

Домашнее задание по исследованию жестких систем ОДУ. Вариант 13.5

Работу выполнила Кондрашина Анна, 7111

Постановка задачи:

Рассмотрим жесткую систему ОДУ, которая описывает изменение численность некоторой популяции двух видов и эволюцию некого генетического признака α (экогенетическая модель):

$$\dot{x} = x \cdot \left(1 - 0.5x - \frac{2}{7\alpha^2} \cdot y\right)$$

$$\dot{y} = y \cdot (2 \cdot \alpha - 3.5 \cdot \alpha^2 \cdot x - 0.5 \cdot y)$$

$$\dot{\alpha} = \epsilon(2 - 7 \cdot \alpha x)$$

Параметр $\epsilon \leq 0.01$, что означает, что генетический признак меняется незначительно. Начальные условия:

$$0 < x(0) < 1$$

$$y(0) = 1.7$$

$$\alpha(0) = 1$$

Конечное время интегрирования $T_k = 3000$ Необходимо исследовать систему, получить численные решения.

Проанализируем систему:

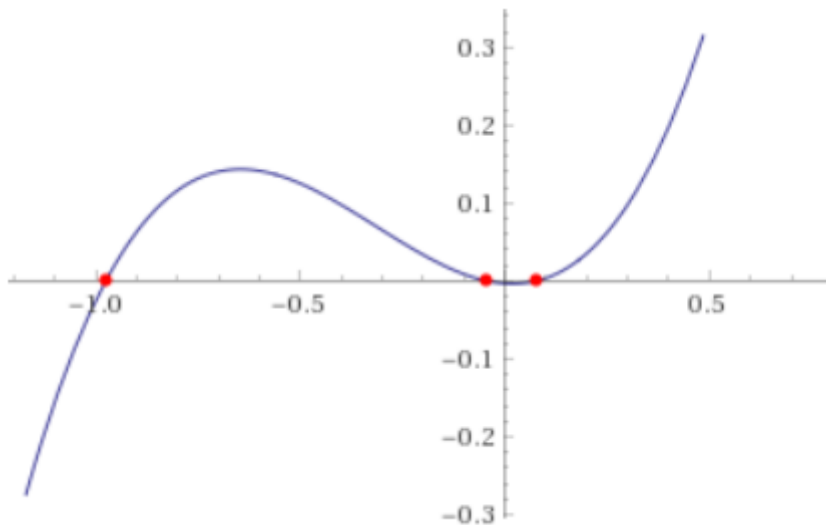
Система будет иметь два положения равновесия: $\left(\frac{2}{5}; \frac{10}{7}; \frac{5}{7}\right)$ и $\left(2; 0; \frac{1}{7}\right)$. Линеаризуем систему и найдем собственные числа. Для наглядности покажем, как будут располагаться собственные числа на комплексной плоскости.

Положение равновесия, задающееся координатами $\left(\frac{2}{5}; \frac{10}{7}; \frac{5}{7}\right)$, будет иметь следующие собственные числа (см. ниже). Видно, что все они действительны, два из них отрицательны, а одно положительно. То есть это положение равновесия можно классифицировать как седло-фокус (устойчивый).

In [667]:

```
im = Image.open('первоепр.png')
im
```

Out[667]:

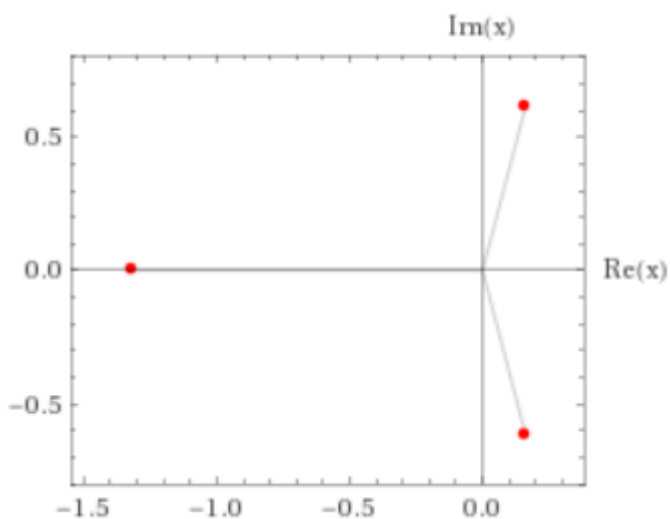


Для второго положения равновесия $(2; 0; \frac{1}{7})$ два собственных числа будут мнимыми, с положительной действительной частью, а третье - отрицательным, действительным. То есть можно классифицировать это положение равновесия, как седло-фокус (неустойчивый). Ниже можно увидеть, как собственные числа располагаются на комплексной плоскости.

In [668]:

```
im1 = Image.open('второепр.png')
im1
```

Out[668]:



методы, используемые для решения задачи

Чтобы посмотреть, как ведет себя система, построим решение следующими численными методами:

Одностадийные:

— CROS - одностадийный метод Розенборка с комплексными коэффициентами. Формула для построения численного решения будет иметь вид:

$$(\mathbf{E} - h \cdot \frac{1+i}{2} \cdot \mathbf{Jac}(t_n, y_n) \cdot \omega = f(t_n + h, h * y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot Re(\omega)$$

Функция устойчивости этого метода будет иметь вид:

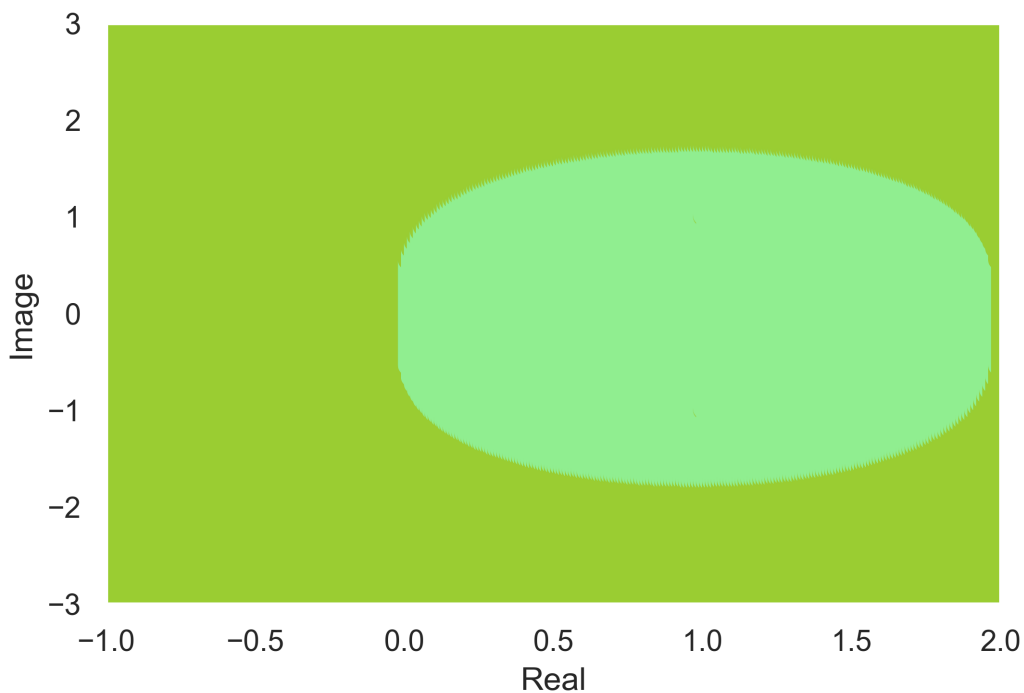
$$R(z) = \frac{1}{1 - z - z^2/2}$$

Построим функцию устойчивости этого метода. Область устойчивости будем изображать темно-зеленым, область неустойчивости - светлозеленым.

In [687]:

```
Image.open('RCROS.png')
```

Out[687]:



Функция устойчивости этого метода содержит левую действительную полуплоскость, а значит метод является А-устойчивым. Кроме того, $|R(z)| \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ как $\frac{1}{z^2}$, поэтому метод будет L2-устойчивым.

— Метод Рунге-Кутты второго порядка аппроксимации с таблицей Бутчера(таблица 1):

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & \frac{1+\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$b = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right)$$

$$c = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Функция устойчивости этого метода будет вычисляться по формуле:

$$R(z) = \frac{\det(E - zA + zeb^T)}{\det(E - zA)}$$

Построим ее. Область устойчивости будем изображать темно-зеленым, область неустойчивости - светлозеленым.

In []:

```
Image.open('RRK2.png')
```

Область устойчивости этого метода содержит левую полуплоскость, а значит, он будет А-устойчив.

— Метод Рунге-Кутты второго порядка аппроксимации с таблицей Бутчера(таблица 2):

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \frac{1-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$b = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right)$$

$$c = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Функция устойчивости этого метода также будет вычисляться по формуле:

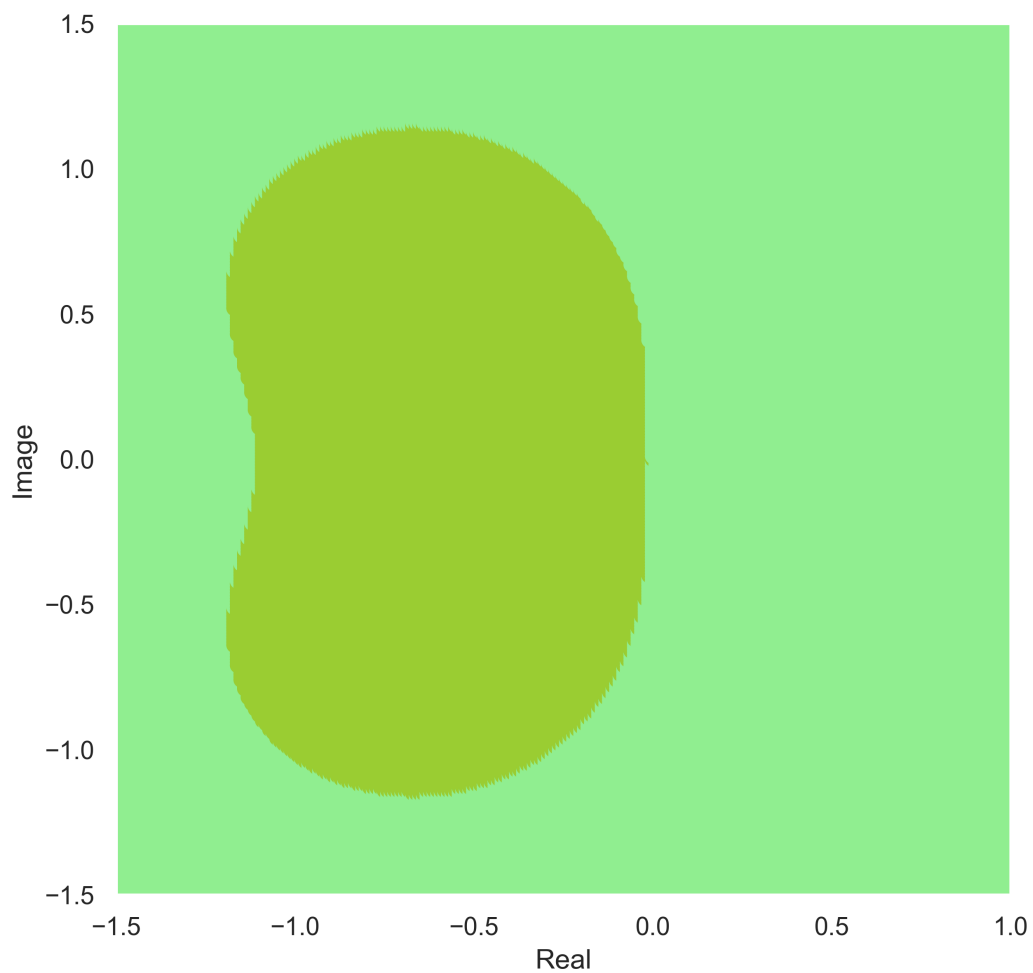
$$R(z) = \frac{\det(E - zA + zeb^T)}{\det(E - zA)}$$

Построим ее. Область устойчивости будем изображать темно-зеленым, область неустойчивости - светлозеленым.

In [693]:

```
Image.open('RRK21.png')
```

Out[693]:



Этот метод не обладает A-устойчивостью(в этом также можно убедиться, построив функцию устойчивости), а значит, и не будет обладать L-устойчивостью

— Метод Рунге-Кутты третьего порядка аппроксимации с таблицей Бутчера(таблица 3):

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{3}}{6} & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{3+\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

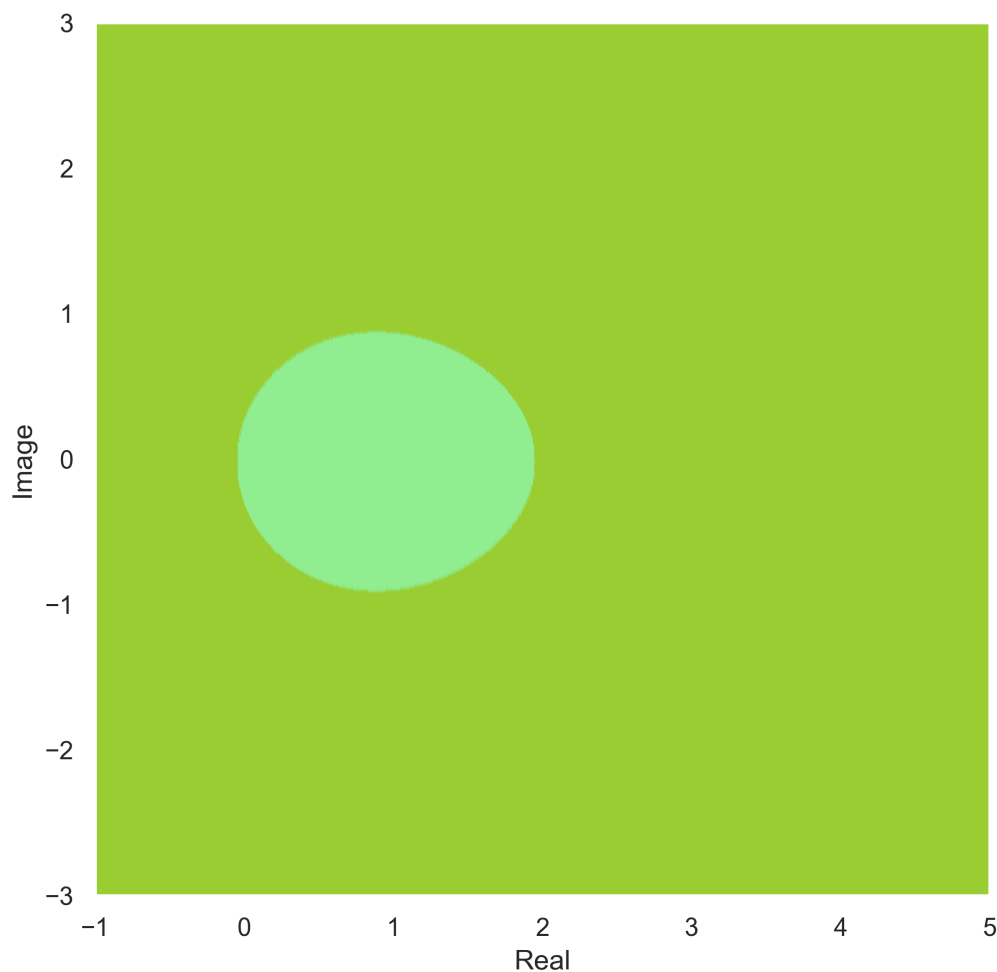
$$c = \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{3}}{6} \\ \frac{3-\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$$

По той же формуле построим функцию устойчивости этого метода

In [694]:

```
Image.open('RRK3.png')
```

Out[694]:



Область устойчивости включает в себя левую полуплоскость, то есть метод А-устойчив.

Многостадийные:

— Формула дифференцирования назад. Решение задается формулой :

$$\frac{3}{2}y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} = hf_{n+1}$$

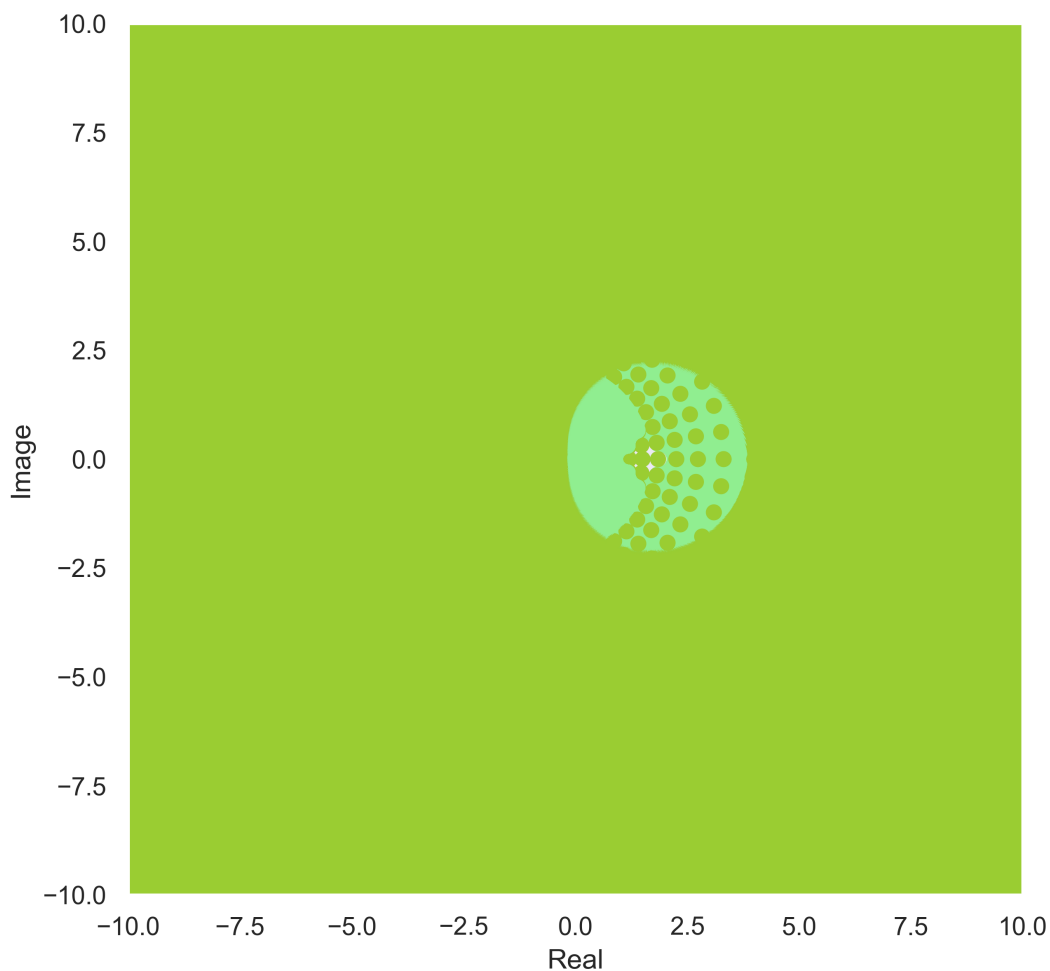
Начальные условия вычислим методом рунге-кутты третьего порядка аппроксимации. Функция

устойчивости этого метода будет иметь вид: $z(R) = \frac{\frac{3}{2}R^2(z) - 2R(z) + \frac{1}{2}}{R^2(z)}$

In [695]:

```
Image.open('RFDN.png')
```

Out[695]:



— Формула дифференцирования назад в представлении Нордсика Этот метод является самостоятельно стартующим, то есть при старте можно положить начальный вектор Нордсика равным, например, $(z_0, 0, 0)$ или $(z_0, hf(z_0), 0)$ и тд, что позволит начать вычисления. Стартуя как метод меньшего порядка аппроксимации, после прохождения "разгонного" участка, метод стремится к максимально возможному для данной задачи порядку аппроксимации.

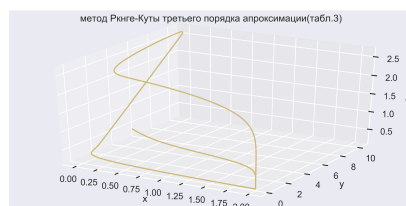
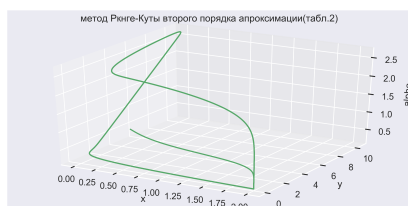
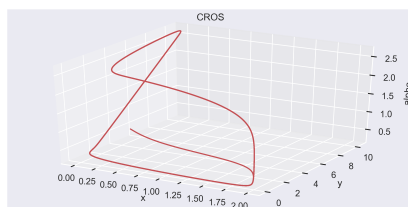
Результаты расчетов

Построим графики полученных численных решений. Для одностадийных методов решения будут иметь следующий вид:

In [702]:

```
Image.open('Mono.png')
```

Out[702]:

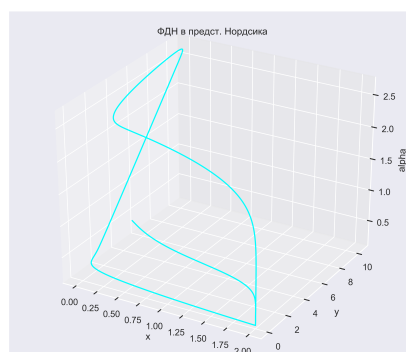
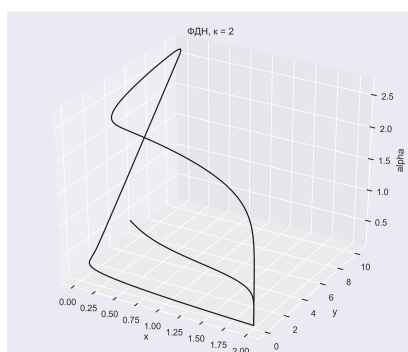


Для многошаговых:

In [703]:

```
Image.open('Poly.png')
```

Out[703]:

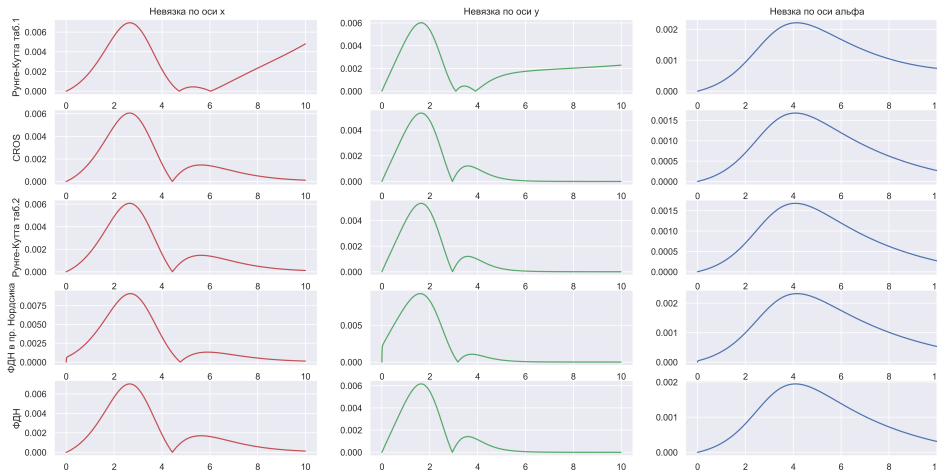


Посчитаем невязки методов для полученных нами решений. Будем считать относительно метода Рунге-Кутты третьего порядка, так как у этого метода наивысший порядок аппроксимации из тех, что спользуются в задаче

In [733]:

```
Image.open('RFDN.png')
```

Out[733]:



Видно, что невязка первого метода становится больше со временем. Это происходит из-за неустойчивости метода.

Обсуждение результатов

В ходе работы была исследована экогенетическая модель некой популяции. Аналитически было показано, что данная система будет два положения равновесия: седло-узел(неустойчивый) и седло-фокус(также неустойчивый). Решения, построенные численными методами, дали схожий результат: периодическое решение, переходящее от одного положения равновесия к другому (релаксационные колебания)