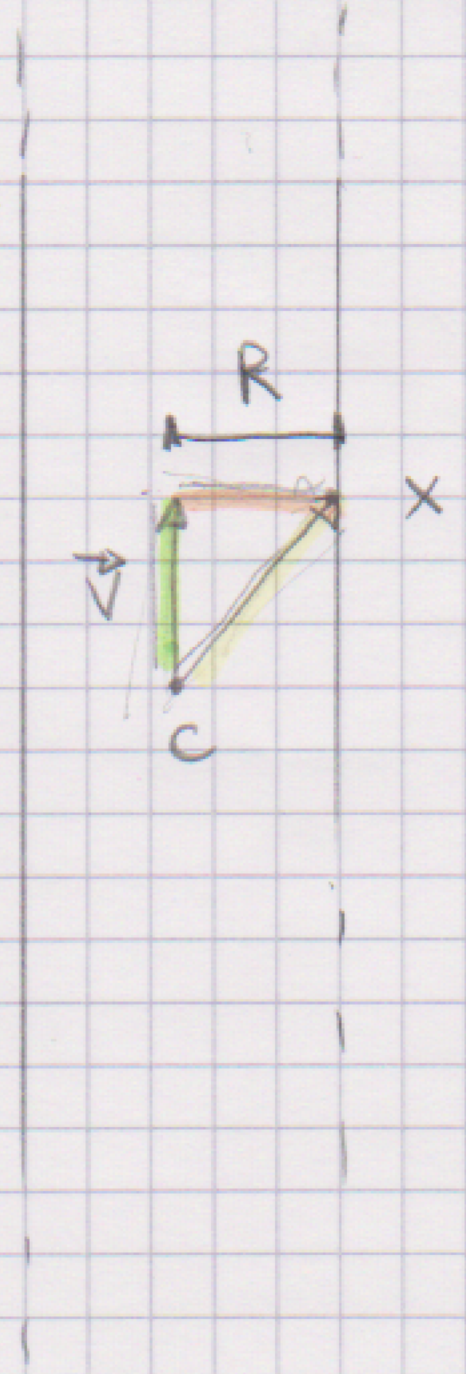
Theory exercise (derivation of formulas for cylinder-ray intersection)

1) unendlicher Zylinder



Alle Punkte x, die auf der Zylinderoberfläche liegen, erfüllen die Gleichung

$$|x-c|^2 = R^2 + [(x-c)\cdot\vec v]^2$$

implizite Gleichung des Zylinders

wobei gilt:
- c ist ein Pkt im Zentrum des Zylinders
- $\vec v$ liegt auf der Zylinderachse mit $|\vec v| = 1$
- R ist der Radius des Zylinders

Zylinder mit Strahl $(\vec o + t\vec d)$ schneiden:

$$|(\vec o + t\vec d) - c|^2 = R^2 + ((\vec o + t\vec d - c)\cdot\vec v)^2$$

$$\Leftrightarrow |t\vec d + (\vec o - \vec c)|^2 = R^2 + ((t\vec d + (\vec o - \vec c))\cdot\vec v)^2$$

$$\Leftrightarrow (t\vec d + \vec{co})^T (t\vec d + \vec{co}) = R^2 + (t\vec d\vec v + \vec{co}\cdot\vec v)^2$$

$\vec o - \vec c = \vec{co}$

$$\Leftrightarrow (t\vec d + \vec{co})^T (t\vec d + \vec{co}) = R^2 + (t\vec d\vec v)^2 + 2t\vec d\vec v\cdot\vec{co}\vec v + (\vec{co}\cdot\vec v)^2$$

$$\Leftrightarrow (t\vec d + \vec{co})^T (t\vec d + \vec{co}) = R^2 + t^2(\vec d\vec v)^2 + 2t\vec d\vec v\cdot\vec{co}\cdot\vec v + (\vec{co}\cdot\vec v)^2$$

$(t\vec d\vec v)^2 = t^2(\vec d\cdot\vec v)^2$

$$\Leftrightarrow t^2(\vec d^T d) + 2t\,\vec d\cdot\vec{co} + \vec{co}^T co = R^2 + t^2(\vec d\vec v)^2 + 2t\vec d\vec v\cdot\vec{co}\vec v + (\vec{co}\vec v)^2$$

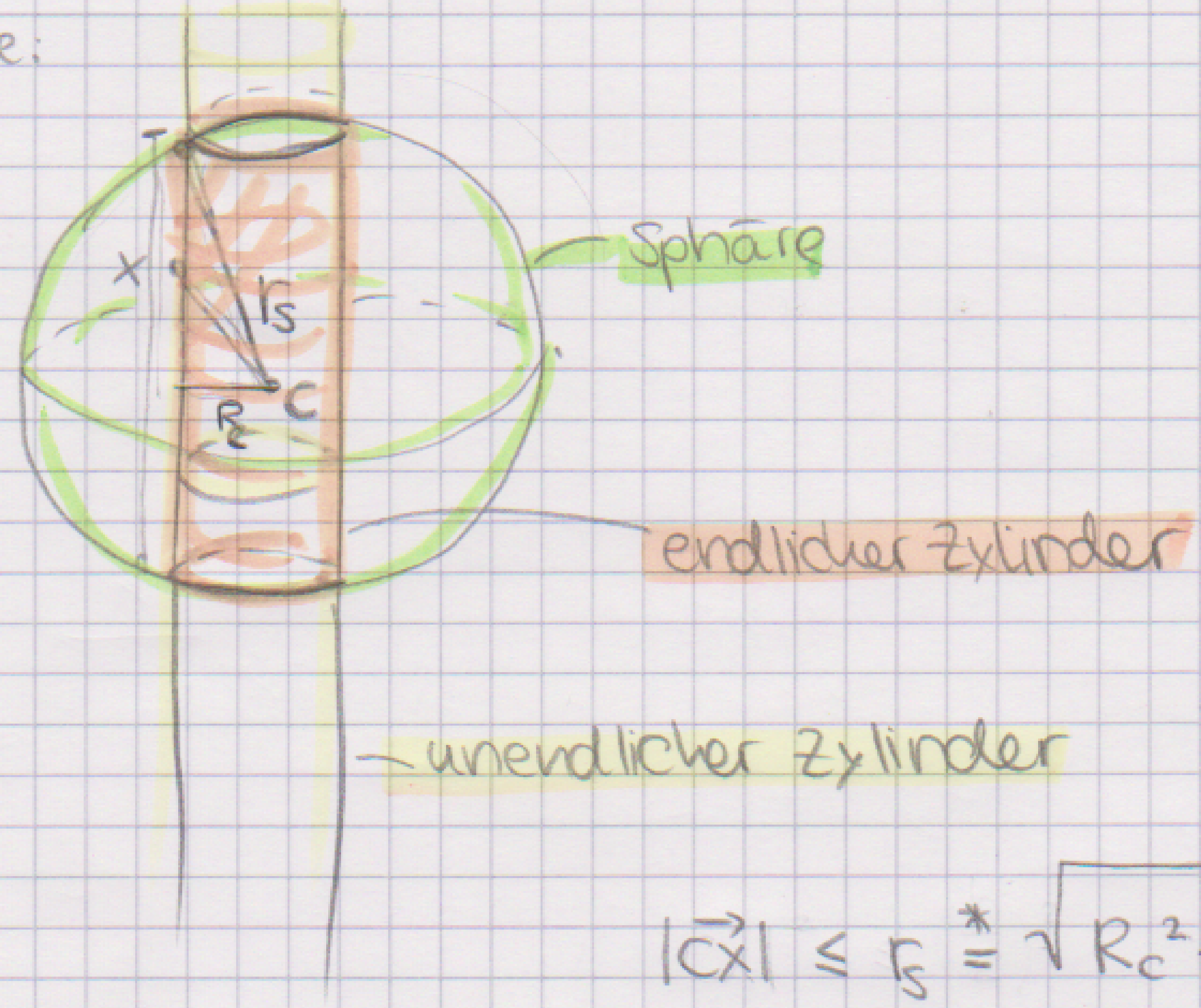
$$\Leftrightarrow \underbrace{(\vec d^T d) - (\vec d\vec v)^2}_{:=A}\, t^2 + \underbrace{2(\vec d^T\vec{co} - \vec d\vec v\cdot\vec{co}\cdot\vec v)}_{:=B}\, t + \underbrace{\vec{co}^T\vec{co} - (\vec{co}\cdot\vec v)^2 - r^2}_{:=C} = 0$$

Parameter der quadratischen Gleichung

(1) (Lösungen dieser Gleichung geben uns Schnittpkte mit dem unendlichen Zylinder)

2) endlicher Zylinder

Idee:



$$|\vec{cx}| \leq r_S \overset{*}{=} \sqrt{R_c^2 + \left(\tfrac{h}{2}\right)^2}$$

mit $r_S^{\,2} = R_c^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$, also $r_S \overset{*}{=} \sqrt{R_c^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}$

Also muss gelten für den bei (1) allenfalls gefundenen Schnittpkt, dass

$$|\vec{cx}| \leq \sqrt{R^2 + \left(\tfrac{h}{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad |\vec{cx}|^2 \leq R^2 + \left(\tfrac{h}{2}\right)^2$$

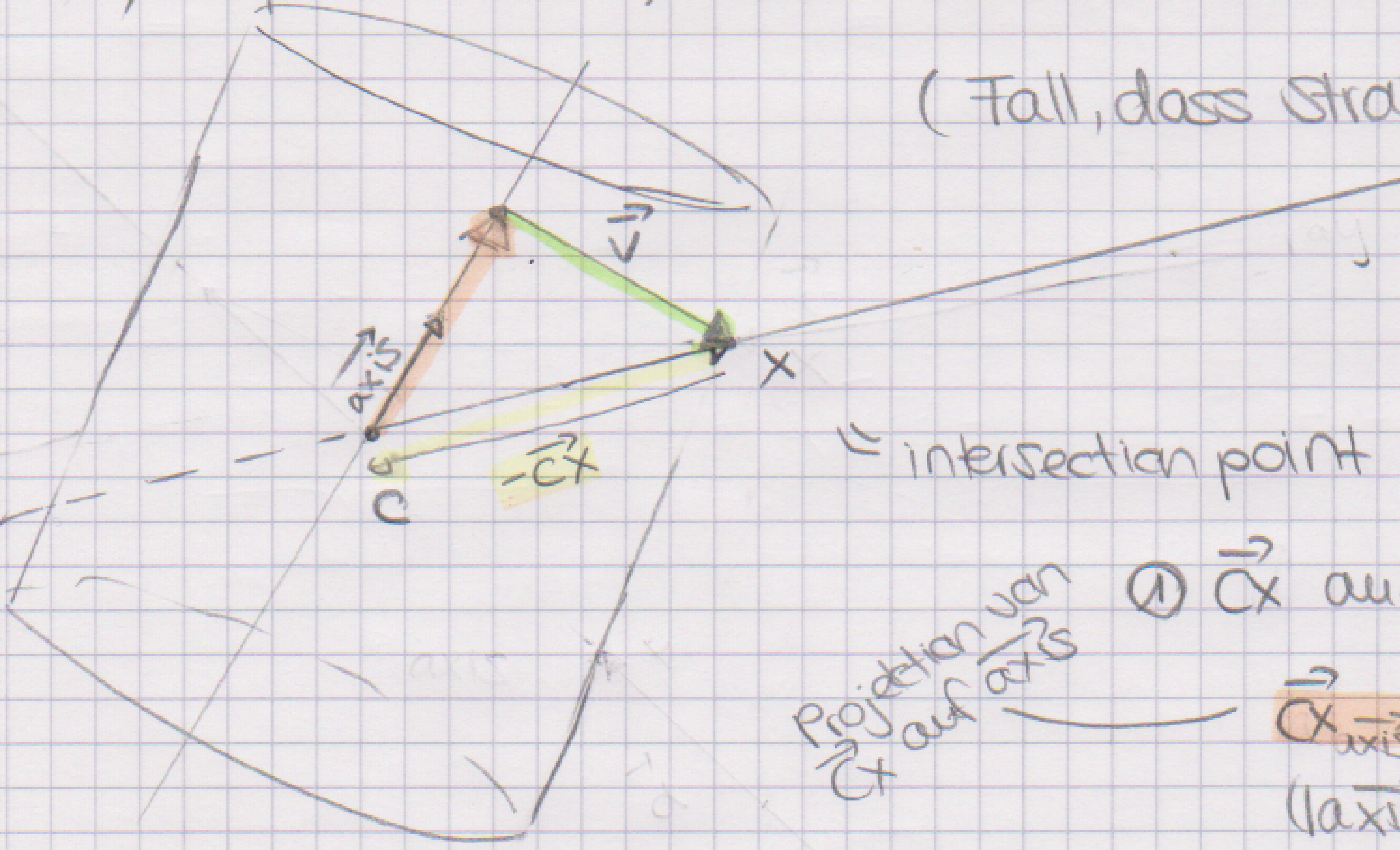
$$\Leftrightarrow \quad (x-c)^T(x-c) \leq R^2 + \left(\tfrac{h}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (o+dt-c)^T(o+dt-c)^2 \leq R^2 - \left(\tfrac{h}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (t\vec{d}+\vec{co})^T(t\vec{d}+\vec{co})^T \leq R^2 + \left(\tfrac{h}{2}\right)^2$$

3.1) Computation of cylinder normals

(Fall, dass Strahl von aussen auf Zylinder trifft)



① $\vec{cx}$ auf $\vec{axis}$ projezieren:

Projektion von $\vec{cx}$ auf $\vec{axis}$ — $\vec{cx}_{\vec{axis}} = \mathrm{dot}(\vec{cx}, \vec{axis}) \cdot \vec{axis}$

$(|\vec{axis}| = 1)$

② Vektorsubtraktion

$$\vec{cx}_{\vec{axis}} - \vec{cx} = \vec{v}$$

③ $\vec{v}$ noch normieren

$$\vec{n} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{v}}{r}$$

3.2) Fall, dass Strahl von innen auf Zylinder trifft (*)

→ der Normalenvektor zeigt genau in die andere Richtung,
das (*) ist der Fall, falls

$$\mathrm{dot}(\vec{d}, \vec{n}) < 0,$$

dann ist $\vec{n} = -\vec{n}$