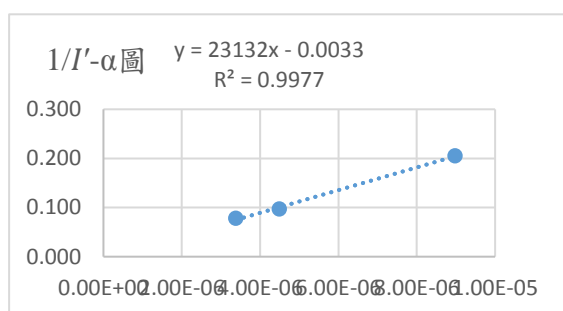
在此實驗, 我們要注意不能讓尼龍繩與滑輪卡到, 也不可讓砝碼碰地 (在一開始就要多轉幾圈繩子); 此外, 若要增加

精準度的話，可以在空氣坐上做記號，讓圓盤是精準地轉過一圈，不多也不少。

#### 實驗 (C)

	$1/(I+I_{\text{支架}}) \tau a^2$	$\alpha$
圓盤	8.974E-06	61.31
圓盤+圓柱	3.379E-06	161.75
2圓盤	4.487E-06	129.69

表三.、相同外力矩下，不同轉動慣量轉動相同圈數所需時間



圖四.、 $\frac{1}{I'}$ 與  $\alpha$  的關係圖

圖中常數項值極小，我們可將  $\frac{1}{I'}$  和  $\alpha$  視為正比。

首先，在這個實驗內，我們犯了一個錯誤；我們誤以為它是要我們掛 20g 的物品，因此放在上頭的砝碼只有 10g（實際上要 20g），因此我們做出來的加速度和時間都會比較長，在回歸直線內的算式  $y = 23132x - 0.0033$ ，其斜率 23132 也較接近我們的力矩 20055.07，而非書中的 30000。

在實驗 C，我們起初只放砝碼架就開始做實驗，後來發現圓盤慢到快動不了了才調整掛重（然而還是放錯），掛重不夠重會造成轉動時間過長，圓盤遭受摩擦力也會變大，這可能是造成我們實驗誤差的原因。

#### 實驗 (D)

	$\tau a^2$	$\alpha$	I總	誤差(%)
圓盤+1kg	144.19	0.087	230120.7	-1.14
圓盤+250	140.23	0.090	223802.3	-0.61

表四. 測量圓盤加上圓柱後轉動一圈的所需時間

我們的實驗 D 和 C 一樣是用 20g 的掛重，我們將算出的 I 值扣除由實驗 A 得到的  $I'$  (111428.21)，得到的圓柱 I 分別是 59346.26 和 56187.03，與理論值 60031.25、56531.25 相去不遠，驗證平行軸定理成立。

但我們沒有確認圓柱的尺寸和質量，我認為確認能讓我們對數據更有概念。

#### 實驗 (E)

此實驗我們是選擇拍攝實驗 A 作為分析基礎，然而，我們在第一周來不及做完，實驗 A 的數據有些是第二周測的，造成有幾個地方相差較大。（詳見附錄）

藉由實驗 E，我發現在在正常情況下，使用 Tracker 的數據會比較密集，有助於增加實驗精確度。然而，因為分析和計時的人不同，所取的參考點會有差，造成有的可能轉動許久才開始記錄；這時轉盤已有初速，記錄到的角加速度會變大，可能增加誤差。

但是，因為第一周有的數據可能有施加外力，所以我並不知道究竟是 A 數據還是 E 數據比較接近正確值。

**致謝：**謝謝別組同學的建議及教授的提醒和數據檢驗

#### 參考文獻

1. [成功大學普通物理實驗室](#)
2. [維基百科-轉動慣量](#)
3. [成功大學普物實驗課本](#)

#### 附錄 [完整數據](#)