№1. Исследовать на линейную зависимость.

$f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = x+1$, $f_4(x) = x - e^x$

$x - e^x = x + 1 - 1 - e^x$ — можно выразить $f_4(x)$ через $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$

$f_4(x) = f_3(x) - f_2(x) - f_1(x)$

$\Downarrow$

век. $f_4(x)$ – линейная комбинация векторов $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$

Значит вектора линейно зависимы

№2. Исследовать на линейную зависимость.

$f_1(x) = 2$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = (x+1)^2$

$f_4(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x + \frac{1}{2}\cdot 2$

$f_4(x) = f_3(x) + 2f_2(x) + \frac{1}{2} f_1(x)$

$f_4(x)$ – линейная комбинация векторов $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$

Значит вектора линейно зависимы.

№3. Найти координаты вектора $x = (2, 3, 5) \in \mathbb{R}^3$ в базисе $b_1 = (0, 0, 10)$, $b_2 = (2, 0, 0)$, $b_3 = (0, 1, 0)$

$x = (2,3,5) = (2,0,0) + (0,3,0) + (0,0,5) = (2,0,0) + 3(0,1,0) + \frac{1}{2}(0,0,10) =$

$= b_2 + 3b_3 + \frac{1}{2} b_1$

$x = (2,3,5) = b_2 + 3b_3 + \frac{1}{2} b_1$

То есть координатами вектора x в стандартном базисе являются $\frac{1}{2}$, 1, 3.

№4. Найти координаты вектора $3x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{R}^3[x]$.

а) в базисе $1, x, x^2$

Составим ур-ние $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 3x^2 - 2x + 2$

$a = 2$, $b = -2$, $c = 3$

б) в базисе $x^2, x-1, 1$

$a \cdot x^2 + b(x-1) + c \cdot 1 = 3x^2 - 2x + 2$

$ax^2 + bx - b + c = 3x^2 - 2x + 2$

$a = 3$ $b = -2$ $c = 0$

$c - b = 2$

$c = 2 + b = 2 - 2 = 0$

№5. Установить, является ли линейным подпространством:

а) совокупность всех векторов трехмерного пространства, у которых по крайней мере одна из первых двух координат равна нулю

Нет

б) все векторы, являющиеся линейными комбинациями данных векторов $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$

да

№1. Найти скалярное произведение 2х векторов

а) $x = (0, -3, 6)$, $y = (-4, 7, 9)$

$(x, y) = 0 \cdot (-4) + (-3) \cdot 7 + 6 \cdot 9 = 0 - 21 + 54 = 33$

б) $x = (7, -4, 0, 1)$, $y = (-3, 1, 11, 2)$

$(x, y) = 7 \cdot (-3) + (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 11 + 1 \cdot 2 = -21 - 4 + 2 = -23$

№2. Найти нормы векторов $(4, 2, 4)$ и $(12, 3, 4)$ и угол м/у ними

маню. $\|x\|_1 = |4| + |2| + |4| = 10$ $\|y\|_1 = |12| + |3| + |4| = 19$

евкл. $\|x\|_2 = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$ $\|y\|_2 = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} \sqrt{144 + 9 + 16} = \sqrt{169} = 13$

$\cos\varphi = \frac{4 \cdot 12 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4}{6 \cdot 13} = \frac{48 + 6 + 16}{78} = \frac{70}{78} = 0{,}897$

№3. Будет ли линейное пр-во евклидовым, если за скалярное произведение принять:

а) произведение длин векторов $(x, y) = |x| \cdot |y|$

да, при $\angle = 0°$, т.е ~~пр-во будет одно~~ вектора на одной прямой

б) утроенное обычное скалярное произведение векторов

нет $(x, y) = 3 \cdot |x| \cdot |y|$

№4. Какие из нижеперечисленных векторов образуют ортонорм-ый базис в лин. пр-ве $\mathbb{R}^3$

а) $(1, 0, 0), (0, 0, 1)$ – нет, т.к. нет третьего ед-ого вектора

б) $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1)$ – нет

в) $(1/2, -1/2, 0), (0, 1/2, 1/2), (0, 0, 1)$ – нет, т.к. длины не 1

г) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ – базис ортонорм-ый