

# ПЗ Урок 8

№1. Исследовать на условный экстремум ф-цию  
 $U = 3 - 8x + 6y$ , если  $x^2 + y^2 = 36$

$$L(x, y, \lambda) = 3 - 8x + 6y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 36)$$

$$\begin{cases} L'_x = -8 + \lambda \cdot 2x = 0 \\ L'_y = 6 + \lambda \cdot 2y = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{2\lambda} = \frac{4}{\lambda} \\ y = -\frac{6}{\lambda} = -\frac{3}{\lambda} \\ \left(\frac{4}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{3}{\lambda}\right)^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\lambda} \\ y = -\frac{3}{\lambda} \Rightarrow \frac{16+9}{\lambda^2} = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{4}{\lambda} \\ y = -\frac{3}{\lambda} \\ 36\lambda^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\lambda} \\ y = -\frac{3}{\lambda} \\ \lambda^2 = \frac{25}{36} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{24}{5} \\ y_1 = -\frac{18}{5} \\ \lambda_1 = \frac{5}{6} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_2 = -\frac{24}{5} \\ y_2 = \frac{18}{5} \\ \lambda_2 = -\frac{5}{6} \end{cases}$$

Получаем две точки:  $(\frac{24}{5}; -\frac{18}{5}; \frac{5}{6})$  и  $(-\frac{24}{5}; \frac{18}{5}; -\frac{5}{6})$

$$\begin{cases} L''_{xx} = 2\lambda \\ L''_{yy} = 2\lambda \\ L''_{\lambda\lambda} = 0 \\ L''_{xy} = L''_{yx} = 0 \\ L''_{x\lambda} = L''_{\lambda x} = 2x \\ L''_{y\lambda} = L''_{\lambda y} = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} \\ L''_{x\lambda} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{vmatrix} - 2x \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 2y & 2\lambda \end{vmatrix} + 2y \begin{vmatrix} 2x & 2\lambda \\ 2y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 2x \cdot (2x \cdot 2\lambda - 0) + 2y(0 - 2\lambda \cdot 2y) = -8x^2\lambda - 8y^2\lambda = -8\lambda(x^2 + y^2)$$

$$x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow \Delta_3 = -8\lambda \cdot 36 = -288\lambda$$

$$\lambda_1 = \frac{5}{6} \Rightarrow \Delta_3 = -288 \cdot \frac{5}{6} = -240 < 0; \left(\frac{24}{5}; -\frac{18}{5}; \frac{5}{6}\right) - \text{т. миним.}$$

$$\lambda_2 = -\frac{5}{6} \Rightarrow \Delta_3 = -288 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = 240 > 0; \left(-\frac{24}{5}; \frac{18}{5}; -\frac{5}{6}\right) - \text{т. максим.}$$