ТЕХНОСФЕРА

Лекция 6
Линейные модели для классификации и регрессии

Николай Анохин

29 октября 2014 г.

План занятия

Постановка задачи

Пусть дан набор объектов $\mathcal{D} = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\},\ \mathbf{x}_i \in \mathcal{X},\ y_i \in \mathcal{Y},\ i \in 1, \ldots, N$, полученный из неизвестной закономерности $y = f(\mathbf{x})$. Необходимо выбрать из семейства параметрических функций

$$H = \{h(\mathbf{x}, \theta) : \mathcal{X} \times \Theta \rightarrow \mathcal{Y}\}$$

такую $h^*(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}, \theta^*)$, которая наиболее точно апроксимирует $f(\mathbf{x})$.

Задачи

- Регрессия: $\mathcal{Y} = [a, b] \subset \mathbb{R}$
- Классификация: $|\mathcal{Y}| < C$

Линейная регрессия

Модель

$$y = h(\mathbf{x}, \theta) + \epsilon,$$

где ϵ – гауссовский шум

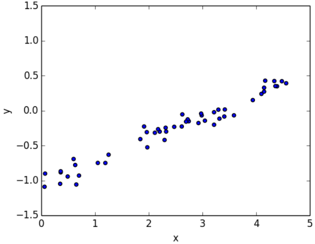
$$p(\epsilon) = \mathcal{N}(\epsilon | 0, \beta^{-1}),$$

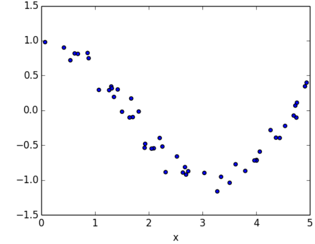
откуда

$$p(y|\mathbf{x}, \theta, \beta) = \mathcal{N}(y | h(\mathbf{x}, \theta), \beta^{-1}).$$

Предсказание

$$E[y|\mathbf{x}] = \int y p(y|\mathbf{x}) dy = h(\mathbf{x}, \theta).$$

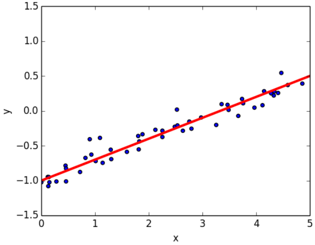




Линейная модель

простейшая модель

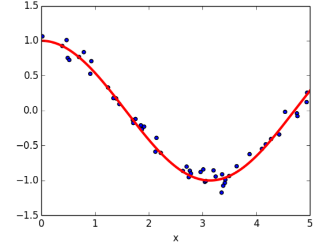
$$h(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = w_0 + w_1 x_1 + \ldots + w_M x_M = \sum_{j=0}^{M} w_j x_j$$



улучшенная модель

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \sum_{j=0}^{M} w_j \phi_j(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \phi(\mathbf{x}),$$

$\phi_j(\mathbf{x})$ – базисные функции, $\phi_0(\mathbf{x}) = 1$



примеры

$$\varphi_j(x) = x^j, \quad \varphi_j(x) = \exp\left\{-\frac{(x-\mu_j)^2}{2s^2}\right\}$$

ML – функция правдоподобия

Дана обучающая выборка $\mathcal{D} = (X, Y)$ из N объектов $(\mathbf{x_n}, y_n)$

Функция правдоподобия

$$\log p(Y|X, \mathbf{w}, \beta) = \sum_{n=1}^{N} \log \mathcal{N}(y|\mathbf{w}^T \phi(\mathbf{x_n}), \beta^{-1}) =$$

$$= \frac{N}{2} \log \beta - \frac{N}{2} \log 2\pi - \frac{\beta}{2} \sum_{n=1}^{N} \{y_n - \mathbf{w}^T \phi(\mathbf{x}_n)\}^2 \to \max_{\mathbf{w}, \beta}$$

Квадратичная функция потерь

$$E_D(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \{y_n - \mathbf{w}^T \phi(\mathbf{x}_n)\}^2 \to \min_{\mathbf{w}}$$

ML – решение

$$\log p(Y|X, \mathbf{w}, \beta) = \frac{N}{2}\log\beta - \frac{N}{2}\log 2\pi - \frac{\beta}{2}\sum_{n=1}^{N}\{y_n - \mathbf{w}^T\phi(\mathbf{x}_n)\}^2 \to \max_{\mathbf{w},\beta}$$

Градиент

$$\beta\sum_{n=1}^{N}\{y_n - \mathbf{w}^T\phi(\mathbf{x}_n)\}\phi(\mathbf{x_n})^T = 0$$

Решение

$$\mathbf{w}_{ML} = \mathbf{\Phi}^\dagger Y = (\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}^T Y, \quad \frac{1}{\beta_{ML}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{y_n - \mathbf{w}_{ML}^T\phi(\mathbf{x}_n)\}^2,$$

где

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_0(\mathbf{x_1}) & \dots & \phi_M(\mathbf{x_1}) \\ \phi_0(\mathbf{x_2}) & \dots & \phi_M(\mathbf{x_2}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \phi_0(\mathbf{x_N}) & \dots & \phi_M(\mathbf{x_N}) \end{pmatrix}$$

Регуляризация

Функция потерь

$$E(\mathbf{w}, \lambda) = E_D(\mathbf{w}) + \lambda E_W(\mathbf{w}),$$

где (как и раньше)

$$E_D(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \{y_n - \mathbf{w}^T \phi(\mathbf{x}_n)\}^2 \to \min_{\mathbf{w}},$$

плюс регуляризация

$$E_W(\mathbf{w}) = E_q(\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{M} |\mathbf{w}_j|^q$$

Зоопарк

- $q = 1$ – Lasso
- $q = 2$ – Ridge (байесовский вывод: $p(\mathbf{w}|\alpha) = \mathcal{N}(\mathbf{w}|0, \alpha^{-1}\mathbf{I})$)
- $E_W(\mathbf{w}) = \rho E_1(\mathbf{w}) + (1 - \rho) E_2(\mathbf{w})$ – Elastic Net

Логистическая регрессия

Ирисы Фишера

Setosa

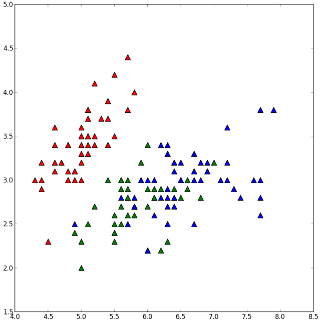
Versicolor

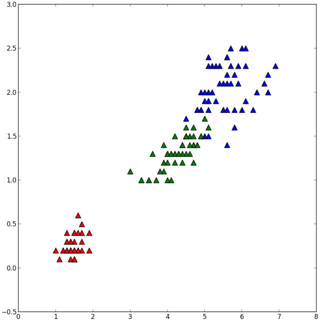
Virginica

Задача

Определить вид ириса на основании длины чашелистика, ширины чашелистика, длины лепестка и ширины лепестка.

Ирисы Фишера





Многомерное нормальное распределение

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}|\mu, \mathbf{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \frac{1}{|\mathbf{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu)\right\}$$

Параметры

D-мерный вектор средних

$$\mu = \int \mathbf{x} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$D \times D$-мерная матрица ковариации

$$\mathbf{\Sigma} = E[(\mathbf{x}-\mu)(\mathbf{x}-\mu)^T]$$

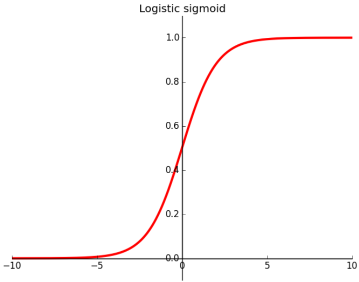
Генеративная модель

Рассматриваем 2 класса

$$p(y_1|x) = \frac{p(x|y_1)p(y_1)}{p(x|y_1)p(y_1) + p(x|y_2)p(y_2)} = \frac{1}{1+e^{-a}} = \sigma(a)$$

$$a = \ln \frac{p(x|y_1)p(y_1)}{p(x|y_2)p(y_2)}$$

$\sigma(a)$ – сигмоид-функция, $a = \ln(\sigma/(1-\sigma))$



Случай нормальных распределений

Пусть

$$p(\mathbf{x}|y_k) = \mathcal{N}(\mathbf{x}|\mu_k, \mathbf{\Sigma}),$$

тогда

$$p(y_1|\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{w}^T\mathbf{x} + w_0),$$

где

$$\mathbf{w} = \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mu_1 - \mu_2)$$

$$w_0 = -\frac{1}{2}\mu_1^T\mathbf{\Sigma}^{-1}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2^T\mathbf{\Sigma}^{-1}\mu_2 + \ln\frac{p(y_1)}{p(y_2)}$$

Как обучить?

Maximum Likelihood

$$p(y_1, \mathbf{x}) = p(y_1)p(\mathbf{x}|y_1) = \pi\mathcal{N}(\mathbf{x}|\mu_1, \mathbf{\Sigma})$$
$$p(y_2, \mathbf{x}) = p(y_2)p(\mathbf{x}|y_2) = (1-\pi)\mathcal{N}(\mathbf{x}|\mu_2, \mathbf{\Sigma})$$

Функция правдоподобия

$$p(Y, X|\pi, \mu_1, \mu_2, \mathbf{\Sigma}) = \prod_{n=1}^{N} \left[\pi\mathcal{N}(\mathbf{x}|\mu_1, \mathbf{\Sigma})\right]^{y_n} \left[(1-\pi)\mathcal{N}(\mathbf{x}|\mu_2, \mathbf{\Sigma})\right]^{1-y_n}$$

Максимизируя $\log p(Y, X|\pi, \mu_1, \mu_2, \mathbf{\Sigma})$, имеем

$$\pi = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y_n = \frac{N_1}{N_1 + N_2},$$

$$\mu_1 = \frac{1}{N_1}\sum_{n=1}^{N} y_n \mathbf{x}_n, \quad \mu_2 = \frac{1}{N_2}\sum_{n=1}^{N}(1-y_n)\mathbf{x}_n,$$

аналогично для $\mathbf{\Sigma}$

Логистическая регрессия

дано

$$\{\phi_n = \phi(\mathbf{x}_n), t_n\},\ t_n \in \{0, 1\},\ n = 1 \dots N$$

модель

$$p(C_1|\phi) = y(\phi) = \sigma(\mathbf{w}^\top \phi)$$

функция правдоподобия

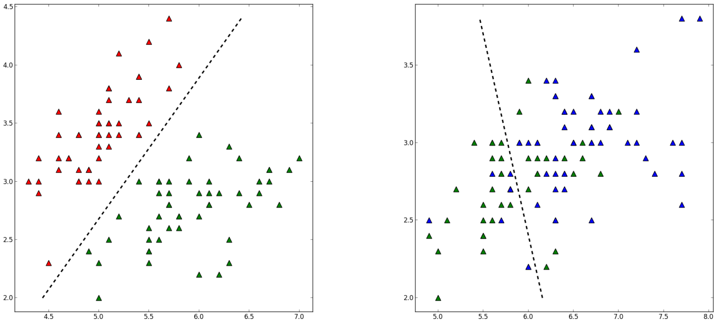
$$l(\mathbf{w}) = \log \left[\prod_{n=1}^{N} p^{t_n}(C_1|\phi_n)(1 - p(C_1|\phi_n))^{1-t_n} \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} t_n \log p(C_1|\phi_n) + (1 - t_n) \log(1 - p(C_1|\phi_n)) = -J_e(\mathbf{w})$$

градиент

$$\nabla J_e(\mathbf{w}) = \sum_{n=1}^{N} (p(C_1|\phi_n) - t_n)\phi_n \to min_{\mathbf{w}}$$

Логистическая регрессия: результаты



Обобщенные линейные модели

Линейные модели

Рассматривается случай 2 классов

Функция принятия решения

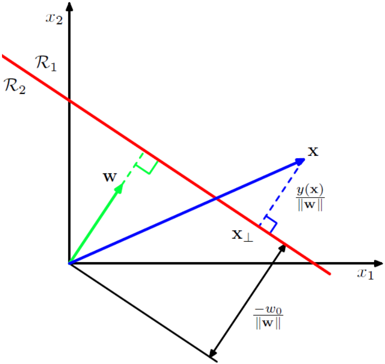
$$y(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^\top \mathbf{x} + w_0$$

Регионы принятия решения

$$R_1 = \{\mathbf{x} : y(\mathbf{x}) > 0\}$$

$$R_2 = \{\mathbf{x} : y(\mathbf{x}) < 0\}$$

Задача
найти параметры модели **w**, w_0



Линейные модели: наблюдения

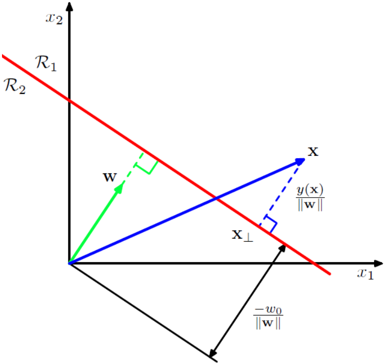
Разделяющая поверхность

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{x} : \mathbf{w}^\top \mathbf{x} + w_0 = 0\}$$

1. $\mathbf{w}$ – нормаль к $\mathcal{D}$
2. $d = -\frac{w_0}{\|\mathbf{w}\|}$ – расстояние от центра координат до $\mathcal{D}$
3. $r(\mathbf{x}) = \frac{y(x)}{\|\mathbf{w}\|}$ – расстояние от $\mathcal{D}$ до $\mathbf{x}$

Положим $x_0 \equiv 1$, получим модель

$$y(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{w}}^\top \tilde{\mathbf{x}}$$



Обобщенные линейные модели

Линейная модель

$$y(\mathbf{x}) = w_0 + \sum w_i x_i$$

Квадратичная модель

$$y(\mathbf{x}) = w_0 + \sum w_i x_i + \sum \sum w_{ij} x_i x_j$$

Обобщенная линейная модель

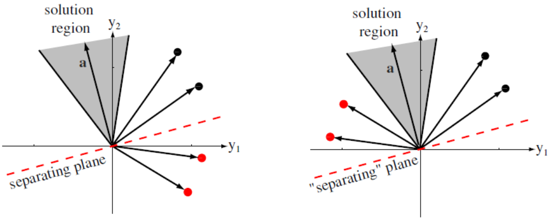
$$g(\mathbf{x}) = \sum a_i \phi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{y}$$

Случай линейно разделимых классов

Обобщенная линейная модель

$$g(\mathbf{x}) = \sum a_i \phi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{y}$$

Дана обучающая выборка $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_N\}$



Идея

Преобразовать объекты второго класса в обратные им и решать задачу оптимизации в области $a^T \mathbf{y}_i > 0, \ \forall i$

Задача оптимизации

Задача

Минимизируем критерий $J(a)$ при условиях $a^T \mathbf{y}_i > 0, \ \forall i$

Пусть $\mathcal{Y}$ – множество неправильно проклассифицированных объектов

- $J_e(a) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} 1$
- $J_p(a) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} -a^\top \mathbf{y}$
- $J_q(a) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} (a^\top \mathbf{y})^2$
- $J_r(a) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} \frac{(a^\top \mathbf{y})^2 - b}{\|\mathbf{y}\|}$

Улучшение: добавить отступы

Градиентный спуск

```
1. initialise a, J(a), η(k), ϵ, k = 0
2.    do k ← k + 1
3.      a ← a − η(k)∇J(a)
4.    until η(k)∇J(a) < ϵ
5. return a
5. end
```

Инкрементальный алгоритм

Рассматриваем $J_r(a) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} \frac{(a^\top \mathbf{y})^2 - b}{\|y\|}$

```
1. initialise a, η(k), k = 0
2.   do k ← k + 1
3.     if y_k is misclassified a ← a − η(k) ((aᵀy_k)² − b)/‖y_k‖² y_k
4.   until no errors left
5. return a
6. end
```

Случай линейно неразделимых классов

- Использовать $\eta(k) \to 0$ при $k \to \infty$
- От системы неравенств перейти к системе линейных уравнений
- Линейное программирование

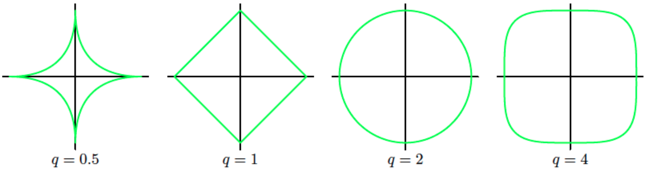
Снова переобучение

Оптимизируем критерий с регуляризацией

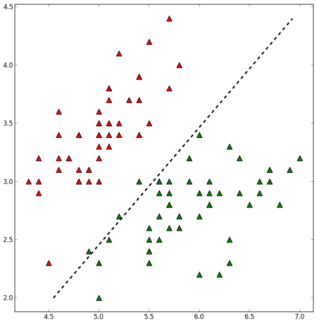
$$J_1(a) = J(a) + \lambda J_R(a)$$

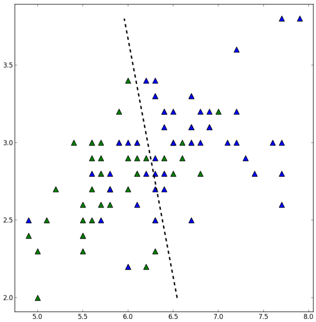
λ – коэффициент регуляризации

$$J_R(a) = \sum |a_j|^q$$



Перцептрон: результаты





(Еще более) обобщенная линеная модель

Базисные функции $\phi_n(\mathbf{x})$

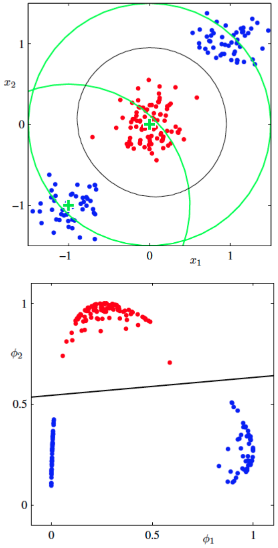
$$\phi_n(\mathbf{x}) = \exp\left[-\frac{(x-\mu_n)^2}{2s^2}\right]$$

Функция активации $f(a)$

$$f(a) = \sigma(a)$$

(Совсем) обобщенная линейная модель

$$y(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{w}^\top \phi(\mathbf{x}))$$



Вопросы