Lesson_2_1

№1 Какие произведения матриц AB и BA определены и найти размерности полученных матриц. * ст.А д.б. = стр.В – AB

а) A – 4×2, B – 4×2 – произведение не определены

б) A – $\overset{стр}{2}\times\overset{ст}{5}$, B – $\overset{стр}{5}\times\overset{ст}{3}$ – BA – пр. не опр., AB пр. опр., разм. $\overset{стр}{2}\times\overset{ст}{3}$

в) A – 8×3, B – 3×8, AB и BA – пр. опр., Размерности AB – 8×8, BA – 3×3

г) A – 4×4, B – 4×4, AB и BA – пр. опр., Размерность AB и BA 4×4

№2. Найти AB и A+B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad A+B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot4+(-2)\cdot0 & 1\cdot(-1)+(-2)\cdot5 \\ 3\cdot4+0\cdot0 & 3\cdot(-1)+0\cdot5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} = AB$$

~~№3~~ $$BA = \begin{pmatrix} 4\cdot1+(-1)\cdot3 & 4\cdot(-2)+(-1)\cdot0 \\ 0\cdot1+5\cdot3 & 0\cdot(-2)+5\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} = BA$$

№3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3A - 2B + 4C = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 9 & -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$$

№4

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad A\cdot A^T - ? \qquad A^T\cdot A - ?$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^T = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4\cdot 4 + 1\cdot 1 & 4\cdot 5 + 1\cdot(-2) & 4\cdot 2 + 1\cdot 3 \\ 5\cdot 4 + (-2)\cdot 1 & 5\cdot 5 + (-2)\cdot(-2) & 5\cdot 2 + (-2)\cdot 3 \\ 2\cdot 4 + 3\cdot 1 & 2\cdot 5 + 3\cdot(-2) & 2\cdot 2 + 3\cdot 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 17 & 18 & 11 \\ 18 & 29 & 4 \\ 11 & 4 & 13 \end{vmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4\cdot 4 + 5\cdot 5 + 2\cdot 2 & 4\cdot 1 + 5\cdot(-2) + 2\cdot 3 \\ 1\cdot 4 + (-2)\cdot 5 + 3\cdot 2 & 1\cdot 1 + (-2)\cdot(-2) + 3\cdot 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 14 \end{vmatrix}$$

№5* Написать на Python ф-цию для перемножения двух произвольных матриц, не исп-ая numpy.

Lesson_2_2

№1 Вычислить определитель.

а) $\det = \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

б) $\det = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 9 = 180$

в) $\det = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$

$= 45 - 48 - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) = -3 + 2 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = 0$

№2. Определитель матрицы A равен 4, найти:

а) $\det(A^2) = \det(A \cdot A) = \det A \cdot \det A = 4 \cdot 4 = 16$ для квадр. матр. A

б) $\det(A^T) = \det A = 4$ (из св-в опр-лей)

в) $\det(2A) = \det\left(2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right) = \det \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix} =$

$= 2a \cdot 2d - 2b \cdot 2c = 4(ad - bc) = 4 \cdot \det A = 4 \cdot 4 = \underline{16}$ для A 2x2

$\det(2A) = \det\left(2 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right) =$

$= 2a_{11} \begin{vmatrix} 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} - 2a_{12} \begin{vmatrix} 2a_{21} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{33} \end{vmatrix} + 2a_{13} \begin{vmatrix} 2a_{21} & 2a_{22} \\ 2a_{31} & 2a_{32} \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot 4 \cdot a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - 2 \cdot 4\, a_{12}(a_{21} a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) +$

$+ 2 \cdot 4\, a_{13}(a_{21} a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}) =$

$= 2 \cdot 4 \cdot \det A = 8 \det A = 8 \cdot 4 = \underline{32}$ для A 3x3

№3. Доказать, что матрица вырожденная

$A = \begin{vmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{vmatrix}$ т.к. $\det A = 0 \Rightarrow$ матрица сингулярная, т.е. вырожденная

$\det A = (-2) \cdot (-14 \cdot 13 - 6 \cdot 7) - 7 \cdot (4 \cdot 13 - 6 \cdot (-3)) + (-3) \cdot (4 \cdot 7 - (-3) \cdot (-14)) =$

$= -2 \cdot 7(-2 \cdot 13 - 6) - 7 \cdot 2(2 \cdot 13 + 3 \cdot 3) - 3 \cdot 7(4 - 3 \cdot 2) = 0$

$= +14(32 - \underset{0}{35} + 3) = 14 \cdot 0 = 0$

№4 Найти ранг матрицы

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ - Ранг матрицы $\underline{2}$, т.к. - третья строка - сумма 1ой и 2ой

б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ Ранг матрицы $\underline{3}$

- третья строка - сумма 1ой и 2ой строк