

# rhoSimpleFoam解析

李东岳

## 1. 引言

可压缩求解器大多使用非稳态算法。得益于双曲方程的数学特征，这些方法使用密度作为主要变量，然后通过状态方程求解压力，即密度基求解器。但密度基求解器在应用于不可压缩流的情况下效率低下。一方面的解释是在不可压缩领域，压力与密度的耦合非常弱，另一方面的解释是不可压缩假定下音速趋向于无穷大，导致时间步长过小。rhoSimpleFoam为一个压力基、稳态的、无重力、可压缩、适用于全流速的求解器，主要用于求解普适性可压缩流动，也可用于求解低音速/超音速流动。在处理若可压缩流的情况下，类似的求解器为buoyantSimpleFoam，二者的主要区别在于后者考虑了浮力的作用，主要用于温度引起的浮力驱动流，并且后者只能处理亚音速流动。在应用于超音速的情况下，类似的求解器为rhoCentralFoam，后者使用中心迎风格式可以更尖锐的捕获激波不连续。相对于simpleFoam，rhoSimpleFoam需要处理压力-速度-密度三者的耦合问题。

## 2. 控制方程与算法

### 2.1. 速度方程

rhoSimpleFoam中求解的为下述稳态质量方程、动量方程、以及状态方程：

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (2)$$

$$p = \rho R T. \quad (3)$$

其中方程(1)没有时间项，并无明显的变量，更像是一种限定性条件。因此稳态求解器中不存在对质量方程的求解。同时，方程(1)中的 $\rho \mathbf{U}$ 可用于组建质量通量。同时，rhoSimpleFoam中能量方程在求解能量变量后，对其直接求解即可，不涉及到速度-压力-密度耦合问题，此处略。上述三个方程，可用于迭代求解三个未知量：速度、压力、密度。首先对方程(2)通过高斯定理进行对速度 $\mathbf{U}$ 的离散，组建速度方程有：

$$\int \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) dV = \int \rho \mathbf{U} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S} = \sum_f (\rho^n \mathbf{U}^n \mathbf{U}^{n+1})_f \cdot \mathbf{S}_f = \sum_f F_f^n \mathbf{U}_f^{n+1}, \quad (4)$$

$$\int \nabla p dV = \int p d\mathbf{S} = \sum_f p_f^n \mathbf{S}_f, \quad (5)$$

其中上标 $n$ 表示为当前迭代步（已知），上标 $n+1$ 表示下一个迭代步（待求），下标 $f$ 表示网格单元面上的值， $\mathbf{S}_f$ 表示网格单元的各个面的面矢量， $F_f$ 为质量通量， $\mu$ 为运动粘度（假定粘度为常数）。此处略去粘性项 $\boldsymbol{\tau}$ 的离散且假定粘度为0。整理方程(4)、(5)有：

$$\sum_f F_f^n \mathbf{U}_f^{n+1} = - \sum_f p_f^n \mathbf{S}_f. \quad (6)$$

需要注意的是，方程(2)中的左边第二项（对流项）是非线性的。在求解的过程中，要么选择非线性求解器，要么将对流项线性化。由于非线性求解器非常复杂，因此在OpenFOAM均采用线性化处理。具体的，在对方程(4)中的左边第二项对流项离散中，其中的通量 $F_f^n$ 采用当前已知时间步的速度 $\mathbf{U}^n$ 来计算，同时保留速度 $\mathbf{U}_P^{n+1}$ 为未知量。这种将高阶非线性项降为一阶线性项的过程即为线性化操作。在计算中 $\mathbf{U}_f$ 需要从体心速度进行插值来获得，在此步可以引入各种插值格式。假设使用中心线性格式：

$$\mathbf{U}_f^{n+1} = \frac{\mathbf{U}_P^{n+1} + \mathbf{U}_N^{n+1}}{2}. \quad (7)$$

$$p_f^n = \frac{p_P^n + p_N^n}{2}. \quad (8)$$

将方程(7)，(8)代入到方程(6)有

$$\sum_f F_f^n \frac{\mathbf{U}_P^{n+1} + \mathbf{U}_N^{n+1}}{2} = - \sum_f \frac{p_P^n + p_N^n}{2} \mathbf{S}_f, \quad (9)$$

$$\sum_f \frac{F_f^n}{2} \mathbf{U}_P^{n+1} = - \sum_f \frac{F_f^n}{2} \mathbf{U}_N^{n+1} - \sum_f \frac{p_P^n + p_N^n}{2} \mathbf{S}_f. \quad (10)$$

将上式简写为

$$A_P^n \mathbf{U}_P^{n+1} + \sum_f A_N^n \mathbf{U}_N^{n+1} = - \frac{1}{V_P} \sum_f \frac{p_P^n + p_N^n}{2} \mathbf{S}_f, \quad (11)$$

其中 $A_P$ ， $A_N$ 分别表示当前网格点与相邻网格点的离散系数：

$$A_P^n = \frac{1}{V_P} \sum_f \frac{F_f^n}{2}, \quad (12)$$

$$A_N^n = \frac{1}{V_P} \frac{F_f^n}{2}, \quad (13)$$

求解方程(11)即可获得速度 $\mathbf{U}^{n+1}$ 。需要注意的是，当前密度、压力为 $\rho^n$ 与 $p^n$ ，二者并未更新。同时，对方程(11)进行转换有：

$$\mathbf{U}_P^{n+1} = \mathbf{HbyA}_P^{n+1} - \frac{1}{A_P^n} \frac{1}{V_P} \sum_f p_f^n \mathbf{S}_f. \quad (14)$$

其中 $\mathbf{HbyA}$ 定义为：

$$\mathbf{HbyA}_P^{n+1} = \frac{- \sum_N A_N^n \mathbf{U}_N^{n+1}}{A_P^n}. \quad (15)$$

参考Rhie & Chow插值，有：

$$\mathbf{U}_f^{n+1} = \mathbf{HbyA}_f^{n+1} - \frac{1}{A_f^n} \left( \frac{1}{V_P} \sum_f p_f^n \mathbf{S}_f \right), \quad (16)$$

$$\mathbf{HbyA}_f^{n+1} = \left( \frac{-\sum_N A_N^n \mathbf{U}_N^{n+1}}{A_P^n} \right)_f. \quad (17)$$

## 2.2. 压力泊松方程

N-S方程求解的关键问题之一在于并没有压力的方程出现。同时，方程(11)求解的速度 $\mathbf{U}_P^{n+1}$ 并不满足连续性方程。在下一个迭代步，速度、密度、以及压力需要满足连续性方程，因此相应的量需要进行修正。对于网格单元 $\mathbf{P}$ 的连续性方程 $\nabla \cdot \rho \mathbf{U} = 0$ 进行离散后的形式为 (Demirdžić et al, 1993)

$$\sum_f (\rho_f^n + \rho'_f) (\mathbf{U}_f^{n+1} + \mathbf{U}'_f) \cdot \mathbf{S}_f = 0. \quad (18)$$

其中 $\rho'_f$ 表示修正密度， $\mathbf{U}'_f$ 表示修正速度。结合状态方程：

$$\rho'_f = \frac{1}{RT} p'_f \quad (19)$$

方程(18)可以写为

$$\sum_f \left( \rho_f^n + \frac{1}{RT} p'_f \right) (\mathbf{U}_f^{n+1} + \mathbf{U}'_f) \cdot \mathbf{S}_f = 0. \quad (20)$$

展开为

$$\sum_f \left( \rho_f^n \mathbf{U}_f^{n+1} + \rho_f^n \mathbf{U}'_f + \frac{1}{RT} p'_f \mathbf{U}_f^{n+1} \right) \cdot \mathbf{S}_f = 0. \quad (21)$$

其中 $p' \mathbf{U}'$ 被省略。考虑方程(14)，有：

$$\mathbf{U}_P^{n+2} = \mathbf{HbyA}_P^{n+2} - \frac{1}{V_P} \frac{1}{A_P^{n+2}} \sum_f p_f^{n+1} \mathbf{S}_f. \quad (22)$$

方程(22)并不能够用来组建单变量压力方程（ $\mathbf{HbyA}^{n+2}$ 与 $A_P^{n+2}$ 未知）。因此在这里引入略去邻点影响的假定（用当前的 $\mathbf{HbyA}^{n+1}$ 代替 $\mathbf{HbyA}^{n+2}$ ），同时，假定密度依赖变量 $A_P$ 不变，有：

$$\mathbf{U}_P^{n+2} = \mathbf{HbyA}_P^{n+1} - \frac{1}{V_P} \frac{1}{A_P^n} \sum_f p_f^{n+1} \mathbf{S}_f. \quad (23)$$

方程(23)与(14)相减有：

$$\mathbf{U}'_P = -\frac{1}{V_P} \frac{1}{A_P^n} \sum_f p'_f \mathbf{S}_f \quad (24)$$

参考Rhie & Chow插值，面上的修正速度为

$$\mathbf{U}'_f = -\frac{1}{V_P} \frac{1}{A_f^n} \left( \sum_f p'_f \mathbf{S}_f \right) \quad (25)$$

将方程(25)、(16)代入到(21)有：

$$\sum_f \left( \rho_f^n \left( \mathbf{HbyA}_f^{n+1} - \frac{1}{V_P} \frac{1}{A_f^n} \left( \sum_f p'_f \mathbf{S}_f \right) \right) - \rho_f^n \frac{1}{V_P} \frac{1}{A_f^n} \left( \sum_f p'_f \mathbf{S}_f \right) + \frac{1}{RT} p'_f \mathbf{U}_f^{n+1} \right) \cdot \mathbf{S}_f$$

引入修正压力：

$$p_f^{n+1} = p_f^n + p'_f \quad (27)$$

整理方程(26)有

$$\sum_f \left( \frac{\rho_f^n}{A_f^n} \left( \frac{1}{V_P} \sum_f p_f^{n+1} \mathbf{S}_f \right) \right) \cdot \mathbf{S}_f = \sum_f \rho_f^n \mathbf{HbyA}_f^{n+1} \cdot \mathbf{S}_f + \sum_f \frac{1}{RT} p'_f \mathbf{U}_f^{n+1} \cdot \mathbf{S}_f \quad (28)$$

其中

$$\frac{1}{RT} = \frac{\gamma}{c^2} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (29)$$

其中 $c$ 为音速。对于马赫数较小的流动， $c$ 趋向于无穷大。 $1/RT$ 可以省略，即：

$$\sum_f \left( \frac{\rho_f^n}{A_f^n} \left( \frac{1}{V_P} \sum_f p_f^{n+1} \mathbf{S}_f \right) \right) \cdot \mathbf{S}_f = \sum_f \rho_f^n \mathbf{HbyA}_f^{n+1} \cdot \mathbf{S}_f \quad (30)$$

有连续形式：

$$\nabla \cdot \left( \frac{\rho^n}{A^n} \nabla p^{n+1} \right) = \nabla \cdot \rho^n \mathbf{HbyA}^{n+1} \quad (31)$$

求解方程(31)有马赫数较小的 $p^{n+1}$ 。对于马赫数较大的流动， $1/RT$ 不能省略，继续将方程(16)代入到(28)的右侧：

$$\begin{aligned} & \sum_f \rho_f^n \mathbf{HbyA}_f^{n+1} \cdot \mathbf{S}_f + \sum_f \frac{1}{RT} p'_f \mathbf{U}_f^{n+1} \cdot \mathbf{S}_f \\ &= \sum_f \rho_f^n \mathbf{HbyA}_f^{n+1} \cdot \mathbf{S}_f + \sum_f \frac{p'_f}{RT} \mathbf{HbyA}_f^{n+1} \cdot \mathbf{S}_f + \sum_f \frac{p'_f}{RT} \left( -\frac{1}{A_f^n} \left( \frac{1}{V_P} \sum_f p'_f \mathbf{S}_f \right) \right) \cdot \mathbf{S}_f \end{aligned}$$

$$\sum_f p_f^{n+1} \mathbf{HbyA}_f^{n+1} \cdot \mathbf{S}_f + \sum_f \frac{p'_f}{RT} \left( \frac{1}{V_P} \left( \frac{1}{A_f^n} \sum_f p'_f \mathbf{S}_f \right) \right) \cdot \mathbf{S}_f$$

$$= \sum_f \frac{1}{RT} \mathbf{H} \mathbf{b} \mathbf{y} \mathbf{A}_f^n \cdot \mathbf{S}_f + \sum_f \rho_f \left( -\frac{1}{A_f^n} \left( \frac{1}{V_P} \sum_f p_f^n \mathbf{S}_f \right) \right) \cdot \mathbf{S}_f$$

结合方程(25)，有

$$\sum_f \rho'_f \left( -\frac{1}{A_f^n} \left( \frac{1}{V_P} \sum_f p_f^n \mathbf{S}_f \right) \right) \cdot \mathbf{S}_f = \sum_f \rho'_f \mathbf{U}'_f \cdot \mathbf{S}_f \quad (33)$$

可见，方程(33)中由于  $\rho'_f \mathbf{U}'_f$  乘积项可以忽略。因此有连续形式：

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{RT} \mathbf{H} \mathbf{b} \mathbf{y} \mathbf{A}^{n+1} p^{n+1} \right) = \nabla \cdot \left( \frac{\rho^n}{A^n} \nabla p^{n+1} \right) \quad (34)$$

在求得  $p^{n+1}$  之后，回代到方程(23)有  $\mathbf{U}^{n+2}$ 。这里的  $\mathbf{U}^{n+2}$  未必满足连续性方程，同时由于方程(23)附加假定，需要再次进行速度压力耦合迭代求解。在迭代过程中，由于压力由  $p^n$  变为  $p^{n+1}$ ，密度需要进行更新来重新计算  $\mathbf{A}_P$  以及  $\mathbf{A}_N$ 。总而言之，可压缩SIMPLE算法中的迭代过程可以表示为下面几个步骤：

1. 依据初始条件，构建速度矩阵，依据当前密度，获得  $\mathbf{A}_P$  以及  $\mathbf{A}_N$ ；
2. 求解方程(11)获得速度  $\mathbf{U}^{n+1}$ ；
3. 通过方程(15)组建  $\mathbf{H} \mathbf{b} \mathbf{y} \mathbf{A}^{n+1}$ ；
4. 近音速条件下，求解方程(34)获得压力  $p^{n+1}$ ，低音速情况下，求解方程(31)获得压力  $p^{n+1}$ ；
5. 通过方程(23)更新速度有  $\mathbf{U}^{n+2}$ ；
6. 通过状态方程更新密度；
7. 回到第一步继续迭代几次；

### 3. 二维叶栅验证算例

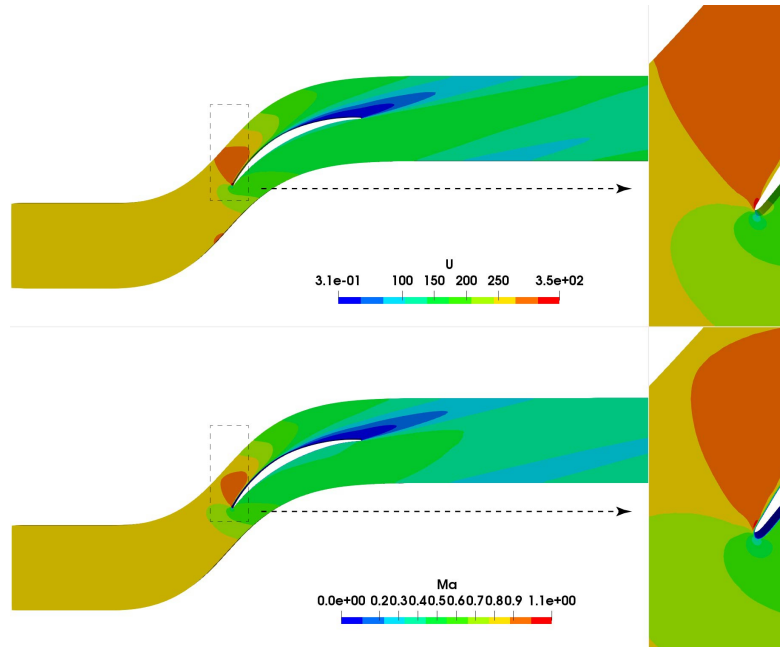
rhoSimpleFoam自带若干算例。在OpenFOAM-7中，自带的算例主要为以下几个：

- `aerofoilNACA0012`：马赫数约为0.6的可压缩流动；
- `squareBend`：弯管内的超音速流动；

上述算例均可在OpenFOAM自带的tutorials里面找到，在此不做过多介绍。本算例与网格为CFD中文网用户上传的算例，算例针对rhoSimpleFoam做了一定的适配。算例网格为CFD中文网用户自行生成的2D纯六面体结构网格。右侧为出口，左侧为进口。具体如下：

- 初始场  $p$ ：内部即均一分布 `uniform 1e5`；注意可压缩流体求解器压力为真实的压力值，不可压缩流体的压力为相对压力值。进口采用总压边界条件 `totalPressure`，出口采用固定平均值 `fixedMean`，压力场构成压力梯度驱动流体流动。壁面零法向梯度；
- 初始场速度  $\mathbf{U}$ ：内部场速度为均一分布：`uniform (82 97 0)`；进口速度给定方向，采用 `pressureDirectedInletVelocity` 边界条件，出口速度给定零法向梯度，壁面无滑移；

- 初始场温度  $T$ ：内部场为 `uniform 288.15`；壁面为零法向梯度；进口采用总温度边界条件 `totalTemperature`，出口采用零法向梯度，壁面零法向梯度；
- 湍流相关变量  $k$ ,  $\omega$ ,  $\nu_t$  采用常见的进口固定值，出口零梯度，壁面函数边界条件；
- 需要注意的本算例网格针对叶栅上下面采用的 `cyclicAMI`，并制定交界面上下平移对接，即网格边界中的关键词 `translational` 的含义，其中 `separationVector` 表示位移矢量。可以看出本算例网格已经经过精细调节，不存在网格导致发散问题；



constant文件夹的物性主要设置如下：

- 湍流模型 `turbulenceProperties` 字典文件选择雷诺平均，即 `RAS`，下方为指定的 `kOmega` 模型的模型系数

```
RAS
{
    RASModel kOmega;
    turbulence on;
    printCoeffs on;
    kOmegaSSTCoeffs
    {
        alphaK1 0.85;
        alphaK2 1;
        alphaOmega1 0.5;
        alphaOmega2 0.856;
        beta1 0.075;
        beta2 0.0828;
        betaStar 0.09;
        gamma1 0.555556;
        gamma2 0.44;
        a1 0.31;
        b1 1;
        c1 10;
        F3 false;
    }
}
```

- 热动力库进行空气的标准指定，粘度项通过Sutherland模型指定：

```
mixture
{
    specie
    {
        nMoles 1;
        molWeight 28.9;
    }
    thermodynamics
    {
        Cp 1004;
        Hf 0;
    }
    transport
    {
        As 1.512e-006;
        Ts 120;
    }
}
```

详细设置不便于在此处一一说明，可下载算例文件查看。用户可以直接输入

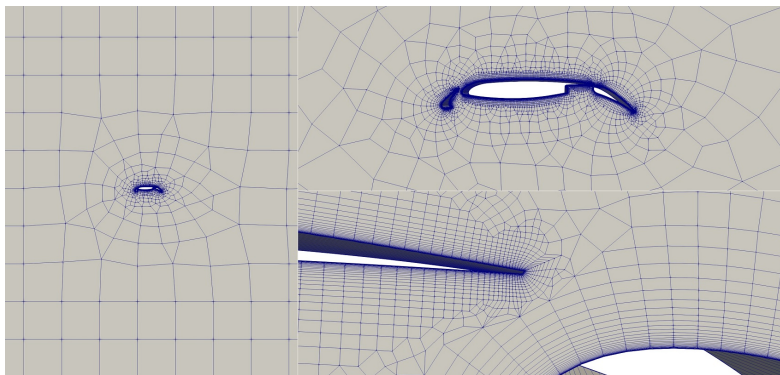
```
rhoSimpleFoam
```

进行求解。运算结果可参考下图。参考CFD中文网的相关讨论，本算例捕获到了叶片前缘的局部高速，更详细的结果可自行分析，研究湍流模型、壁面函数以及其他模型参数对结果的影响。

[点击下载算例文件](#)

## 4. 三段翼亚音速流动

本算例文件来自于CFD中文网的相关讨论。算例求解三段翼的亚音速流动（ $|\mathbf{U}| = 125 \text{ m/s}$ ）。用户进行设置的时候，遇到了严重的收敛问题。算例constant文件夹的设置参考之前的算例。进口以及边界条件设置如下：



- 初始场  $p$ ：内部即均一分布 `uniform 1e5`；注意可压缩流体求解器压力为真实的压力值，不可压缩流体的压力为相对压力值。进口采用固定值 `fixedValue`，出口采用零梯度 `zeroGradient`，壁面零法向梯度。上下采用 `symmetry` 对称面条件；

- 初始场速度  $U$ ：内部场速度为均一分布： `uniform (125 0 0)`；进口速度固定值 `fixedValue`，出口速度给定零法向梯度，壁面无滑移，上下采用 `symmetry` 对称面条件；
- 初始场温度  $T$ ：内部场为 `uniform 300`；壁面为零法向梯度；进口采用固定值 `fixedValue`，出口采用零法向梯度，壁面零法向梯度；
- 湍流相关变量  $k$ ,  $\omega$ ,  $\nu_t$  采用常见的进口固定值，出口零梯度，壁面函数边界条件；

由于可压缩求解器温度/压力的耦合作用，可压缩算例的边界条件需要细心的调节。同时：算例 `system` 文件夹下的 `fvOptions` 提供一定的稳定性限制。本算例对温度  $T$  进行上下界限制：

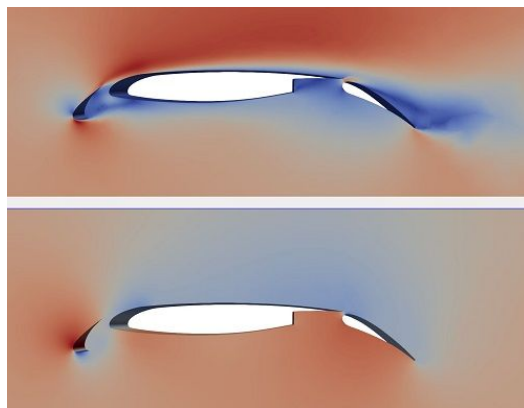
```
limitT
{
    type          limitTemperature;
    min           101;
    max           1000;
    selectionMode all;
}
```

详细设置不便于在此处一一说明，可下载算例文件查看。用户可以直接输入

```
rhoSimpleFoam
```

进行求解。运算结果可参考下图。初步计算表明湍流模型对算例结果的影响较大，用户可尝试使用不同的湍流模型进行计算。

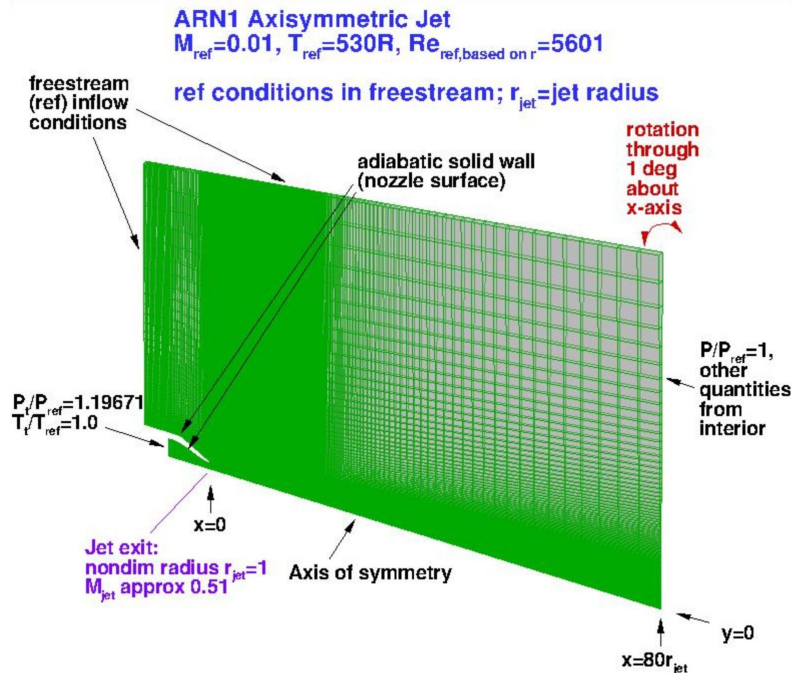
[点击下载算例文件](#)



## 5. 亚音速轴对称射流

本算例文件来自于CFD中文网的相关讨论。算例对标NASA的提供的轴对称亚音速流动。出口流速大概在165m/s。用户进行设置的时候，遇到了1) 稳态瞬态结果对不上，2) 进口速度震荡问题。算例 `constant` 文件夹的设置参考之前的算例。湍流模型采用 `kOmegaSST`。进口以及边界条件设置如下：





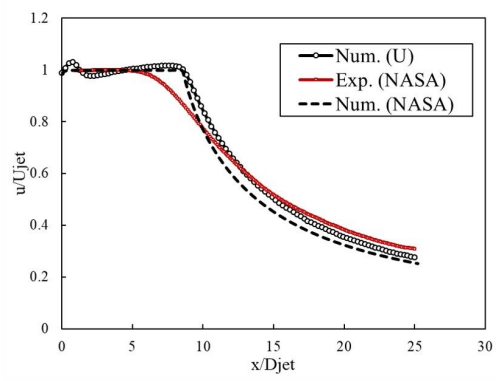
- 初始场  $p$ ：内部即均一分布 `uniform 1e5`；注意可压缩流体求解器压力为真实的压力值，不可压缩流体的压力为相对压力值。进口采用固定值 `totalPressure` 总压边界条件，总压的值为119671，出口采用固定值 `fixedValue`，构成压力驱动流动，其他自由面采用 `freestreamPressure` 自由流边界，轴对称边界采用 `wedge`，壁面采用零法向梯度；
- 初始场速度  $U$ ：内部场速度为均一分布：`uniform (3.4 0 0)`；进口速度采用类似`inletOutlet`的边界条件 `pressureInletOutletVelocity`，出口速度给定零法向梯度，其他自由面采用 `freestreamPressure` 自由流边界，轴对称边界采用 `wedge`，壁面采用无滑移壁面；
- 初始场温度  $T$ ：内部场为 `uniform 274.4`；壁面为零法向梯度；进口采用固定值 `inletOutlet`，出口采用零法向梯度；
- 湍流相关变量  $k$ ,  $\omega$ ,  $\nu_t$  以及热导率  $\alpha$  采用常见的进口固定值，出口零梯度，壁面函数边界条件；

详细设置不便于在此处一一说明，可下载算例文件查看。用户可以直接输入

```
rhoSimpleFoam
```

进行求解。运算结果可参考下图。

[点击下载算例文件](#)



更新历史

2020.06.29增加算例 | 2020.06.02增加算例 | 2020.03.04创立页面

东岳流体 2014 - 2020

勘误、讨论、补充内容请前往[CFD中文网](#)