**直线的倾斜角与斜率教学分析与建议**

重庆市第四十二中学 杨宗涛

直线的倾斜角与斜率是解析几何的重要概念之一，是刻画直线倾斜程度的几何要素与代数表示，是平面直角坐标系内以坐标法（解析法）的方式来研究直线及其几何性质（如直线位置关系、交点坐标、点到直线距离等）的基础.通过该内容的学习，帮助学生初步了解直角坐标平面内几何要素代数化的过程，初步渗透解析几何的基本思想和基本研究方法.作为解析几何学习的开端，它担负着开启全章的重任，在该知识的教学中不但要落实显性知识，更重要的是要揭示隐性知识：研究解析几何的基本方法——坐标法.

《普通高中数学课程标准》指出：概念的教学要努力揭示其发展过程和本质，是学生理解数学概念逐步形成的过程，了解概念的来龙去脉，体会蕴含在其中的思想方法。本文以人教版《普通高中课程标准实验教科书数学》必修二第三章第一节《直线的倾斜角与斜率》的第一课时为例，对话教材分析教材意图，再提出相应教学建议，供老师们教学时参考。

**1.对话教材**

教材中“倾斜角与斜率”的内容呈现方式为：提出如何确定一条直线的问题――倾斜角及其取值范围――回答确定一条直线的方法――利用生活中的坡度引入斜率――探究如何用两点坐标计算直线斜率――例题呈现――练习。

**1.1倾斜角的定义**  
  现行人教课标版（人教A版《数学2》）定义倾斜角为：“当直线与x轴相交时，x轴正向与直线向上方向之间所成的角α叫做直线的倾斜角.”而人教大纲版的定义是：“在平面直角坐标系中，对于一条与x轴相交的直线，如果把x轴绕着交点按逆时针方向旋转到和直线重合时所转的最小正角记为α，那么α就叫做直线的倾斜角.”有教师认为，课标版如此定义实属“无奈”之举，因为在此前的教材内容中还未介绍任意角的概念.其实不然：（1）大纲版定义中，“逆时针方向旋转”与后面的“正角”有语义重复之嫌，且定义叙述因不够简洁、抽象程度高，学生难以理解；（2）课标版定义中，只给出角的两边，没有具体说明是怎样的角，看似不够严密，实则完全符合数学中表示几何背景下的“角”的习惯：能用小的就不用大的，能用正的就不用负的.同样，在此前的教材中，空间的三个“角”也是这样处理的：异面直线与线面所成的角，都是用两条相交直线所成角的较小角来表示；二面角的平面角，教材根本没有指出它是什么范围的角，因为大家都默认了它是一个锐角、直角或钝角.因此，当直线与x轴平行时，教材就十分自然地定义它的倾斜角为0°而不是180°.实际教学中，教师可做适当地说明讲解，让学生明白背后的道理：力求简单、实用、便于计算的原则。

**1.2斜率概念的生成**  
  教材在第83页作了详细描述，极力突出概念的生成过程.首先，呈现了日常生活中，表示倾斜面的“坡度”概念，并给出直观解释.目的是唤醒学生头脑中已有的坡度知识（初中教材“锐角三角函数”一节中有坡度概念，且配置了相应的习题），从而十分自然地类比坡度来引入斜率概念；也为推导两点的直线斜率公式做了必要的铺垫.其次，在揭示“坡角”“坡度”这两个描述倾斜程度的量的意义及其关系上，类比“坡度是升高量与前进量的比值，即为坡角的正切值”，引进一个量：直线倾斜角α的正切值k=tanα（α≠90°），给出斜率概念.最后，教材通过比较直线的倾斜角与斜率的各自特点，让学生明白：倾斜角与斜率分别从几何与代数两个角度刻画了直线的倾斜程度，斜率是一个数量，与频率、比率等类似，斜率中的“率”是指两个相关量的比值；由于0°≤α＜180°，所以是可以取任意实数；给定一条直线，倾斜角唯一确定，但斜率要分α≠90°和α=90°两种情况；等等.突出斜率是对直线倾斜程度的代数刻画，是解析几何的本质。教材借斜率概念的生成在告诉我们：“数学教学要‘讲背景，讲思想，讲应用’，概念教学则要强调让学生经历概念的概括过程.由于‘数学能力就是以数学概括为基础的能力’，因此重视数学概念的概括过程对发展学生的数学能力具有基本的重要性.”

**1.3斜率公式**  
  教材在第84页介绍了斜率公式的推导，其思路是：先呈现直线P1P2的方向向上时的情形，采用过点、分别作两坐标轴的平行线，构造直角三角形，用直线上两点的垂直增量与水平增量的比来定义斜率，当水平增量为一个单位长时，垂直增量（有方向的量）就是这条直线的斜率.这里可以看出编者的两个独特意图：一是受图形的启发，学生容易构造直角三角形，也是为后续内容的学习留下了伏笔，在今后学习三角函数中单位圆上的三角函数线时，学生还可以知道这种定义方式实际上与直线倾斜角的正切线是一致的，还有本章后面两点间的距离公式及点到直线的距离公式的推导，恰恰都是利用了此直角三角形.虽然说点到直线的距离公式推导方法很多，但教材中构造直角三角形计算相等面积的方法不仅最为简洁，而且容易为学生所想到.二是再次让学生体会数形结合的思想方法，经历“从几何到代数”的转化过程，认识坐标系的工具作用.当P2P1的方向向上时，教材只呈现了相应的图形，省略了具体的推导过程.意图是让学生再独立完成公式的推导，巩固所学的方法，更能从中体会到：直线的斜率是一个客观存在的量，与直线上两点的位置无关.

**1.4四个思考题**  
  教材共设置了四道思考题，设置思考题可谓是课标教材的一大亮点，引领老师更好地解读教材，从中提炼出有效的问题.

第一个思考题是：“对于平面直角坐标系内的一条直线，它的位置由哪些条件确定呢？”我们可以从中可提炼出下列两个问题：  
  问题1：经过一点P的直线有无数条，怎样借助直角坐标系把它们区分开来？  
  设计意图：让学生感受引入倾斜角的必要性；突出坐标系的作用.  
  问题2：用直线与x轴所形成的角作区分标准比较符合我们的习惯.但这里有四个角，取哪个角呢？  
  设计意图：让学生了解如何从坐标轴“基准”作用出发思考问题、做出选择.  
  第二个思考题是：“日常生活中，还有没有表示倾斜程度的量？”意图是唤醒学生头脑中的坡度知识，类比坡度引入斜率概念.  
  后两道思考题都是围绕斜率公式来设置的，主要是让学生剖析公式的特点和使用条件.  
  对教材中的思考题，一定要仔细琢磨，真正弄清其目的与任务，只有这样，在具体教学时，才能结合相关内容将其细化，设计出合理、有效的问题串.

**1.5例题与练习**  
  教材配置了两道例题，侧重于强化学生对斜率概念的理解，突出斜率作为核心概念的地位.例1的意图是：会用斜率公式求直线的斜率，并依据其正负判断倾斜角是锐角或钝角.例2则更加精妙，通过逆向思维，再找出位于直线上的一点使其满足已知斜率，而画直线的过程是数形结合的过程，有利于进一步理解直线的斜率公式（斜率与直线上点的位置无关），也为后续教学直线的点斜式方程埋下伏笔.

**2.教学建议**

根据以上分析，我就“直线的倾斜角与斜率”知识点提出如下建议：

**2.1学前准备**

教学之前至少要做以下三方面的工作：（1）仔细阅读《普通高中数学课程标准（实验）》（下面简称“课标”）.只有对“课标”要求了然于胸，教材的研读才能有的放矢.“课标”中关于“直线的倾斜角与斜率”的要求是：①在平面直角坐标系中，结合具体图形，探索确定直线位置的几何要素；②理解直线的倾斜角和斜率的概念，经历用代数方法刻画直线斜率的过程，掌握过两点的直线斜率的计算公式；③在平面解析几何初步的学习过程中，体会用代数方法处理几何问题的思想.（2）了解学生在学习相关内容之前的知识储备和认知基础.例如：学生习惯多媒体辅助教学吗？他们能自己操作几何画板描点画线吗？又如：教材是借“坡度”概念来生成直线的斜率概念，那么学生对“坡度”概念熟悉吗？熟悉到何种程度？这要求我们对初中数学教材也要有相当的了解，当然，和学生进行必要的交流与沟通是最有效的.（3）计算机辅助教学，在多媒体课件、软件及硬件的支持下，让学生实践、观察、猜想、论证，经历概念的发现与形成过程，体验公式的推导过程，感受用代数方法刻画斜率的过程，主动建构自己的认知结构.

**2.2 定义倾斜角的教学**

在初中的平面几何中，学生已经知道“两点确定一条直线”，如何使学生在这一知识的基础上，顺利地过渡到直角坐标系下用一个点和倾斜角确定一条直线，是比较困难的.事实上，已知直线的倾斜角就相当于已知直线的方向，在平面几何中是没有参照系的，引入坐标系后，“两个点可以确定直线的方向”与“一个点和直线的方向确定一条直线”是一致的.在数学中应注意引导学生认识到这种联系.我们可以设计如下问题串来完成倾斜角定义的教学：

问题1：请你在平面直角坐标系中画出两条直线，说出他们的不同这处.



设计意图：明确思维方向，探索确定直线位置的几何要素.引导学生发现：两点确定一条直线，过一点不能确定一条直线.

问题2：如图（1），在直角坐标系中，过点P的不同直线的区别在哪里？

设计意图：引导学生发现过定点的不同直线，其倾斜程度不同.从而发现直线上一点和直线的倾斜程度也能确定一条直线.

问题3：直线的倾斜程度是以什么为参照的？

设计意图:教师引导形成统一的认识：以轴或轴为基准都可以，习惯上以轴为基准.

问题4：在平面直角坐标系中，如何确定一条直线的位置？

设计意图：预设的学生答案应该有（1）两点确定一条直线；（2）一点及直线相对于轴的“倾斜程度”.师生一起可以对前面几个问题的发现进行总结.

问题5：两直线相交可以形成4个角，你愿意选择哪个角来描述直线的倾斜程度呢？

设计意图：引导学生形成统一认识，引入倾斜角概念.老师也在此处与学生一起探讨：“根据定义，倾斜角的取值范围是什么呢？”——0° ≤＜180°.

问题6：任何一条直线都有倾斜角吗？不同的直线其倾斜角一定不相同吗？你认为确定平面直角坐标系中一条直线位置的几何要素是什么？

设计意图：使学生理解确定一条直线位置的几何要素是：直线上的一个点以及它的倾斜角，两者缺一不可.

**2.3 定义斜率的教学**

引导性语言：刚刚我们已经给出了确定平面直角坐标系中一条直线位置的几何要素，那么如何用代数的语言描述上述几何要素呢？

设计意图：告知目标，明确思维的方向，将几何要素代数化.

问题7**：**在日常生活中，我们有没有碰到过表示倾斜程度的量？

设计意图：基于学生的客观现实，结合已有的生活经验寻找几何要素代数化的方法. 引导学生在生活中举例，比如，山坡，楼梯等，教师适时给出新课引入时的动画，如跷跷板、重庆朝天门大桥的钢索. 通过观察课件，让学生发现在倾斜角不变的情况下，升高量与前进量都在变化，找出之间的关系。

问题8：从上面的讨论我们发现，如果使用“倾斜角”的概念，“坡度”实际就是“倾斜角的正切值”，由此你认为还可以用怎样的量来刻画直线的倾斜程度？

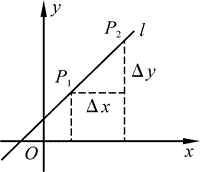
设计意图：探索描述直线的倾斜程度的代数表示，由此引出斜率概念.

问题9：是否每条直线都有斜率？倾斜角不同，斜率是否相同？由此可以得到怎样结论？

设计意图：沟通数形关系，加深概念理解.明确可以用斜率表示直线的倾斜程度.

问题10：除了用坡度还可以从哪方面理解斜率？

设计意图：这里我们用直线l上两点的垂直增量与水平增量的比来定义斜率，当水平增量为一个单位长时，垂直增量（有方向的量）就是这条直线的斜率.为引入直线斜率的计算公式作铺垫.



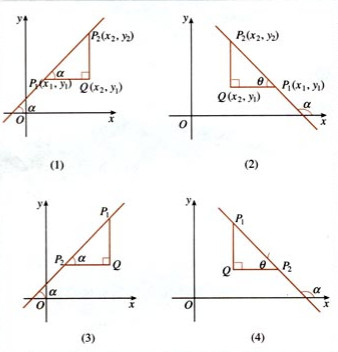
问题11：根据三角函数的相关知识，思考当倾斜角在（0°,180°）内变化时，斜率k如何变化？（可自行设计表格让学生填写）

设计意图：初步体验斜率与倾斜程度的关系，并用函数的观点分析倾斜角与斜率的变化关系.这里要求学生独立完成，探明倾斜角与斜率的关系，并交流认识斜率的意义，明白可以用斜率表示直线的倾斜程度.

**2.4 斜率公式的教学**

问题12：已知直线将过两点P1（x1，y1），P2（x2，y2），试用点P1、P2的坐标表示直线的斜率k?

设计活动与设计意图：学生在刚才所画的直线上标记上述条件，由于不同学生的标记方法不同，将他们标记的情况收集整理，得到所有的情况之后再分类讨论，分组合作，分别求解.让学生根据斜率的定义解决问题，因此首先构造直角三角形.教师可以在此提出问题：各种一般情形得出的结论一致吗？与P1、P2、这两点坐标顺序有关系吗？为什么？当直线垂直于x轴或y轴时上述结论还适用吗?通过这样的活动使得学生对要解决的问题有一个全面的认识，同时认识到分类讨论和合作学习的必要性.



**2.5 例题选用的教学**

要促使学生学会直接利用斜率定义式求解，熟悉斜率公式，并体验斜率与倾斜角之间的关系.所以例题选用可以直接使用教材例题，有余力的老师可以适当变形加深，能结合图象，让学生熟悉倾斜角和斜率的关系.

如教材例1：已知*A*(3，2),*B*(-4，1),*C*（0，-1）,求直线*AB*，*BC*，*CA*的斜率，并判断这些直线的倾斜角是锐角还是钝角.

可设计变式：设直线的斜率为*k*，倾斜角为*α*，若-1<*k*<1，则*α*的取值范围是 （    ）

A．（-W020081017579122252004,W020081017579122252004）   B.W020081017579122412270    C.（0，W020081017579122252004）∪（W020081017579122411568，W020081017579122416080）D. W020081017579122412341 