ПЗ 7

Линейная алгебра

N5.1.

$$A^{-1} = (5\cdot E)^{-1} = \left(5\cdot \begin{vmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{vmatrix}\right)^{-1} = \begin{vmatrix} 5&0&0&0&0\\ 0&5&0&0&0\\ 0&0&5&0&0\\ 0&0&0&5&0\\ 0&0&0&0&5 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 1/5&0&0&0&0\\ 0&1/5&0&0&0\\ 0&0&1/5&0&0\\ 0&0&0&1/5&0\\ 0&0&0&0&1/5 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\cdot E$$

$$\left\| \begin{matrix} 5&0&0&0&0\\ 0&5&0&0&0\\ 0&0&5&0&0\\ 0&0&0&5&0\\ 0&0&0&0&5 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{matrix} \right\|$$

Теорема: если справа к квадратной матрице дописать ед. матрицу этого же порядка и с пом. элементарных преобразований над строками получить слева ед. матр, то справа получим обратную.

Приведем левую часть к единичной матрице для этого разделим каждую строку на 5

$$\left\| \begin{matrix} 5/5&0/5&0/5&0/5&0/5\\ 0/5&5/5&0/5&0/5&0/5\\ 0/5&0/5&5/5&0/5&0/5\\ 0/5&0/5&0/5&5/5&0/5\\ 0/5&0/5&0/5&0/5&5/5 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1/5&0/5&0/5&0/5&0/5\\ 0/5&1/5&0/5&0/5&0/5\\ 0/5&0/5&1/5&0/5&0/5\\ 0/5&0/5&0/5&1/5&0/5\\ 0/5&0/5&0/5&0/5&1/5 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1/5&0&0&0&0\\ 0&1/5&0&0&0\\ 0&0&1/5&0&0\\ 0&0&0&1/5&0\\ 0&0&0&0&1/5 \end{matrix} \right\|$$

Одно из свойств обратной матрицы:

$$\boxed{(k\cdot A)^{-1} = \frac{A^{-1}}{k}}$$

, что у нас и получилось

Еще одно св-во обр. матриц упростит вычисление определителя матрицы

$$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$$

$$\det A = \det(5\cdot E) = 5\cdot \begin{vmatrix} 5&0&0&0\\ 0&5&0&0\\ 0&0&5&0\\ 0&0&0&5 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0 = 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 =$$

$$= 5^5 = 3125$$

$$\det A^{-1} = \det(5\cdot E)^{-1} = \frac{1}{3125}$$

N5.3(2) Пример матрицы 4x4, ранг которой 1

$$\begin{vmatrix} 1&2&3&4\\ 2&4&6&8\\ 3&6&9&12\\ 4&8&12&16 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ :2 \; - 1\text{я строка}\\ :3 \; - 1\text{я строка}\\ :4 \; - 1\text{я строка} \end{matrix}$$

N 5.2(1)

$$\det A = \begin{vmatrix}1&2&3\\4&0&6\\7&8&9\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}0&6\\8&9\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}4&0\\7&8\end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(0\cdot9-6\cdot8) - 2\cdot(4\cdot9-6\cdot7) + 3(4\cdot8-7\cdot0) =$$

$$= -48 - 2(36-42) + 3\cdot32 = -48+12+96 = 108-48 = \underline{\underline{60}}$$

N 5.3(1)

$$A = \begin{vmatrix}1&2&3\\4&0&6\\7&8&9\end{vmatrix} \qquad A^{-1} - ? \qquad A^{-1} = A_\star^T / \det A$$

$$\det A = 60$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&6\\8&9\end{vmatrix} = 0-6\cdot8 = -48$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix} = -(4\cdot9-6\cdot7) = -36+42 = 6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4&0\\7&8\end{vmatrix} = 4\cdot8-0 = 32$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3\\8&9\end{vmatrix} = -(2\cdot9-3\cdot8) = -18+24 = 6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\7&9\end{vmatrix} = 9-21 = 12$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\7&8\end{vmatrix} = -(8-14) = 6$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&3\\0&6\end{vmatrix} = 12$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&3\\4&6\end{vmatrix} = -(6-12) = 6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\4&0\end{vmatrix} = -8$$

$$A_\star = \begin{vmatrix}-48&6&32\\6&12&6\\12&6&-8\end{vmatrix} \qquad A_\star^T = \begin{vmatrix}-48&6&12\\6&12&6\\32&6&-8\end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = A_\star^T / 60 = \begin{vmatrix}-0{,}8&0{,}1&0{,}2\\0{,}1&0{,}2&0{,}1\\0{,}53&0{,}1&-0{,}13\end{vmatrix}$$

№5.4. Вычислите скалярное произведение двух векторов $(1, 5)$ и $(2, 8)$

$1 \cdot 2 + 5 \cdot 8 = 2 + 40 = 42$

№5.5. Вычислите смешанное произведение трех векторов: $\bar{a} = (1, 5, 0)$, $\bar{b} = (2, 8, 7)$ и $\bar{c} = (7, 1.5, 3)$

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \\ 7 & 1.5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(8 \cdot 3 - 7 \cdot 1{,}5) + 5(7 \cdot 7 - 2 \cdot 3) + 0 =$$

$$= 24 - 10{,}5 + 5(49 - 6) = 13{,}5 + 5 \cdot 43 = 13{,}5 + 215 = 228{,}5$$