关于相方程的一些碎碎念

海兮吾槊
仰望星空3763

相方程(phase fraction equation)，其实也就是连续方程，通常用于多相系统，以求解各组分的体积分数。

利用数值求解时，通常会遇到越界的情况 $(\alpha_l < 0 \; or \; \alpha_l > 1)$ 。为了应对这个问题，发展了很多有界格式(bounded schemes)。

OpenFOAM中，MULES::correct是基于FCT原理，通过控制通量而防止越界。就拿无源对流方程来说，FCT的思路来源可以这么理解：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi U) = 0$$

将其离散，时间采用Euler，对流项显示处理，有：

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{\Delta t}{V}\left(F^n_{i+\frac{1}{2}} - F^n_{i-\frac{1}{2}}\right)$$

可以看出，下一个时刻的物理量 ϕ_i^{n+1} 的更新，取决于两部分：

上一个时刻的 ϕ_i^n
净通量 $\sum_f F_f$

如果 ϕ_i^n 不越界，那么决定 ϕ_i^{n+1} 是否越界的就是净通量了，FCT works。

今天在CFD-China翻到一篇老帖子

关于interPhaseChangeFoam和boundedness的疑问
www.cfd-china.com/topic/1315/%E5%85%B3%E4%BA...

问为啥在interPhaseChangeFoam里的相方程非要左右减个 $\alpha_l \nabla \cdot U$ ，这对有界性有啥影响？

因为在 $\alpha_l \to 0/1$ 时，作为源项的 $\nabla \cdot U$ 可能不为0，所以会产生越界。

除此之外，此举还可防止在大密度比的两相流中，源项部分的离散处理可能带来的误差。

在interPhaseChangeFoam里，只考虑两相 α_l 和 α_v ，各自的相方程为：

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_l U_l) = \frac{\dot{m}}{\rho_l} \\ \frac{\partial \alpha_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_v U_v) = -\frac{\dot{m}}{\rho_v} \end{cases}$$

如果直接求解任何一个方程，有两个问题：

带相变的问题 $U_l \neq U_v$ ，需要统一速度
密度比 $\frac{\rho_l}{\rho_v} \gg 1$ ，源项的计算会带来很大的误差

解决办法：

混合速度：$U = \alpha_l U_l + \alpha_v U_v$
混合密度： $\rho = \alpha_l \rho_l + \alpha_v \rho_v$

将方程化为：

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_l U) + \nabla \cdot (\alpha_l \alpha_v U_{lv}) = \frac{\dot{m}}{\rho_l} \\ \frac{\partial \alpha_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_v U) - \nabla \cdot (\alpha_l \alpha_v U_{lv}) = -\frac{\dot{m}}{\rho_v} \end{cases}$$

可以看到速度统一了，并且多出来相对速度项 U_{lv} ，将该项视为anti-flux而不是额外的对流项，这就是Weller提出的界面压缩方法。

源项部分还没解决，此时将所左右同时 $\pm \alpha_l \nabla \cdot U$ ，则有：

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_l U) - \alpha_l \nabla \cdot U + \nabla \cdot (\alpha_l \alpha_v U_{lv}) = \frac{\rho}{\rho_l \rho_v} \dot{m} \\ \frac{\partial \alpha_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_v U) - \alpha_v \nabla \cdot U - \nabla \cdot (\alpha_l \alpha_v U_{lv}) = -\frac{\rho}{\rho_l \rho_v} \dot{m} \end{cases}$$

可以发现，两个方程源项部分系数统一了，这也解释了为啥只求一个方程就够了。

关于有界性的问题，采用MULES方法可以将LHS的通量限制，认为该项不会产生越界的结果。那么，会否越界就由源项的离散方式决定了。

理论上说，将源项隐式处理成 $-S_p\phi + S_u$ 。在相方程的矩阵中，若满足：

S_p **增强对角占优**
$S_p \geq S_u$

那肯定就不会产生越界，OF中的各空化模型的处理即是如此。

完