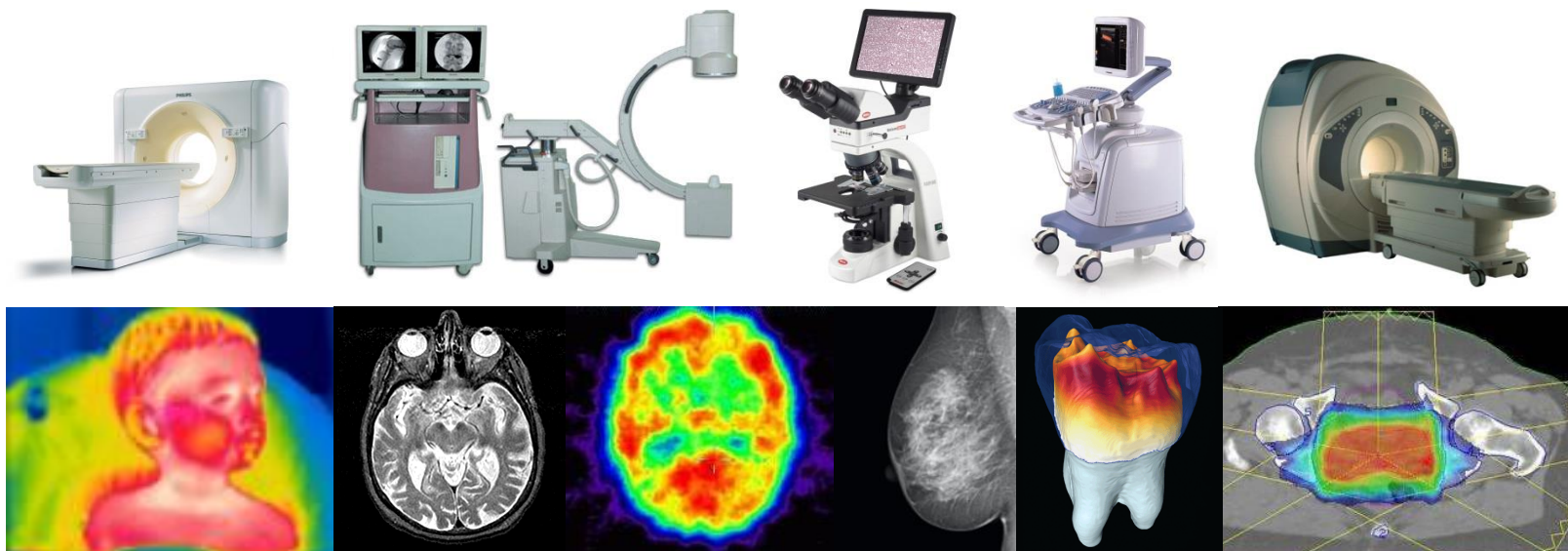


# 12. Rekonstrukcija slik

## Biomedicinske slikovne tehnologije



### Biomedicinske slikovne tehnologije

prof. dr. Boštjan Likar, doc. dr. Miran Bürmen, as. dr. Žiga Špiclin

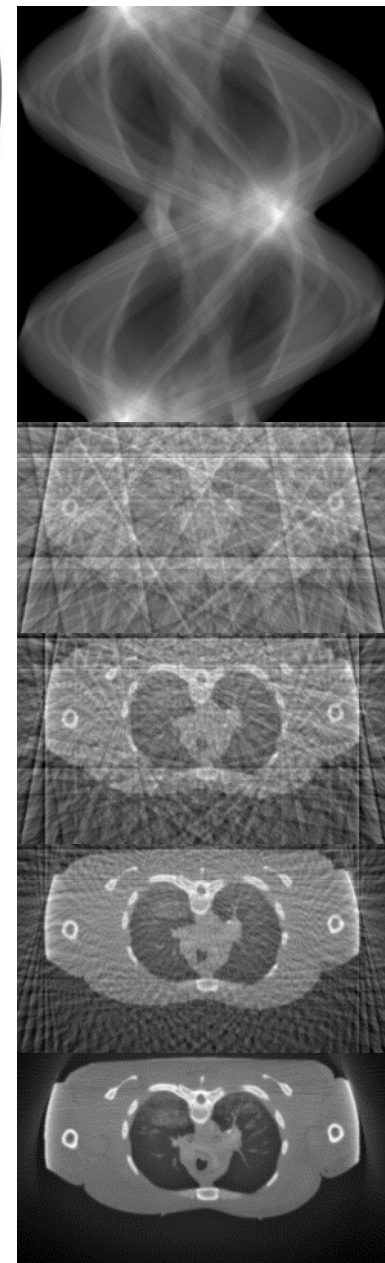
1. letnik 2. stopnje

Elektrotehnika – Biomedicinska tehnika

# Pregled vsebine



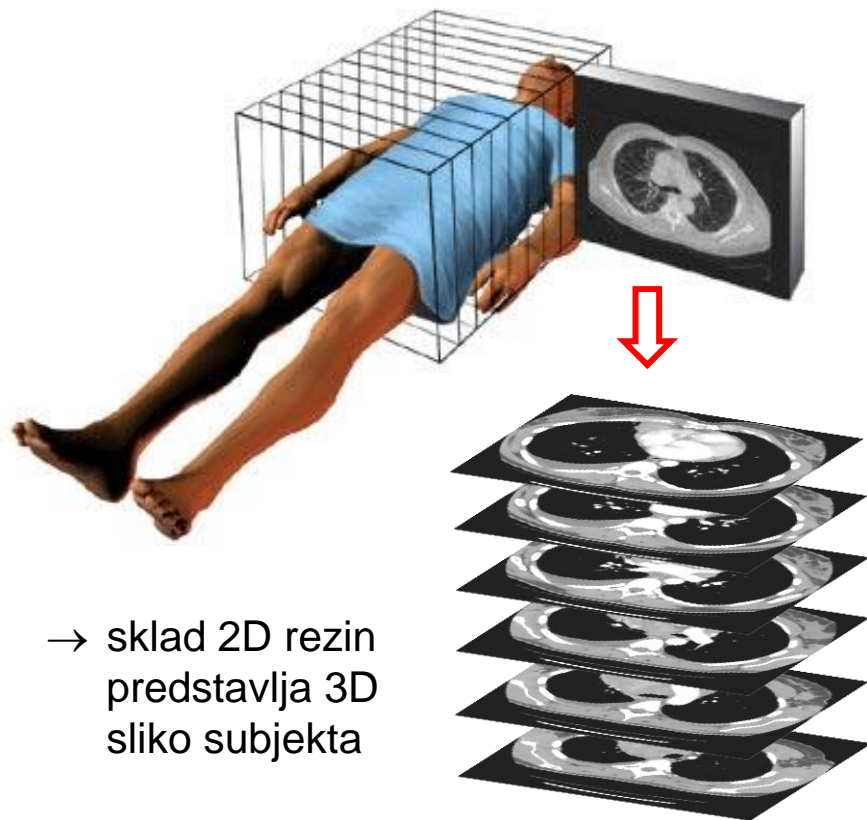
- Tomografsko slikanje
- Načini zajema in rekonstrukcije slik
- Analitična rekonstrukcija
  - Projekcija in sinogram
  - Povratna projekcija
  - Filtrirane povratne projekcije (CBP)
  - Teorem o projekcijski rezini
- Iterativna rekonstrukcija
  - Algebraična rekonstrukcija (ART)
  - Verjetnostna rekonstrukcija (EM in OSEM)



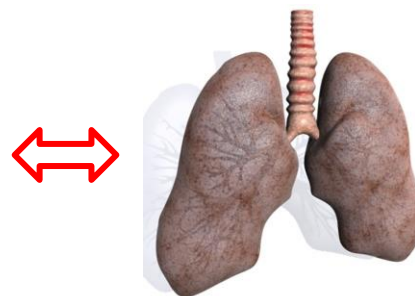
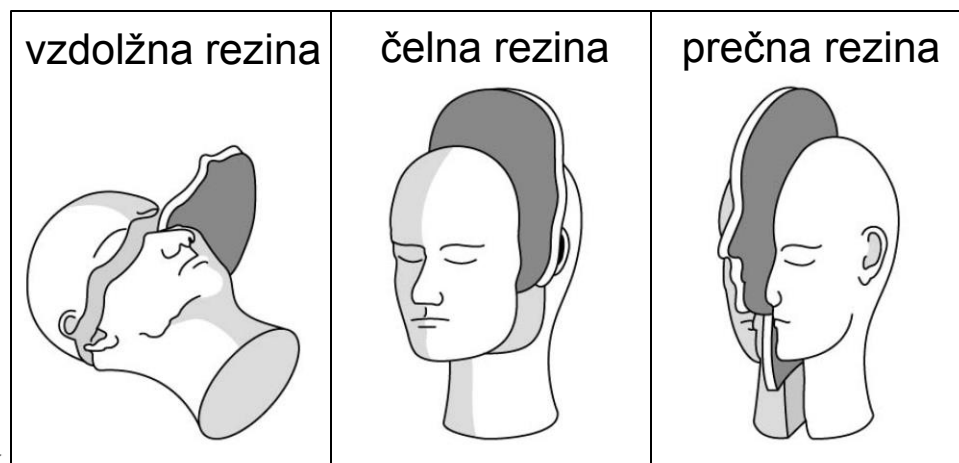
# Tomografsko slikanje



- **Slikanje po rezinah:** beseda tomografija izvira iz grških besed *tomo* (rezina) in *graphos* (slika)

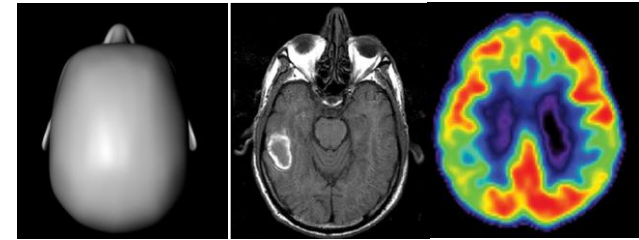


→ sklad 2D rezin  
predstavlja 3D  
sliko subjekta



→ 3D zapis omogoča  
direktno interpretacijo  
slikovne informacije

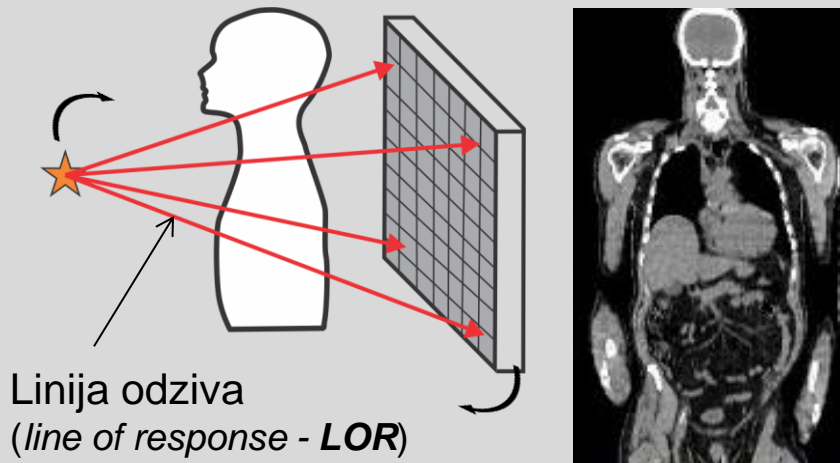
# Transmisijska in emisijska tomografija



➤ Matematični principi rekonstrukcije so enaki za različne slikovne tehnike

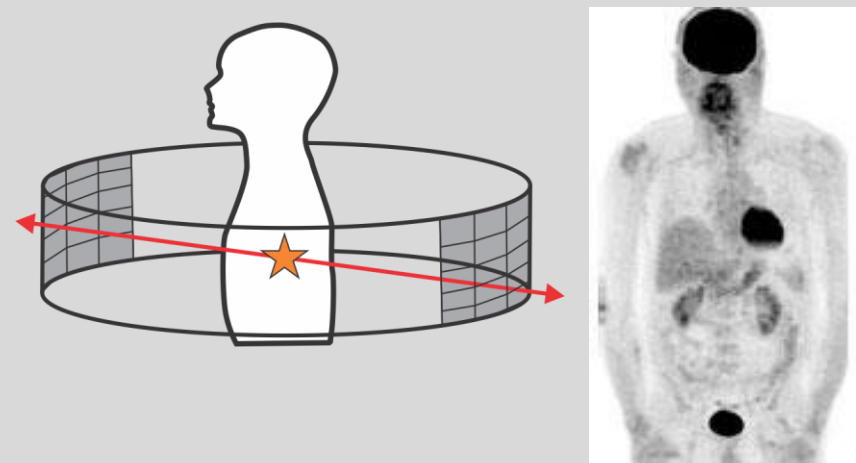
## • Transmisija (CT)

→ želimo rekonstruirati sliko linearnega atenuacijskega koeficienta tkiv



## • Emisija (SPECT, PET)

→ želimo rekonstruirati sliko aktivnosti in porazdelitve radiofarmaka v telesu

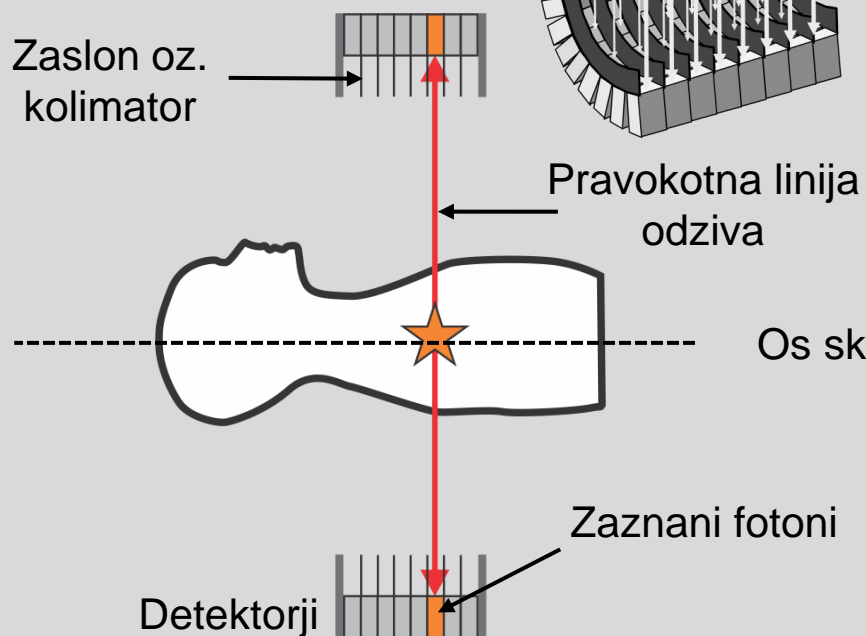


# Način zajema podatkov



## • 2D zajem

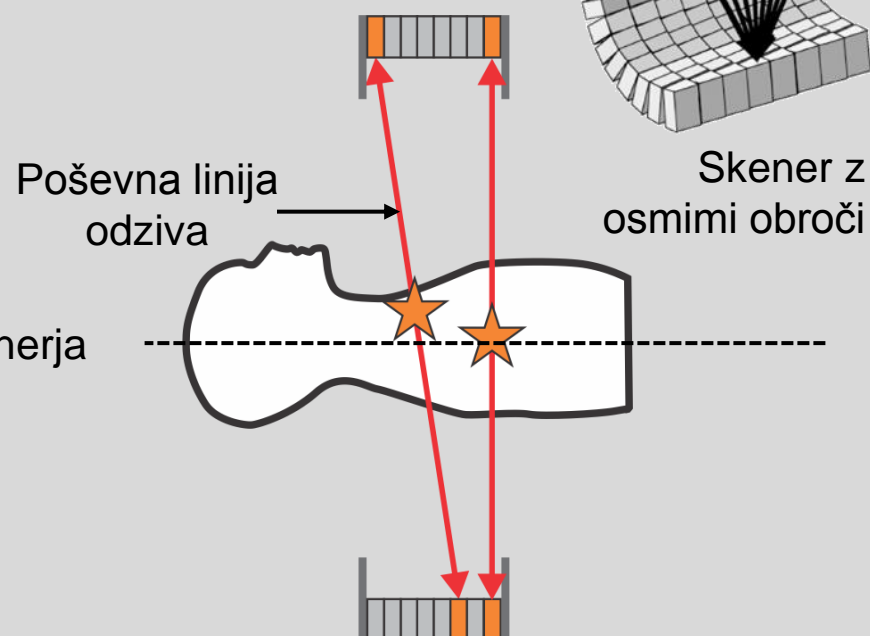
→ zaslon zaustavi poševno vpadajoče fotone



→ manjša občutljivost skenerja  
→ enostavna rekonstrukcija

## • 3D zajem

→ naključni in sipani fotoni vnašajo lažne odzive

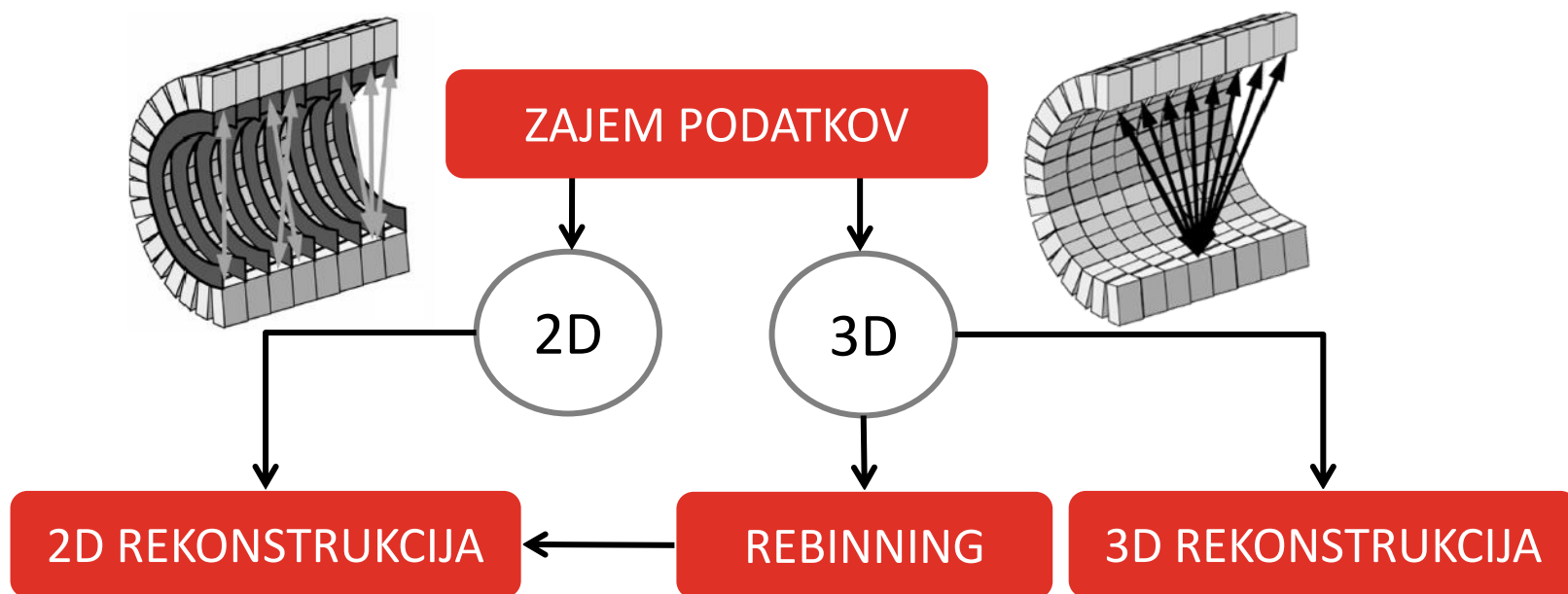


→ višja občutljivost skenerja  
→ zahtevnejša rekonstrukcija

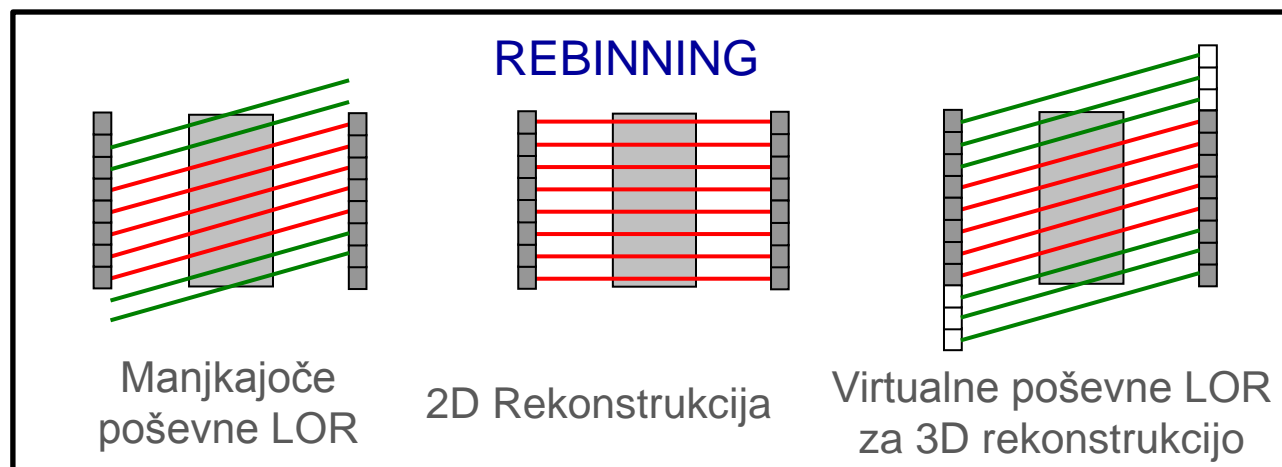




# Načini rekonstrukcije slik



- prerazporeditev 3D linij odziva (*rebinning*) v povezavi z 2D rekonstrukcijo ohranja občutljivost sistema
- čas rekonstrukcije pa je krajši v primerjavi z dejansko 3D rekonstrukcijo



# Postopki rekonstrukcije slik



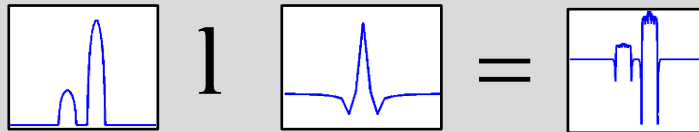
## ANALITIČNI

FBP, BPF, Gridding

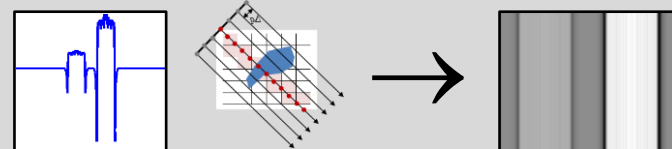
2D rekonstrukcija v orehovi lupini:



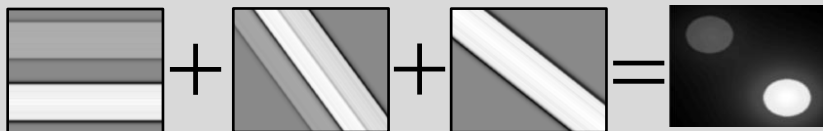
### 1. Filtriranje 1D projekcij



### 2. Povratna projekcija v prostor slike



### 3. Vsota povratnih projekcij → slika



- enostavna in računsko nezahtevna
- le za sisteme z obročem detektorjev
- črtasti artefakti pri omejenem št. projekcij



## ITERATIVNI



## ALGEBRAIČNI

ART, MART, SMART



## STATISTIČNI



## UTEŽENI NAJM. KVADR.

CG, CD, ISRA



## VERJETNOSTNI

EM, OSEM, CG

- kompleksni in računsko zelo zahtevni
- za poljubne geometrijske detektorjev
- lahko modeliramo lastnosti zajema

# Analitična rekonstrukcija

## ➤ Kratka zgodovina:

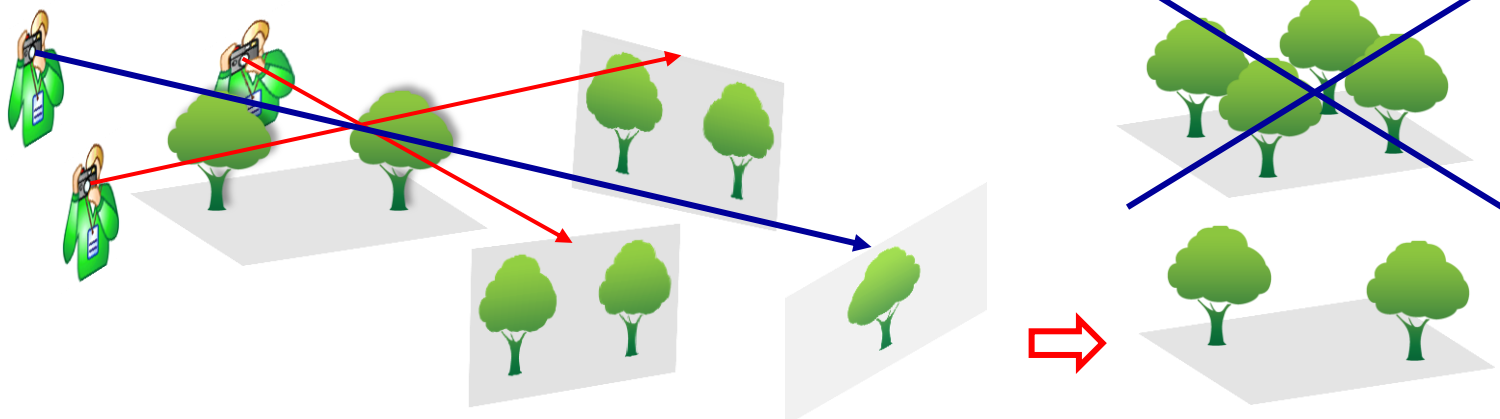
- **1917:** J.Radon predlaga matematično rešitev problema rekonstrukcije slike iz množice projekcij  
→ **direktna in inverzna Radonova preslikava**
- **1963:** A.M.Cormack uporabi Radonovo preslikavo za rekonstrukcijo radiografskih slik



*J. Radon*

## ➤ Rekonstrukcija iz projekcij

- osnovna ideja:



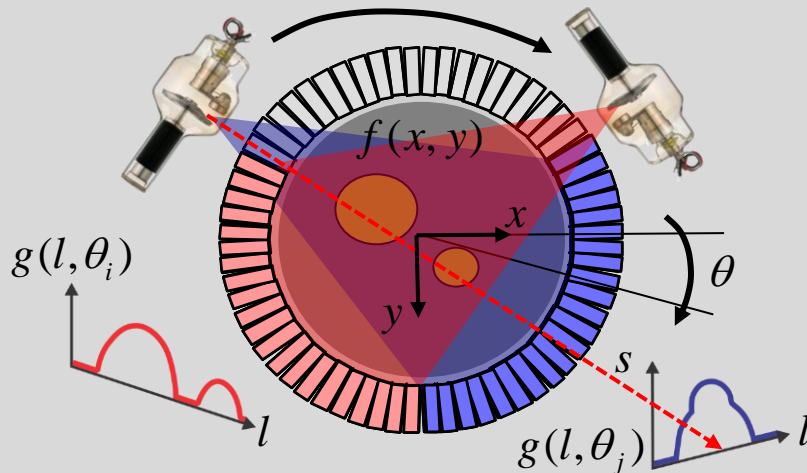


# Projekcija pri transmiji in emisiji

- Mnogi medicinski slikovni sistemi zajemajo integralne meritve vzdolž linij odziva, ki tvorijo projekcije

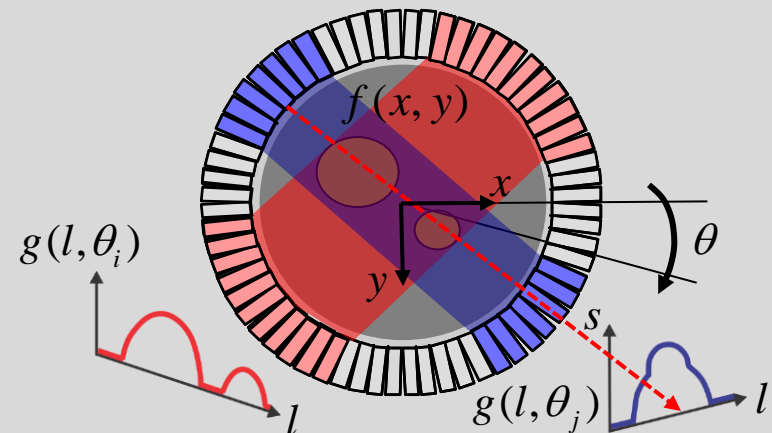
## • Transmisija (CT)

- merimo intenziteto X žarkov, ki zavisi od integrala atenuacije tkiv vzdolž linije odziva



## • Emisija (PET)

- merimo integralno število oddanih parov  $\gamma$  fotonov na liniji odziva



- Projekcija je običajno stožčasta (*fanbeam*) ali pravokotna  
→ pravokotne projekcije lahko pretvorimo v stožčaste in obratno

# Matematični model projekcije

- Integral vzdolž linije odziva:

$$L(l, \theta) = \{ (x, y) \mid x \cos \theta + y \sin \theta = l \}$$

z zasukanimi koordinatami  $(l, s)$

$$x(s) = l \cos \theta - s \sin \theta$$

$$y(s) = l \sin \theta + s \cos \theta$$

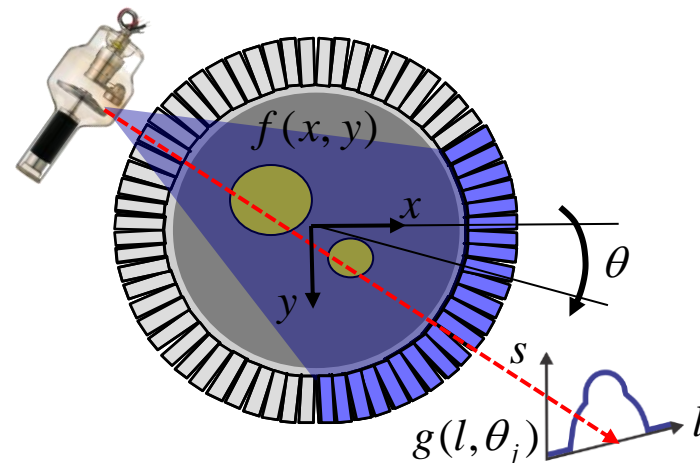
- Enačba, ki opisuje nastanek projekcije

$$g(l, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x(s), y(s)) ds$$

→ za poljuben kot  $\theta$  imenujemo  $g(l, \theta)$  radiografska ali Radonova preslikava slike  $f(x, y)$

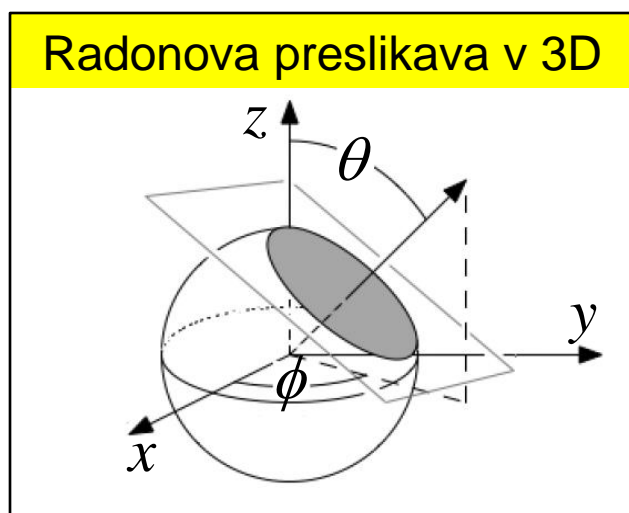
- Projekcije lahko analitično zapišemo kot 2D integral v  $x$ - $y$  ravnini z uporabo 1D delta funkcije

$$g(l, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - l) dx dy$$



# Radonova in radiografska preslikava

- **Radonova preslikava:** za  $n$ -dimenzionalni objekt je Radonova preslikava integral preko množice vseh  $k=n-1$  dimenzionalnih hiperravnin, ki potekajo skozi objekt
  - za  $n=2$ ,  $k=1$  so hiperravnine linijski integrali
  - za  $n=3$ ,  $k=2$  so hiperravnine 2D ravnine
- **Radiografska preslikava:** za  $n$ -dimenzionalni objekt predstavlja vse  $k=1$  dimenzionalne hiperravnine oz. linijske integrale, ki potekajo skozi objekt
  - v 2D sta Radonova in radiografska preslikavi enakovredni, v višjih dimenzijah pa ne nujno



Dimenzija prostora, v katerem je objekt

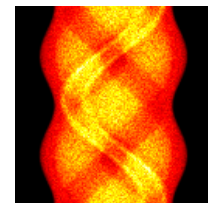
2	3	4	5	...	n
1	2	3	4	...	n-1
	1	2	3	...	n-2
		1	2	...	n-3
			1	...	...
				...	...
					1

Območje možnih  $k$  za vsako dimenzijo  $n$

Radonove preslikave

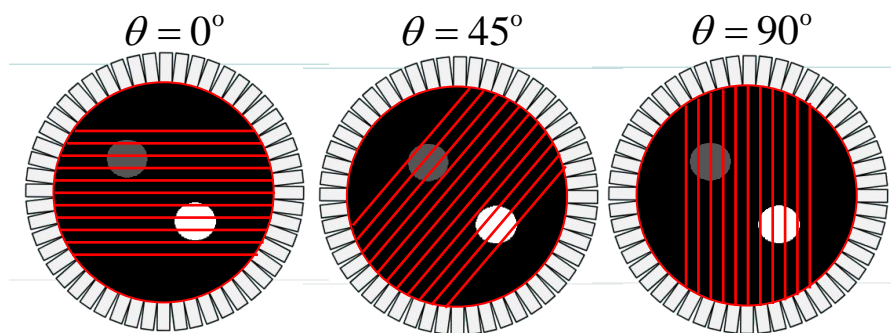
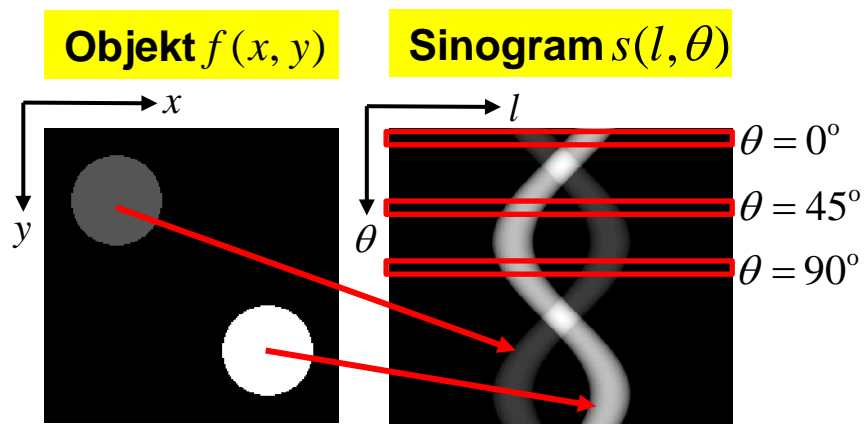
Radiografske preslikave

# Sinogram 2D slike

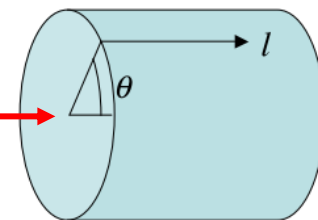


- Množico projekcij 2D slike  $g(l, \theta)$  lahko predstavimo kot 2D sliko oz. sinogram  $s(l, \theta)$

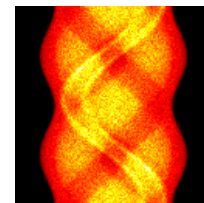
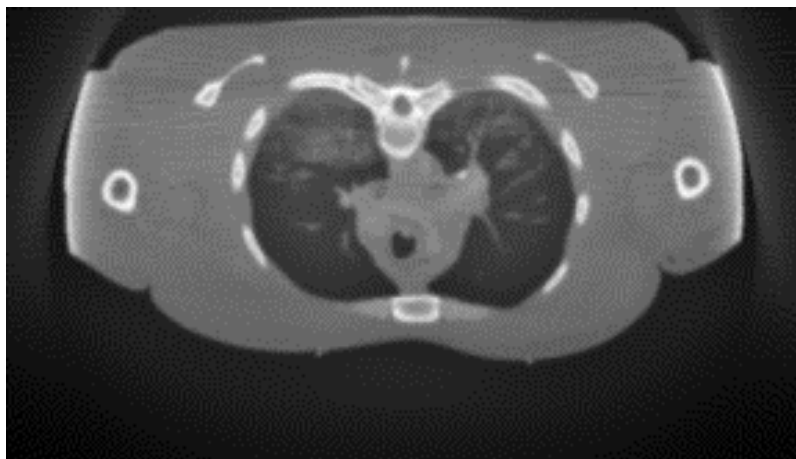
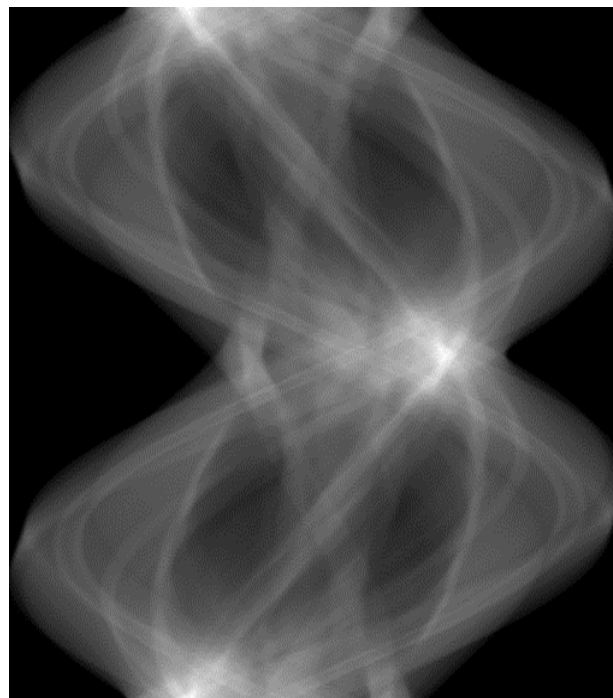
→ vrstica v sinogramu predstavlja projekcijo oz. integralne meritve vzdolž vzporednih linij odziva za določen kot  $\theta$



- točka na objektu se preslika v sinusno krivuljo v sinogramu  
 → iz sinograma lahko rekonstruiramo sliko  $f(x, y)$   
 →  $g(l, \theta)$  predstavlja vrednosti na površini cilindra  
 → velja simetrija  $g(l, \theta) = g(-l, \theta + \pi)$



# Realna slika in sinogram

 $f(x, y)$  $s(l, \theta)$ 

- Sinogram je superpozicija sinusnih krivulj!  
→ svetle točke v sliki se preslikajo v svetle sinusne krivulje in nasprotno



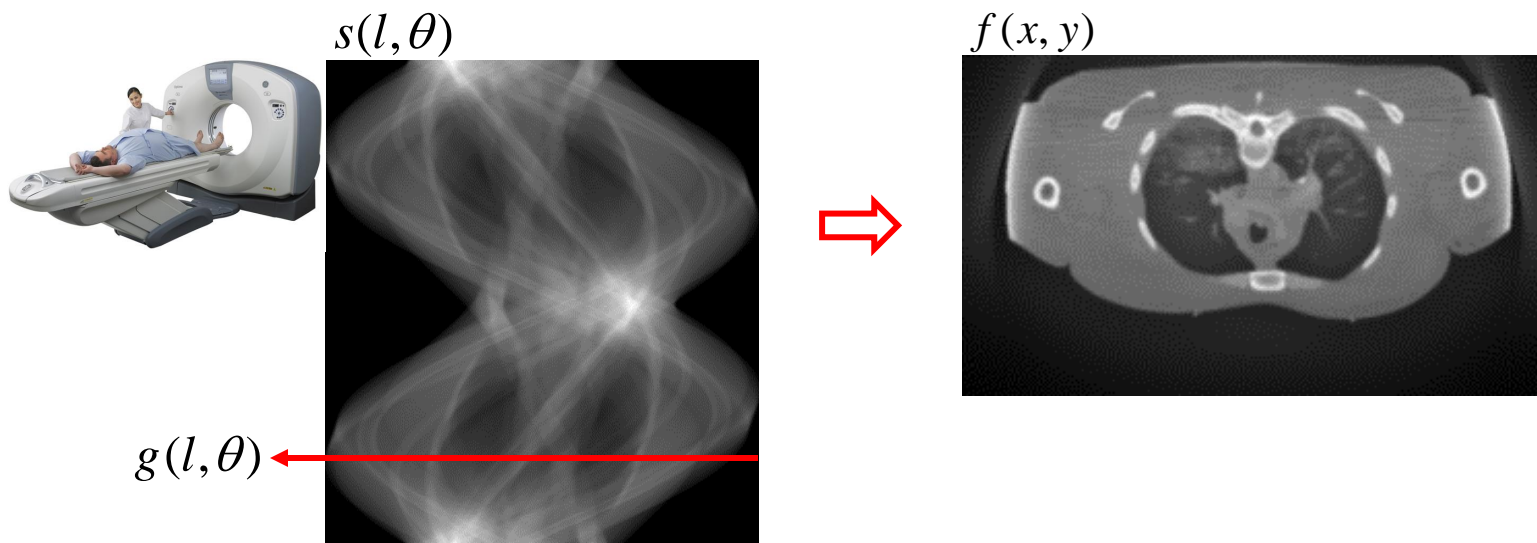
# Rekonstrukcija: inverzni problem

- S slikovnim sistemom zajamemo projekcije, ki jih združimo v sinogram

$$g(l, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x(s), y(s)) ds$$

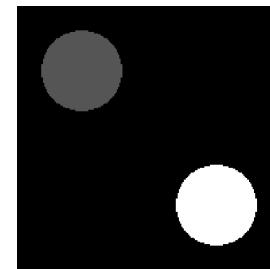
Enačba, ki opisuje  
nastanek slike

- **Inverzni problem:** poišči  $f(x, y)$  pri danem  $s(l, \theta)$  !

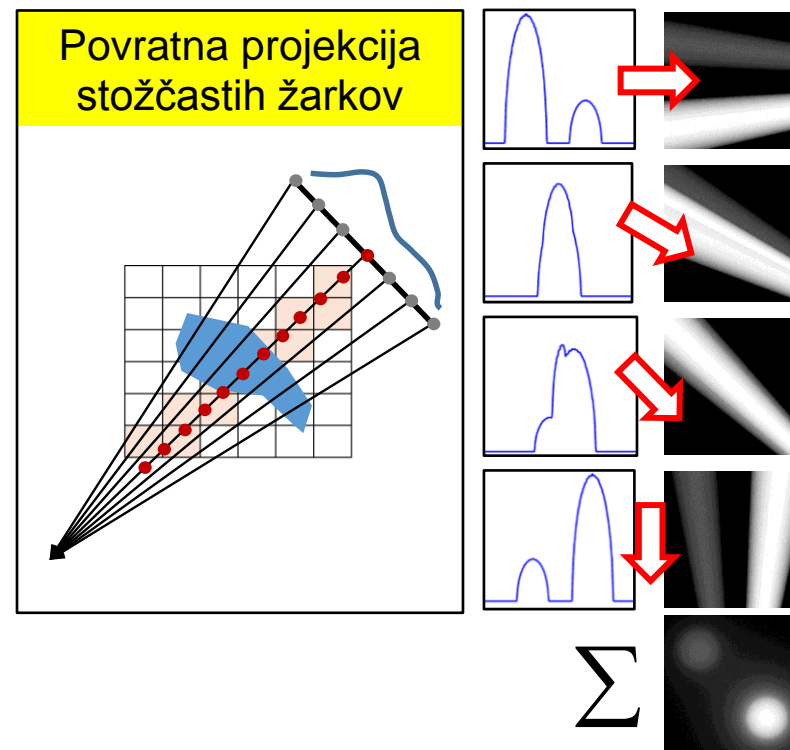
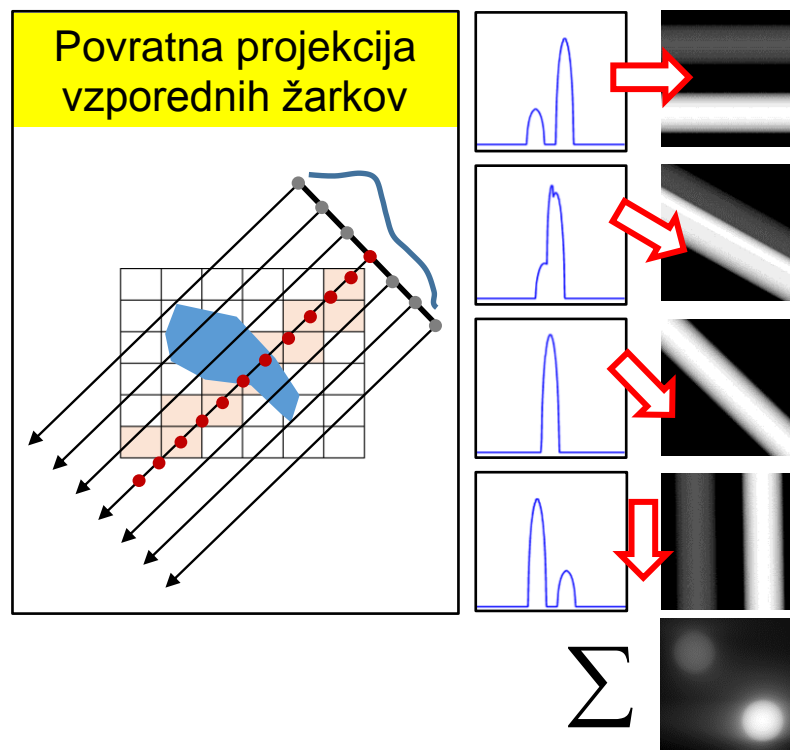


# Povratna projekcija

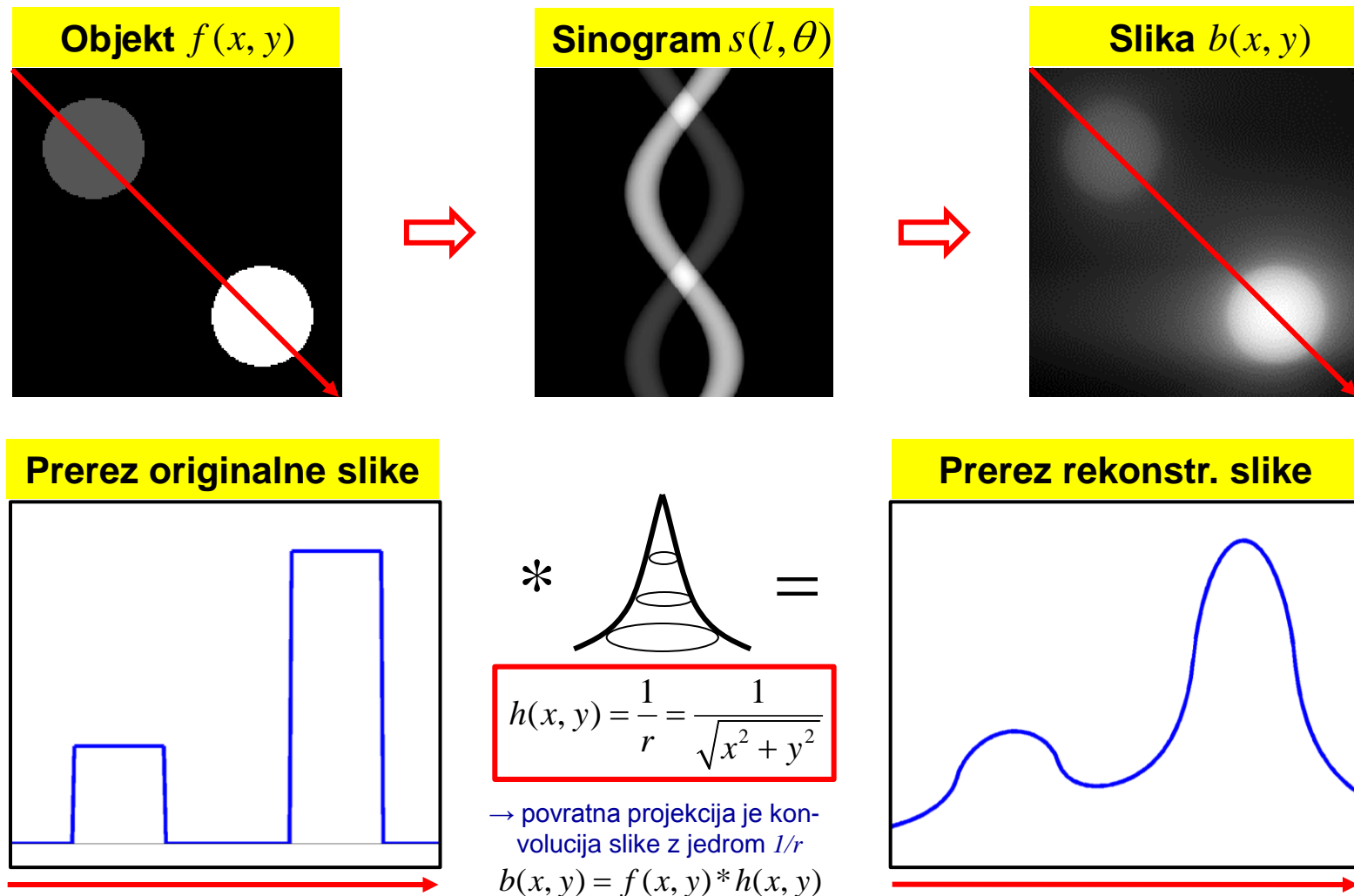
*Backprojection*



- **Osnovna ideja:** za vsak  $\theta$  izvedi operacijo, ki je nasprotna oz. inverzna radiografski preslikavi in seštej slike  
 → če pri 2D-1D projekciji vzdolž linij integriramo oz. seštevamo sivine slike, v nasprotnem lahko zapisujemo sivine projekcije v sliko vzdolž linije

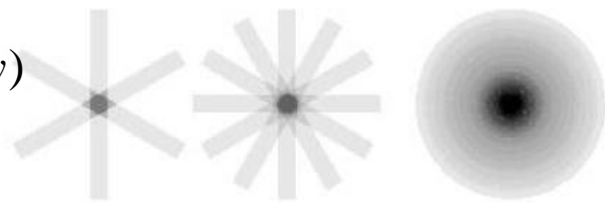


# Povratna projekcija ne deluje!



# Rekonstrukcija s povratno projekcijo

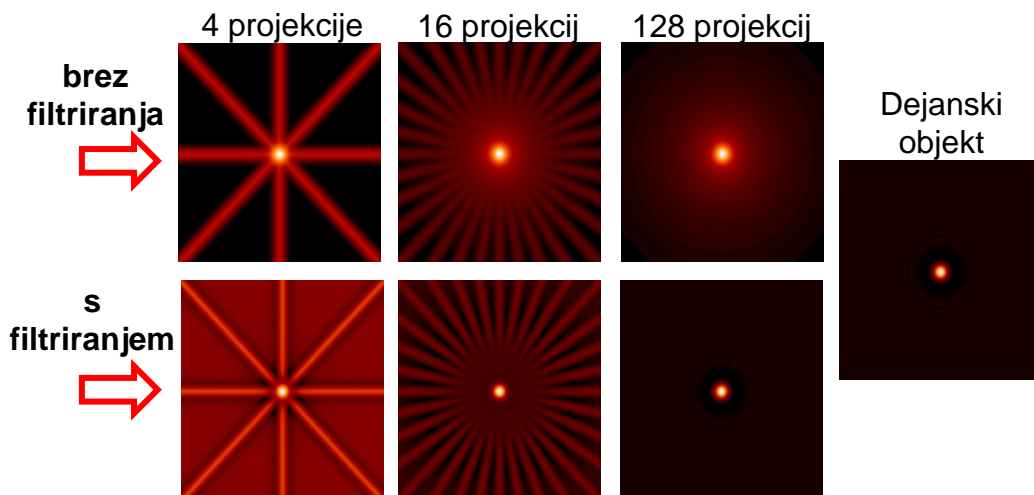
- Povratna radiografska projekcija je prostorsko nespremenljiv slikovni sistem, glajen s funkcijo  $h(x,y)=1/r$

$$f(x, y) \Rightarrow \boxed{h(x, y) = \frac{1}{r}} \Rightarrow b(x, y) \quad \delta(x, y)$$


- $1/r$  je krožno simetričen nizko-pasovni filter, zato so povratno projicirane slike precej zglajene in zato neuporabne za diagnostiko

→ glajenje lahko odpravimo s filtriranjem projekcij ali slike z visoko-prepustnim filtrom:

1. filtriranje projekcij in povratna projekcija
2. povratna projekcija in filtriranje slike



# Povratna projekcija s konvolucijo v 1D

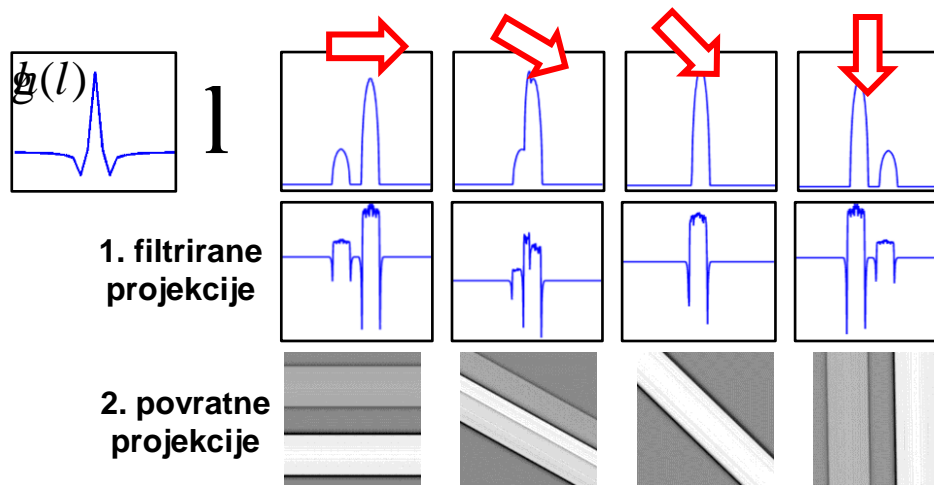
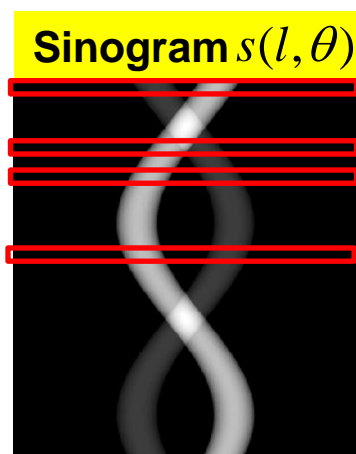
## *Convolution backprojection (CBP)*

1. Izračunamo 1D konvolucijo med projekcijo  $g(l, \theta)$  in filtrom  $h(x, y)$ , in sicer vzdolž  $l$ , tako da uvedemo novo spremenljivko

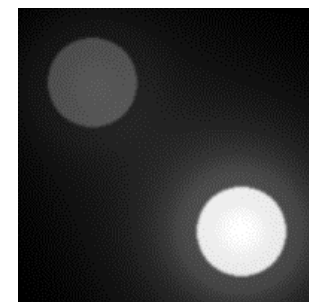
$$[g(l, \theta) * h(l)]_{l=x \cos \theta + y \sin \theta} = \int_{-\infty}^{\infty} g(l, \theta) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - l) dl$$

2. Nato povratno projiciramo filtrirane projekcije in
3. seštejemo povratne projekcije

$$f(x, y) \approx b(x, y) = \int_0^\pi [g(l, \theta) * h(l)]_{l=x \cos \theta + y \sin \theta} d\theta$$



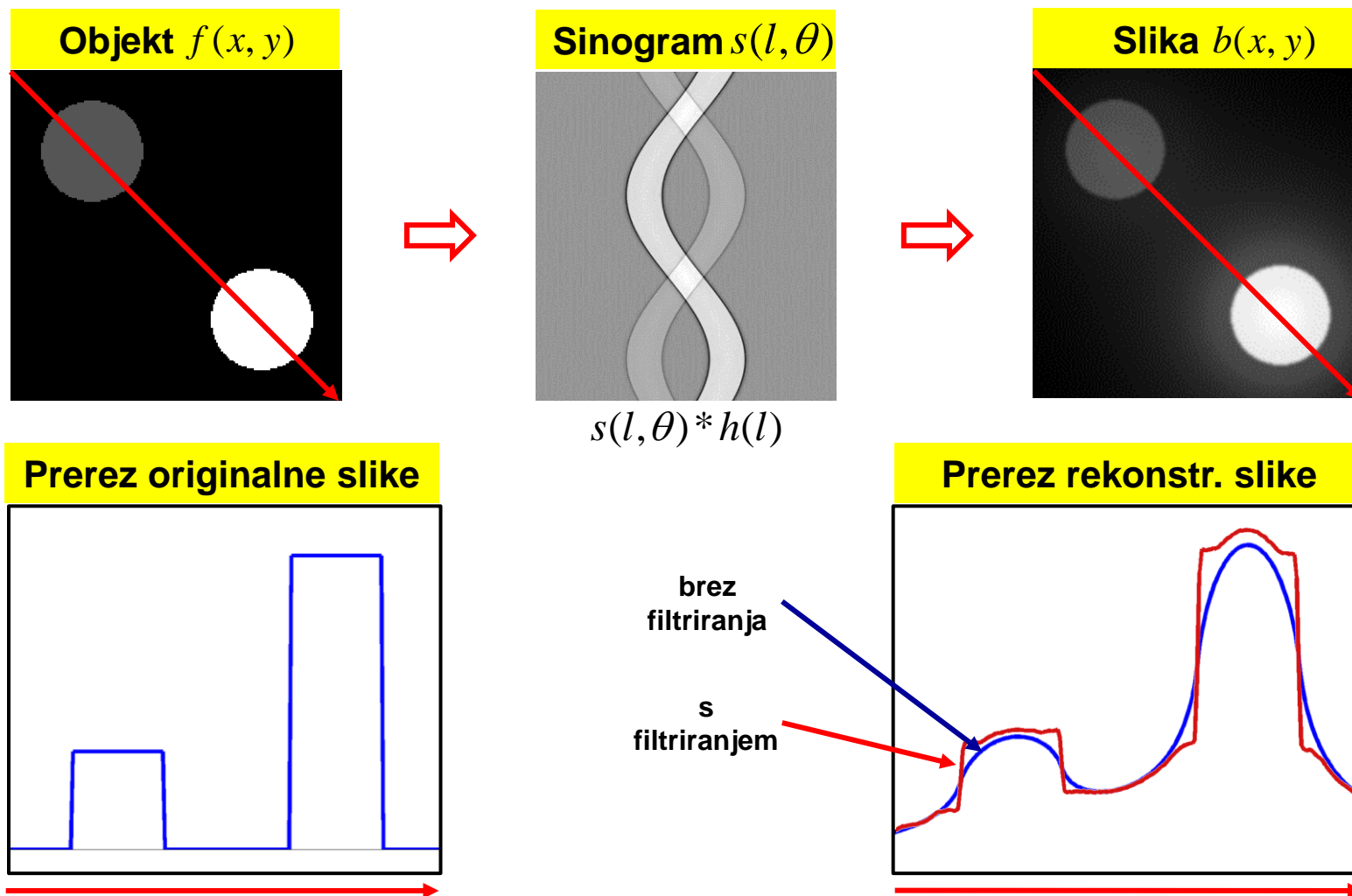
3. vsota  
povratnih  
projekcij





# Povratna projekcija s konvolucijo v 1D

*Convolution backprojection (CBP)*



# Povratna projekcija s konvolucijo v 1D

## *Convolution backprojection (CBP)*

- **Visoko-prepustni filter**  $h(l)$  najlažje okarakteriziramo v frekvenčnem prostoru z uporabo Fourierove transformacije (FT)

$$H(\lambda_x, \lambda_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) e^{-j2\pi(x\lambda_x + y\lambda_y)} dx dy$$

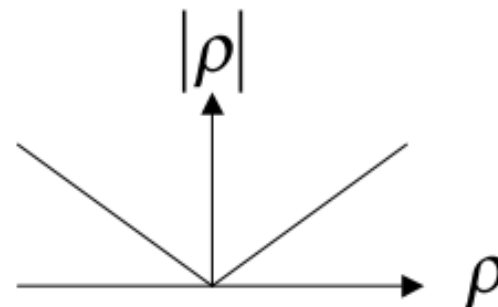


$$h(x, y) = F_{2D}^{-1} \left\{ \frac{1}{q} \right\} = \frac{1}{r}$$

→ filter  $h(l) = 1/r$  je v frekvenčnem prostoru 1D prerez inverznega 2D stožca

➤ **Lastnosti:**

- singularnost pri frekvenci  $\rho = 0$
- ojačuje visoke frekvence, zato je občutljiv na šum



# Povratna projekcija s konvolucijo v 1D

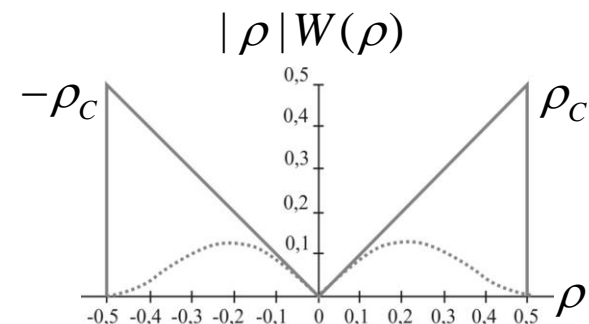
## Convolution backprojection (CBP)

➤ Z oknenjem filtra zadušimo visoko-frekvenčne signale oz. šum

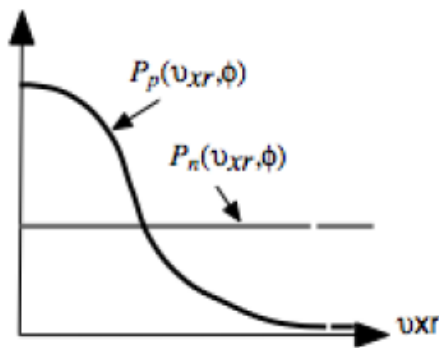
➤ **Hanning okno:**

- mejna frekvenca  $\rho_c$

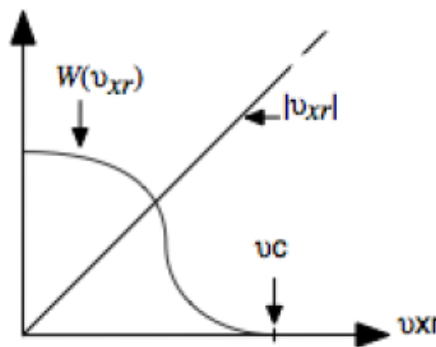
$$W(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 + \cos\left(\frac{\rho\pi}{\rho_c}\right) \right) & |\rho| \leq \rho_c \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$



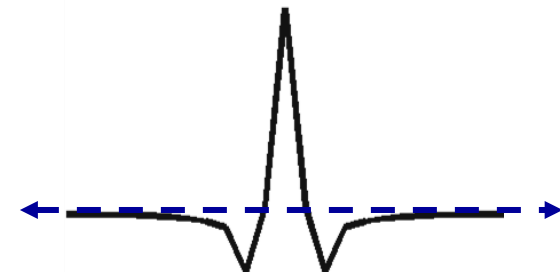
Močnostni spekter  
Hanning okna in šuma



Močnostni spekter Hanning  
okna in ramp filtra



Ramp+Hanning filter za  
konvolucijo v prostoru



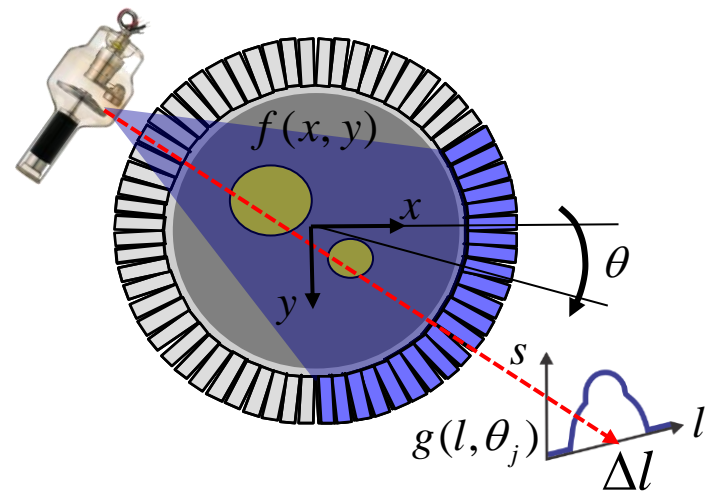
# Povratna projekcija s konvolucijo v 1D

## *Convolution backprojection (CBP)*

- Uveljavljen postopek rekonstrukcije za CT in tehnike v nuklearni medicini
  - Zelo hiter in robusten z malo nastavljivimi parametri
- Če je v projekcijah prisoten Gaussov šum, potem je ta postopek optimalen v smislu najmanjše srednje kvadratne napake rekonstruirane slike
- Ključni elementi postopka, ki jih bomo analizirali:
  - vzorčenje projekcij v radialni smeri  $\Delta l$  in po kotu  $\Delta \theta$
  - vpliv šuma in oknjenja na rekonstrukcijo slik

# Radialno vzorčenje

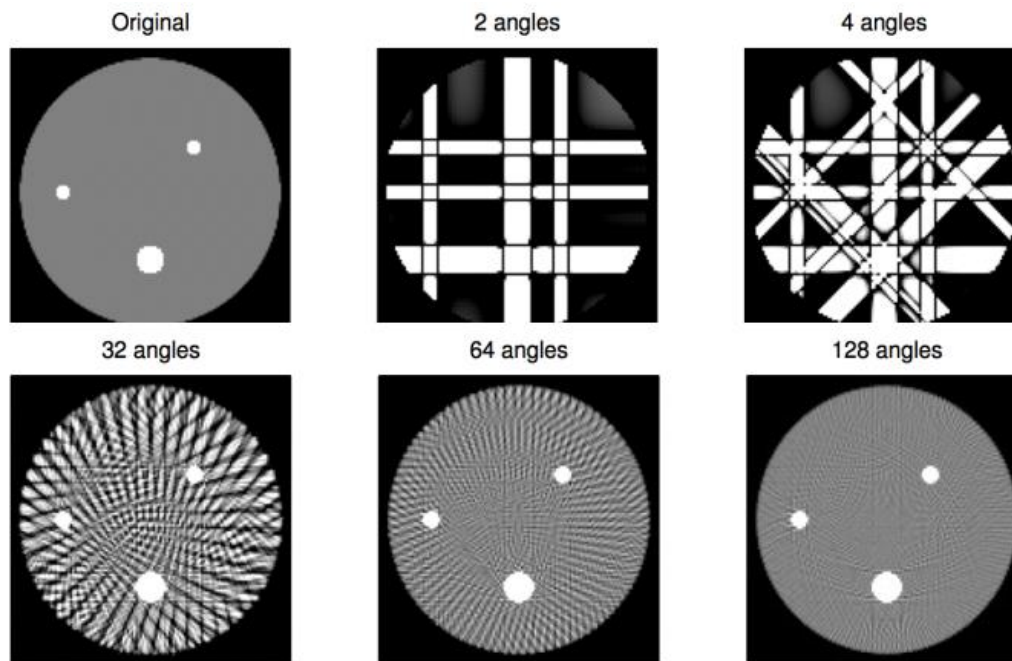
- Odziv detektorjev v radialni smeri ni pasovno omejen, zato ima sinogram zelo zapleten vzorec vzorčenja  
→ vzorčna funkcija je pravokotne oblike za kvadratne detektorje
- Po Nyquistovem teoremu lahko izberemo  $\Delta l = \text{FWHM} / 2$
- Število vzorcev v radialni osi moramo določiti tako, da prekrijemo željen FOV (*field-of-view*) z izbiro  $n_L = \text{FOV} / \Delta l$   
→ V mnogih primerih je vzorčenje v radialni osi določeno s konstrukcijo skenerja, vsi drugi parametri (npr. ločljivost sistema in velikost slikovnih elementov) pa so določeni z  $\Delta l$





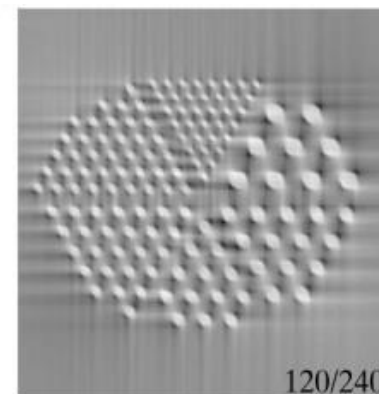
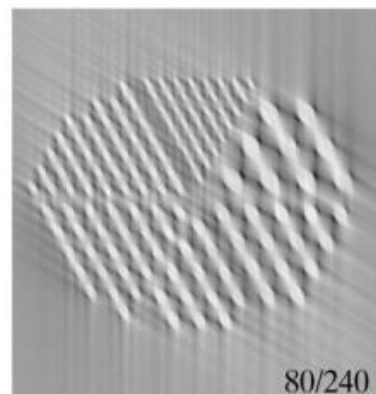
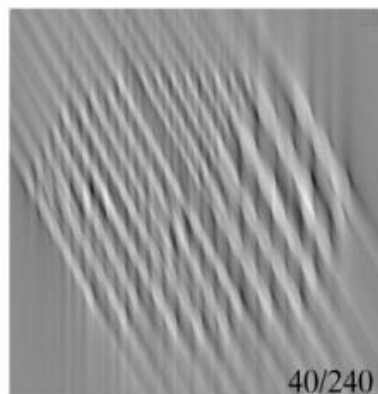
# Vpliv vzorčenja po kotu

- Nezadostna gostota vzorcev po kotu vodi do izrazitih zvezdastih artefaktov (**Nyquistov teorem!**)
- Pri rekonstrukciji s postopkom CBP je računska zahtevnost sorazmerna s številom vzorcev po kotu

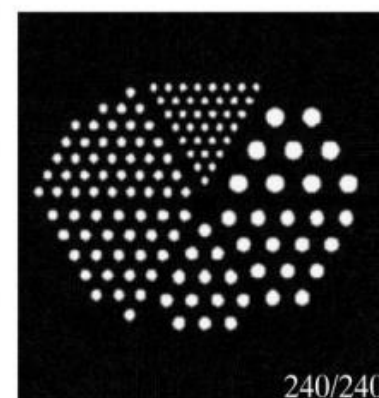
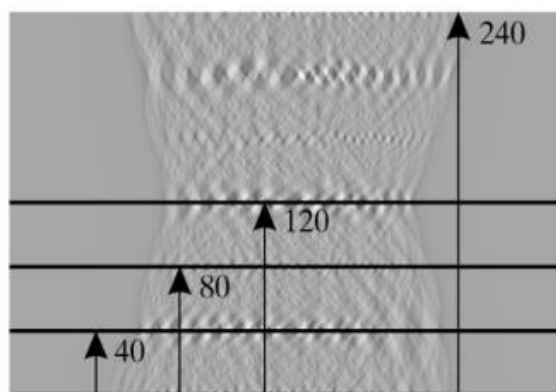


# Vpliv vzorčenja po kotu

- Število projekcij vpliva na ločljivost rekonstruirane slike

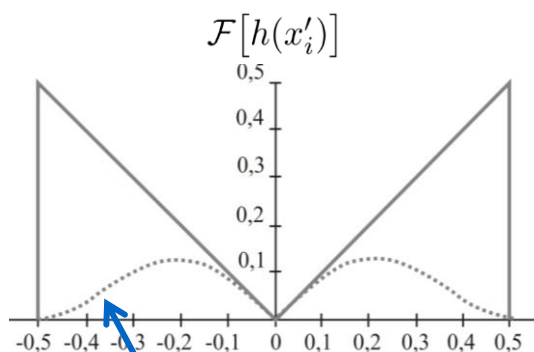


→ kaliber za  
testiranje ločljivosti  
tomografskega  
slikovnega sistema

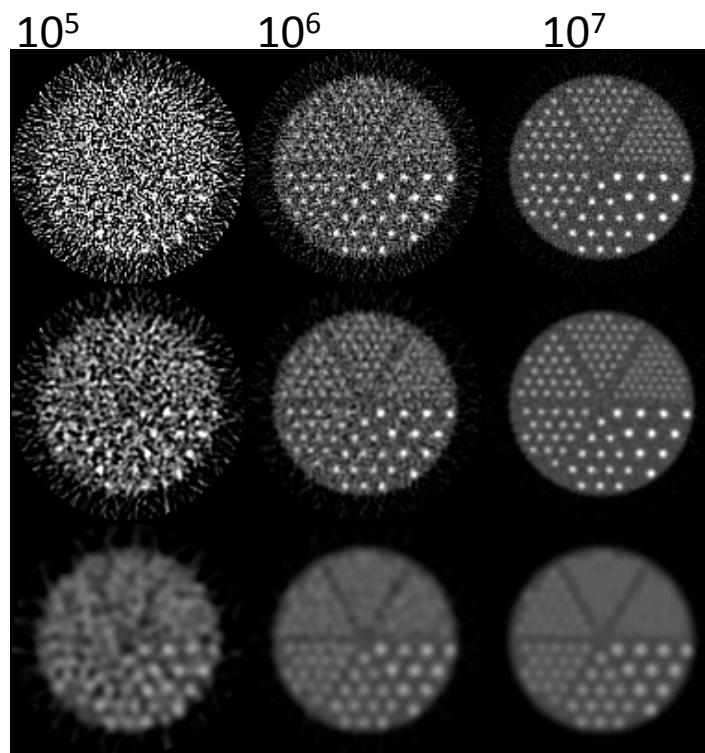


# Vpliv šuma in Hanning okna

- Če je šum koreliran s slikovno informacijo je nujno potrebno oknjenje linearnega (ramp) filtra
  - kompromis med končno stopnjo šuma in ločljivostjo



Hanning okno zaduši VF,  
a vpliva na ločljivost



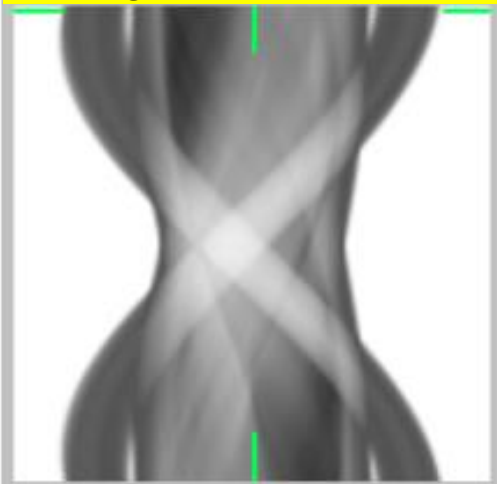
Linearni VP filter

Hanning okno, 4mm

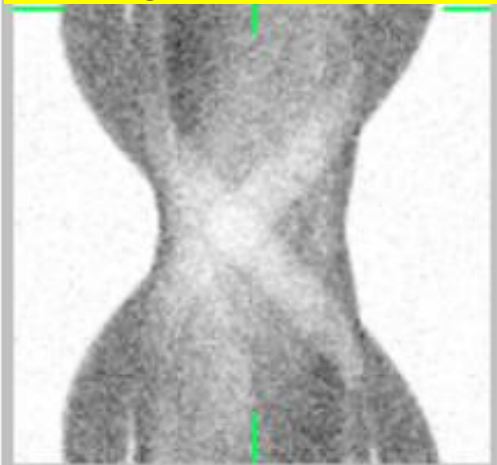
Hanning okno, 8mm

# Vpliv šuma in Hanning okna

sinogram brez šuma



sinogram s šumom



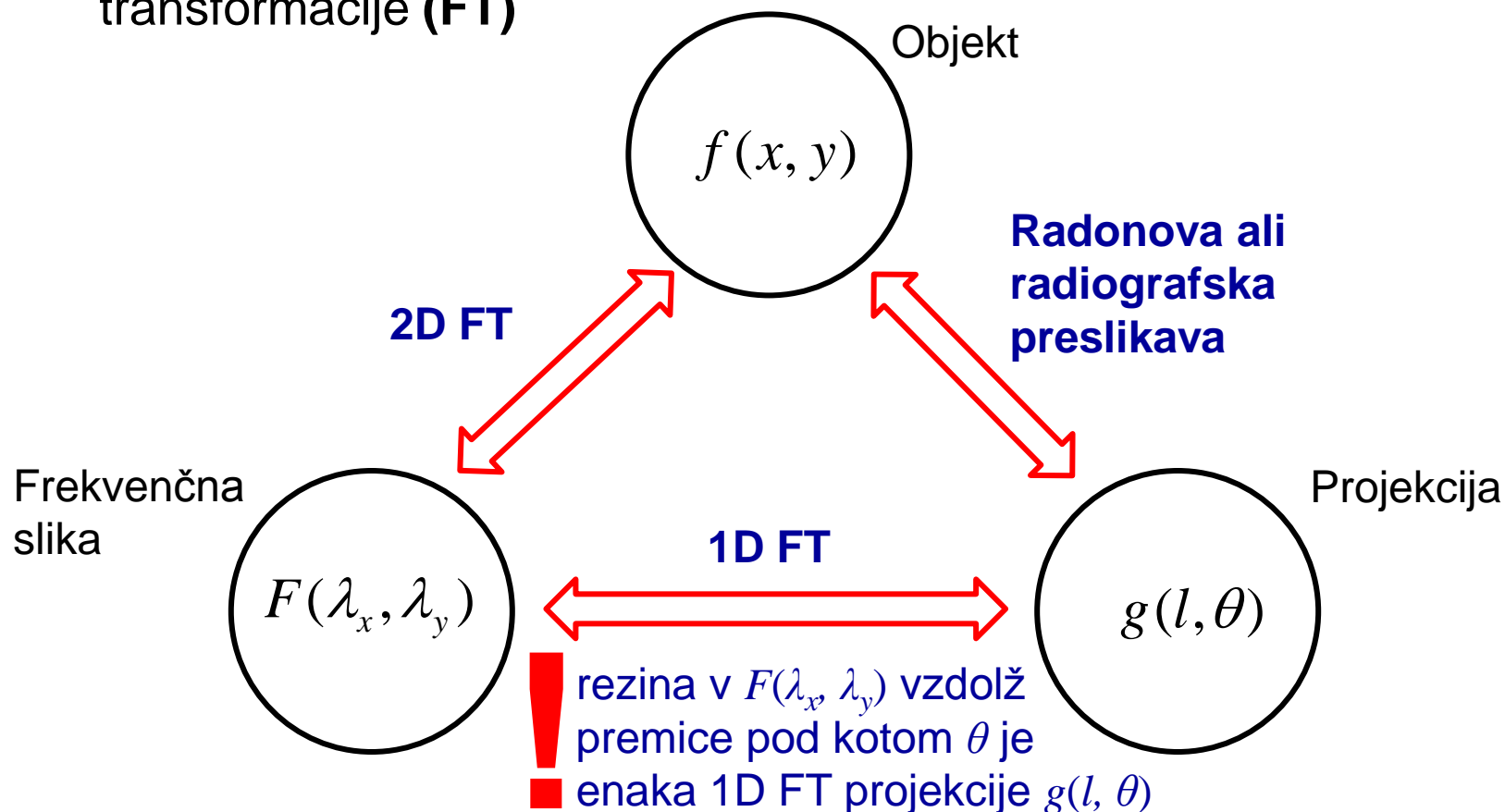
- z oknjenjem zadušimo šum
- ampak tudi rekonstrukcijo drobnih struktur

	brez filtriranja	80% mejna frekv.	40% mejna frekv.
brez šuma			
nizka st. šuma			
visoka st. šuma			

# Teorem o projekcijski rezini

*Projection-slice theorem*

- **Osnovne povezave v tomografiji** z uporabo Fourierove transformacije (FT)





# Teorem o projekcijski rezini

## *Projection-slice theorem*

- Zapišemo 1D Fourierovo transformacijo projekcije

$$G(\rho, \theta) = F_{1D}\{g(l, \theta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(l, \theta) e^{-j2\pi\rho l} dl$$

in jo nadomestimo z analitičnim izrazom za projekcijo

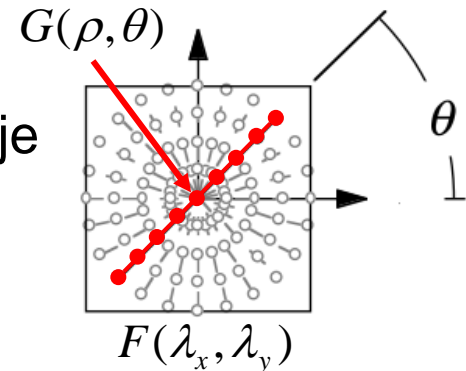
$$\begin{aligned} G(\rho, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - l) e^{-j2\pi\rho l} dx dy dl \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - l) e^{-j2\pi\rho l} dl dx dy \end{aligned}$$

- Uporabimo lastnost premika FT (*shift theorem*) in dobimo

$$G(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi\rho(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy$$

- kar je enako definiciji 2D Fourierove transformacije

$$F(\lambda_x, \lambda_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(x\lambda_x + y\lambda_y)} dx dy$$



# Teorem o projekcijski rezini

## *Projection-slice theorem*

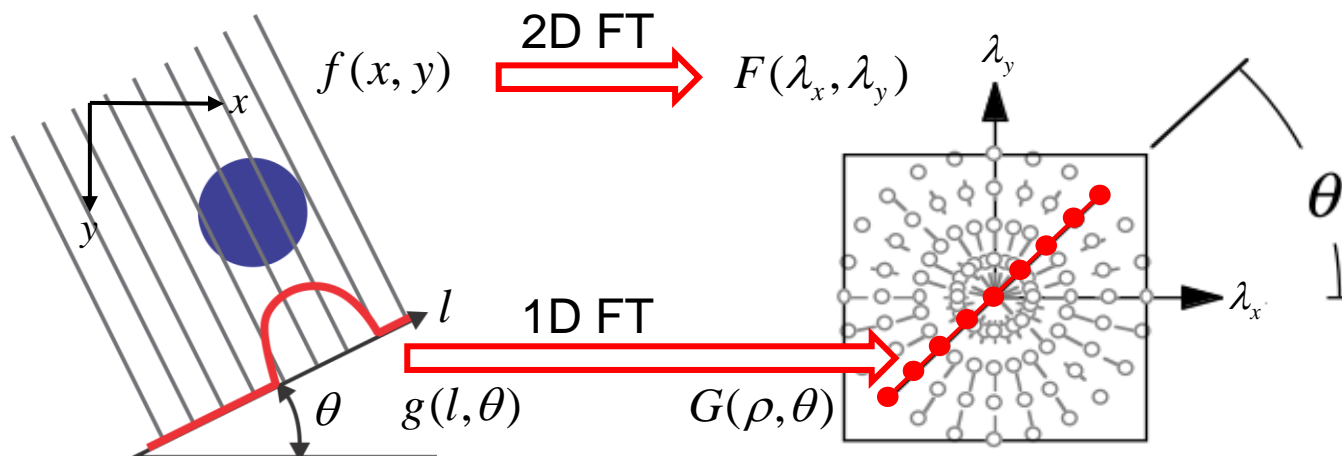
- Če koordinate frekvenčnega prostora zapišemo z

$$\lambda_x = \rho \cos \theta, \lambda_y = \rho \sin \theta$$

- potem pridemo do zelo pomembne zveze

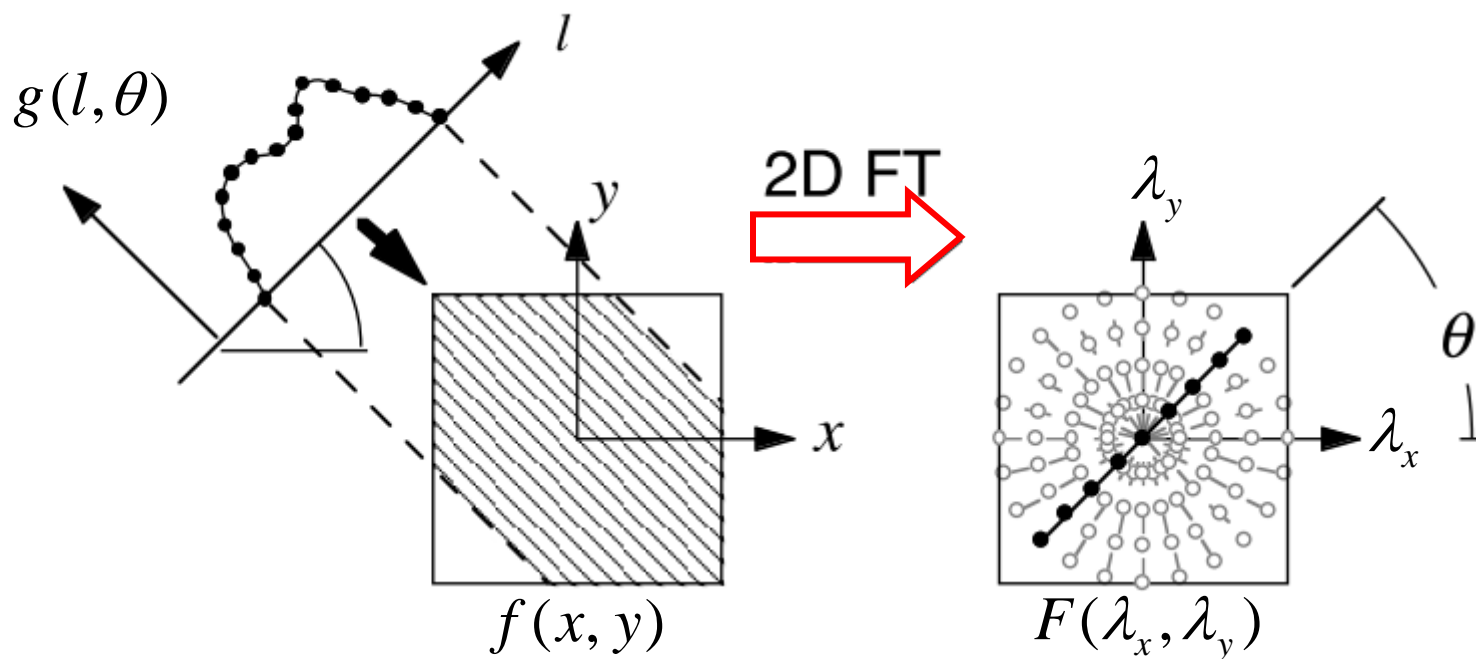
$$G(\rho, \theta) = F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

- ki prestavlja teorem o projekcijski rezini oz. tudi teorem o centralnem prerezu (*central-section theorem*)



# Povratna projekcija

- Iz teorema o projekcijski rezini sledi, da povratno projekcijo dobimo z vstavljanjem 1D FT  $G(\rho, \theta)$  v 2D FT slike  $F(\lambda_x, \lambda_y)$



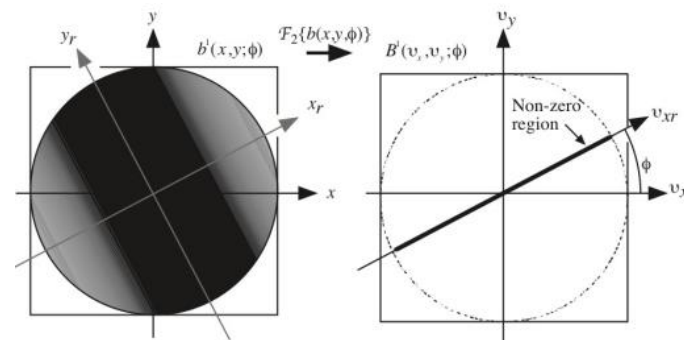
# Teorem o povratni projekciji

- Definiramo 2D funkcijo  $b_\theta(x, y) = g(l, \theta)$ , ki jo dobimo s povratno projekcijo ene 1D projekcije pri kotu  $\theta$
- Povratna projekcija vseh 1D projekcij je dana z

$$b(x, y) = \int_0^\pi b_\theta(x, y) d\theta$$

- 2D FT nato izračunamo kot

$$\begin{aligned} B(\lambda_x, \lambda_y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b_\theta(x, y) e^{-j2\pi(x\lambda_x + y\lambda_y)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(l, \theta) e^{-j2\pi(l\lambda_x \cos \theta + s\lambda_y \sin \theta)} dl ds \\ &= G(\rho, \theta) \delta(\sigma) \\ &= F(\lambda_x, \lambda_y) \delta(\sigma) \end{aligned}$$



# Povratna projekcija s FT

- Če uporabimo vse 1D projekcije, potem je 2D FT slike

$$B(\lambda_x, \lambda_y) = \int_0^\pi B_\theta(\lambda_x, \lambda_y) d\theta = \int_0^\pi F(\lambda_x, \lambda_y) \delta(\sigma) d\theta$$

kjer je  $\sigma = \lambda_x \cos \theta + \lambda_y \sin \theta$  in  $\delta(\sigma(\theta)) = \delta(\lambda_x \cos \theta + \lambda_y \sin \theta)$

- Uporabimo zvezo

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$$

da dobimo

$$\delta(\sigma(\theta)) = \delta(\theta) / q, \quad q^2 = \rho^2 + \sigma^2$$

$$B(\lambda_x, \lambda_y) = \frac{F(\lambda_x, \lambda_y)}{q}$$

- Iz teorema o konvoluciji sledi

$$h(x, y) = F_{2D}^{-1} \left\{ \frac{1}{q} \right\} = \frac{1}{r}$$

$$b(x, y) = f(x, y) * h(x, y), \quad h(x, y) = F_{2D}^{-1} \left\{ \frac{1}{q} \right\}$$

# Povratna projekcija s filtriranjem v 2D

## *Backprojection filtering (BPF)*

- Odpravimo glajenje pri povratni projekciji s filtriranjem

$$B(\lambda_x, \lambda_y) = F(\lambda_x, \lambda_y) / q \Rightarrow F(\lambda_x, \lambda_y) = q B(\lambda_x, \lambda_y)$$

- Postopek:

- za vsak kot  $\theta$  naredi povratno projekcijo  $g(l, \theta)$  v polje slike  $b(x, y)$
- izračunaj 2D FT  $B(\lambda_x, \lambda_y)$  in ga
- pomnoži z 2D stožčastim filtrom  $q = \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}$ , da dobiš  $F(\lambda_x, \lambda_y)$
- izračunaj inverzno 2D FT, da dobiš  $f(x, y)$



# Povratna projekcija s filtriranjem v 2D

## *Backprojection filtering (BPF)*

- Nizko-pasovni filter  $\frac{1}{r}$  ima zelo dolge repe, zato moramo povratno projekcijo izračunati na mnogo večjem polju kot je velikost ciljne slike
- Iz tega razloga je ta postopek računsko zelo zahteven
  - tipična CT slika ima velikost 512 x 512, ki jo moramo povečati vsaj za faktor 4 na 2048 x 2048 za filtriranje in še za faktor 2 na 4096 x 4096 za dodajanje ničel zaradi (ne)prekrivanja frekvenc
- Vrstni red lahko tudi zamenjamo!
  - filtriramo 1D signale in jih nato povratno projiciramo



# Povratna projekcija s filtriranjem v 2D

## *Backprojection filtering (BPF)*

- Inverzno FT v polarnih koordinatah zapišemo kot

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) e^{j2\pi\rho(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\rho d\theta$$

$\rho$  je predznačena radialna komponenta

- Iz teorema o projekcijski rezini sledi

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\rho, \theta) e^{j2\pi\rho(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\rho d\theta$$

ker velja  $g(l, \theta) = g(-l, \theta + \pi)$  lahko zapišemo

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\rho, \theta) e^{j2\pi\rho(x \cos \theta + y \sin \theta)} |\rho| d\rho d\theta$$

# Povratna projekcija s filtriranjem v 1D

## *Filtered backprojection (FBP)*

➤ Sliko  $f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty G(\rho, \theta) e^{j2\pi\rho(x\cos\theta + y\sin\theta)} |\rho| d\rho d\theta$

lahko izračunamo tako, da najprej ovrednotimo notranji integral z uvedbo nove spremenljivke

$$l = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$f(x, y) = \int_0^\pi \left[ \int_{-\infty}^\infty |\rho| G(\rho, \theta) e^{j2\pi\rho l} d\rho \right] d\theta$$

➤ Postopek je naslednji:

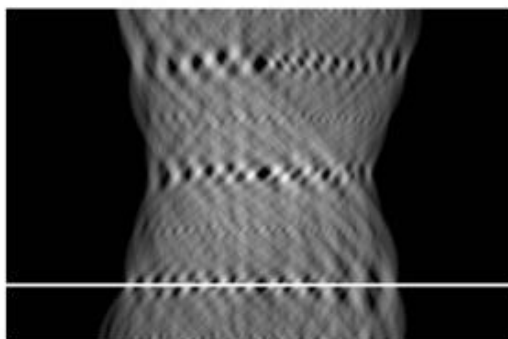
- Izračunamo 1D FT projekcij  $F_l\{g(l, \theta)\} = G(\rho, \theta)$  in jih
- pomnožimo s filtrom  $|\rho|$  in izračunamo inverzni 1D FT ter
- povratno projiciramo filtrirane projekcije, da dobimo sliko

$$g^*(l, \theta) = \int_{-\infty}^\infty |\rho| G(\rho, \theta) e^{j2\pi\rho l} d\rho \rightarrow f(x, y) = \int_0^\pi g^*(l, \theta) d\theta$$

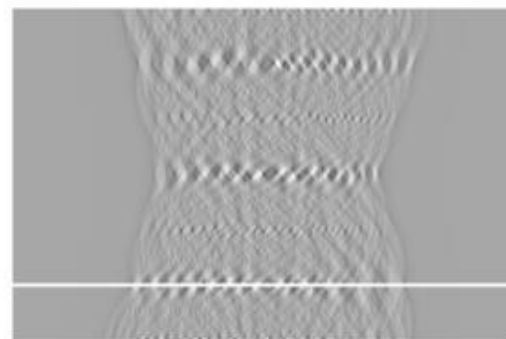
konvolucija!

# Povratna projekcija s filtriranjem v 1D

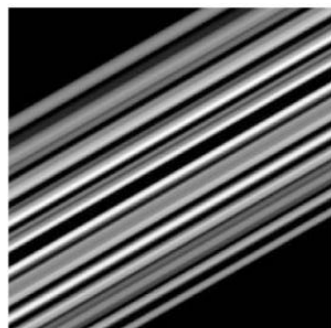
*Filtered backprojection (FBP)*



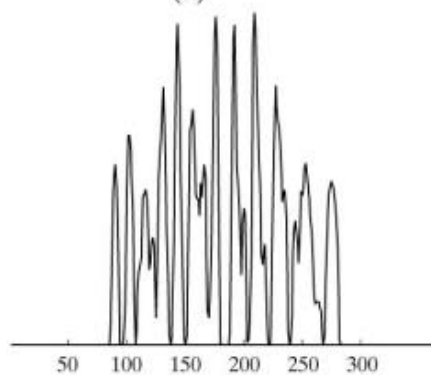
(a)



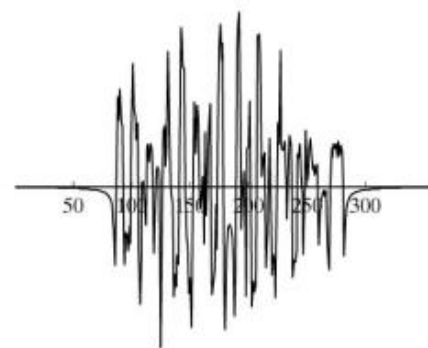
(b)



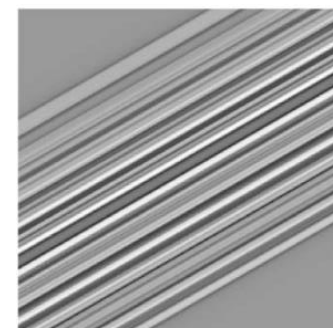
Povratna projekcija  
originalne projekcije



(c)



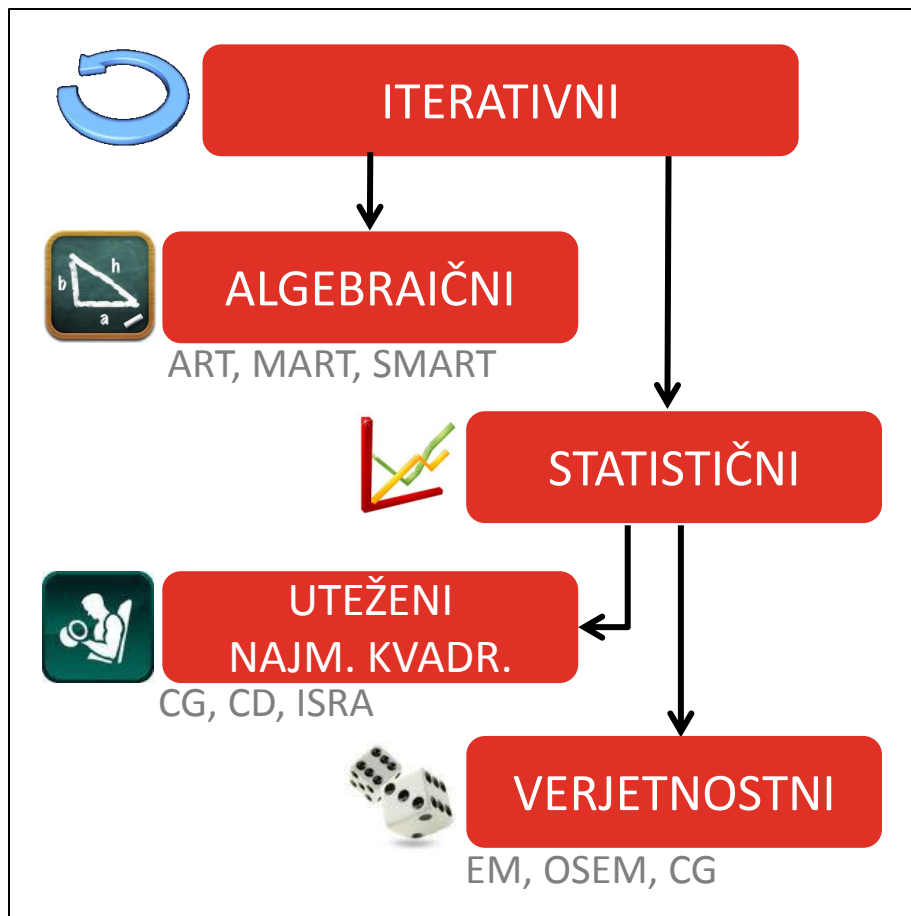
(d)



Povratna projekcija  
originalne projekcije

(a) originalni sinogram, (b) filtrirani sinogram,  
(c) profil sinograma, (d) profil filtriranega sinograma

# Iterativni postopki



- Modelirajo poljubno geometrijo virov in detektorjev
- Omogočajo modeliranje statistike nastanka in zajema slike
  - lastnosti šuma
  - prenosna funkcija sistema
  - popravki atenuacije in sipanja

# Modeliranje sistema

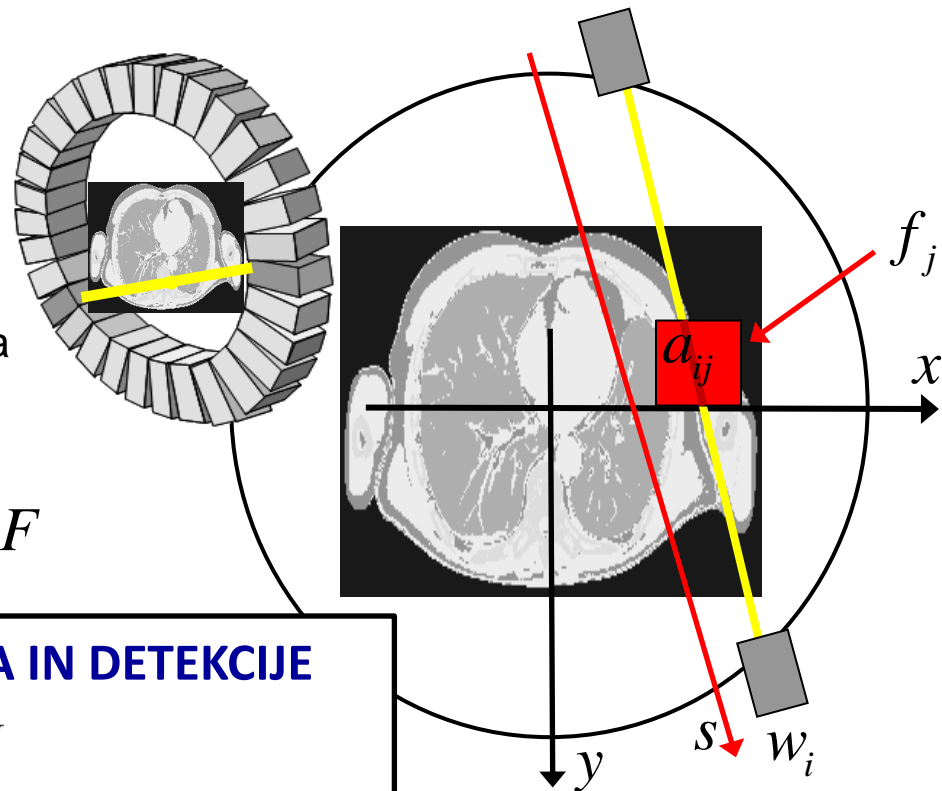
## ➤ Zvezni model

$$w_i = \int_0^d f(s) e^{-\int_0^d \mu(\zeta) d\zeta} ds$$

Atenuacija

## ➤ Diskretni model

$$w_i = \sum_j a_{ij} f_j \Rightarrow w_i = A F$$



### MODELIRANJE PROCESA ZAJEMA IN DETEKCIJE

$$A = A_{SENS} \cdot A_{BLUR} \cdot A_{ATEN} \cdot A_{GEOM}$$

$A_{SENS}$  učinkovitost detekcije posameznega para detektorjev

$A_{ATEN}$  atenuacijski koeficienti

$A_{BLUR}$  lokalni model funkcije razširitve točke (ločljivost!)

$A_{GEOM}$  verjetnost, da foton na lokaciji  $j$  doseže detektor  $i$

# Iterativni postopki

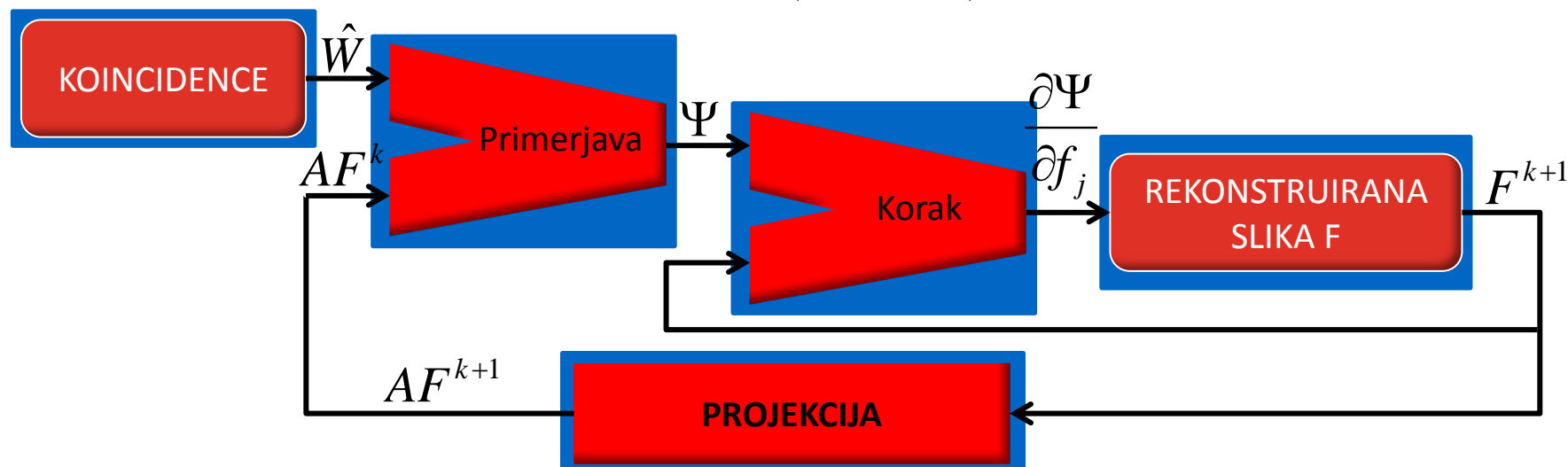
## ALGEBRAIČNI

### ➤ Algebraični postopek rekonstrukcije

(*algebraic reconstruction technique - ART*)

- Osnova je diskretni model  $w_i = \sum_j a_{ij} f_j \Rightarrow w_i = A F$
- **Ideja:** rekonstruirana slika je optimalna v smislu najmanjše srednje-kvadratne napake za dani model sistema

$$\Psi(\hat{W}, AF) = \sum_i (AF - \hat{W})^2$$



# Iterativni postopki

VERJETNOSTNI

## ➤ Maximum likelihood (ML)

→ Bayesova formula

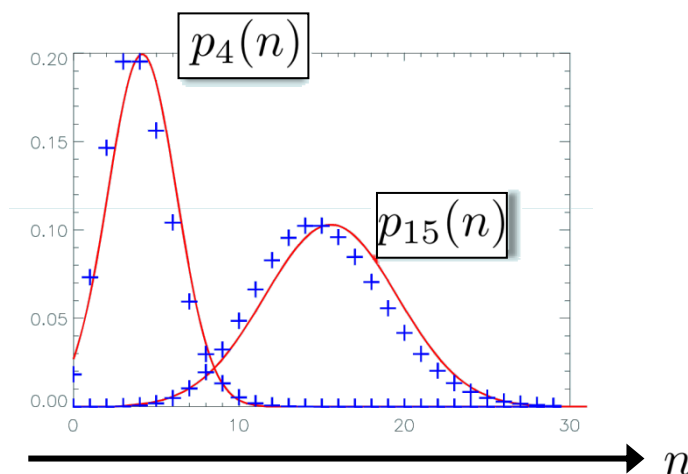
$$p(AF | \hat{W}) = \frac{p(\hat{W} | AF) \cancel{p(AF)}}{\cancel{p(\hat{W})}} \longrightarrow p(AF | \hat{W}) \approx p(\hat{W} | AF)$$

→ Poissonova porazdelitev – verjetnost  $n$  fotonov, če jih pričakujemo  $w$

$$p_w(n) = \frac{e^{-w} w^n}{n!}$$

→ Kriterijska funkcija

$$p(\hat{W} | AF^k) = \prod_i p(\hat{w}_i | [AF]_i)$$





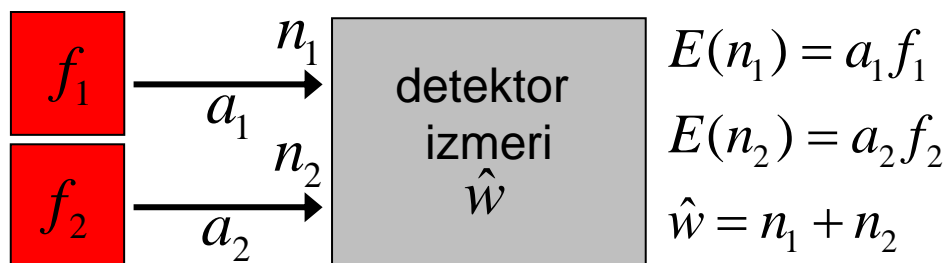
# Iterativni postopki

VERJETNOSTNI

## ➤ Expectation maximization (EM)

[Dempster1977, Lange1984, Shepp1982]

### ■ Intuitivna razlaga



$$\hat{w} \neq a_1 f_1 + a_2 f_2$$

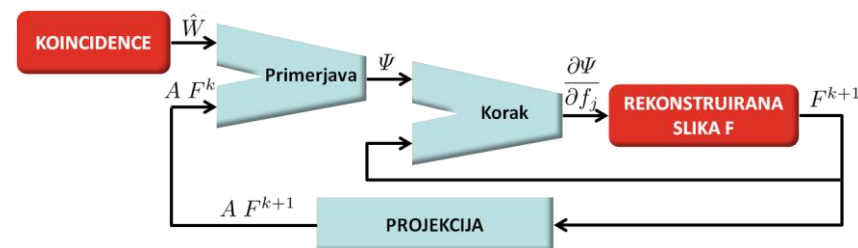
$$E(n_1) = \hat{w} \frac{a_1 f_1}{a_1 f_1 + a_2 f_2}$$

Porazdelimo enakomerno  
med oba vira

### ■ Korak EM rekonstrukcije

$$f_j^{k+1} = \frac{f_j^k}{\sum_i a_{ij}} \sum_i a_{ij} \frac{\hat{w}}{\sum_l a_{il} f_l^k}$$

Normalizacija vsote      EM

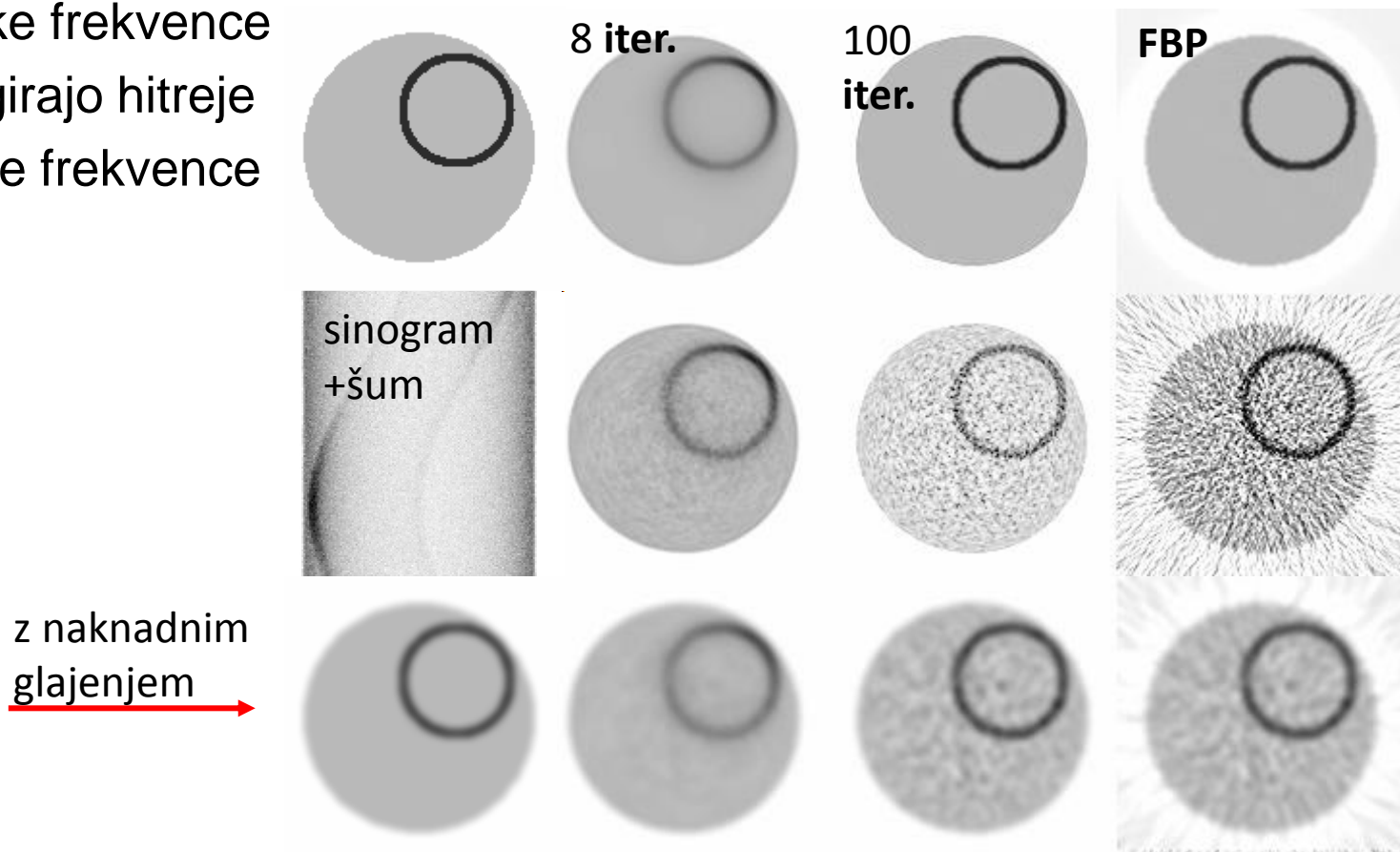


# Iterativni postopki

## LASTNOSTI MLEM VS. FBP

### ➤ Neenakomerna konvergenca EM postopka

- Visoke frekvence konvergirajo hitreje kot nizke frekvence



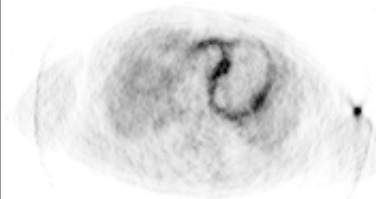
# Iterativni postopki

## LASTNOSTI MLEM VS. FBP

### ➤ Koliko EM iteracij?

- Manj iteracij → manjša ločljivost
- Več iteracij → večja ločljivost, a dominanten vpliv visoko-frekvenčne informacije

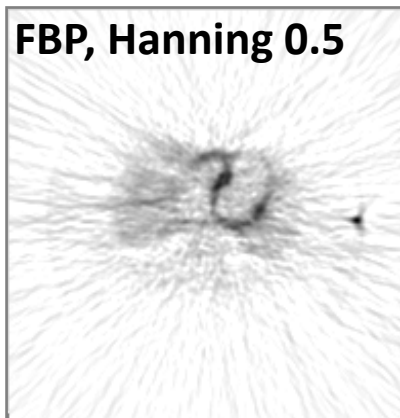
34 iter.



1000 iter



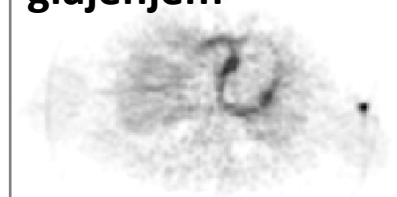
FBP, Hanning 0.5



118 iter



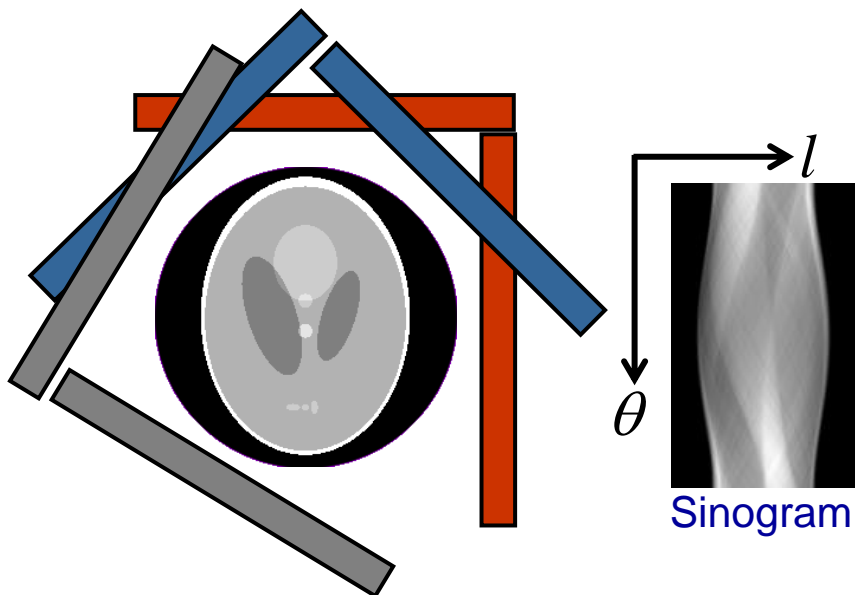
1000 iter z  
glajenjem



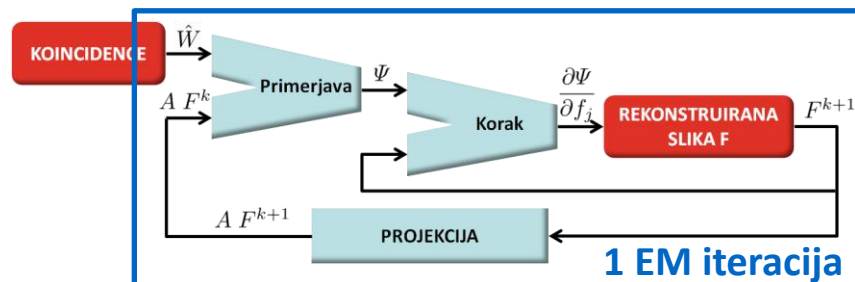
# Iterativni postopki

## ➤ EM z urejenimi podmnožicami projekcij

(ordered subsets EM - OSEM) [Hudson et al. 1994]



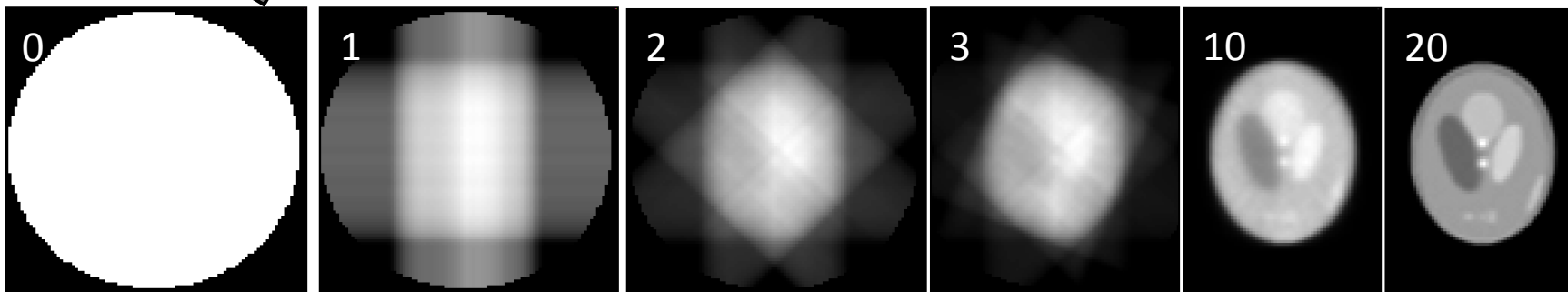
1 iteracija na M podsetih  $\longrightarrow$  M x EM iteracij



40 projekcij (40 vrstic po kotu)

→ 2 projekciji na podset

→ 20 podsetov na iteracijo



# Rekonstrukcija slik



## Analitični FBP

- ✓ Enostavna in hitra izvedba (CST)
- ✓ Znanе lastnosti, dela predvidljivo
- ✗ Le za sisteme z detektorji na obroču
- ✗ Ne modelirajo statistike zajema slike
- ✗ Črtasti artefakti (omejeno št. proj.)
- ✗ Kompromis šum-ločljivost (filtriranje)



## Algebraični ART

- ✓ Omogočajo modeliranje lastnosti procesa zajema in detekcije (A)
- ✓ Poljubna razporeditev detektorjev
- ✓ Poznani postopki reševanja (LS)
- ✗ Ne modelirajo statistike zajema slike



## Verjetnostni EM

- ✓ Modelirajo statistiko nastanka in zajema slike
- ✓ Poljubna razporeditev detektorjev
- ✓ Omogočajo modeliranje lastnosti procesa zajema in detekcije (A)
- ✓ Podpora apriori znanju (MAP)
- ✓ Hitrejša izvedba (OSEM, 6x)
- ✗ Računsko zelo zahtevni
- ✗ Manj predvidljivi rezultati: vpliv šuma in konvergenca postopka

