Assignment 10

Joana Portmann
Ann Kirchner

Task 1

$y = \sqrt{x}$ $\qquad x(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$ — x koord, — y koord.

$y^2 = x$

The highest degree of t ist 2 ⇒ degree = 2 Bézier curve, it contains 3 control points

$x(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t)$ $\qquad b_i \hat{=}$ control points

Curve x(t) starts at b_0 and ends at b_n. $t \in [0,1]$
The first and last control point are the same as the first and last point of the curve.

$\Rightarrow b_0 = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} x(1) \\ y(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

def: $\sum_{i=0}^{2} b_i \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$

$$= b_0 \underbrace{\binom{2}{0}}_{=1} \underbrace{t^0}_{=1} (1-t)^2 + b_1 \underbrace{\binom{2}{1}}_{=2} t^1 (1-t)^1 + b_2 \underbrace{\binom{2}{2}}_{=1} t^2 \underbrace{(1-t)^0}_{=1}$$

$$= b_0 (1-t)^2 + b_1 2t(1-t) + b_2 t^2$$

Choose $b_1 = \begin{bmatrix} bx \\ by \end{bmatrix}$, we already know b_0 and b_2.

$$x(t) = b_x \underbrace{2t(1-t)}_{= 2t - 2t^2} + t^2$$
$$y(t) = b_y 2t(1-t) + t^2$$

$$b_x = \frac{x(t) - t^2}{2t - 2t^2} = \frac{t^2 - t^2}{2t - 2t^2} = \underline{0}$$

$$b_y = \frac{y(t) - t^2}{2t - 2t^2} = \frac{t - t^2}{2t - 2t^2} = \underline{0{,}5}$$

$$\Rightarrow b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Task 2

$y = \sqrt[3]{x^2}$ $\quad\longrightarrow\quad x(t) = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \end{bmatrix}$ — x-koord. / — y-koord.

$y^3 = x^2$

The highest degree of t is 3 => degree = 3 Bézier curve, it contains 4 control points

Again, the first and last control point are the same as the first and last point of the curve.

$$b(t) = \sum_{i=0}^{3} b_i \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} b_0 \binom{3}{0} t^0 (1-t)^3 + b_1 \binom{3}{1} t^1 (1-t)^2 + b_2 \binom{3}{2} t^2 (1-t)^1 + b_3 \binom{3}{3} t^3 (1-t)^0$$

$$\stackrel{!}{=} b_0 (1-t)^3 + b_1 3t(1-t)^2 + b_2 3t^2(1-t) + b_3 t^3$$

$$\stackrel{!}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (1-t)^3}_{=0} + b_1 3t(1-t)^2 + b_2 3t^2(1-t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t^3 \quad = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

subtract

$$\begin{bmatrix} 0 \\ t^2 - t^3 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} b_1 3t(1-t)^2 + b_2 \cdot 3(t^2 - t^3) \qquad b_1 = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} b_x \cdot 3t(1-t)^2 \\ b_y \cdot 3t(1-t)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x' \cdot 3(t^2 - t^3) \\ b_y' \cdot 3(t^2 - t^3) \end{bmatrix} \qquad b_2 = \begin{bmatrix} b_x' \\ b_y' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Task 3

0,75 + 0,25

(1-t) t

$$b_i^k = (1-t)\, b_i^{k-1}(t) + t\, b_{i+1}^{k-1}(t)$$

$$b_i^0 = b_i \quad , \quad t = 0{,}25$$

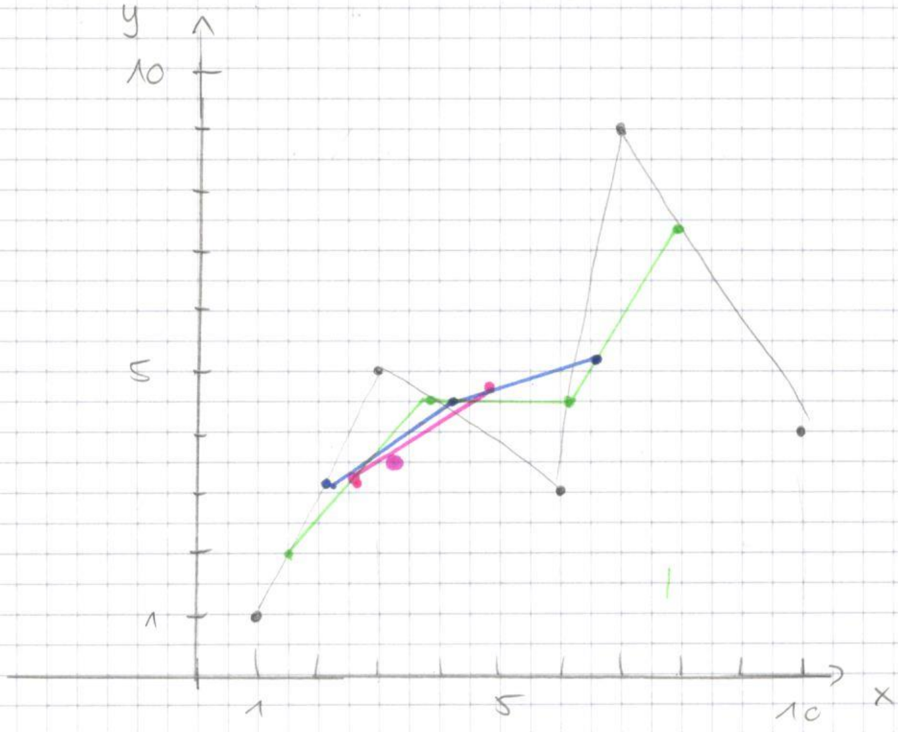
$$b_0^4 = c(t) = \begin{bmatrix} 3{,}21 \\ 3{,}50 \end{bmatrix}$$

$$b_0^3 = \begin{bmatrix} 2{,}64 \\ 3{,}09 \end{bmatrix} \qquad b_1^3 = \begin{bmatrix} 4{,}94 \\ 4{,}70 \end{bmatrix}$$

$$b_0^2 = \begin{bmatrix} 2{,}06 \\ 3{,}09 \end{bmatrix} \qquad b_1^2 = \begin{bmatrix} 4{,}38 \\ 4{,}50 \end{bmatrix} \qquad b_2^2 = \begin{bmatrix} 6{,}63 \\ 5{,}31 \end{bmatrix}$$

$$b_0^1 = \begin{bmatrix} 1{,}50 \\ 2{,}00 \end{bmatrix} \qquad b_1^1 = \begin{bmatrix} 3{,}75 \\ 4{,}50 \end{bmatrix} \qquad b_2^1 = \begin{bmatrix} 6{,}25 \\ 4{,}50 \end{bmatrix} \qquad b_3^1 = \begin{bmatrix} 7{,}75 \\ 7{,}75 \end{bmatrix}$$

$$b_0^0 = \begin{bmatrix} 1{,}00 \\ 1{,}00 \end{bmatrix} \qquad b_1^0 = \begin{bmatrix} 3{,}00 \\ 5{,}00 \end{bmatrix} \qquad b_2^0 = \begin{bmatrix} 6{,}00 \\ 3{,}00 \end{bmatrix} \qquad b_3^0 = \begin{bmatrix} 7{,}00 \\ 9{,}00 \end{bmatrix} \qquad b_4^0 = \begin{bmatrix} 10{,}00 \\ 4{,}00 \end{bmatrix}$$



Task 4

To show: B_i^n reaches its maximum at $t = i/n$

Proof: $t \in [0,1] \rightarrow B_i^n(t)$ reaches maximum for $t \in (0,1)$,
where $\frac{\partial}{\partial t} B_i^n(t) = 0$ or at $t=0$ or at $t=1$.

Wir wissen, dass $B_i^n(0) = \delta_{i,0}$ und $B_i^n(1) = \delta_{i,n}$ für $i \neq 0$ und $i \neq n$ wird das Maximum also sicher nicht bei $t=1$ oder $t=0$ erreicht.

$0 < i < n$:

$$\frac{\partial}{\partial t} B_i^n(t) \overset{\text{Hint}}{=} n\left(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)$$

$$\Leftrightarrow \binom{n-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{n-1-(i-1)} = \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-1-i}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{(n-1)!} \cdot \cancel{t^{i-1}} (1-t)^{n-i}}{(i-1)!\,(n-i)!} = \frac{\cancel{(n-1)!}\, t^{*} (1-t)^{n-1-i}}{(n-1-i)!\; i!}$$

$\cdot (n-1-i)!$ $\cdot (n-i)!$
$\cdot\, i!$ $\cdot (i-1)!$

$$\Leftrightarrow (n-1-i)!\, i!\, (1-t)^{n-i} = t\,(1-t)^{n-i-1} (i-1)!\,(n-i)!$$

$: (n-i-1)!$
$: (i-1)!$
$: (1-t)^{n-i-1}$

$$\Leftrightarrow i \cdot (1-t) = t \cdot (n-i)$$

$$\Leftrightarrow i - \cancel{it} = tn - \cancel{ti}$$

$$\Leftrightarrow i = tn$$

$$\Leftrightarrow i/n = t$$

Da gilt dass $B_i^n(0) = B_i^n(1) = 0 \wedge B_i^n(t) \geq 0$ folgt, dass wir bei $t = i/n$ wirklich ein Maximum haben.

$i = n$: $B_i^n(t) = B_n^n(t) = \binom{n}{n} t^n = t^n$

$\frac{\partial}{\partial t} B_i^n(t) = \frac{\partial}{\partial t} t^n = n t^{n-1} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow t = 0$ für $t \neq 0$ gilt, dass

$\frac{\partial}{\partial t} t^n > 0 \rightarrow B_i^n(t)$ ist also streng monoton wachsend und hat Maximum bei Intervallsgrenze $t = 1 = i/n$.

$i = 0$: Analog zu $i=n$ (wegen Symmetrie: $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t) \rightarrow$ Maximum bei $t = 0 = i/n$.

Meaning:

$B_i^n(t)$ ist bei $t = i/n$ maximal, dh der Kontrollpkt b_i hat bei i/n „maximale" Auswirkung. ($\to$ pseudo local control)

$$(x/t) = \sum_{i=0}^{n} b_i \, B_i^n(t))$$

↳ „bei der Summe wirkt der Kontrollpkt b_i am meisten, wenn er mit dem maximalen Wert von $B_i^n(t)$ multipliziert wird. Das ist bei $t = i/n$"

Task 5

$[0,1]$ $[0, t_s]$ $[0,1][t_s, 1]$

$t_s = 0{,}25$ subdivide into $c_l(t)$ and $c_r(t)$
order $n = 3$

$$\text{blossom}_{p_l}([t_0, t_1, t_2]) = \text{blossom}_p(t_s * [t_0, t_1, t_2])$$

Find the control points for c_l:

$$b_0 = \text{blossom}([0,0,0]) = b_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \text{blossom}([0, 0, t_s]) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3{,}75 \end{bmatrix} \quad 0{,}75 * 2 + 0{,}25 * 9$$

$$b_2 = \text{blossom}([0, t_s, t_s]) = \begin{bmatrix} 2{,}31 \\ 4{,}63 \end{bmatrix}$$

$$b_3 = \text{blossom}([t_s, t_s, t_s]) = \begin{bmatrix} 2{,}78 \\ 5{,}06 \end{bmatrix}$$

Find control points for c_r:

$$b_0 = \text{blossom}([t_s, t_s, t_s]) = \begin{bmatrix} 2{,}78 \\ 5{,}06 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \text{blossom}([t_s, t_s, 1]) = \begin{bmatrix} 4{,}19 \\ 6{,}38 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = \text{blossom}([t_s, 1, 1]) = \begin{bmatrix} 7{,}00 \\ 3{,}75 \end{bmatrix}$$

$$b_3 = \text{blossom}([1,1,1]) = b_1 = \begin{bmatrix} 7{,}00 \\ 9{,}00 \end{bmatrix}$$