Второе задание по вычислительной математике. Численные методы решения гиперолических систем уравнений. Уравнение переноса.

выполнила Кондрашина Анна, 7111 группа. Вариант 7

Постановка задачи:

Рассматривается система линейных гиперболических уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{b}(\mathbf{x})$$

$$0 < x < 1$$

$$0 < t < 1$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{47}{8} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{11}{4} \\ -\frac{41}{8} & \frac{19}{2} & -\frac{37}{8} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Необходимо построить численное решение задачи при помощи схемы П. Ларкса и полностью симметричной разностной схемы. Для каждой схемы выписать ПДП и определить, диссипативная или дисперсионная ошибка преобладает. Определить, монотонна ли схема, оценить апостериорный порядок сходимости каждой схемы.

Проанализируем систему

Перед тем, как приступать к построению численных решений нашей системы, преобразуем ее. Вычислим собственные числа матрицы и собственные вектора:

$$\lambda_1 = -5, e_1 = (1, \frac{1}{2}, 1)^{\mathbf{T}}$$
$$\lambda_2 = 2, e_2 = (-5, -2, 1)^{\mathbf{T}}$$
$$\lambda_3 = -1, e_3 = (3, 2, 1)^{\mathbf{T}}$$

Теперь мы можем перейти к инвариантам Римана:

$$R_1 = u + \frac{1}{2} + r$$
$$R_2 = -5u - 2v + r$$
$$R_3 = 3u + 2v + r$$

Тогда система примет вид:

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} - 5\frac{\partial R_1}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial R_2}{\partial t} + 2\frac{\partial R_2}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial R_3}{\partial t} - 1\frac{\partial R_3}{\partial x} = 0$$

А начальные условия станут:

$$\mathbf{R}(0, x) = \begin{pmatrix} sin(\pi x) + \frac{1}{2}cos(\pi x) + 1 + sin(\pi x) \\ -5sin(\pi x) - 2cos(\pi x) + 1 + sin(\pi x) \\ 3sin(\pi x) + 2cos(\pi x) + 1 + sin(\pi x) \end{pmatrix}$$

Таким образом, наша система уравнений распалась на три независимых компанента. ЧТобы найти решения исходной функции, найдем численное решение инвариантов Римана, и уже по ним найдем решения системы.

Постановка граничных условий

Для того чтобы использовать разностные схемы поиска инвариантов Римана, нам необходимо знать значение функции на границах расчетной области (при x=0 и x=1). Для этого используем характеристики. Мы исследуем однородную систему, поэтому инварианты Римана будут постояными вдоль одного из семейств характеристик(а именно, вдоль характеристики $x + \lambda t = const$). Но только значений инвариантов, приносимых характеристиками, недостаточно, поэтому необхоимо задать еще и граничные условия. К левой границе (x = 0) характеристиками от начальных условий приходят две характеристики, поэтому необходимо задать только одно дополнительное граничное условие. К правой границе от начальных условий значения переносятся только одной характеристикой, поэтому необходимо задать два граничных условия. Положим:

$$u_3(t, 0) = cos(\pi t)$$
$$u_3(t, 1) = cos(\pi t)$$
$$u_2(t, 1) = cos(\pi(1 + t))$$

Метод Лакса

Для начала запришем, собственно, схему(схема приведена для модельного уравнения):

$$\frac{u_m^{n+1} - 0.5(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n)}{\tau} + a\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{2h} = 0$$

Первое дифференциальное приблежение (ПДП) для этой схемы будет иметь вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = (\frac{h^2}{2\tau} - \frac{\tau a^2}{2})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^2)$$

Коэффициент схемной вязкости можно переписать как:

$$\gamma = (\frac{h^2}{2\tau} - \frac{\tau\lambda^2}{2}) = \frac{h^2}{2\tau}(1 - \sigma^2)$$

Откуда видно, что:

1) Схема обладает вторым порядком апроксимации по координате, первым по времени;

2) Схема становится недиссипативной, при числе куранта равном единицы;

3) Схема не чувствительна к направлению потока;

4) При числе Куранта, меньшем единицы, схемная вязкость оказывается стабилизирующее воздействие, то есть схема устойчива при числе Куранта, меньшем еденицы;

Подействуем на ПДП преобразованием Фурье, получим:

$$\widetilde{u_t} + a(-i\omega)\widetilde{u_x} = \tilde{u}(\frac{ah^2}{\tau} - \frac{\tau a^2}{2})$$

Откуда можно сделать вывод, что в схеме преобладает диссипативная погрешеность.

Как уже анее отмечалось, схема иммет второй порядок апроксимации по координате и первый по времени, а значит, согласно теореме Годунова, не является монотонной.

Теперь построим решения, используя разностную схему Лакса

In [5]:

```
from PIL import Image
im1 = Image.open('FirstU.png')
im2 = Image.open('FirstV.png')
im3 = Image.open('FirstR.png')
```

In [6]:

```
im1
```

Out[6]:

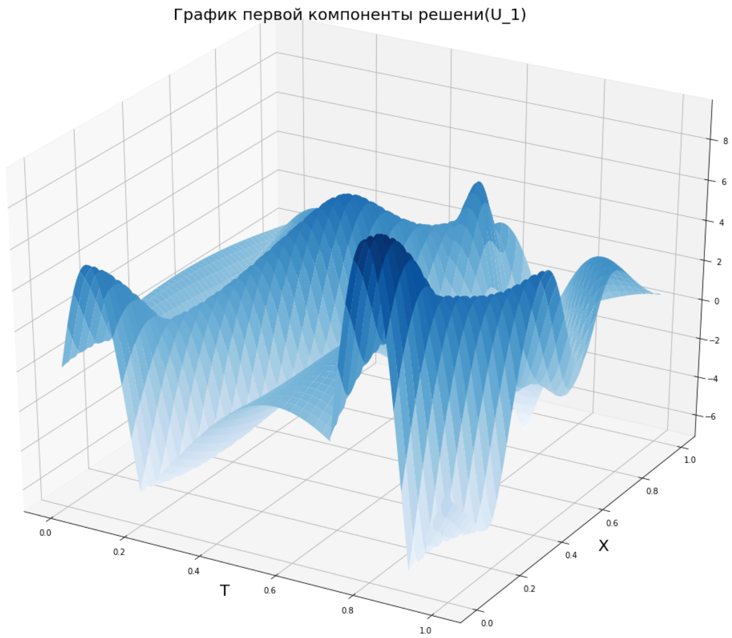


График первой компоненты решени(U_1)
T
X
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−6
−4
−2
0
2
4
6
8

In [7]:

```
im2
```

Out[7]:

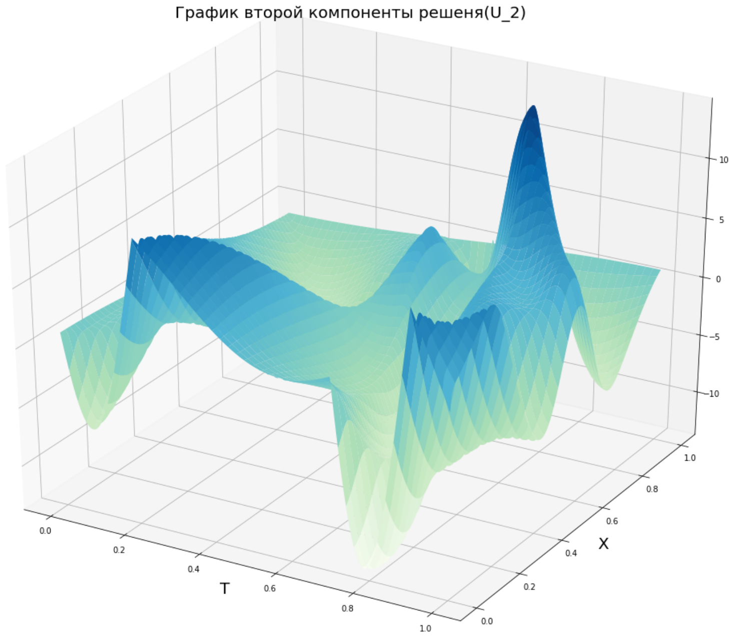


График второй компоненты решеня(U_2)
T
X
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
10
5
0
−5
−10

In [8]:

```
im3
```

Out[8]:

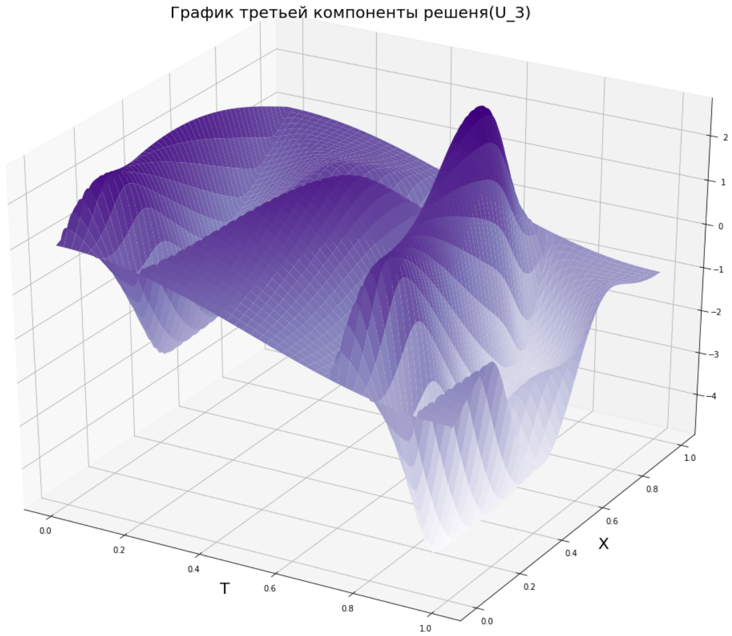


График третьей компоненты решеня(U_3)
T
X
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
2
1
0
−1
−2
−3
−4

Полностью симметричная разностная схема (схема бегущего счетчика)

Как и для схемы выше, все обозначения будем приводить для модельного уравнения. Схема будет иметь вид:

$$\frac{(u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}) - (u_{m+1}^{n} + u_m^{n})}{2\tau} + a\frac{(u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^{n}) + (u_m^{n+1} - u_m^{n})}{2h} = 0$$

Запишем ПДП(П) для этой схемы:

$$u'_t + au'_x = u'''_{xxx}\frac{a^3}{6}(\tau^2 + h^2)$$

Из ПДП видно, что:

1) Схема имеет второй порядок аппроксимации по времени и по координате;

2) Схема безусловно устойчива;

3) Преобладает дисперсионная погрешность;

По теореме Годунова, не существует линейных монотонных схем, порядком апроксимации выше первого, а это значит, что схема бегущего счетчика не будет монотонной.

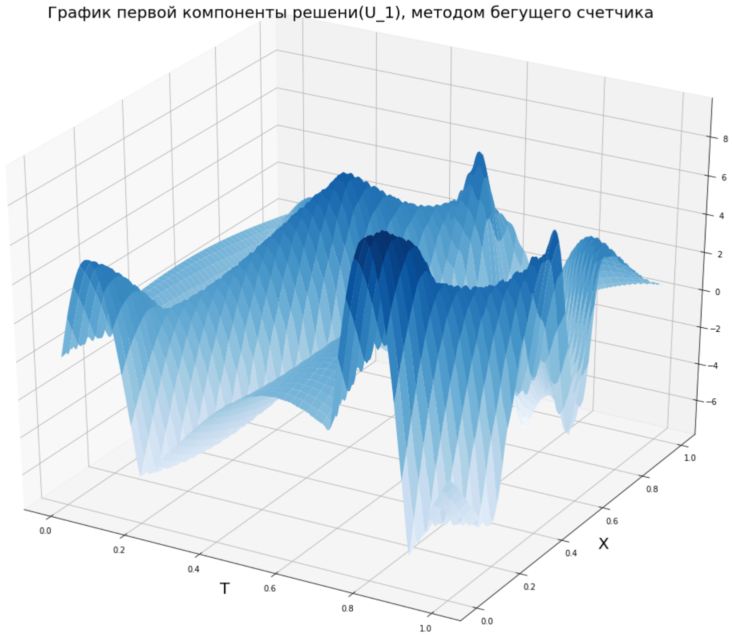
In [9]:

```
im1 = Image.open('SecondU.png')
im2 = Image.open('SecondV.png')
im3 = Image.open('SecondR.png')
```

In [10]:

```
im1
```

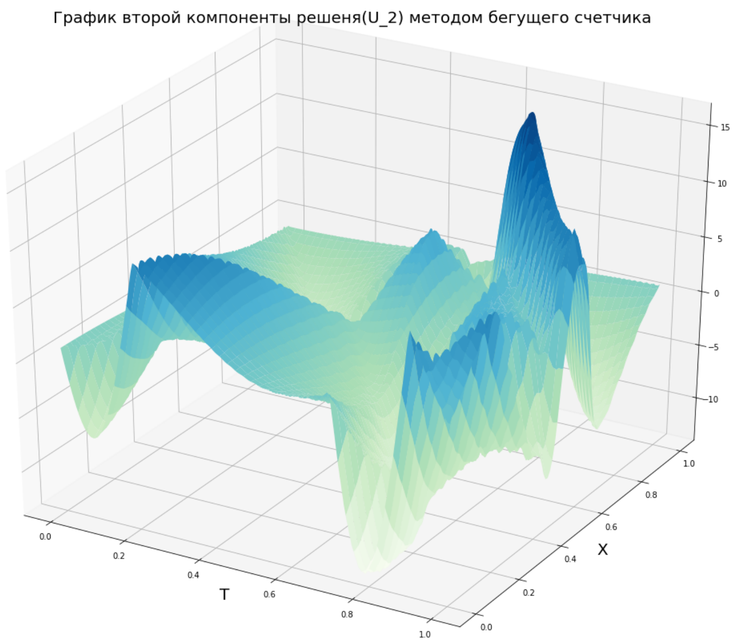
Out[10]:



In [11]:

```
im2
```

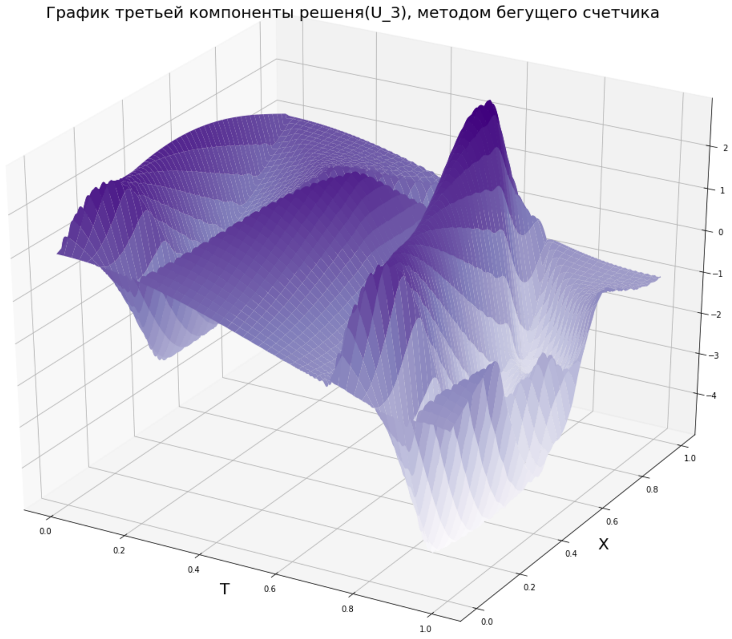
Out[11]:



In [12]:

```
im3
```

Out[12]:



Оценка апостериорной погрешности

Для оценки апостериорной погрешности, нам нужно знать точное решение. Прмим в качестве точного решения решение, вычисленное с помощью характеристики. В качестве нормы возьмем максимум различия различия между точным решением и численым. Кроме того, построим график зависимости логорифма ошибки от логарифма длины шага, и по его наклону вычислим апостериорный порядок сходимости.

Для схемы Лакса

Апостериорный порядок сходимости первой компоненты решения:

$$O(h^{1,925} + \tau^{2,1566})$$

Апостериорный порядок сходимости второй компоненты решения:

$$O(h^{2,13} + \tau^{2,47})$$

Апостериорный порядок сходимости третьей компоненты решения:

$$O(h^{1,586} + \tau^{2,0602})$$

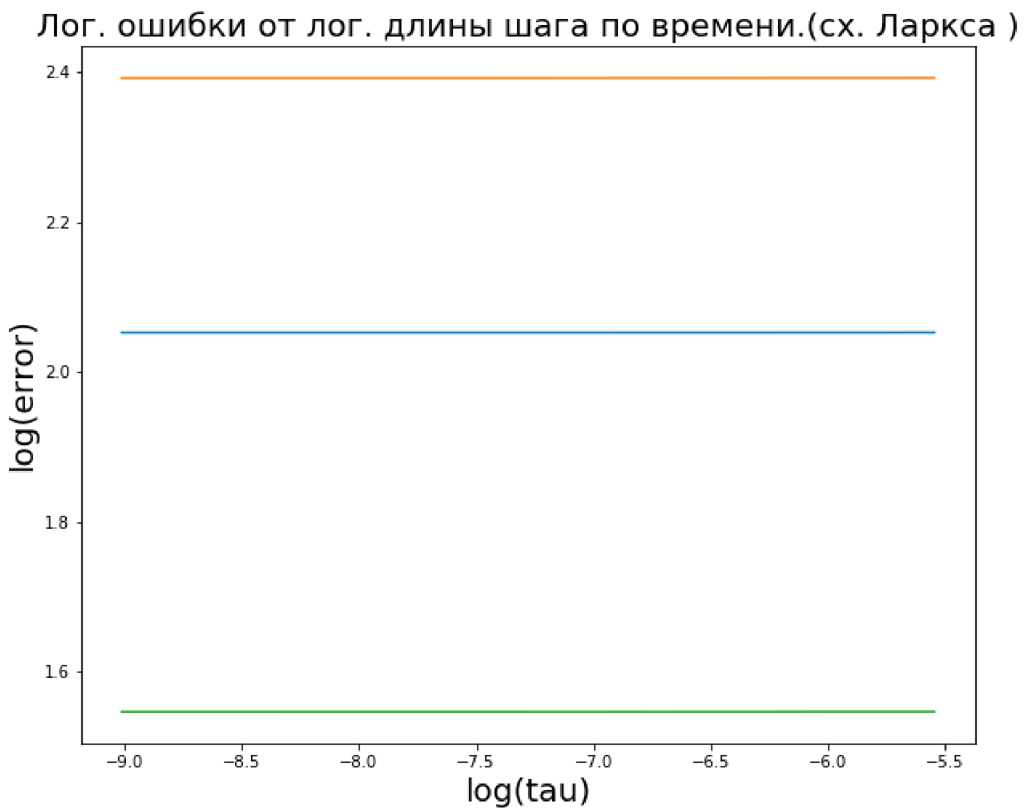
In [32]:

```
im1t = Image.open('errs1t.png')
im1x = Image.open('errs1x.png')
```

In [33]:

```
im1t
```

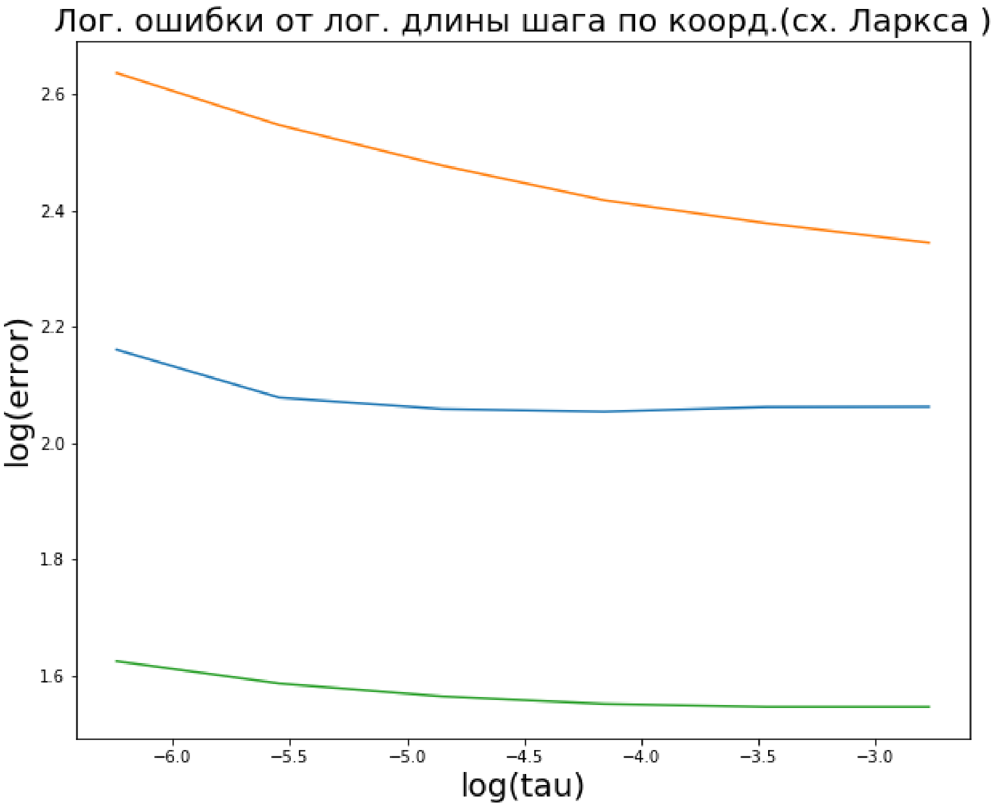
Out[33]:



In [34]:

```
im1x
```

Out[34]:



Для метода бегущего счетчика

Апостериорный порядок сходимости первой компоненты решения:

$$O(h^{1,925} + \tau^{2,1566})$$

Апостериорный порядок сходимости второй компоненты решения:

$$O(h^{2,13} + \tau^{2,47})$$

Апостериорный порядок сходимости третьей компоненты решения:

$$O(h^{1,586} + \tau^{2,0602})$$

Для убедительности приведем график:

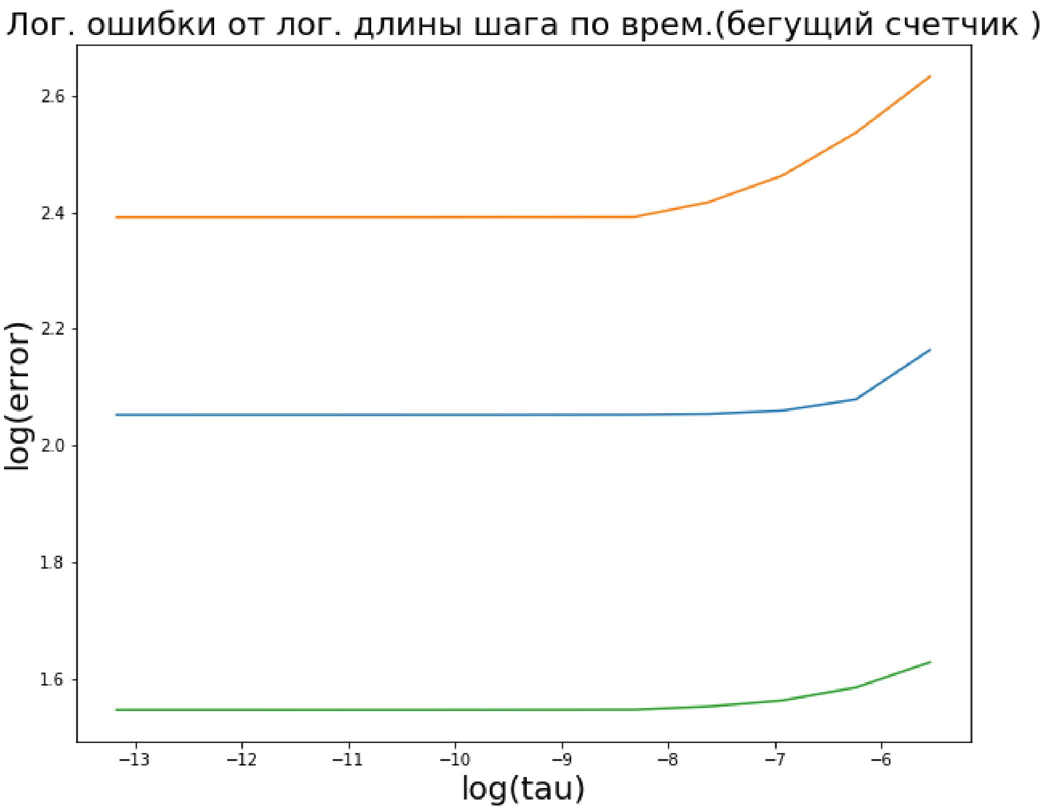
In [26]:

```
im2t = Image.open('errs2t.png')
im2x = Image.open('errs2x.png')
```

In [27]:

```
im2t
```

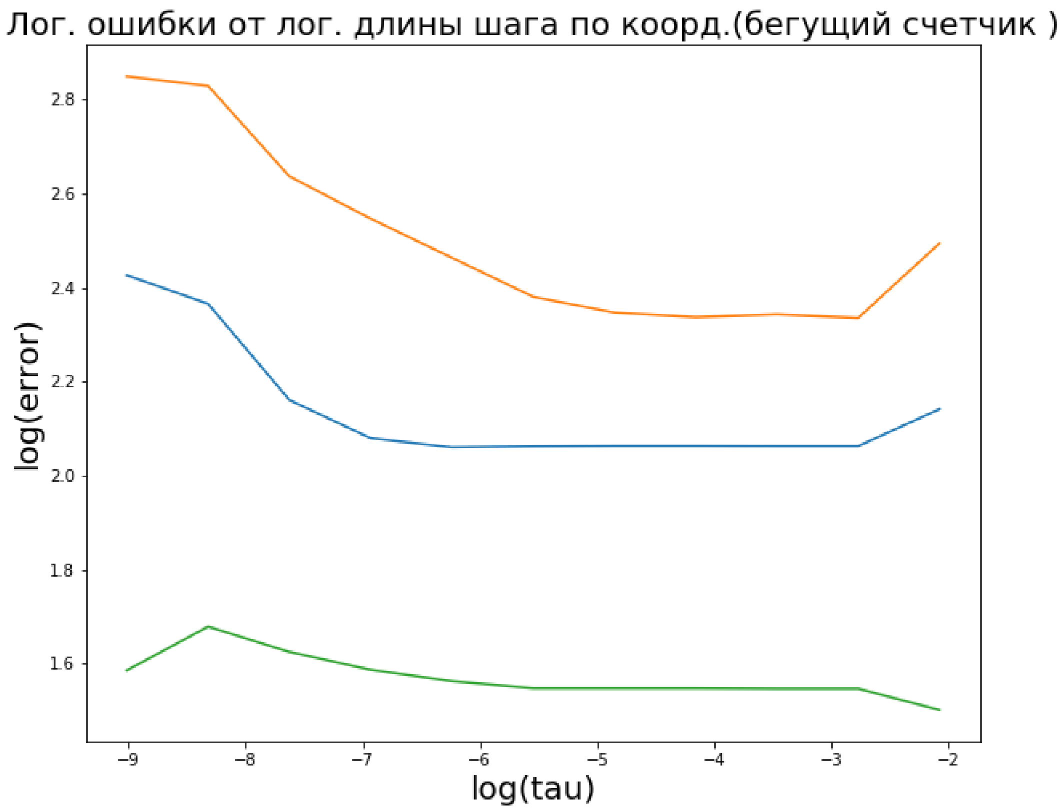
Out[27]:



In [28]:

```
im2x
```

Out[28]:



Результаты и выводы

В ходе работы было исследовано две схемы решений уравнений гиперболического типа: схема Лакса и схема бегущего счетчика. Сравнение производилось по следующим признакам: априорный порядок сходимости, апостериорный порядок сходимости, монотонность и преобладание диссипативноной или дисперсионной ошибки. Результаты представим в таблице:

In [35]:

```
res = Image.open('result.png')
res
```

Out[35]:

Результаты сравнения двух разностных схем		
Критерий	Схема Лакса	Схема бегущего счетчика
Априорный порядок сх. по времени	1	2
Априорный порядок сх. по коорд.	2	2
Апостериорный порядок сх. по врем.	2,082	2,0602
	2,586	2,47
	1,595	1,566
	1,978	1,925
	2,09	2,13
Апостериорный порядок сх. по коорд.	1,473	1,478
Монотонность	не монотонна	не монотонна
Ошибка	диссипативная	дисперсионная