№1. Найти собственные векторы и собственные значения для линейного оператора заданного матрицей

$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Собственные значения:

$\det(A - \lambda I) = 0$

$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-1-\lambda)(6-\lambda) + 6 \cdot 2 = 0$

$-6 + \lambda - 6\lambda + \lambda^2 + 12 = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$

$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 3 \Rightarrow$ т.о. нет действительных собственных векторов.

№2. Дан оператор поворота на 180 градусов $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Показать, что любой вектор является для него собств.

$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (-1-\lambda)^2 = 0$

$-1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ — собств. зн.

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -x_1 = \lambda x_1 \\ -x_2 = \lambda x_2 \end{matrix}$

Т.к. под x_1 и x_2 мы можем подставить любые значения, то любой из векторов будет собств. для оп. A

№3. Пусть линейный оператор задан матрицей

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Установить, является ли вектор $x = (1, 1)$ для него собств.

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = 0$

$3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 2)^2 = 0$

$\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda x_1 \\ -x_1 + 3x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \overset{2}{1 + 1 = 2 \cdot 1} \\ \underset{2}{-1 + 3 \cdot 1 = 2 \cdot 1} \end{cases}$ верно

Таким образом вектор $x = (1, 1)$ является собственным вектором для линейного оператора A.

№4. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Установить, является ли вектор $x = (3, -3, -4)$ собственным вектором этого линейного оператора

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot (-3) = 3\lambda \\ 3 \cdot 3 = -3\lambda \\ 3 \cdot (-4) = -4\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 = 3\lambda \\ 9 = -3\lambda \\ -12 = -4\lambda \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -9/3 \\ \lambda = 9/-3 \\ \lambda = -12/-4 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = -3 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Вектор X не явл-ся собств. для оператора A