ПЗ урок 3   Предел последовательности

N1

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(23-2n^2)(3n^2+17)^2}{4n^6+n-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n^2(3n^2)^2}{4n^6}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-18n^6}{4n^6}=\frac{-18}{4}=-\frac{9}{2}=-4,5$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(97-2n)^3}{2n(3n^2+15)+8n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2n)^3}{6n^3}=-\frac{8n^3}{6n^3}=-\frac{4}{3}$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+13n(n+18)}{(27-n)(2n+19)^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{2n^3}{-4n^3}=-\frac{1}{2}$

г) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)=(\infty-\infty)=(\sqrt{n^2+1}-n)\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n}=$

$=\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0$

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-4)^n+5\cdot7^n}{(-4)^{n-1}+7^{n+2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7^n\left(\overbrace{\left(\frac{-4}{7}\right)^n}^{\to 0}+5\right)}{7^n\left(\underbrace{\frac{(-4)^{n-1}}{7^n}}_{\to 0}+7^2\right)}=\frac{5}{49}$

N2. Представьте 1 в виде суммы трех обыкновенных дробей с разными знаменателями и числителем равным 1

$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+x$

$x=1^{\backslash 6}-\frac{1}{2}^{\backslash 3}-\frac{1}{3}^{\backslash 2}=\frac{6}{6}-\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$

$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

N3*

$1=1=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}$

записывать вам

Ход мыслей: из 2го задания пробуем разложить наибольшую дробь!

$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ раскл. дальше

$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\to\frac{1}{8}=\frac{2}{16}=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}$

$\frac{1}{8}=\frac{3}{24}=\frac{1}{24}+\frac{2}{24}=\frac{1}{24}+\frac{1}{12}$ но т.к. нам надо 2 разные дроби, то

$\frac{1}{8}=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}$

№4. Пользуясь критерием Коши, докажите сходимость последовательности:

$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{2^3} + \dots + \frac{\sin n}{2^n} \Longrightarrow$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{\sin 1}{2}; \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2}, \dots, a_n, \dots\right\}$

$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon), \ \forall n > N(\varepsilon) \ \forall k \geq 1 : |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon}$ Коши

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0$

$|a_n - a_{n+k}| = \left|a_n - \left(a_n + \frac{\sin(n+k)}{2^{n+k}}\right)\right| = \left|-\frac{\sin(n+k)}{2^{n+k}}\right| =$

$= \frac{1}{\infty} = 0 < \varepsilon$

* Какой член последовательности можно взять в качестве предела с точностью $\varepsilon = 10^{-7}$? (программно)

N 1 e*

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{1} = \dots$ котор. ти при n

$a_n = \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{(n-1)n} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0$

$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{n}{n+1}$, $n = 1$

$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{n}{n+1}$, $n = 2$

$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = \frac{n}{n+1}$, $n = 3$

N5* Критерий Коши расходимость

$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \ldots, b_n, \ldots\}$

Рась-ть $\boxed{\exists \varepsilon > 0 \; \forall N(\varepsilon), \exists n > N(\varepsilon) \; \exists k \geq 1 : |b_n - b_{n+k}| \geq \varepsilon}$

Каждый следующий член прогрессии начинается с предыдущего и суммируется с числом все больше стремящемся к нулю

при $n \to \infty$ b_n.

$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n} > n \cdot \frac{1}{n+n} = \cancel{n} \cdot \frac{1}{2\cancel{n}} = \frac{1}{2}$

$k = n \quad x_{n+k} = x_{n+n} = x_{2n}$

Согласно критерию Коши, т.к. $|x_{n+k} - x_n| \geq \frac{1}{2}$, то данная последовательность расходится.