

N1. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Вывести из 2ой стр. 1ую  $x_2$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Вывести из 3ей строки 1ую

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

Такая система имеет бесконечное число решений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + 5x_4 = -2 \\ -2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

примем  $x_4$  за свободный параметр, т.е.  $x_4 = c$ , тогда:

$$\begin{aligned} -2x_3 + 3c &= 4 \\ -2x_3 &= 4 - 3c \\ x_3 &= \frac{4 - 3c}{-2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} -x_2 + \frac{4 - 3c}{-2} + 5c &= -2 \quad | \cdot (-2) \\ 2x_2 + 4 - 3c - 10c &= 4 \\ 2x_2 &= 13c \\ x_2 &= \frac{13c}{2} \end{aligned}$$

$$x_1 + \frac{13c}{2} + \frac{4 - 3c}{2} - 2c = 0 \quad | \cdot 2$$

$$2x_1 = -13c - 4 + 3c + 4c$$

$$2x_1 = -6c - 4$$

$$x_1 = -3c - 2$$

Общее решение системы:

$$x_1 = -3c - 2$$

$$x_2 = \frac{13c}{2}$$

$$x_3 = \frac{4 - 3c}{-2} = \frac{3c - 4}{2}$$

$$x_4 = c$$

Например, при  $x_4 = c = 0$ :

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = -2$$

$$x_4 = 0$$



N2. Проверить на совместность и выписать, сколько решений будет иметь система линейных ур-ний

а) 
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Вычти из 2ой стр. 3ю  $\times 2$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Вычти из 3ей стр. 1ю  $\div 3$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 0 & 1 + \frac{1}{3} & -1 - \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{array} \right)$$

такая система имеет бесконечное мн-во решений

б) 
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array} \right)$$

из 3ей вычти 2ю  $\times 3$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array} \right)$$

такая система несовместна

в) 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$$
 неопределенная система имеет бесконечное мн-во реш.

N3. Проверить на совместность и выписать, сколько решений будет иметь система лн. ур-ний

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

система совместна и имеет решение

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 5x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_3 = 4 \\ 2x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 - 1/2 / 5 = 0,3 \\ x_3 &= 4/3 \\ x_4 &= 1/2 \end{aligned}$$

$$x_1 = 3 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 3 - 3 \cdot 0,3 + 2 \cdot 4/3 - 4 \cdot 1/2 = 3 - 0,9 + 8/3 - 2 \approx 1 - 1,77 = -0,77$$



№4. Дана система лнн. ур-ний, зад. расш. матриц

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array} \right)$$

Найти соотношение ш/у параметрами  $a, b, c$  при которых система лнн-я несовместна

Вычтем из 2ой строки  $2 \times$  1ую стр.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 1 & 0 & b-2a \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array} \right)$$

Вычтем из 3ей строки 1ую стр  $\times 3$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 1 & 0 & b-2a \\ 4 & 2 & 0 & c-3a \end{array} \right)$$

Вычтем из 3ей строки 2ую  $\times 2$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 1 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & c-3a-2(b-2a) = c+a-2b \end{array} \right)$$

Если  $c+a-2b=0$ , то система совместна

Чтобы система была несовместна, надо  $c+a-2b \neq 0$



# Lesson 4 (7)

N1. Решить систему уравнений методом Крамера:

$$a) \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 14 = 10 \quad x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{10}{2} = \underline{5}$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 3 = 4 \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{4}{2} = \underline{2}$$

$$b) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2(1+12) + 1(1+6) + 5(4-2) = 26 + 7 + 10 = 43$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 \cdot 13 + 1(-2+3) + 5(-8-1) = 130 + 1 - 45 = 86$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-2+3) - 10(1+6) + 5(1+4) = 2 - 70 + 25 = -43$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2(1+8) + 1(1+4) + 10(4-2) = 18 + 5 + 20 = 43$$

$$x_1 = 86/43 = \underline{2} \quad x_2 = -43/43 = \underline{-1} \quad x_3 = 43/43 = \underline{1}$$